

UNA APROXIMACIÓN A LA CONSTRUCCIÓN DE LA NOCIÓN DE SIMETRÍA EN EDUCACIÓN INFANTIL

AN APPROACH TO THE CONSTRUCTION OF THE SYMMETRY NOTION IN EARLY CHILDHOOD EDUCATION

Carla Rosell Charles, Yuly Vanegas Muñoz, Joaquín Giménez
Universidad de Lleida, Universidad de Barcelona, (España)
crc8@alumnes.udl.cat, yuly.vanegas@udl.cat, quimgimenez@ub.edu

Resumen

El estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en edades tempranas es actualmente un tema de interés para la investigación en Educación Matemática. El presente trabajo tiene como finalidad identificar la comprensión sobre la noción de simetría que tienen niños de Educación Infantil. Considerando el enfoque de las trayectorias de aprendizaje se diseña una secuencia de tareas en la que se introduce el arte como contexto específico. Se describe la implementación de la experiencia y el análisis posterior. Se observa que los niños pueden identificar algunos ejes de simetría y que esto les permite hacer clasificaciones de figuras. Además, se constata que el camino seguido en la secuencia de tareas puede constituirse en un ejemplo de trayectoria de aprendizaje de la simetría para la educación infantil.

Palabras clave: enseñanza de la geometría, trayectorias de aprendizaje, edades tempranas, simetría

Abstract

Mathematics teaching and learning process at early childhood is currently a topic of interest for research in mathematics education. The present work aims to identify the understanding of symmetry notion of children in early childhood education. Taking into account the approach of learning trajectories, a sequence of tasks is designed in which art is introduced as a specific context. The implementation of the experience and the subsequent analysis is described. It is observed that children can identify some symmetry axes, what allows them to classify figures. Furthermore, it is found that the path followed in the sequence of tasks can be an example of a learning path of symmetry for early childhood education.

Key words: geometry teaching, learning trajectories, early ages, symmetry

■ Introducción

La preocupación por una enseñanza de las matemáticas de calidad desde la Educación Infantil, cada vez toma mayor relevancia. Muestra de ello, es el desarrollo de investigaciones tanto a nivel de los grados, como de máster y doctorado en las que se buscan estudiar elementos que favorezcan un mejor aprendizaje de las matemáticas por parte de niñas y niños o la consideración de aspectos clave en la formación de los futuros docentes que se espera potencien el desarrollo del pensamiento matemático en esta etapa escolar. Por otra parte, también podemos constatar el aumento de publicaciones en las que se describen experiencias didácticas que buscan el desarrollo de los actuales planteamientos curriculares centrados en un enfoque competencial.

Las habilidades de pensamiento espacial y el razonamiento geométrico juegan un papel fundamental en el desarrollo de las habilidades de resolución de problemas, el aprendizaje matemático y la comprensión de lectura para los niños (Van den Heuvel y Buys, 2012). La geometría es fundamental en la educación infantil (Chamorro, 2003), pero su enseñanza normalmente es ignorada o minimizada en la educación infantil, debido a la concepción de los maestros que suponen que los niños no pueden aprender ciertas nociones, por ejemplo, la simetría, por su complejidad y por las dificultades de abstracción, (Clements y Sarama, 2009). Según De Castro y Quiles (2014), la simetría tiene una presencia continua en la naturaleza, el arte, en el entorno. Es una noción que los niños reconocen de manera natural e intuitiva (Eberle, 2014). Lo que la convierte en una herramienta importante para comprender ciertos aspectos de la realidad. Diversos fenómenos del mundo real nos evocan la idea de simetría. Así, la observación del espacio se constituye en un proceso fundamental a ser desarrollado en la Educación Infantil para iniciar y promover la construcción de las ideas matemáticas de los niños (Vanegas y Giménez, 2019).

Promover un aprendizaje significativo de las nociones matemáticas en edades tempranas implica conocer, entre otros aspectos, las maneras como niños y niñas construyen su conocimiento y cómo significan determinado tipo de situaciones. Consideramos como Sarama, Clements, Barret, Hudyma y Vanegas (2021), que mediante la comprensión de las trayectorias de aprendizaje es posible mejorar las estrategias de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y favorecer el desarrollo del pensamiento matemático de los niños. Es necesario y relevante analizar cómo aprenden los niños las nociones geométricas y cómo enfrentan las tareas que implican una actividad geométrica. Así, el objetivo de esta comunicación es describir las trayectorias de aprendizaje seguidas por un grupo de niños de 5-6 años, en una experiencia orientada a la construcción de significados de la noción de simetría, cuando trabajan actividades matemáticas en contextos artísticos.

■ Marco teórico

Brenneman, Stevenson-Boyd y Frede (2009) subrayan que los niños aprenden y desarrollan habilidades matemáticas desde una edad temprana. Según Canals (1997) el conocimiento geométrico no se adquiere recibiendo información, ni consiste en reconocer determinadas formas y saber su nombre correcto, implica desarrollar capacidades muy diversas en cada persona. Supone un largo proceso, que requiere: explorar, comparar, descomponer y recomponer, visualizar y expresar verbalmente e interiorizar. Los alumnos desarrollan ideas matemáticas de forma natural a partir de sus experiencias cotidianas, por ello el docente debe ser consciente de la potencialidad de dichas experiencias para incorporarlas en el aula y apoyar la construcción de las nociones matemáticas de los niños (NCTM, 2000).

El currículum de Educación Infantil en Cataluña (Generalitat de Catalunya, 2016) apunta que la matemática es una herramienta imprescindible para ayudar a los niños a conocer el entorno. Involucrar a los niños y niñas en actividades que implican cuantificar, medir, localizar hacer predicciones, comprobaciones y generalizaciones les posibilita el avance del simple conocimiento físico a la significación de nociones y llegar a la abstracción. Para entender el mundo es necesario desarrollar un buen conocimiento del espacio y las formas. Situarse en el espacio resulta imprescindible para construir el conocimiento geométrico, así como conocer determinadas figuras y sus características. De acuerdo con el NCTM (2000) la geometría es un tópico de las matemáticas que permite el

desarrollo natural de las habilidades de razonamiento y justificación en los estudiantes, lo que es fundamental en la estructuración de su pensamiento matemático. Según Canals (1997) hay tres nociones que es primordial abordar con los niños desde las primeras edades: la posición, las formas y los cambios de posición y forma.

La simetría es una parte fundamental de la geometría, la naturaleza y de las formas. Se relaciona con la creación de patrones que nos ayudan a organizar nuestro mundo conceptual (Knuchel, 2004). Abordar la simetría desde edades tempranas ofrece oportunidades para conectar las matemáticas con el mundo real. Además, tal y como se ha mostrado en estudios como el desarrollado por Jones (2002) el reconocimiento y comprensión de la simetría ayuda a los estudiantes a “simplificar” informaciones complejas, ya que las figuras simétricas son identificadas más rápidamente, discriminadas con precisión y muchas veces más fácilmente recordadas que las figuras no simétricas. Varias investigaciones muestran que las cuestiones culturales son referentes importantes para la enseñanza y aprendizaje de la simetría (Freudenthal, 1983; Giménez y Vanegas, 2019). Una mirada a los contextos artísticos puede ser un escenario apropiado para estudiar características de los objetos y empezar a reconocer las propiedades de las transformaciones (Giménez y Vanegas, 2019; Antón y Gómez, 2016). Según Fernández y Reyes, (2003; Antón y Gómez, 2016), la expresión artística disfruta de un extraordinario contenido matemático. Por esta razón, las obras artísticas, pueden ser utilizadas como recurso didáctico para la enseñanza de las matemáticas en varios niveles educativos.

Al igual que Clements y Sarama (2009), consideramos que es clave reconocer los caminos que siguen los niños en su aprendizaje de diversas nociones matemáticas. Estos caminos constituyen la base de lo que estos autores denominan trayectorias de aprendizaje (TA). Según Clements y Sarama (2009) la idea teórica de trayectoria de aprendizaje se puede entender cómo un camino hipotético por el que los estudiantes pueden progresar en su aprendizaje de un concepto matemático concreto. El constructo Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (en adelante THA), fue introducido por Simon (1995), como parte de su modelo de ciclo de enseñanza. Según este autor, una THA se construye en torno a tres elementos: a) el objetivo de aprendizaje, b) las tareas matemáticas que se usarán para promover el aprendizaje y c) las hipótesis acerca del proceso de aprendizaje. De esta manera se busca establecer una predicción de cómo los alumnos pueden ir aprendiendo un determinado contenido matemático en función de sus conocimientos y experiencias previas.

Clements y Sarama (2015) afirman que los niños siguen procesos naturales de desarrollo en el aprendizaje de las matemáticas. Estas rutas de desarrollo son la base para las trayectorias de aprendizaje. De forma semejante a lo planteado por Simon (1995), estos autores consideran que las trayectorias de aprendizaje involucran tres componentes esenciales: *una meta matemática; una trayectoria de desarrollo; y, un conjunto de actividades o tareas instructivas propias de los niveles de pensamiento de la trayectoria*. La comprensión de dichas trayectorias puede ayudar a responder cuestiones relevantes de los procesos de enseñanza y aprendizaje: los objetivos que hay que establecer; por dónde empezar; cómo decidir la dirección del siguiente paso; y cómo lograr ese siguiente paso, entre otras. Respecto a las nociones geométricas Clements y Sarama (2015) proponen diferentes trayectorias de aprendizaje, por ejemplo: la trayectoria de aprendizaje para formas y la trayectoria para la composición y descomposición de figuras 2D.

■ Metodología

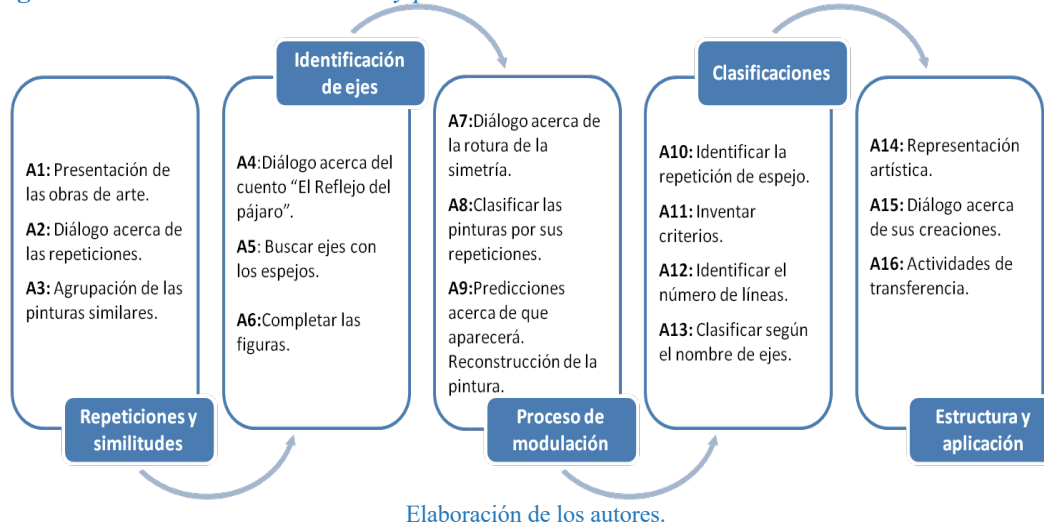
Este estudio se basa en la observación cualitativa como un estudio de caso y en un proceso de investigación basado en el diseño (Confrey, 2006). Los participantes de esta investigación corresponden a dos grupos de 25 estudiantes de 5-6 años de una escuela pública en España. La experiencia escolar desarrollada con los participantes se registró audiovisualmente y posteriormente se digitalizaron y realizaron las transcripciones de cada sesión. Estos registros (textuales y visuales) se constituyen en los datos de nuestro estudio.

Para responder al objetivo, se diseña una secuencia de actividades. Esta secuencia consta de 16 actividades las cuales consideran los componentes de la trayectoria de aprendizaje (Figura 1). En el diseño de las actividades se

considera que la construcción de la noción de simetría en la educación infantil involucra los siguientes procesos (Vanegas, Rosell y Giménez, 2021): identificación de fenómenos de repetición; identificación de líneas de simetría; visualización de elementos para una simetría “rota” y creación de módulos; clasificación según número de ejes y construcción y estructuración de ideas utilizando representaciones personales.


La estructuración de la secuencia contempló cinco etapas: 1) revisión de estudios acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la noción de simetría en los ciclos iniciales de formación; 2) estudio de investigaciones sobre los niveles de progresión en el aprendizaje y las THA y TA; 3) construcción de la versión piloto de la secuencia; y, 4) construcción de la versión final de la secuencia.

Figura 1. Secuencia de actividades y procesos clave en la construcción de la noción de simetría.



Las actividades incluyeron el uso de una amplia variedad de materiales educativos, manipulativos (fotos de obras de arte, espejos, cuentos y recursos digitales, entre otros). Para presentar la propuesta a los alumnos se realizó un juego de cartas con gran formato para dar oportunidades a los niños de ver detalles y manipularlos al usar los espejos. A modo de ejemplo, en la Tabla 1, se presenta la actividad 1 de la secuencia. Junto a la tarea, se presenta su objetivo, descripción y una serie de preguntas que orientan el diálogo durante su implementación.

Tabla 1. Actividades de la secuencia de tareas.


	Objetivo	Tarea	Descripción	Imagen	Dialogo
A ₁	Introducir un conjunto de obras artísticas como provocación de hallazgos de nociones geométricas	Discusión inicial sobre las percepciones y emociones evocadas	Los niños/as hablan sobre las obras artísticas y su significado		¿Por qué has elegido ese cuadro? ¿Qué crees que ha querido plasmar el pintor?

Elaboración de los autores.

Se definieron como unidades de análisis, fragmentos de las sesiones de clase en definidos por diálogos generados entre la maestra y los alumnos o entre alumnos y alumnos. En cada unidad de análisis se identifican las acciones y argumentaciones de los niños que dan cuenta de diferentes aspectos asociados a la noción de simetría. Finalmente,

para sistematizar los datos y realizar el análisis inicial se elabora un cuadro de registro para cada actividad, como el que se muestra en la Figura 2.

Figura 2. Cuadro de registro del análisis inicial.

Actividad 5: Identificar los ejes de simetría		
Imagen	Unidad de análisis	Observaciones
	<p><i>Maestra:</i> ¿Cómo has hecho para que se vea la mitad en el espejo?</p> <p><i>Alumno 1:</i> He puesto el espejo en la mitad y estoy viendo la otra mitad.</p> <p><i>Alumno 2:</i> He puesto el espejo en el medio y se ha reflejado</p>	<p>Las alumnas experimentan con el espejo y logran determinar un eje de simetría. Hablan de la idea de “reflejo” y observan la importancia de “la mitad” para determinar la posición del espejo que les permita visualizar la totalidad de la obra</p>

Elaboración de los autores.

■ Resultados

A continuación, en la Tabla 2 se describen las principales acciones realizadas por los niños a lo largo de las diferentes sesiones de la experiencia, resaltando los procesos clave definidos en la trayectoria.

Tabla 2. Resultados relacionados con los procesos.

Proceso	Resultados
Visualización	Al analizar las obras artísticas, los alumnos realizan visualizaciones simples, localizan los cuadrados, triángulos, círculos y rectángulos. Muestran dificultades para nombrar las formas por su nombre, en un primer momento hablan de “esto”, “aquí”, “allí” o lo señalan. Más adelante, mediante el diálogo con el docente se les anima a expresarse con mayor precisión.
Reconocer	En las primeras actividades los niños reconocen de manera global las formas que observan en las obras artísticas. Reconocen figuras geométricas, pero no se fijan en el tamaño, posición u orientación. En aquellas obras de arte simétricas son capaces de indicar similitudes y repeticiones que mantienen la posición, pero en el lado contrario “arriba y abajo” y “en un lado y en el otro”. En el transcurso de la secuencia identifican la idea de reflejo mediante la repetición del espejo y pueden explicar cambios de orientación asociándolos a la línea del horizonte cuando se analiza una ilustración.

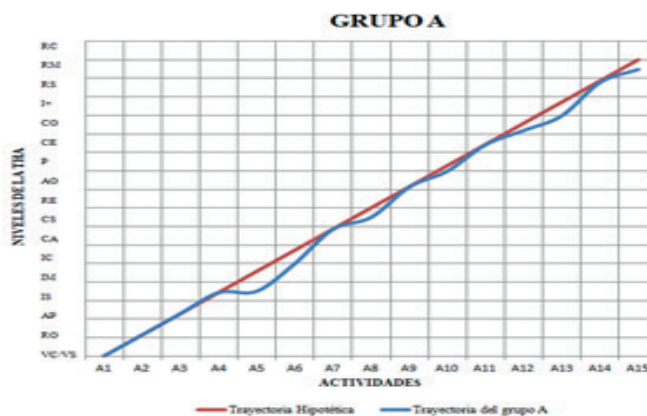
Asociación	La asociación que efectúan los alumnos es en un inicio por partes, ya que realizan agrupaciones según aquellas obras de arte que tienen mayor número de repeticiones y aquellas que no. Se fijan en las repeticiones sin tener en cuenta el tamaño, la orientación ni la posición. A medida que avanzan las actividades sus agrupaciones cambian, ya que ahora si tienen en cuenta las características de la simetría nombradas anteriormente. Finalmente son capaces de identificar los elementos que rompen la simetría.
Identificación	Se observa en las acciones de los niños que identifican la línea del horizonte como el primer eje simétrico central. Con ayuda del espejo, y usando la estrategia de ensayo y error, son capaces de encontrar el otro eje central, pero esta vez vertical. Si nos fijamos en los ejes verticales observamos que los alumnos necesitan la guía del docente para identificarlos. Una vez identificados los cuatro ejes los alumnos remarcan que las cuatro líneas se encuentran en el medio de la pintura. Se quiere destacar que no hay ningún alumno que llegue a identificar más de cuatro ejes.
Composición	En este nivel se destaca la variedad de acciones que llevan a cabo los alumnos. La mayoría se encuentran en un nivel de composición asimétrica, aunque tienen en cuenta la idea de reflejo no han respetado la orientación. Otros, han respetado la orientación, pero no el tamaño. Y finalmente hay unos pocos que han valorado el eje interno, la distancia con este, la medida, la posición y la orientación, por lo tanto, se considera que se encuentran en un nivel de composición simétrica.
Predicción	A pesar de la dificultad que supone realizar una visualización abstracta los alumnos son capaces de hacer sus predicciones sobre si con un pequeño extracto de las obras de arte se puede volver a formar toda la pintura. Les cuesta poner palabras a sus predicciones sin una comprobación. Pero cuando esta se lleva a cabo con los espejos, argumentan, confirman o rechazan sus decisiones.
Clasificación	Se observa que elegir criterios de clasificación es una tarea difícil para los niños. En las actividades de clasificación los alumnos propusieron criterios, los cuales en su mayoría aludían a elementos naturales, colores y formas. No es, hasta que los docentes dan más indicaciones, que los niños siguen criterios geométricos para sus clasificaciones.
Representación	Cuando se les da la oportunidad a los alumnos de ser creadores artísticos aparecen distintos niveles de representación simétrica. La mayoría no tienen en cuenta las propiedades y los atributos de la simetría, ya que manifiestan que dibujaron aquello que más les gustaba. Otros representan elementos simétricos, pero no son capaces de argumentar sus dibujos. Finalmente, algunos, tienen en cuenta las repeticiones, los cambios de posición y los ejes de simetría.

Elaboración de los autores.

Para visualizar de manera global los caminos seguidos por los niños se elaboran unos gráficos en donde se compara la THA con la trayectoria seguida por los niños. En la Figura 3 se muestra a manera de ejemplo, el gráfico correspondiente a los resultados globales de uno de los grupos de niños participantes.

Se observa que la trayectoria del grupo es similar a la THA. Se puede ver que los niños pasan de un nivel a otro siguiendo el orden previsto en la THA. Aquellos niveles que muestran más diferencia con la trayectoria hipotética se presentan en las actividades centradas en los procesos: a) *identificar*, ya que como se ha comentado, el reto de identificar los ejes es una tarea difícil para los alumnos. Y, b) *componer* por la dificultad

Figura 3. Trayectoria hipotética de aprendizaje de la simetría del grupo A.



Elaboración de los autores.

■ Consideraciones finales

La implementación de la secuencia de aprendizaje ha permitido que se cuente con diferentes tipos de evidencias para aproximarnos de mejor forma a las comprensiones de los niños sobre la noción de simetría, identificando, sus acciones, sus explicaciones, sus preguntas, entre otros aspectos. Además, la identificación de los caminos seguidos por los niños es una fuente importante para el diseño y/o adecuación de nuevas propuestas escolares que brinden oportunidades a los niños para progresar en sus procesos de aprendizaje (Vanegas, Prat y Rubio, 2019).

Los resultados indican que la secuencia diseñada muestra un camino por el cual los niños de educación infantil pueden progresar en su aprendizaje de la noción de simetría. Consideramos como Clements y Sarama (2009) que diseñar y estructurar una secuencia de aprendizaje organizada a partir del enfoque de las trayectorias de aprendizaje, no solo posibilita una mejor estructuración y organización de las actividades, sino que brinda elementos para desarrollar una mejor gestión en el aula al considerar posibles formas de razonamiento y/o prever dificultades que los niños pueden tener en la construcción de su conocimiento geométrico.

Plantear actividades abiertas, experimentales, centradas en el diálogo y enmarcadas en contextos artísticos favorecen un ambiente de experimentación y significación para los niños. Y propicia a maestros e investigadores un escenario para reconocer la diversidad de maneras como los niños interpretan determinadas situaciones y construyen significados de nociones y procesos matemáticos. Según Fernández y Reyes (2003), la expresión artística goza de un extraordinario contenido matemático. La contextualización artística favorece la observación, el análisis e interpretación de formas, la distribución espacial, etc. La manipulación y la elaboración de obras de arte facilitan la exploración y la experimentación de los conceptos y también facilitan el desarrollo natural de aprendizaje (Antón y Gómez, 2016). Además, plantear propuestas escolares que permitan conexiones entre las matemáticas y el arte brinda la posibilidad de desarrollar unos aprendizajes más significativos y globalizados, aspectos que se resaltan en los planteamientos curriculares actuales para la educación infantil.

La simetría es una noción poco explorada en educación infantil, pero sabemos que su abordaje es relevante si queremos favorecer el desarrollo del pensamiento matemático de los niños. Debemos seguir indagando en propuestas escolares que exploren esta noción tanto en contextos artísticos como en otros. Y discutir con maestros en formación y en ejercicio sobre estas propuestas para que reconozcan su viabilidad y la importancia de incorporarlas en sus aulas.

■ Agradecimientos

Trabajo en colaboración con los equipos de los proyectos: PID2019-104964GB-I00 y PGC2018-098603-B-I00 (MICINN); y los equipos de los grupos de investigación: SGR-2017-101 y SGR-2017-1181.

■ Referencias bibliográficas

- Antón, A. y Gómez, M., (2016). La geometría a través del arte en educación infantil. *Enseñanza & Teaching. Revista interuniversitaria de didáctica*, 34(1), 93-117. doi: 10.14201/et201634193117
- Brenneman, L., Stevenson-Boyd, J., y Frede, E. (2009). *Math and science in preschool: Policies and practice*. *Preschool Policy Brief*, 19, 1-12.
- Canals, M.A. (1997). Geometría en las primeras edades escolares. *Suma- Revista para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, 25, 32.
- Chamorro, M.C. (2003) *Didáctica de las matemáticas para primaria*. Madrid: Pearson Educación.
- Clements, D. H., y Sarama, J. (2015). *El aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas a temprana edad: El enfoque de las trayectorias de aprendizaje*. Learning Tools LLC.
- Clements, D. H. y Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. Routledge.
- Confrey, J. (2006). The evolution of design studies as methodology, In Sawyer, R.K. (Ed.). *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences*, pp. 135-152. Nueva York: Cambridge University Press.
- De Castro y Quiles, O. (2014). Construcciones simétricas con 2 i 3 años. La actividad matemática emergente del juego infantil. *Aula de Infantil*, 77, 32-36.
- Eberle, R. S. (2014). The role of children's mathematical aesthetics: The case of tessellations. *The Journal of Mathematical Behavior*, 35, 129-143. doi: 10.1016/j.jmathb.2014.07.004
- Fernández, I. y Reyes, E. (2003). *Geometría con el hexágono y el octógono*. Granada: Proyecto Sur.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Generalitat de Catalunya. (2016). *Curriculum i orientacions educació infantil segon cicle*. Departament d'ensenyament.
- Giménez, J. y Vanegas, Y. (2019). Contextualizações de transformações geométricas na Educação Infantil. *Perspectivas da Educação Matemática*, 12(28), 56-73.
- Jones, K. (2002). Issues in the teaching and learning of geometry. In L. Haggarty (Ed) *Aspects of teaching secondary mathematics* (pp. 121-139). London: Routledge.
- Knuchel, C. (2004). Teaching symmetry in the elementary curriculum. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 1(1), 3-8.
- National Council of Teachers of Mathematics – NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of teacher of Mathematics.
- Sarama, J., Clements, D. H., Barrett, J. E., Cullen, C. J., Hudyma, A., y Vanegas, Y. (2021). Length measurement in the early years: teaching and learning with learning trajectories. *Mathematical Thinking and Learning*, 1-24. Doi:10.1080/10986065.2020.1858245
- Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114-145. Doi: 10.2307/479205

- Van den Heuvel-Panhuizen, M., y Buys, K. (2012). *Young children learn measurement and geometry: A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for the lower grades in primary school*. Brill Sense. Doi:10.1163/9789087903985
- Vanegas, Y., Rosell, C. y Giménez, J. (2021). Insights about constructing symmetry with 5-year-old children in an artistic context. In M. van den Heuvel-Panhuizen & A. Kullberg (Eds.), *Proceedings of the ICME-14 Topic Study Group 1 Mathematics education at preschool level* (pp. 11-15). Shanghai, China, ICME- 14.
- Vanegas, Y., Prat, M., y Rubio, A. (2019). Characterisation of the learning trajectory of children aged six to eight years old when acquiring the notion of length measurement. In U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2381 – 2388). Utrecht, the Netherlands: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.