Clame Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

VOL 34, NÚMERO 2, AÑO 2021

EL USO DE LOS OBJETOS GEOMÉTRICOS: PROYECCIONES DE MAPAS Y SOCIOEPISTEMOLOGÍA

USING GEOMETRIC OBJECTS: MAP PROJECTIONS AND SOCIOEPISTEMOLOGY

Julieta Tejería Russi, Ricardo Cantoral Uriza
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. (México)
julieta.tejeria@cinvestav.mx, rcantor@cinvestav.mx

Resumen
En el presente reporte se mostrarán los avances de una investigación en curso que pretende evidenciar el *valor de uso* de los objetos geométricos en el contexto de las proyecciones de mapas, en el que aparecen como una herramienta fundamental para dar solución al problema de representar la Tierra esférica en un mapa plano, conservando determinadas características para mejorar las técnicas de navegación en el siglo XVI. Se propone a partir de una *problematización del saber* configurar un contexto de significancia en el que se resignifican los objetos geométricos.

Palabras clave: valor de uso, geometría, proyecciones de mapas, Socioepistemología

Abstract
This report will show the progress of an ongoing research work that aims to show the functional value of geometric objects in the context of map projections, in which they appear as a fundamental tool to solve the problem of representing the spherical Earth in a flat map, preserving certain characteristics to improve navigation techniques in the 16th century. A problematization of the knowledge in question is proposed, to create a context of meaning in which geometric objects can be re-signified.

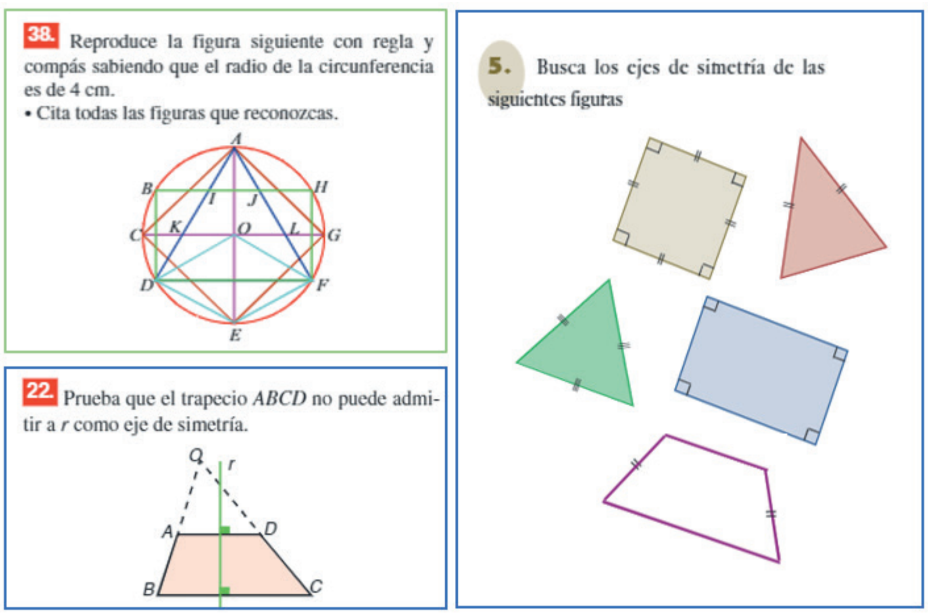
Key words: value of use, geometry, map projections, socio-epistemology

Introducción

Esta investigación en curso surge a partir de nuestro interés por evidenciar el *valor de uso* de los objetos geométricos en contextos que no sean los que se proponen típicamente en la matemática escolar, buscando escenarios en los que estos objetos se signifiquen mediante el uso. Desde nuestra postura teórica consideramos al discurso *Matemático Escolar (dME)* (Cantoral, 2013), que permea toda la enseñanza y aprendizaje de la matemática en el ámbito escolar, normándola, estableciendo qué se debe enseñar y cómo, así como los desempeños de los actores involucrados en el sistema educativo.

Particularmente sobre la enseñanza de geometría, se revisaron programas de estudio y libros de texto de la Enseñanza Secundaria uruguaya, que nos permitieron ver de manera global el tratamiento que se le da a este conocimiento escolarmente. Se observa un tratamiento intuitivo y experimental en los primeros niveles, relacionado con las construcciones de figuras geométricas con instrumentos de medidas, para desembocar en niveles más avanzados en el rigor de la formalidad priorizando definiciones, propiedades, conjeturas y demostraciones. Concordando así, con lo reportado en (Galo, 2019) sobre la investigación en enseñanza de la geometría. Reconocemos una secuenciación de contenidos a lo largo de los cursos, lo que es aprendido en cursos anteriores tendrá un papel importante en los siguientes. Los libros de texto proporcionan problemas en los que los objetos aparecen en juego únicamente relacionándose entre ellos, mayoritariamente en *contextos situacionales* geométricos. (Figura 1).

Figura 1. *Ejemplos de problemas en libros de texto.*



Imágenes extraídas de Belcredi y Zambra (2008, p. 114 y 130) y Borbonet et al. (2000, p. 173).

Con base en lo que identificamos en la matemática escolar sobre la geometría, comenzamos a cuestionarnos acerca de contextos en los que los objetos geométricos aparezcan involucrados y sean significados en problemas que dependan de éste, y que no estén únicamente al servicio de la propia matemática. Surge como un posible contexto a explorar en este sentido, las proyecciones de mapas y sus distorsiones.

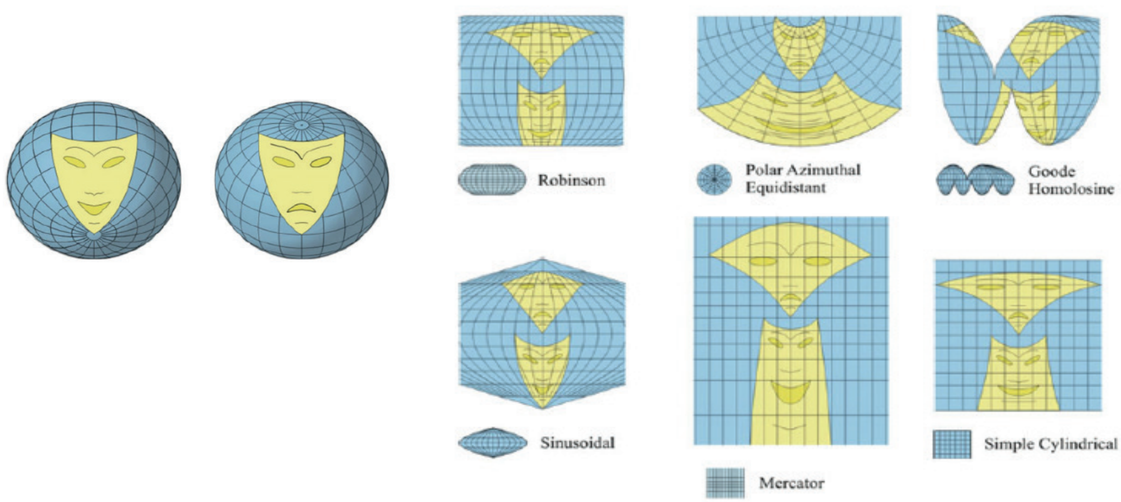
Lapaine y Usery (2017), presentan diferentes proyecciones de mapas destacando su distorsión, y el hecho de cómo generamos imágenes del mudo a partir de creer en determinados mapas que se nos presentan como una fiel representación, sin cuestionarlos. La representación más fiel de la Tierra es el globo terráqueo, conserva todas las magnitudes, pero su uso no es el más práctico, por su forma. Por ejemplo, cuando lo vemos solo nos muestra un hemisferio del mismo. Es por esto que surgen a lo largo de la historia diferentes formas de representarlo transformando lo que conocemos en la esfera, al plano. Según la característica geométrica que se desea conservar en un mapa debido a su finalidad, es que se genera una variedad de proyecciones. Se muestra en la figura 2 ejemplos de las distorsiones de diferentes proyecciones.

Robinson (2017) menciona que se distorsiona en al menos dos o tres de las siguientes formas:

El tamaño de las regiones parece más grande o más pequeño que en el globo, las distancias entre los puntos se muestran más largas o más cortas que en el globo y, las rutas directas entre puntos no se muestran cómo líneas rectas. (p. 4) [Traducción propia].

Entra en juego como un aspecto de importancia, la finalidad del mapa y cómo eso determina qué característica mantener y cuál distorsionar. En (Robinson, 2017) se propone como ejemplo de esto el mapa de Mercator, creado en 1569 con la intención de que sirva para la navegación, provocando esto una distorsión muy grande de áreas en las zonas de latitud alta (norte y sur). (Figura 3).

Figura 2. *Ejemplos de distorsión de diferentes proyecciones.*



Extraída de Robinson (2017, p. 46-47).

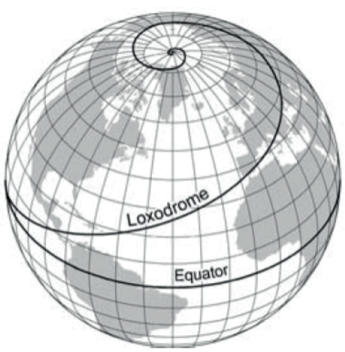
Para la navegación en el siglo XVI, toma relevancia la brújula como instrumento que se utilizaba, al indicar el Norte, siendo esta la dirección de los meridianos. Conocer el ángulo de rumbo, que es el ángulo que indicaba la dirección que se debía seguir, era de gran importancia. En la esfera, las curvas que forman siempre un mismo ángulo con los meridianos, se conocen como curvas loxodrómicas, y la ventaja para la navegación es que por esas curvas el rumbo se mantiene constante (los paralelos son ejemplo de esto ya que forman un ángulo de 90° con los meridianos). El mapa de Mercator muestra este tipo de curvas que en la esfera son espirales, como líneas rectas (Figura 3). Esto es muy útil para la navegación. Si se dibuja una línea recta en el mapa, y se conoce el ángulo que forma con los meridianos, y se sigue ese ángulo en la brújula, se llegará a destino. (Figura 4).

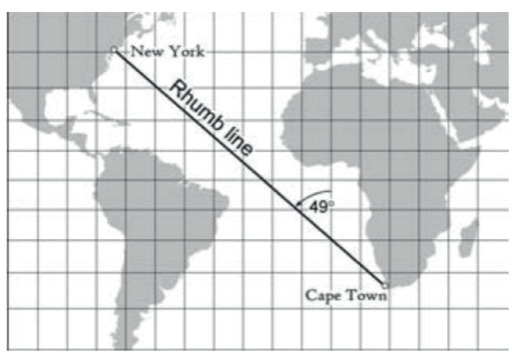
Figura 3. *Mapa de Mercator.*

Imagen extraída de Monmonier (2004, p. 5).

Cabe destacar también que Battersby y Kessler (2012) se proponen encontrar métodos que mejoren la enseñanza de las proyecciones desde la geografía, explicando la distorsión en algunas de ellas, para evitar la codificación errónea de la información que el mapa nos brinda. Afirman que se reconoce que el mapa de Mercator está distorsionado porque escolarmente es el que se muestra como ejemplo, pero no se comprende cómo lo está. Este mapa está ampliamente divulgado, a pesar de que su fin no era el de representar fielmente la Tierra, sino el de la navegación.

Figura 4. *Curvas loxodrómicas representadas en el globo terráqueo y línea de rumbo que une Nueva York con Ciudad del Cabo en el mapa de Mercator.*





Imágenes extraídas de Monmonier (2004, p. 2 y 3).

Mercator (1512-1594) fue cartógrafo, geógrafo y matemático, nacido en Flandes (norte de la actual Bélgica), distinguido por su trabajo como calígrafo, editor y fabricante de instrumentos científicos, cuyos intereses abarcan astronomía, cosmografía, magnetismo terrestre, historia, filosofía y teología (Monmonier, 2004). No existe evidencia escrita por él sobre cómo construyó su mapa, y debido a su utilidad para la navegación, surgen explicaciones que van desde: una primera realizada por el matemático inglés Wright en 1599, hasta actuales basadas en el Cálculo Diferencial. Con base en estas explicaciones y la importancia desde nuestra postura teórica que se le otorga al contexto social e histórico en la construcción del conocimiento, es que se comienza a configurar la idea de que la construcción de este mapa para la navegación nos puede permitir configurar un *contexto de significancia*, en el que los objetos geométricos aparecen puestos en uso y se resignifiquen.

Marco teórico

El marco teórico de esta investigación es la *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME)* (Cantoral, 2013) que tiene como objetivo atender a la construcción social del conocimiento matemático y su difusión institucional. En este sentido, se considera necesario para que el conocimiento se vuelva *saber* que sea puesto en uso, así como que el saber popular del ámbito cultural, el saber técnico como el de las disciplinas científicas y el saber sabio como el propio de la matemática tienen igual importancia. En esta investigación reconocemos los objetos geométricos en un contexto sociocultural e histórico en donde emergen de manera natural relacionándose con los elementos de este, y su funcionalidad queda resaltada en un problema real: la construcción del mapa que crea Mercator en 1569.

En cuanto al *discurso Matemático Escolar,* Cordero et. al (2015) lo definen como "un sistema de razón que norma las prácticas y las representaciones sociales de los agentes del sistema educativo. Este sistema se comporta como un mapa que delinea lo que queda dentro o fuera de la razón." (p. 63). Atribuyéndole así a la matemática escolar y a ese discurso que la norma, la responsabilidad de lo que sucede en el aula, despersonificando el problema. Establecen una caracterización del *dME* en la que se identifica: su *carácter hegemónico* (predomina una sola argumentación, no tienen relevancia otras que resultan del uso del conocimiento matemático en otros contextos, ni en su construcción), *la atomización en los conceptos* (centrado en los objetos matemáticos, desprovistos de contexto histórico, social o cultural), *la falta de marcos de referencia* (no se considera que la matemática pueda ser utilizada en otros escenarios, en otras disciplinas en donde puede adquirir otros significados), *la concepción de que la matemática es un conocimiento acabado y continuo* (no tienen cabida otros argumentos o significados porque la matemática se presenta de forma lineal, y no es posible trastocarla), y, *su carácter utilitario* (el conocimiento matemático está al servicio de la propia actividad matemática, no se concibe su carácter funcional).

Desde nuestra problemática, situamos al saber en un contexto cultural e histórico dándole sentido a su construcción desde un problema real en el que se ponen en uso objetos geométricos, conformando así un *contexto de significancia* basado en prácticas (Reyes-Gasperini, 2016, p. 58), en el que se resignifiquen. Esto permitirá aportar en un futuro al *rediseño* de este *dME*.

Metodología. Desarrollo de un ejemplo.

Desde un punto de vista metodológico se realiza una *problematización del saber matemático* en el marco de la *TSME* (Cantoral, 2013). El saber se historiza y se dialectiza según sus dimensiones: cognitiva, didáctica, epistemológica y social. Para esto se hizo primero una búsqueda de fuentes secundarias que analizaran la proyección de Mercator. Teniendo en cuenta nuestra problemática, destacamos los trabajos de Núñez quien en 1537 refiere por primera vez a la navegación por curvas loxodrómicas, y de Wright quien realiza por primera vez una explicación de dicha proyección en 1599.

Se utiliza como método el análisis documental de fuentes originales: (Wright, 1599) y (Wright, 1657), dos ediciones del tratado "*Certaine Errors in Navigation*". Como nos interesa analizar la construcción de ese mapa cuya finalidad era la navegación, en una época determinada, lo haremos con base en la propuesta planteada por Espinoza (2009) para el análisis de obras originales desde sus tres aspectos: una producción con historia, un objeto de difusión y parte de una expresión intelectual global. Se realiza una caracterización del período y una secuenciación cronológica (a partir de fuentes primarias y secundarias), se identifican influencias entre las obras y se analiza la actividad matemática inmersa en la navegación con el fin de rescatar su *racionalidad contextualizada*. Se confrontan ambas ediciones con el objetivo de ver qué cambió y que se mantuvo estable.

La obra analizada (Wright, 1599) es un tratado escrito por este matemático inglés, destinado a quienes navegaban y tenía por finalidad explicar algunos errores que se cometían por la mala interpretación que se hacía del mapa que se utilizaba en esa época (Figura 5), y corregirlos. Él toma conocimiento sobre estos errores desde la experiencia, ya que tuvo la oportunidad de ser parte de la expedición hacia las Islas Azores del Conde de Cumberland en 1589, a quien dedica su trabajo. (Monmonier, 2004).

En este mapa, los paralelos se muestran todos con igual medida al ecuador, como rectas paralelas y separados de forma equidistante. Los meridianos aparecen como rectas paralelas (perpendiculares a los paralelos), también separados de la misma forma. Para realizarlo, los paralelos que en la esfera aparecen todos como circunferencias con diferentes medidas (Figura 6), dependiendo del ángulo de latitud, se estiran hasta alcanzar la medida del ecuador, mientras que los meridianos se muestran en la misma proporción que en el globo. Podemos decir entonces, que hay un estiramiento únicamente de forma horizontal (Figura 5).

Figura 5. *Mapa que se utilizaba para la navegación antes del mapa de Mercator. Proyección cilíndrica equidistante.*

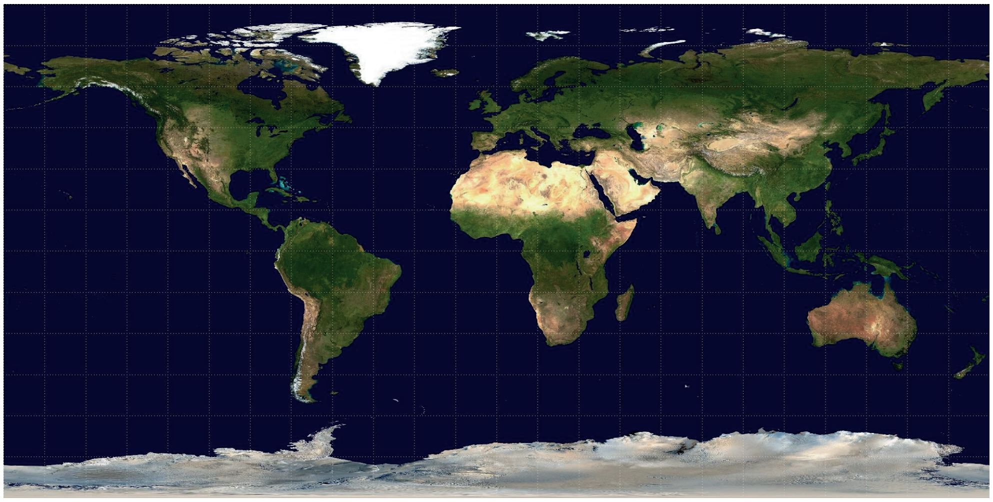


Imagen extraída de https://es.wikipedia.org/wiki/Proyecci%C3%B3n_cil%C3%ADndrica_equidistante#/media/Archivo:Equirectangular-projection.jpg

Figura 6. *Esfera con el paralelo de latitud θ representado, siendo θ el ángulo de latitud. Globo terráqueo con paralelos de latitud Norte y Sur representados.*

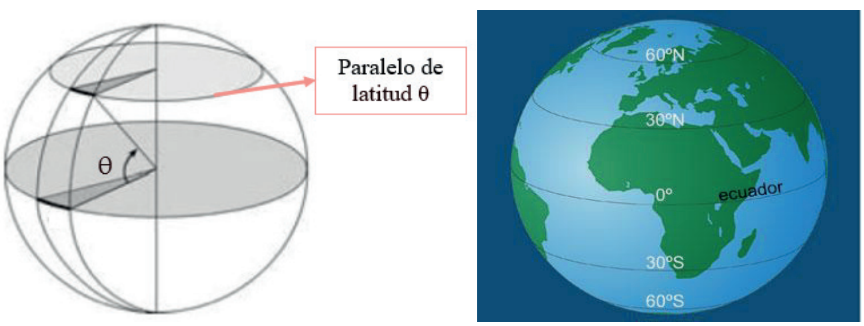


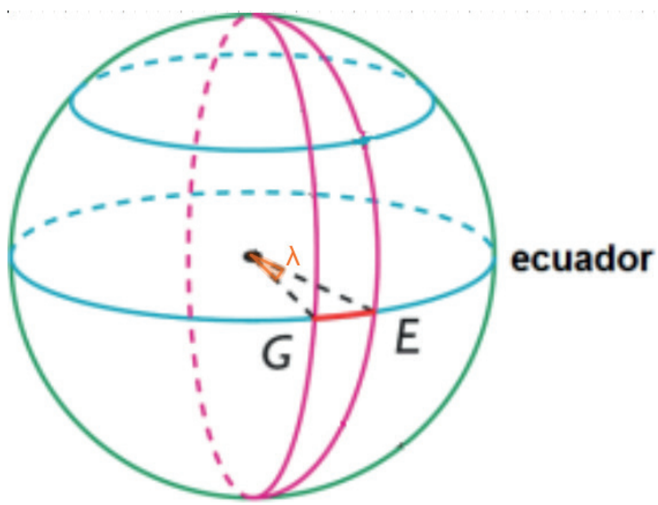
Imagen extraída de http://museovirtual.csic.es/salas/universo/astro3.htm

Wright (1599) expone los errores que se cometían a partir del mal uso de este mapa, para luego corregirlos. De esta manera, propone la construcción de un nuevo mapa, que se genera a partir de *compensar* ese estiramiento horizontal, con un estiramiento vertical, que permita que las curvas loxodrómicas sean representadas como líneas rectas. Proporciona una tabla en la que se establece una separación progresiva de los paralelos que depende del ángulo de latitud, y que será igual al factor por el que se estira cada paralelo.

El análisis de la primera edición de la obra de Wright (1599) se lleva a cabo mediante el método propuesto por Cantoral *et al*. (2015), respondiendo a las preguntas *¿Qué hace?, ¿Cómo lo hace? y, ¿Para qué lo hace?* Esto con el fin de identificar epistemologías de prácticas vinculadas a los objetos geométricos que aparecen en uso en la construcción del mapa, relacionados a la *compensación* con el estiramiento vertical necesario para que conserve los ángulos, así como también, a los errores detectados en el mal uso del mapa equidistante. Se presenta un ejemplo de un uso de objetos geométricos en (Wright, 1599), en lo que él plantea como un error cometido a partir del uso del mapa. Este ejemplo junto con otros será mostrado con mayor detalle en la tesis de Maestría correspondiente a esta investigación.

Wright (1599) explica el error que se comete al calcular la diferencia de longitud entre dos puntos en el mapa. La diferencia de longitud es el ángulo λ que se forma entre los planos que contienen los meridianos en los que se ubican los puntos de interés (Figura 7).

Figura 7. *Diferencia de longitud entre G y E.*



Elaboración propia

Retoma un ejemplo del trabajo de Núñez (1537), que le ayuda a argumentar su punto, a partir de conocimientos que se tienen desde la experiencia. Explica el cálculo de la diferencia de longitudes para dos lugares que se encuentran ambos aproximadamente en el paralelo 39° de latitud Norte: Isla Tercera y Lisboa. Toma otro punto de referencia en las trayectorias: Isla Madera. Sus ubicaciones actuales se muestran en la figura 8.

Si dos lugares se encuentran en un mismo paralelo dicho ángulo (λ) está estrechamente relacionado con el arco de circunferencia que representa ese paralelo. Estas trayectorias eran de interés a la hora de navegar, ya que mantenían el ángulo de la brújula constante intersecando en ángulo recto a todos los meridianos (que indican la dirección Norte-Sur).

En el mapa equidistante (Figura 5), esos arcos de paralelo (circunferencia) que en la esfera son de diferente medida (Figura 6), aparecen representados iguales, mientras que el ángulo que determinan los planos que contienen los meridianos es el mismo.

Figura 8. *Ubicación actual de Isla Tercera, Isla Madera y Lisboa.*

Imagen extraída de Google Maps.

Basando sus argumentos en la experiencia de navegación, Wright (1599) sabe que la distancia del recorrido de Lisboa a Tercera es de 262,5 leguas. Las latitudes de Isla Tercera y Lisboa son ambas aproximadamente de 39° Norte, y además Isla Tercera tiene latitud 31,5° Norte. Conoce también, los rumbos a seguir de Lisboa a Madera (suroeste) y de Madera a Tercera (noroeste), ambos formando un ángulo de 45° con los meridianos. (Figura 9).

Partiendo de esto y considerando el mapa equidistante se obtiene que: el ángulo de 45° indica que varía lo mismo de latitud que de longitud, por lo que si varía 7,5° de latitud entre Lisboa y Madera (de forma vertical), igual lo hará en longitud (de forma horizontal), de manera análoga si lo hacemos de Madera a Tercera, por lo que el mapa nos arroja una diferencia de longitud de 15°. (Figura 9).

Wright (1599), utilizando la relación entre los elementos del círculo (arco de circunferencia, radio y ángulo al centro), expone la forma de calcular la diferencia de longitud entre esos dos puntos en la esfera, lo que llama “la verdadera diferencia de longitud”.

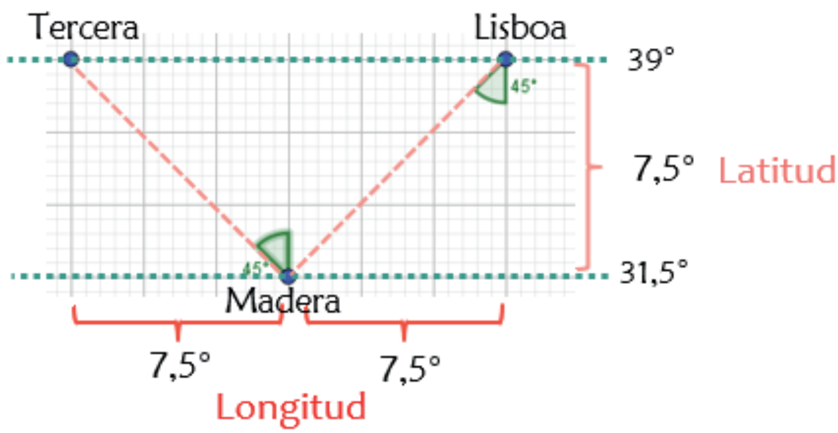
Es una regla en Geometría, que los diámetros y periferias, y consecuentemente los semidiámetros, y arcos semejantes de los círculos tienen la misma proporción.

También es manifiesto que el seno del complemento de la distancia de cualquier paralelo desde el Equinoccio es el semidiámetro del mismo paralelo. (Wright, 1599). [Traducción propia].

Considerando la esfera de radio 1000, el paralelo de 39° de latitud Norte, es una circunferencia cuyo radio Wright (1599) lo calcula como el seno del ángulo complemento:

$$sen 51° x 1000 \approx 777$$

Figura 9. *Diferencias de longitud y latitud mostradas por el mapa equidistante.*



Elaboración propia.

Si lo relacionamos directamente con el ángulo de latitud será:

$$cos 39° x 1000 \approx 777$$

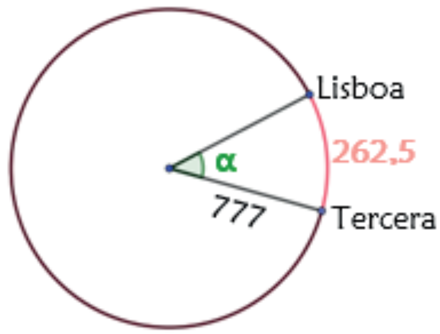
Haciendo uso de la fórmula que relaciona el arco de una circunferencia, el ángulo al centro comprendido y el radio, conociendo por la experiencia la medida del arco (262,5 leguas), y el radio calculado (777) (Figura 10),

$$777.\alpha \ = \ 262{,}5$$

Obtiene la diferencia de longitud:

$$\alpha \ = 0{,}378\ldots \approx \ 19°18'$$

Figura 10. *Diferencia de latitud en la esfera entre Isla Tercera y Lisboa.*



Elaboración propia.

A partir de la comparación de los dos escenarios (esfera y plano), Wright (1599) muestra la contradicción que se genera al utilizar el mapa sin comprender la proyección que hay detrás. Los objetos geométricos aquí aparecen significados en un elemento del contexto, en un ejemplo de la realidad, y permiten mostrar esa contradicción. Este es uno de los usos de objetos geométricos que encontramos y se expone a modo de ejemplo, aparecen otros de estos, que involucran nuevos objetos geométricos.

¿Qué objetos geométricos usa en sus argumentaciones?

- Ángulos de 45°.
- Triángulo isósceles.
- Triángulo rectángulo.
- Razón trigonométrica: seno.
- Relación entre elementos del círculo: arco de circunferencia, ángulo al centro y radio.

¿Cómo los usa?

Aparecen relacionados directamente con elementos del mapa, de la esfera y rumbos de la navegación. Los usa como herramienta para calcular distancias necesarias (radios), medidas de ángulos, diferencias de latitud y longitud.

¿Para qué los usa?

Para matematizar el ejemplo: cálculos en la esfera y luego en el mapa. Para mostrar una contradicción entre el uso del mapa y lo que sucede en la esfera. Evidenciar por qué se llega a un error en un cálculo a partir del mapa por no conocer la transformación con la que se construye.

Resultados

Se presentan aquí los resultados desarrollados hasta el momento, a partir de un ejemplo de cómo aparecen en uso objetos geométricos en el contexto de un problema al que se le quería dar solución en el siglo XVI, hacer más efectiva la navegación. Como resultados parciales hemos podido evidenciar el uso de los siguientes objetos geométricos: relaciones entre arcos de circunferencia, ángulo y radio, semejanza de triángulos, razones trigonométricas, proposiciones de Euclides (27 y 28), cada uno de ellos aparece inmerso en el contexto, en donde se resalta una funcionalidad particular, permitiendo así una resignificación de cada objeto. Todo esto nos permite configurar un *contexto de significancia*, que amplía la visión que se tiene desde la matemática escolar del tratamiento de la geometría. Considerándolo para el diseño de tareas escolares con el objetivo del rediseño de *dME*, en donde se exprese la funcionalidad de los objetos matemáticos significados a partir de la racionalidad del contexto.

Referencias

Battersby, S. E., & Kessler, F. C. (2012). Cues for interpreting distortion in map projections. *Journal of Geography, 111(3),* 93-101.

Belcredi, L. y Zambra, M. (2008). *Matemática 1.* Montevideo: Ediciones de La Plaza.

Borbonet, M., Burgos, B., Martínez, A., y Ravaioli, N. (2000). *Matemática 1*. Montevideo: Editorial Fin del Siglo.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento.* Barcelona: Editorial Gedisa.

Cantoral, R., Montiel, G., y Reyes-Gasperini, D. (2015). Análisis del discurso Matemático Escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática, (8)*, 9 – 28.

Cordero, F., Gómez, K., Silva-Crocci, H. y Soto, D. (2015). *El discurso matemático escolar: la adherencia, la exclusión y la opacidad*. Barcelona: Editorial Gedisa.

Espinoza, L. (2009). *Una evolución de la analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Un estudio socioepistemológico.* Tesis de Maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Galo, S. (2019). *El estudio del cambio en Geometría Euclidiana.* Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Lapaine, M., y Usery, E. (Eds.). (2017). *Choosing a map projection*. Springer International Publishing.

Monmonier, M. (2004). *Rhumb Lines and Map Wars: A Social History of the Mercator Projection.* Chicago: University of Chicago Press.

Reyes-Gasperini, D. (2016). *Empoderamiento docente y Socioepistemología. Un estudio sobre la transformación educativa en Matemáticas.* Barcelona: Editorial Gedisa.

Robinson, A. (2017). Which Map Is Best? En M. Lapaine y E. Usery (Eds.), *Choosing a Map Projection* (pp. 1-14). Springer International Publishing.

Robinson, A. H. (2017). Choosing a World Map. En M. Lapaine y E. Usery (Eds.), *Choosing a Map Projection* (pp. 15-48). Springer International Publishing.

Wright, E. (1599). Certaine Errors in Navigation. England.

Wright, E. (1657). *Certain errors in navigation detected and corrected by Edw. Wright; with many additions that were not in the former editions.* England. Printed by Joseph Moxon.