VOL 34, NÚMERO 2, AÑO 2021

ESTUDIO SOCIOEPISTEMOLOGICO DE LA NOCIÓN DE MÉTRICA. USOS Y SIGNIFICADOS

SOCIO-EPISTEMOLOGICAL STUDY OF THE NOTION OF METRIC; USES AND MEANINGS

Maximiliano Izzi Prato, Ricardo Cantoral Uriza.
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. (México)
maximiliano.izzi@cinvestav.mx, rcantor@cinvestav.mx.

Resumen
Esta investigación en curso, realiza una problematización del saber matemático en el sentido de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa sobre las nociones interrelacionadas de *medida, métrica y distancia.* Estas fueron interpretadas en este trabajo en el concepto matemático: *espacio métrico*. Articuladamente se problematizan las dimensiones *social, epistemológica, cognitiva y didáctica*, reconociendo escenarios y epistemologías excluidas de la matemática escolar. Para esto se toman fuentes propias de la Matemática Educativa, y de otros campos disciplinares que permiten apreciar el *valor de uso* de la *métrica.* A modo de conclusión, planteamos que ampliar el universo de espacios en donde se puedan generar diferentes tipos de *métricas* provistas de un *valor de uso* contextualizado, sería un posible camino para resignificar la noción topológica de *espacio métrico.*

Palabras clave: Socioepistemología, topología, espacio métrico, medida.

Abstract
This ongoing research work carries out a problematization of mathematical knowledge in the sense of the Socio-epistemological Theory of Educational Mathematics on the interrelated notions of *measure, metric* and *distance*. These notions were interpreted in this work in the mathematical concept: *metric space.* The *social*, *epistemological*, *cognitive* and *didactic* dimensions are problematized in an articulated way, recognizing scenarios and epistemologies excluded from school mathematics. So, sources from Educational Mathematics are taken, and from other disciplinary fields that allow us to appreciate the *metric use value*. In conclusion, we propose that expanding the universe of spaces where different types of *metrics* can be generated, provided with a contextualized *use value*, would be a possible way to re-signify the topological notion of *metric space*.

Key words: socio-epistemology, topology, metric space, measure

Introducción

En algunos institutos de formación de profesorados de matemática y universidades pedagógicas de Latinoamérica, se imparten cursos de Topología a los futuros profesores de matemática (Chile, Argentina y Uruguay son algunos que tenemos identificados). Además, es una signatura que aparece en programas de formación de matemáticos y con influencia en carreras universitarias con perfiles matemáticos. Inicialmente observamos, que la centración en objetos formales que caracteriza a estos cursos de Topología, estaría produciendo una sensación de falta de pertinencia de estos cursos especialmente en los futuros profesores de matemática, que posteriormente se dedicarían mayoritariamente a la enseñanza en educación secundaria o bachillerato. Es decir, puede suceder que el futuro profesor no entienda en qué le aportará este curso a su perfil profesional específico. Un elemento encontrado es que se configura el curso de igual manera para profesores matemática y para matemáticos, no diferenciando las particularidades académicas de cada profesión.

En los libros de Topología usualmente recomendados en programas oficiales (Kelley, 1955; Mendelson, 1990; Munkres., 2002), que también influyen en los materiales diseñados para profesores, se presenta la concepción de *espacio topológico* como se muestra en la *figura 1* (con apenas pequeñas variaciones entre una fuente y otra).

Figura 1. *Definición de espacio topológico.*

Definición. Una ***topología*** sobre un conjunto X es una colección $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X con las siguientes propiedades:

(1) $\varnothing$ y X están en $\mathcal{T}$.

(2) La unión de los elementos de cualquier subcolección de $\mathcal{T}$ está en $\mathcal{T}$.

(3) La intersección de los elementos de cualquier subcolección finita de $\mathcal{T}$ está en $\mathcal{T}$.

Un conjunto X para el que se ha definido una topología $\mathcal{T}$ se llama ***espacio topológico***.

Extraída de Munkres (2002, p.86).

Frente a esto, Bastán et al. (2006), que realizan un estudio histórico epistemológico del origen de la Topología, y se lo contrasta con el saber enseñado en la formación del profesorado, se señala que:

> Una definición de este tipo es ventajosa desde cierto punto de vista por su expresión minimalista y generalizadora, pero es desventajosa desde otro, sobre todo para la enseñanza, porque muestra un alto grado de opacidad en cuanto a los objetos a los que hace referencia y a los problemas, cuestiones o situaciones que permite abordar y por sobre todo a aquellos que le dieron sentido a su génesis (p. 2).

Esta reflexión, podría ser extendida a cualquiera de las nociones topológicas abordadas en la matemática escolar, como pueden ser *espacios métricos*, *continuidad*, *compacidad*, *conexión*, *completitud*, etc. Las definiciones se mantienen de manera abstracta y genérica, opacando, como dicen los autores, los significados. También identifican dificultades y obstáculos protagónicos en cuanto a la enseñanza de la Topología. Se reconoce una pérdida de significados geométricos de las nociones, se mantienen los temas estudiados a nivel de objetos formales, y las técnicas restringidas a la producción de demostraciones que depende de la significación que cada estudiante pueda darle, "sin más razones que la coherencia lógica que mantienen (los temas) entre sí" (p.7). También se identifica que no se presenta problemas en contextos en donde los saberes involucrados puedan apreciarse con funcionalidad, no se dan instancias de exploración, sino que se presentan los temas desde las definiciones. Sobre el rol de problemas planteados se menciona que: "aparecen al final de cada tema como aplicación, son complejos y aislados, tienen por objetivo hacer que el alumno adquiera heurísticas que tienen que ver con el trabajo en estructuras matemáticas" (p.7). Se concluye por parte de los autores que "el producto resultante del proceso de reconstrucción es una organización matemática estructural y formalizada, que constituye un "idioma nuevo", sofisticado, complejo, del cual no se llega a hacer visible su imprescindibilidad" (p.10).

En Bastán et al. (2006), Espinoza (2009) y Márquez (2018), se referencia y argumenta desde punto de vista histórico, que el origen de la Topología está vinculado a una generalización de las nociones del Análisis Matemático. Al analizar libros de texto y apuntes diseñados para los curos, se puede observar que algunos plantean una introducción a los conceptos de Topología con una visión coherente a esta que plantean los autores. Observamos que en algunos casos, esta generalización se comienza con la introducción del objeto: *espacio métrico*. Con este, se relativiza la idea de *distancia*, para así poder generalizar los teoremas y definiciones como los de límite o continuidad. Usualmente se presenta una definición axiomática del *espacio métrico*, para luego presentar ejemplos de estos (*figura 2*), y concluir con definiciones generalizadas de *conjunto abierto*, *entorno*, *límite*, *continuidad*, en otros espacios que no sean únicamente R^n con la *métrica euclídea usual* (aunque sí este ejemplo usualmente aparece). En la tesis doctoral de Fréchet de 1906, en donde se reconoce uno de los orígenes de esta rama de la matemática, la noción de *espacio métrico* es protagónica.

> La problemática a partir de la cual surgen los espacios métricos está centrada en la necesidad de definir una distancia o métrica en espacios diferentes a los euclidianos. Fréchet se plantea el problema de generalizar las técnicas utilizadas en los espacios euclídeos para reconocer la continuidad de una función definida sobre ellos, a espacios cuyo conjunto soporte no fuera ningún R^n como el espacio C^0 de las funciones continuas. Se planteó abstraer de la métrica euclídea las mínimas propiedades que deba verificar una métrica y que pudieran ser extendidas a un espacio cualquiera. En 1906 define (…) entonces una nueva clase de espacios, a los que denomina conjuntos (E) de clase (V) en los que se da por primera vez una definición general de distancia (Bastán et al., 2006, p10).

Figura 2. *Ejemplos de tareas trabajadas con espacios métricos en cursos de Topología para la formación de profesores.*

Respecto a los tipos de tareas

➢**T_1: Verificar que ciertos objetos responden al modelo que provee la definición de espacios métricos.**

Probar que los siguientes son espacios métricos

a) *IR^n con la distancia euclídea:* $d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$ $\quad x=(x_1,\ldots x_n)$ e $y=(y_1,\ldots y_n)$

b) *(IR^n,d) donde* $d(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\left|(x_i-y_i)\right|$

c) *IR^n con la siguiente métrica* $d(x,y)=\max_{1\le i\le n}\left|x_i-y_i\right|$

d)

Sea X un conjunto, x , y en X

$$d_i(x,y)=\begin{cases}0 \text{ si } & x=y\\ 1 \text{ si } & x\neq y\end{cases}$$

e)

Sea A un conjunto cualquiera y $L(A)$ el conjunto de las funciones acotadas de A en IR. Sean f y g pertenecientes a $L(A)$. La aplicacion $d(f,g)=\sup_{x\in A}\left|f(x)-g(x)\right|$ *es una metrica*

Extraído de Bastán et al. (2007, p.8).

Nota: *La tarea se restringe a probar que los axiomas de espacio métrico se cumplen en cada ejemplo, que no tienen contexto ni valor de uso.*

Marco Teórico

Nuestro marco teórico es la *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa* (TSME) (Cantoral, 2016). Esta estudia la construcción social del conocimiento matemático y su difusión institucional. La TSME, señala la existencia de un *discurso Matemático Escolar* (dME), que norma lo que se considera como correcto y lo que no en la configuración de la matemática escolar (Cantoral, 2016) (Cordero, Gómez, Silva-Crocci y Soto, 2015). Este es de carácter ideológico, y se reproduce no solamente en libros de textos y programas oficiales (consideradas como elementos objetivables del dME), sino que norma quehaceres tanto de los profesores como de los estudiantes y la manera que estos se relacionan con el saber matemático. La matemática, se presenta acabada, excluyendo las particularidades propias del pensamiento matemático de los estudiantes, instaurando un dominio epistemológico centrado en objetos formales, o presentado en escenarios ficticios. También el profesor es excluido de la construcción del conocimiento matemático en el sistema escolar, que considera al saber, como unidades temáticas acabadas que este debe restringirse a enseñar sin trastocar. Este dME, se considera protagonista del fracaso escolar. Ya en Cantoral y Farfán (1990) se señala con claridad al dME y los prejuicios que genera: "las dificultades en la transferencia de significados matemáticos tenían sus raíces en el discurso matemático utilizado, que ha saber, está fuertemente influido por los paradigmas típicos del discurso matemático puro" (p. 1).

En Soto (2010), se señalan cinco elementos característicos del dME. *Atomización en los conceptos*: se considera como conocimiento únicamente a los objetos matemáticos, desprovistos de cualquier carácter social, cultural o contextual; *Carácter utilitario:* no se consideran los significados que emergen de los *usos* y de la funcionalidad del conocimiento; *Falta de marcos de referencia:* se soslaya que la matemática también forma parte de otras disciplinas y que puede adquirir diferentes significados y usos dependiendo de los distintos escenarios; *Concepción de la matemática como un conocimiento acabado y continuo:* planteando la imposibilidad de trastocarla, y reduciéndola a procesos de memorización de conceptos y mecanización; *Carácter hegemónico*: son aceptadas solamente algunas argumentaciones, procedimientos y significaciones, evitando otras.

La TSME, considera que la sabiduría humana, se conforma tanto del saber sabio, como del técnico o popular. Busca la democratización del saber, en contraposición con la exclusión que produce el dME que hemos descrito globalmente. Al reconocer al saber, como una construcción social, reconoce epistemologías de prácticas en donde se expresa *relativismo epistemológico*, *racionalidad contextualizada* y valor de uso (Cantoral, 2016). El saber es considerado como conocimiento puesto en uso, por lo tanto, en el rediseño del dME se deben de incorporar escenarios en donde este emerja, permitiendo al estudiante ser parte de su construcción, produciendo así un saber significado a partir de su funcionalidad.

Desde esta postura, consideramos que la enseñanza del es*pacio métrico* al presentar una epistemología centrada en los objetos formales, carente de funcionalidad, está generalmente normada por el dME. De manera concreta, si se preguntara ¿Para qué sirven los ejemplos de *espacio métrico* que usualmente se plantean en los cursos? Solamente se podría responder que es para lograr una generalización del Análisis Matemático, configurando un curso que encadena unidades de manera conceptual, manteniendo los temas del programa estructuras con una lógica coherente. Esto evidenciaría la falta de funcionalidad con la que es presentado el saber en cuestión, producto de una falta de marcos de referencia que permitirían lograr un proceso de resignificación de saber (Cordero *et al.,* 2015).

Metodología

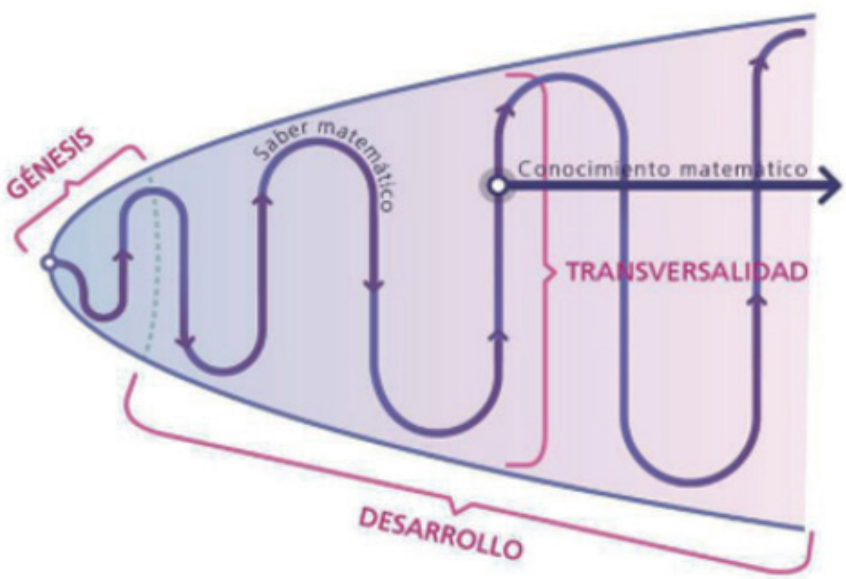
Desde la TSME, se considera el principio de resignificación progresiva, que implica considerar que el aprendizaje de un saber matemático no se constituye de manera aislada. Este se resignifica progresivamente, al reconocerse en distintos escenarios con sus matices, significados y funcionalidades particulares (Cantoral, 2016).

> La investigación en Matemática Educativa con orientación socioepistemológica, inicia con este particular tratamiento del saber. Se lo construye, reconstruye, significa y resignifica, se lo ubica en el tiempo y el

> espacio, se lo explora desde la óptica de quien aprende, de quien inventa, de quien lo usa: se posiciona a la opción constructiva en la perspectiva histórica, cultural e institucional para que, en definitiva, se lo rediseñe con fines didácticos (p. 101-102).

Desde la postura Socioepistemológica, en Ramírez et al. (2018) se plantea un esquema teórico - metodológico, para reconstruir los procesos sociales que posibilitan la constitución de un saber, desde su origen (*figura 3*). En este sentido, la humanidad, transita extensos procesos de resignificación permitiendo a sus comunidades configurar saberes matemáticos propios, significados y con valor funcional.

Figura 3. *Modelo teórico para el estudio de la constitución del saber.*



Extraído de Espinoza et al. (2018, p.252).
Nota: *Se reconoce una transversalidad, y la conformación del saber en saber enseñable acorde a las necesidades estructurales del sistema educativo.*

En suma, se propone el estudio de la constitución del saber a través del análisis de su génesis, desarrollo y transversalidad:

- Su génesis: Explora la pregunta ¿cómo el saber llega a ser? Aborda aspectos relativos a su producción y naturaleza, situándose en contextos, intencionalidades y prácticas específicas.
- Su desarrollo: Explora la pregunta ¿cómo el saber es difundido? Aborda aspectos sobre su devenir histórico y sus tránsitos hacia y entre discursos disciplinares y escolares.
- Su transversalidad: Explora la pregunta ¿cómo este saber vive en diversas prácticas? Aborda el uso y desarrollo en prácticas científicas, técnicas, artísticas y cotidianas. (Espinoza *et al.*, 2018, p.253)

Para poder reconocer elementos de la construcción social de un saber, se requirió de una *problematización del saber matemático* como lo plantea la TSME (Cantoral, 2016). Se propone que un camino, es la de historización y dialectización, considerando que esta no es un análisis histórico anecdótico, sino que debe de ser historia crítica que reconozca las epistemologías genéticas del cada saber, y contrastarlas con las dominantes propias en el dME.

En el caso de esta problematización, se implementó un análisis documental de fuentes secundarias de corte social-epistemológico y de artículos académicos específicos de la Matemática Educativa, tanto del *espacio métrico*, pero también de nociones de *medida*. En la búsqueda de la descentración del objeto *espacio métrico* se identificó que este describe espacios en donde se pueden identificar *distancias* entre sus elementos (en un sentido amplio), y que estas nociones de *distancias* están ligadas a nociones de *medida*. Incluso, existe un teorema en textos de Topología y Análisis, que señala que todo *espacio normado* (que admite significados de *medida*), induce un *espacio métrico* (que admite significados de *distancia*. También que este es concebido como una generalización del *espacio euclídeo*. Por estas razones, y considerando la génesis del saber, consideramos de interés lograr un panorama genérico de la constitución de ideas interrelacionadas de *medida-métrica-distancia*, en donde contextos que se reconocen son de naturaleza amplia.

Ejemplos de análisis

En Mari (2003; 2005), observamos que desde un punto de vista de la reflexión epistemológica, la noción de *medida* ha transitado por muchas concepciones. Se reconoce una etapa metafísica, otra representacional y por último una relativista. Solo la última postura reconoce la construcción social que desde la TSME nos interesa, mientras que en el dME sobresalen epistemologías de la *medida* con concepciones metafísicas (en donde se considera que la *medida* tiene una existencia independiente de la persona que está midiendo). Se reconoce que en las actividades que involucran a la *medida*, siempre está presente una racionalidad y una intención de evaluación de alguna *magnitud*. Entendiendo que estas *magnitudes* pueden ser de naturaleza variada, sin restringir nuestra búsqueda a las *unidades de medida* estandarizadas que usualmente aparecen en el dME.

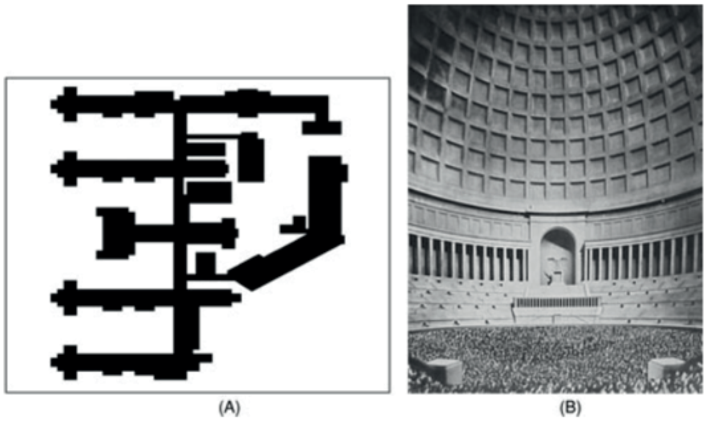
Por otro lado, en (Gyllenbok, 2018; Kula, 1986), vemos que las ideas y prácticas que involucran la *medida* se constituyen desde tiempos ancestrales. Además muestran cómo estas han evolucionado desde las más simples hasta las más complejas divulgadas en la actualidad en escenarios tanto técnicos como populares. También observamos a partir del análisis de estas obras, que estas prácticas de *medida* previas a la amplia difusión de las *unidades de medida* estandarizadas (metro, kilogramo, segundo, etc.), tenían funcionamientos diferenciados y poseían significados sociales emergentes de los propios contextos. Sostenemos que este tipo de epistemologías de prácticas aún siguen presentes en distintos escenarios en la sabiduría humana en general, aunque se excluyan del dME.

Compartiremos a continuación algunos ejemplos que aparecen en Angel et al. (2010). Consideramos que en este artículo, se aprecia una relatividad epistemológica en el uso de la *medida*, incluso dentro de un mismo campo disciplinar (Geografía), que conceptualiza la idea de figura *compacta* según le sea funcional en cada situación. Se muestran diez ideas diferentes (aunque hasta cierto punto coherentes), de lo que significa que una figura sea compacta. Estas caracterizaciones no son absolutas, es decir, no es que una figura sea o no compacta, sino que puede ser más o menos compacta. Por lo tanto, en cada caso se generan *métricas*, específicas que permiten medir la compacidad, volviendo a esta propiedad una *magnitud* cuantificable. No es una única *métrica*, sino que se caracteriza una particular asociada a cada una de las concepciones de lo que se presenta como compacto, expresando una racionalidad específica en cada caso. A continuación, se presentan tres ejemplos de los diez que se muestran.

Un primer ejemplo es la compacidad por profundidad, que se mide con el *índice de profundidad* (depth compactness - depth index) (*figura 4*) (Angel *et al.*, 2010).

> Esta medida naturalmente se puede utilizar, por ejemplo para medir la amenaza relativa que un país puede enfrentar debido a la forma de sus fronteras o de la protección relativa que un bosque puede ofrecer a sus habitantes que necesiten estar alejados de su borde. La propiedad de profundidad de las formas geográficas se centra en la distancia de todas las partes de la forma hasta su periferia. (p.450) [Traducción propia]

Figura 4. *Compacidad.*



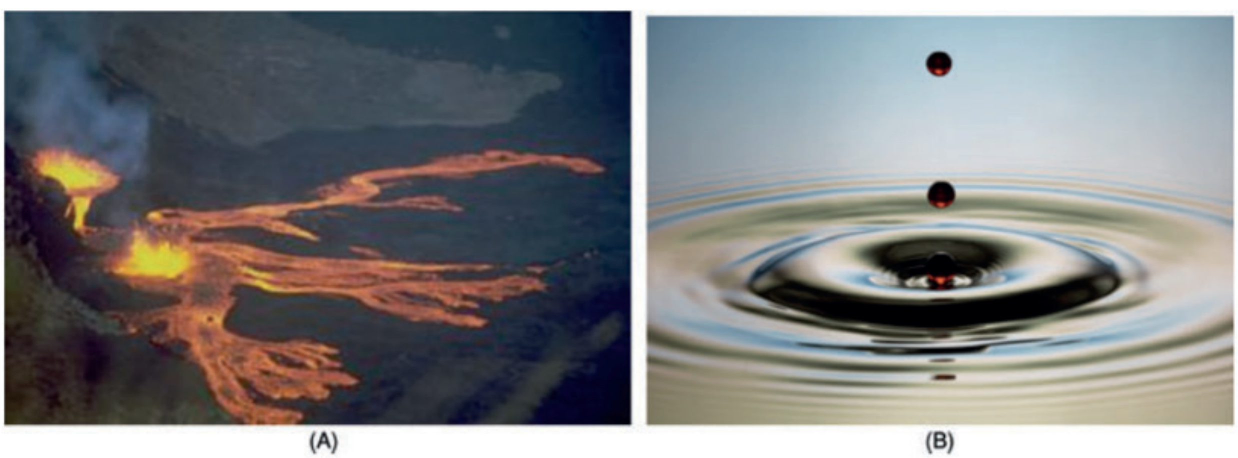
Extraída de Angel et al. (2010).

Nota: *"A) Profundidad Compacidad en un complejo de edificios con habitaciones bien iluminadas (baja). (B) Profundidad compacta en el diseño de Speer de 1936 para el Volkshalle (alta)" (Angel et al., 2010) [Traducción propia].*

Otro ejemplo, es la compacidad por dispersión e *índice de dispersión (*dispersión compactness – dispersión index) (*Figura 5*) (Angel et al., 2010).

> La dispersión es una forma natural de examinar las fronteras en avance de los fenómenos en expansión desde sus epicentros, como pueden ser epidemias, terremotos o divulgación de información. La propiedad de dispersión de una forma geográfica se centra en la medida en que la distancia desde su centro a su perímetro varía en diferentes direcciones. (p.452) [Traducción propia]

Figura 5. *Compacidad por dispersión.*



Extraída de Angel et al. (2010).

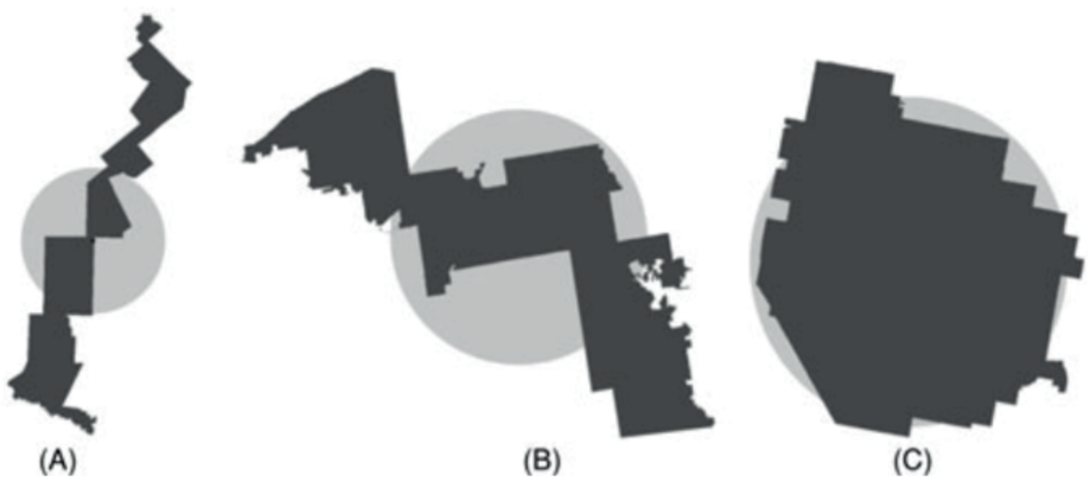
Nota: *"(A) Dispersión Compacta de la lava del Volcán Fernandina, Islas Galápagos, 1978 (bajo). (B) Dispersión Compacidad en una ondulación creada por una gota de agua que cae (alto)" (Angel et al., 2010) [Traducción propia].*

La compacidad por intercambio (exchange compacteness), que se mide con el *índice de Intercambio* ("Exchange Index" = (I_x)), permite determinar qué tan compacta es una figura a partir de un cálculo entre proporciones de áreas. Un hecho documentado, conocido con el término "*Gerrymandering*", implica la manipulación de los límites de distritos electorales, con la intención de acumular o dispersar cierta población que se sabe tiene determinada intención de voto. Esto se ha documentado ampliamente en EE.UU y en otros países (Angel et al., 2010). La alteración intencionada de las formas de las fronteras en algunos casos provoca formas extrañas que tienen valores en este Índice (I_x) muy bajos, por lo que este permite controlar conductas políticas malintencionadas *(Figura 6)*.

> Los jueces de la Corte Suprema de los EE. UU., Cuando discuten sobre la manipulación, a menudo aluden a su aspecto de intercambio de votantes: "Un distrito que se extiende para apoderarse de comunidades minoritarias pequeñas y aparentemente aisladas no es razonablemente compacto" (Corte Suprema de EE. UU. 2006a); "Protuberancias de formas muy específicas que se extienden para incluir a los demócratas, o fisuras que se retuercen para esquivar republicanos" (Tribunal Supremo de los Estados Unidos, 2004); "Incorporó múltiples, pequeños y lejanos núcleos de población minoritaria" (Tribunal Supremo de EE. UU. 2006b); sus "muchos pasillos estrechos, alas o dedos ... se extienden para encerrar a los votantes negros, mientras que excluyen a los residentes hispanos cercanos" (Tribunal Supremo de los Estados Unidos, 1996). (Angel et al., 2010, p.7) [Traducción propia].

Calcular el Índice de Intercambio (I_x) de un distrito implica: conocer el área Á de la figura que representa al distrito, dibujar un círculo con la misma área Á sobre el centro de gravedad de este, calcular el área O_s de superposición de la figura con este círculo y determinar el índice según el siguiente cociente: $I_x = \frac{O_s}{Á}$

Figura 6. *Exchange Idex.*



Extraída de Angel et al. (2010).

Nota: *Distrito de Texas, índice bajo (0.3), Ohio con índice medio (0.5) y Arizona con índice alto (0.9).*

Lo peculiar de esto, es que hay una intencionalidad explicita de producir *métricas* que midan determinados aspectos de la forma de una figura plana, y que puedan servir, al interactuar con otras *métricas*, de sistema de contralor. En Angel et al. (2010) se puede rastrear este fenómeno "*Gerrymandering"*, e incluso ver que se han producido leyes que lo controlan. En este último ejemplo, la *magnitud* que se mide es *compacidad,* siendo esta interpretada en distritos de ciudades, que se interpretan matemáticamente como figuras planas. Estas *medidas* permiten ver una *distancia* en términos de *compacidad*, identificando qué tan lejos en cuanto a lo compacto está un distrito de otro, o cómo alterar la forma de alguno para ajustar el índice a lo establecido como correcto.

Resultados

A partir del análisis documental de fuentes del campo disciplinar de la Matemática Educativa y de otros documentos de corte sociales y epistemológicos, que permitieron historizar y dialectizar según las dimensiones del saber de la TSME, reconstruimos que los *espacios métricos* son aquellos en donde se pueden pensar *distancias* entre sus elementos, entendiendo esta idea de *distancia* en un sentido amplio. Con esta descentración del objeto, planteamos que la idea de *espacio métrico* al conformarse como saber, relaciona nociones de *medida, métrica y distancia*. Las referencias que citamos en la introducción confirmaban este punto, ya que resaltaban la importancia de la constitución del *espacio métrico* desde la tesis doctoral de Fréchet en 1906, como una generalización de la *métrica euclídea*, que posteriormente concluiría en la constitución de la Topología.

Hemos identificado contextos de la actividad humana, en donde existen potenciales resignificaciones del objeto *espacio métrico,* que evidencian la construcción social de este saber. Por lo tanto, observamos, que este puede admitir una multiplicidad de marcos de referencia en donde puede emerger con valor funcional. Al interpretar en el objeto *espacio métrico* significados de *medida* y *distancia,* ubicamos algunos de los procesos históricos por los que han transitado estos saberes para conformarse funcionales en distintos contextos. Por otro lado, estos saberes son abordados por el discurso Matemático Escolar desde una centración en objetos con un predominio de las formalidades de las estructuras matemáticas, excluyendo los contextos antes señalados.

Conclusiones

Estos ejemplos anteriores (mostrados en la sección “ejemplo de análisis”), nos permiten mostrar globalmente, alguno de nuestros avances en la investigación y el interés por estudiar la dimensión social de la *métrica*, es decir, las resignificaciones que puede tomar el objeto, en escenarios particulares. Estos expresan funcionalidades, aceptando *una racionalidad contextualizada* y un *relativismo epistemológico*, en lo que nosotros identificamos como un saber sabio-técnico. También estamos problematizando *métricas* en escenarios populares y matemáticos puros, que expresen distintas características epistemológicas y valores de usos, además que midan *magnitudes* (como en este caso que se mide la *compacidad*) que no sean las típicas del dME.

Consideramos que los resultados obtenidos podrían involucrarse en un rediseño del dME, tanto para la enseñanza del *espacio métrico* a nivel universitario, y de manera transversal en planteamientos que involucren *medida* (tema transversal a varias ramas de la matemática y niveles educativos). En estos, se podrían incorporar significados sociales de estos saberes, para así explorar qué resultados se obtienen a nivel de aprendizaje de los estudiantes. Además, al identificar el nexo entre los *espacios métricos* y la Topología, los significados reconocidos podrían permitir una introducción no impuesta de nociones topológicas, o del *espacio topológico*. El reconocimiento de escenarios en donde el saber se resignifica podría ser de interés para la formación del profesorado de matemática, que, aportando a los cursos de Topología que reciben, un sentido de partida asociado a las métricas con valor de uso. Esto podría promover la idea de que a pesar de que la Topología es una rama de la matemática con altos niveles de abstracción, su construcción social es antecedida y acompañada por determinadas prácticas que permiten significarla.

Referencias

Angel, S., Parent, J., & Civco, D. L. (2010). Ten compactness properties of circles: Measuring shape in geography. *Canadian Geographer*, *54(4)*, 441–461. https://doi.org/10.1111/j.1541-0064.2009.00304.x.

Bastán, M., Cuenya, H., & Fioritti, G. (2006). Un análisis histórico-epistemológico de la topología y su vinculación con el saber enseñado en la formación de profesores de matemática. *Revista de Educación Matemática*, *21*, 1–15.

Cantoral, R. (2016). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre la construcción social del conocimiento*. Editorial Gedisa.

Cordero, F., Gómez, K., Silva-Crocci, H. y Soto, D. (2015). *El discurso matemático escolar: la adherencia, la exclusión y la opacidad*. Editorial Gedisa.

Espinoza, L. (2009*). Una evolución de la analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Un estudio socioepistemológico*. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Istituto Politécnico Nacional.

Farfán, R.-M., Cantoral, R. (1990). Elementos Metodológicos para la reconstrucción de una Didáctica del Análisis en el Nivel Superior. *Cuadernos de Investigación*, *13*, pp. 19-26.

Gyllenbok, J. (2018). *Encyclopaedia of Historical Metrology, Weights, and Measures*. Springer International Publishing. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-3-319-57598-8.

Kelley. (1955). *General Topology*. Springer.

Kula, W. (1986). *Measures and Men*. Princeton University Press. https://doi.org/10.1515/9781400857739.

Mari, L. (2005). The problem of foundations of measurement. *Measurement: Journal of the International Measurement Confederation*, *38(4),* 259–266. https://doi.org/10.1016/j.measurement.2005.09.006.

Mari, L. (2003). Epistemology of measurement. *Measurement: Journal of the International Measurement Confederation*, *34*, 17–30. https://doi.org/10.1016/S0263-2241(03)00016-2.

Márquez-García, G. (2018). *Una problematización del concepto de Topología en los inicios de la teoría de conjuntos abstractos de Fréchet*. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Mendelson, B. (1990). *Introduction to topology*. Dover publications. https://doi.org/10.2307/3611741.

Munkres (2002). *Topologia.* Pearsons Eduación.

Ramírez, L. E., Gómez, A. V., y Zúñiga, D. V. (2018). Geometría en la práctica cotidiana: La medición de distancias inaccesibles en una obra del siglo XVI. *Revista Latinoamericana de Investigacion En Matematica Educativa*, *21(3)*, 247–274. https://doi.org/10.12802/relime.18.2131.

Soto. (2010). *El discurso matemático escolar y la exclusión. Una visión socioepistemológica.* Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.