VOL34, NÚMERO 2, AÑO 2021

IDEAS INICIALES DEL PENSAMIENTO GEOMÉTRICO DE FUTUROS MAESTROS DE EDUCACIÓN PRIMARIA

INITIAL IDEAS OF GEOMETRIC THINKING OF PROSPECTIVE ELEMENTARY SCHOOL TEACHERS

Juan Pablo Vargas Herrera, Joaquín Giménez, Yuly Vanegas
Universidad de Barcelona, Universidad de Lleida. (España)
Jvargashe9@alumnes.ub.es, quimgimenez@ub.edu, yuly.vanegas@udl.cat

Resumen
La formación de maestros es un tema de interés relevante en la investigación en Educación Matemática, por ello en las últimas décadas se han realizado múltiples estudios con el objetivo de caracterizar el conocimiento profesional de profesores de matemática de diferentes etapas. En este estudio se describen ideas iniciales de un grupo de futuros maestros de Educación Primaria sobre aspectos matemáticos y didácticos de la noción de semejanza. Se diseña e implementa una tarea profesional para hacer emerger las comprensiones de los futuros docentes sobre dicha noción. Se lleva a cabo un análisis usando herramientas del modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas. Se observa que los futuros maestros argumentan que la semejanza implica igualdad de forma y muy pocos se acercan a una caracterización adecuada de esta noción a partir del reconocimiento de propiedades.

Palabras clave: formación docente, conocimiento didáctico, semejanza

Abstract
Teacher education is a topic of relevant interest in Mathematics Education research. In the last decades multiple studies have been carried out with the aim of characterizing the professional knowledge of mathematics teachers at different stages. This study describes initial ideas of a group of prospective teachers of Elementary Education about mathematical and didactic aspects of the notion of similarity. A professional task is designed and implemented to bring out the prospective teachers' understandings of this notion. An analysis is carried out using tools of the Didactic-Mathematical Knowledge and Competences model. It is observed that prospective teachers argue that similarity implies equality of form; and very few come close to an adequate characterization of this notion based on the recognition of properties.

Key words: teaching training, didactical knowledge, similarity

Introducción

El conocimiento didáctico-matemático de los profesores de matemáticas ha sido estudiado con especial interés durante las últimas décadas. Diversas investigaciones han identificado y definido componentes para caracterizar este tipo de conocimiento (Ball, Thames, y Phelps, 2008; Beswick y Chapman, 2012; Carrillo, Climent, Contreras y Ribeiro, 2017, entre otros). Uno de los objetivos de esquematización de este conocimiento es el tener elementos que permitan analizar, describir y perfeccionar la práctica del profesor y, por ende, promover acciones para la mejora del aprendizaje de los estudiantes. Este interés ha llevado al desarrollo de modelos para el análisis y la mejora de la interacción y práctica educativa en el aula. Así, encontramos el modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas del profesor de matemáticas CCDM (Godino, 2009; Pino-Fan y Godino, 2015; Godino, Batanero, Font y Giacomone, 2016). En este modelo se considera que dos competencias clave que el profesor de matemáticas debe desarrollar son la competencia matemática y la competencia de análisis e intervención didáctica. Se considera que el conocimiento necesario para la enseñanza de las matemáticas implica un conocimiento profundo de la matemática y su enseñanza, es decir, un conocimiento didáctico-matemático, ya que el conocimiento meramente matemático de los objetos no es suficiente para una práctica adecuada del profesor (Pino-Fan, Assis y Castro, 2015).

Por otra parte, la geometría es un tópico relevante en el currículo escolar, sin embargo, no es trabajada suficientemente en las aulas. Según Báez e Iglesias (2007) y Espinoza, Barbé, Mitrovich y Rojas (2007), los docentes tienden a postergar la enseñanza de la geometría en el aula dada a su escasa formación matemática y didáctica. Muchos de los maestros que abordan los conceptos geométricos tienen un enfoque en el que se privilegia la memorización de nombres de figuras y algunas de sus características (Copley, 2000). Esto es contradictorio con los planteamientos curriculares actuales para la educación primaria (NCTM, 2000; Burgués y Sarramona, 2013; CCSSO, 2010), en donde se resalta la importancia de desarrollar procesos matemáticos desde las primeras edades para promover una actividad matemática rica. Tal y como se plantea en Samuel, Vanegas y Giménez (2016) una actividad geométrica que busca un aprendizaje significativo involucra diversas habilidades (de dibujo, de construcción, de comunicación, de aplicación y transferencia, entre otras), por ello es importante potenciar procesos cognitivos como la visualización, el razonamiento y la representación (Jaime y Gutiérrez, 2016).

En este reporte de investigación, se describen ideas iniciales de un grupo de futuros maestros (FM) de educación primaria cuando se enfrentan a una tarea de interpretación de situaciones propuestas por otros. En dicha tarea, los futuros maestros ponen en juego su conocimiento sobre la noción de semejanza y su conocimiento intuitivo sobre la didáctica de la geometría. Nuestra hipótesis es que el conocimiento geométrico con el que llegan los futuros maestros al grado de educación primaria no es suficiente. Por ende, identificar dichos conocimientos es clave para adecuar y mejorar las propuestas de formación inicial para favorecer e impulsar un mejor razonamiento geométrico de los futuros maestros.

Marco teórico

Este estudio se enmarca en el Enfoque Onto-semiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS), el cual ha sido ampliamente estudiado y desarrollado por diversos autores (Godino, Batanero y Font, 2007; Font, Godino y Gallardo, 2013). En el marco del EOS se ha desarrollado un modelo teórico de conocimientos del profesor de matemáticas, denominado: Conocimientos y Competencias Didáctico–Matemáticas del profesor de matemáticas (CCDM). Una de las perspectivas de desarrollo de dicho modelo es el encaje de la noción de conocimiento con la noción de competencia del profesor (Vanegas, Font y Pino-Fan, 2019).

Desde el modelo CCDM se plantea que, para lograr una enseñanza idónea, el profesor de matemáticas debe poseer distintos tipos de conocimiento. Por un lado, tiene que conocer las matemáticas escolares del nivel educativo en el que imparte la enseñanza. Además, debe conocer elementos de niveles posteriores, lo que se denomina como el "conocimiento del contenido matemático *per-se"*. Este conocimiento se divide en dos tipos: *conocimiento* *matemático común* y *conocimiento matemático extendido*. El primero hace referencia al conocimiento sobre el objeto matemático que es necesario poner en juego para resolver problemas y/o actividades relacionadas con un tema (matemático) específico en un nivel educativo determinado. Generalmente se asocia al nivel en que se enseña. El segundo tipo se refiere a que el docente, además de saber enfrentar problemas/actividades sobre un tema determinado, debe poseer conocimientos más avanzados que hacen parte de niveles superiores. Adicionalmente al conocimiento matemático, el modelo propone que el profesor requiere de *un conocimiento didáctico-matemático*, el cual le permite analizar factores que influyen en la organización, implementación y evaluación de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Desde el modelo CCDM se plantea que para lograr una enseñanza idónea, el profesor de matemáticas debe poseer características de los diferentes tipos de conocimiento referidos anteriormente (Godino, Giacomone, Font y Pino-Fan, 2018).

Si analizamos los tópicos que se han investigado vinculados al conocimiento profesional docente, encontramos algunos donde se explora sobre significados otorgados a la noción de semejanza por futuros profesores, así como el análisis para su enseñanza y aprendizaje. La mayor parte de estos trabajos hacen referencia a los niveles de Van Hiele y a cómo se logra avanzar en la construcción de significados, dependiendo de los materiales y las estrategias utilizadas (Gualdrón, 2014; Aravena, Gutiérrez y Jaime, 2016). Por otra parte, se tienen los trabajos relativos a representaciones usadas en el teorema de Tales y la semejanza (Cordier y Cordier, 1991; Duperret, 1996; Lemonidis, 1991; Pfaff, 1997-98). Y los que analizan las producciones de profesores sobre la mirada aritmética de Thales y su relación con el conocimiento del contenido pedagógico (Delgado-Rebolledo y Zakaryan 2019; Climent, Espinoza-Vásquez, Carrillo, Henríquez-Rivas y Ponce, 2021).

Según Lemonidis (1991), es posible determinar tres momentos históricos en el desarrollo del concepto de semejanza que permiten identificar tres aproximaciones al concepto: el primero, relativo a la semejanza como relación intrafigural; el segundo hace referencia a la transformación geométrica vista como útil: y, por último, la transformación geométrica vista como objeto matemático.

También, se encuentran trabajos relativos a niños en primeros grados de primaria y su capacidad para reconocer figuras semejantes visualmente (Freudenthal, 1983; Swoboda y Tocki, 2002), así como estudios sobre niños que son capaces de reconocer imágenes y razonar respecto a otras imágenes a escala (Brink y Streefland, 1979). Con un enfoque más algebraico, se tiene que, cerca del 40% de los estudiantes de 15 años, priorizan un cambio aditivo y no multiplicativo de valores faltantes en una situación de semejanza, para poder determinar la solución a situaciones planteadas (Hart, 1988).

Finalmente, encontramos que al abordar la noción de semejanza existen dificultades asociadas al lenguaje mismo que se utiliza. Al considerar significados relacionados a contextos cotidianos que se transfieren a objetos matemáticos, se da paso a situaciones en las que semejante se entiende como un sinónimo de parecido, evidenciando ausencia de reconocimiento de propiedades de la semejanza en un contexto matemático (Giménez y Vanegas, 2020). Los autores plantean que, al estudiar la idea de semejanza en un grupo de FM, éstos no logran identificarla como una transformación por ampliación o reducción, que conserva la invariante *forma*; por lo que se hace cada vez más relevante plantear este tipo de análisis que permitan acercarse a los perfiles iniciales de FM y, desde allí, dseñar tareas profesionales que desarrollen procesos e ideas necesarias para una enseñanza idónea de la geometría en diferentes grados escolares.

Método

El estudio se realizó con 101 FM del Grado de Educación Primaria de una universidad española. Se diseña una tarea profesional en la que se pretende que los FM se posicionen ante afirmaciones realizadas por otros futuros maestros sobre la idea de semejanza. La tarea se estructura en dos partes. En la primera parte se presenta el enunciado a ser analizado (Tabla 1) y en la segunda se plantean las preguntas que guían dicho análisis (Tabla 2).

Tabla 1. *Enunciado de la tarea profesional.*

Solicitamos a un grupo de futuros maestros que dieran un ejemplo de semejanza para trabajar en la escuela. A continuación, encontrarás las respuestas de tres de ellos:		
Futuro maestro A: Un ejemplo de semejanza puede ser la obertura de una mandarina o una naranja, ya que pueden parecer dos partes iguales, pero no lo son.	**Futuro maestro B:** Las partes del cuerpo humano (manos, piernas, ojos, etc.)	**Futuro maestro C:** Se pueden observar los zapatos y ves que no son iguales, sobre todo si no son nuevos.

Elaboración propia.

A continuación, en la Tabla 2 se presentan las preguntas planteadas en la tarea profesional, así como el tipo de conocimiento que se valora (según el CCDM) y su intencionalidad.

Tabla 2. *Preguntas de la tarea profesional, tipo de conocimiento e intencionalidad.*

Núm.	Pregunta	Tipo de Conocimiento	Intencionalidad
1	¿Consideras que están en lo cierto?	Común	Conocer el significado de semejanza en los futuros maestros. Determinar la capacidad de detectar errores
2	¿Qué se está entendiendo por semejante en cada caso?	Común	Conocer el significado de semejanza en los FM. Determinar la capacidad de detectar errores
3	¿Por qué crees que se tiene esta idea de semejanza?	Extendido	Relacionar las concepciones de los FM sobre un objeto particular, con elementos de su propia formación y experiencia
4	¿Semejante es lo mismo que parecido?	Extendido	Determinar elementos fundamentales para la caracterización de objetos matemáticos
5	¿Qué ejemplo propondrías tú?	Didáctico-Matemático	Conocer la perspectiva y estrategia de enseñanza de un objeto matemático. Determinar conexiones realizadas por los futuros maestros.

Elaboración propia

Para realizar el análisis, se identifica en los protocolos escritos (generados como respuesta a la tarea profesional) aspectos, dificultades, errores y justificaciones dadas por los FM en relación a la noción de semejanza y que son indicador de su conocimiento matemático-didáctico. El análisis se realiza en dos fases. En la primera fase, se revisan las respuestas, determinando su grado de corrección. También se identifica quiénes mostraban una coherencia en las respuestas dadas a las cinco preguntas planteadas. En la segunda fase, se realizan análisis para las preguntas según el tipo de conocimiento (común, extendido, didáctico-matemático).

Así, para interpretar las ideas sobre semejanza de los FM en las preguntas referidas al conocimiento común (1 y 2), se usan las categorías sobre el tipo de representación de la semejanza, planteadas por Gualdrón (2011). Dichas categorías están asociadas a lo que este autor denomina elementos del componente matemático-epistémico de la semejanza. La primera categoría*: representación gráfica*, refiere al reconocimiento visual de la semejanza como ampliación-reducción de una forma respecto de la otra o mediante configuración de Tales, se entiende el concepto de semejanza y se utiliza, por ejemplo, en el reconocimiento de la misma en polígonos. La segunda categoría: *aritmético – simbólica* comprende el uso de elementos relacionados con la semejanza, por ejemplo, aludir a la igualdad de razones y su invarianza o hablar del centro y razón de homotecia. En otros casos, se usan fracciones en lados homólogos y se reconocen triángulos semejantes por la proporción de sus lados. Finalmente, la categoría de *tipo verbal*, enmarca aquellos elementos intuitivos, referidos a "la misma forma" o describir la semejanza como igualdad de formas sin especificar siempre que se trata de igualdad de ángulos y lados proporcionales.

Para facilitar el análisis, se organizan las informaciones tal y como se muestra en la Tabla 3. En dicha tabla se asocia a la respuesta de cada FM la categoría asignada y algunas observaciones sobre la noción de semejanza que se evidencia en su discurso.

Tabla 3. Instrumento de organización de los datos y primera asignación de categorías.

Respuestas de los futuros maestros	Categoría emergente	Observaciones
"Si nos fijamos en los Ejemplos de los tres maestros, Podemos ver que el único que relaciona la semejanza con las matemáticas es el A, ya que podríamos decir que la naranja y la mandarina tienen la forma de una ***figura geométrica*** *con algunos elementos iguales" (FM 54)*	Representación gráfica	Evidencia igualdad entre formas geométricas e identificación de algunas condiciones matemáticas Alude al reconocimiento visual de algunas características de los objetos.
"Podemos considerar las mandarinas y las naranjas como figuras geométricas y observar que estas dos figuras geométricas Tienen las dos la misma forma y distinta medida, pero son ***proporcionales****, por tanto las dos serán semejantes"(FM 17)*	Representación aritmético - simbólica	Emergen de las afirmaciones relativas a la relación de semejanza o características como la congruencia o la homotecia.
"En el primer caso entiendo que la semejanza que hay es entre la naranja y la mandarina, ya que ***son muy similares de apariencia*** *y a simple vista las puedes confundir. En el segundo, la única semejanza que puedo encontrar es que tenemos dos manos, dos piernas, dos ojos y que son similares entre ellos. Por último, el parecido que encuentro es que puede que* ***los zapatos sean iguales*** *del mismo modelo, pero unas más desgastadas y las otras nuevas. Al fin y al cabo, son los mismos zapatos."(FM 38)*	Tipo verbal	Precisa elementos de tipo intuitivo, relativas a "mismas formas", no necesariamente geométricas, o al entendimiento de la semejanza como una igualdad.

Elaboración propia

Para las preguntas que refieren al conocimiento extendido a partir de una primera revisión, se definen categorías emergentes para cada pregunta. En el caso de la pregunta 3, se consideraron cuatro categorías respecto a elementos que los FM asocian con la semejanza: *elementos de la cotidianidad*, *elementos de tipo matemático*, *elementos del lenguaje* y *elementos relacionados con la formación previa* (Tabla 4).

Tabla 4. Instrumento de organización de datos y categorías emergentes al por qué de una idea de semejanza.

Respuestas de los futuros maestros	Categoría emergente	Observaciones
"Creo que se tiene esta idea de semejanza porque en los tres casos partimos de objetos similares teniendo en cuenta el ***tamaño y la forma****. Por ejemplo en el caso de las partes del cuerpo, la gente normalmente tiene las manos del mismo tamaño o similares y lo mismo con los pies, los ojos, etc."(FM 26)*	Elementos de la cotidianidad	Se encuentran justificaciones referidas a la forma, el color, el tamaño de objetos.
"Desde el punto de vista matemático para que dos figuras geométricas sean semejantes deben compartir tres características: ***tener La misma forma, tener los ángulos iguales, tener medidas proporcionales"*** *(FM 18)*	Elementos de tipo matemático	Hace alusión a la semejanza entendida como una relación entre elementos matemáticos que cumplen con poseer ángulos congruentes y las longitudes de sus lados proporcionales
"Creo que tenemos esta idea de semejanza porque siempre se ha asociado con los ***sinónimos*** *como similar, aproximado o relacionado entre otros. Decir que una persona, un objeto o una cosa es semejante a otra significa que tienen muchas características en común."(FM 14)*	Elementos del lenguaje	Refiere a aquellos FM que abordan la semejanza desde el origen de la palabra, la traducción o su uso en una conversación cotidiana
"Porqué la definición que ***aprendemos desde pequeños en el colegio****, es que la semejanza muestra la relación entre objetos o personas que tienen características comunes." (FM 19)*	Elementos de la formación previa	Agrupa aquellas respuestas que indican que el proceso de formación escolar anterior, presentó la idea de semejanza como se plantea en los ejemplos

Elaboración propia

En relación a la pregunta 4, se clasifican las argumentaciones de los FM en aquellas que consideran que "semejante" es lo mismo que "parecido" o no, y se estudian las justificaciones dadas en cada caso. Finalmente, en la pregunta referida al conocimiento didáctico-matemático (5) en la que se indaga sobre el tipo de situaciones/ejemplos que los FM utilizarían para trabajar la noción de semejanza en el aula de primaria, se diferencian aquellas propuestas basadas en aspectos cotidianos y las que aluden a aspectos geométricos (independientemente de que sean correctos o no).

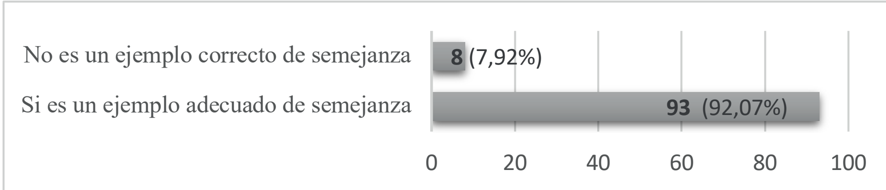
Resultados

A continuación, se presentan los resultados obtenidos, organizándolos según las preguntas de la tarea profesional y las categorías descritas en el apartado anterior.

Respecto a la pregunta 1, la mayoría de los FM (ver Figura 1) considera que, los ejemplos presentados son correctos y apropiados para abordar el concepto de semejanza en la escuela aun cuando no lo son, asumiendo como criterios de semejanza, elementos cotidianos y desconociendo elementos propiamente geométricos como la conservación de la forma al reducir o ampliar de tamaño (propiedad de proporcionalidad de los lados de las figuras).

Figura 1. *Resultados pregunta 1 de la tarea profesional.*

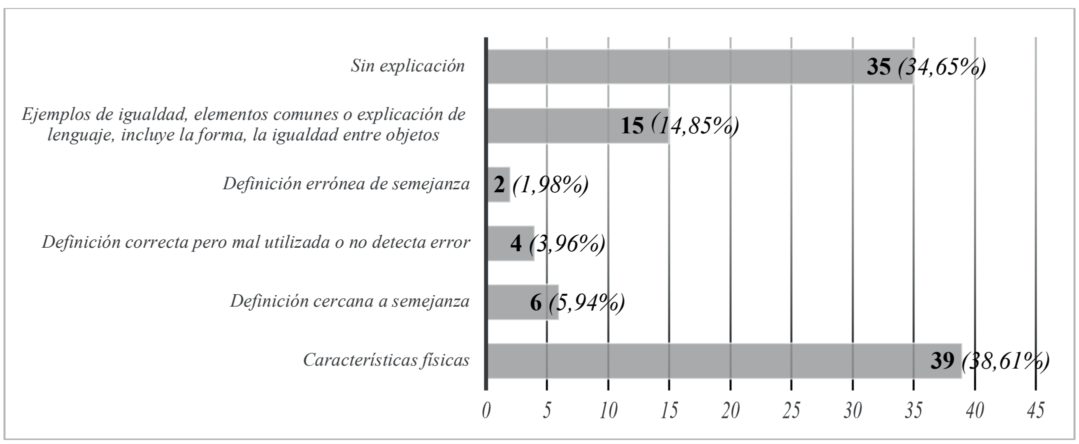
.



Elaboración propia

En relación a la pregunta 2, en la Figura 2 se puede observar que un 34.65% de los FM no brinda explicaciones y/o justificaciones. Por otra parte, encontramos que de los FM que sí rindan una explicación, el 38,61% lo hacen erróneamente, basando la semejanza de objetos en aspectos no matemáticos (características físicas) como como el olor o el sabor. Un 5,94% plantea una definición "cercana" a la semejanza, y un 3,96%, aunque propone una definición correcta de semejanza, no es capaz de determinar que los ejemplos dados en la tarea profesional no son adecuados. Finalmente, se tiene que sólo el 1,98% de los futuros maestros hacen referencia a una definición adecuada y más completa de la semejanza (como igualdad de forma con ángulos iguales y segmentos proporcionales), e indican que los ejemplos propuestos (en la tarea profesional) son incorrectos respecto a dicha definición.

Figura 2. *Tipo de argumento, respecto a la veracidad de los ejemplos.*



Elaboración propia.

En la Tabla 5 se recogen los resultados obtenidos al analizar de manera conjunta las respuestas dadas a las preguntas 1 y 2, considerando las categorías planteadas por Gualdrón (2011).

Tabla 5. *Cantidad de futuros maestros por categoría de tipos de representación de la semejanza.*

Categoría (Gualdrón, 2011)	Nº de FM	Porcentaje
Representación gráfica	12	11,88%
Representación aritmético - simbólica	6	5,94%
Tipo verbal	83	82,17%
	101	100%

Elaboración propia

La mayoría de los futuros maestros (82,17%), se ubica en la categoría de tipo verbal, basan su definición de semejanza en elementos de tipo visual, aludiendo a elementos intuitivos que refieren a la forma del objeto descrito en cada ejemplo, sin establecer relaciones con los elementos geométricos que les caracterizan. Solamente un 5,94% refiere a aspectos como la homotecia. Llama la atención la influencia de la simetría como elemento diferenciador, para los FM, de la existencia o no de semejanza entre objetos. Finalmente, se observa que sólo un 11,88% refiere a igualdad de formas geométricas, con variación de algún parámetro como su tamaño.

Respecto a la pregunta 3, en la Tabla 6 se recogen los aspectos a los que aluden los FM referentes al contenido extendido sobre la semejanza.

Tabla 6. *Tipos de argumentos de los FM sobre la idea de semejanza.*

Categoría	Nº de FM	Porcentaje
Elementos de la cotidianidad	22	21,78%
Elementos de tipo matemático	8	7,92%
Elementos del lenguaje	49	48,51%
Proceso de formación anterior	11	10,89%
Ninguno	11	10,89%
	101	100%

Elaboración propia.

La mayoría de los FM (48,51%) justifica la semejanza a través de elementos que provienen del lenguaje, como los sinónimos, las traducciones de la palabra "semejante" y el uso que se le da a la semejanza en una conversación normal. El 21,78% alude a elementos de la cotidianidad como las partes del cuerpo. Algunos FM atribuyen el significado de la semejanza a su proceso de formación anterior (10,89%) y solo un 7,92% de los FM refiere a argumentos de tipo matemático para justificar la semejanza.

Respecto a la pregunta 4, la mayoría de los FM (64,36%) considera que "semejante" es lo mismo que "parecido". Al preguntar por qué consideran que son lo mismo estas palabras, la mayoría (52,48%) indica que son sinónimos y sólo el 6% de los FM utilizan la definición de semejanza en geometría, para diferenciarla de parecido.

Finalmente, en relación a la pregunta 5, la mayoría de los FM (62,38%), al plantear ejemplos a través de los cuales explicarían la idea de semejanza a estudiantes de 10-11años de educación primaria, refiere a elementos de la cotidianidad, pero de forma errada. Destacan ejemplos como dos hermanos gemelos, las alas de una mariposa o pelotas para jugar fútbol. En estos casos, se toma semejanza como algo sinónimo de parecido. Únicamente un 37,62% de los FM refieren a elementos matemáticos. De éstos, solamente un 21,05% alude de forma correcta al ejemplificar la semejanza como propiedad geométrica que evoca las mismas formas con lados proporcionales. En la Tabla 8 se muestran a manera de ejemplo algunas de las respuestas dadas por los FM.

Tabla 7. *Ejemplos de los FM para trabajar la semejanza en la educación primaria.*

Tipo	Ejemplo
Ejemplo adecuado	*"En matemáticas sería dibujando dos triángulos, con los mismos ángulos y las mismas medidas proporcionales de los lados. Pero uno sería más grande que el otro, es decir, de distintos tamaños"*
Ejemplo erróneo	*"Un ejemplo bastante claro de semejanza, podemos ponerla con los triángulos. Todos tienen unas características similares, pero en algún aspecto son diferentes. Es decir, los triángulos*

	tienen tres lados, tres vértices, pero pueden tener diferentes ángulos en diferentes grados, pueden ser equilátero, isósceles o escaleno”

Elaboración propia.

Al considerar el tipo de ejemplo justificado, parece que llaman triángulos semejantes a los que tienen propiedades parecidas, y son clasificables como del mismo tipo. Así, dos triángulos isósceles son semejantes porque son isósceles.

Consideraciones finales

Respecto al conocimiento común, coincidimos con Gualdrón (2011) quien indica que, en el tema de semejanza de figuras planas, la mayoría de los futuros maestros exhiben razonamientos de los dos primeros niveles del modelo de Van Hiele (0 y 1) y sólo unos pocos acceden al nivel 2. Los futuros maestros participantes en este estudio tienen mayoritariamente una percepción de tipo visual sobre la semejanza, asociándola a elementos de su cotidianidad y el lenguaje propio utilizado, no generan conexión con elementos propios de las matemáticas y argumentan con características físicas de los objetos o con una definición errónea sobre la semejanza. Encontramos que la mayoría de los futuros maestros consideran que los ejemplos planteados en la tarea profesional son correctos; evidenciando, además, la no asociación de las respuestas con la definición formal de semejanza e incluyendo elementos descriptivos en su concepción sobre este objeto geométrico; así, por ejemplo, consideran que el sabor, el olor y el color de las frutas son una muestra de semejanza entre ellos.

Respecto al conocimiento extendido, coincidimos igualmente con Gualdrón (2011) en tanto al desarrollar una actividad relativa a la semejanza de objetos geométricos, los resultados dependen en mayor parte de las creencias y concepciones, que son, en últimas, las que determinan las condiciones propicias para que se dé un proceso de enseñanza y de aprendizaje con resultados favorables. En este sentido, vemos cómo en la tarea profesional desarrollada, la mayoría de los futuros maestros considera que semejante y parecido son sinónimos, debido a su experiencia de uso en situaciones cotidianas y asocian este tipo de relación a diversos factores, entre los que destacan: la relación de las palabras de la cotidianidad con conceptos matemáticos, las traducciones a las cuales las palabras son susceptibles y en menor medida a su formación inicial.

Respecto al conocimiento didáctico – matemático, al solicitar ejemplos de cómo explicar la semejanza en clase, la mayoría de los futuros maestros se inclinan a utilizar situaciones intra-matemáticas. Sus ejemplos muestran ausencia de relaciones bien establecidas entre contextos y significados. Todo esto es coincidente con lo encontrado en otros estudios, en donde se identifica que el perfil de futuros maestros que accede a programas de formación para maestros de educación básica, desconoce elementos propios de las matemáticas, imposibilitando su tránsito entre diversos niveles epistemológicos y desatando errores en la evocación de objetos geométricos.
Cabe resaltar que casi todos los futuros maestros que aparentemente conocen el concepto formal de semejanza detectan fácilmente el error en los ejemplos que planteamos al inicio de la situación; comprenden las reglas que deben cumplir los objetos para ser semejantes y plantean ejemplos claros para explicar el concepto en las aulas de clase, lo que es coincidente con el anterior planteamiento.

Finalmente, tal y como se indica en Giménez y Vanegas (2020), consideramos oportuno remarcar que el diseño e implementación de tareas profesionales que permiten acercarse a las ideas iniciales (matemáticas y didácticas) de FM se constituyen en un punto de partida clave para el rediseño de tareas. Asimismo, los resultados derivados de su implementación arrojan informaciones importantes para analizar y mejorar las propuestas de formación docente. Esperamos seguir avanzando en esta línea mejorando las tareas que se proponen a FM de tal manera que a través de estas se promueva el desarrollo de competencias docentes.

Agradecimientos.

Trabajo en colaboración con los equipos de los proyectos: PID2019-104964GB-100 y PGC2018-098603-B-I00 (MICINN); y los equipos de los grupos de investigación: SGR-2017-101 y SGR-2017-1181.

Referencias

Aravena, M., Gutiérrez, A., y Jaime, A. (2016). Estudio de los niveles de razonamiento de Van Hiele en alumnos de centros de enseñanza vulnerables de educación media en Chile. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *34(1),* 107-28.

Báez, R. e Iglesias, M. (2007). Principios didácticos a seguir en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría en la UPEL "El Mácaro". *Enseñanza de la Matemática*, *12,* 67-87.

Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special. *Journal of teacher education*, *59(5),* 389-407.

Beswick, K. y Chapman, O. (2012). Discussion group 12: Mathematics teacher educators' knowledge for teaching. *12th International Congress on Mathematics Education*. ICME, Seoul, South Korea.

Brink, J. y Streefland, L. (1979). Young children (6-8) – ratio and proportion. *Educational Studies in Mathematics, 10*, 403-420.

Burgués, C., y Sarramona, J. (Eds.). (2013). *Competències bàsiques de l'àmbitmatemàtic*. Barcelona: Departament d' Ensenyament, Generalitat de Catalunya.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., y Ribeiro, C. M. (2017). Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) in the «Dissecting an equilateral triangle» problem. *RIPEM-International Journal for Research in Mathematics Education*, *7*(2), 88-107.

CCSSO (2010). Common core state standards for mathematics. Washington, DC: NGA Center y CCSSO. Recuperado de: http://www.corestandards.org/wpcontent/uploads/Math_Standards.pdf

Climent, N., Espinoza-Vásquez, G., Carrillo, J., Henríquez-Rivas, C. y Ponce, R. (2021). Una lección sobre el teorema de Tales, vista desde el conocimiento especializado del profesor. *Educación Matemática*, *33(1),* 98-124.

Copley, J. V. (2000). *The young child and mathematics*. Washington, DC: National Association for the Education of Young Children.

Cordier, F. y Cordier, J. (1991). L'application du théorème de Thales. Un exemple du rôle des représentations typiques comme biais cognitifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 11(1), 45-64.

Delgado-Rebolledo, R. y Zakaryan, D. (2019). Relationships between the knowledge of practices in mathematics and the pedagogical content knowledge of a mathematics lecturer. *International Journal of Science and Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s10763-019-09977-0

Duperret, J. C. (1996). Por un Thales dinámico. En E. Barbin y R. Douady (Coord.), *La Enseñanza de las Matemáticas: Puntos de Referencia entre los Saberes, los Programas y la Práctica*. Grenoble: IREM.

Espinoza, L., Barbé, J., Mitrovich, D., y Rojas, D. (2007). El problema de la enseñanza de la geometría en la educación general básica chilena y una propuesta para su enseñanza en el aula. In *II Congreso Internacional sobre la Teoría Antropológica de lo Didáctico*. Francia: Uzès.

Font, V., Godino, J. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics, 82*, 97-124.

Freudenthal, H. (1983). Didactical phenomenology of mathematical structures. Dordrecht: Reidel.

Giménez, J. y Vanegas, Y. (2020). Miradas iniciales de futuros maestros de Educación Primaria sobre Geometría. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 105*. 25-35.

Godino J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. UNIÓN: *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *20*, 13-31.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 39*(1), 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. y Giacomone, B. (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática, 20*, 288-297.

Godino, J., Giacomone, B., Font, V. y Pino-Fan, L. (2018). Conocimientos profesionales en el diseño y gestión de una clase sobre semejanza de triángulos. Análisis con herramientas del modelo CCDM. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 13,* 63-81.

Gualdrón, E. (2011*)*. Análisis y caracterización de la enseñanza y aprendizaje de la semejanza de figuras planas. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Valencia. España.

Gualdrón, E. (2014). Descriptores específicos de los niveles de Van Hiele en el aprendizaje de la semejanza de polígonos. *Revista Científica, 20,* 26-36.

Hart, K. M. (1988). Ratio and proportion. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (pp. 198-219), Reston: NCTM y Lawrence Erlbaum Associates.

Jaime, A., y Gutiérrez, A. (2016). El aprendizaje de conceptos geométricos en la Educación Primaria. En J. Carrillo y otros (Eds.), *Didáctica de las matemáticas para maestros de Educación Primaria,* (pp. 197-215), Madrid: Paraninfo.

Lemonidis, C. (1991). Analyse et réalisation d'une expérience d'enseignement del'homothétie. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 11*(23), 295-324.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Va.: The National Council of Teachers of Mathematics (Trad. Castellana, *Principios y estándares para la educación matemática.* Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, 2003).

Pfaff, N. (1997-98). Le rôle de l'analyse des taches pour un enseignant. *Petit x, 48*, 23-35.

Pino-Fan, L. y Godino, J. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *PARADIGMA*, *36*(1), 87-109.

Pino-Fan, L. R., Assis, A., y Castro, W. F. (2015). Towards a methodology for the characterization of teachers' didactic-mathematical knowledge. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 11*(6), 1429-1456.

Samuel, M., Vanegas, Y. y Giménez, J. (2016). Visualización y simetría en la formación de maestros de Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 5*(1), 21-32.

Swoboda, E. y Tocki, J. (2002). How to prepare prospective teachers to teach mathematics: Some remarks. *Second International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level), 1,* 1-10.

Vanegas, Y., Font, V., y Pino-Fan, L. (2019). Análisis de la práctica profesional de un profesor cuando explica contenidos de medida. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 43-62). Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca.