

COMPETENCIA DE ANÁLISIS COGNITIVO DE TAREAS DE PROPORCIONALIDAD EN MAESTROS EN FORMACIÓN

PROSPECTIVE TEACHERS' COMPETENCE FOR COGNITIVE ANALYSIS OF PROPORTIONALITY TASKS

Mauro Rivas, María Burgos, Juan D. Godino

Universidad de Granada. (España)

maurorivas@ugr.es, mariaburgos@ugr.es, jgodino@ugr.es

Resumen

En el marco de una investigación de diseño, basada en el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos, se presentan los resultados de una intervención formativa con estudiantes para maestro de educación primaria centrada en el desarrollo de la competencia de análisis cognitivo en tareas de proporcionalidad. Esta competencia involucra los conocimientos implicados en los procesos de resolución de problemas, así como de los posibles conflictos que pueden surgir en su aprendizaje. Los estudiantes para maestro analizan las soluciones propuestas por alumnos de primaria a problemas de proporcionalidad. Para ello identifican los objetos y significados puestos en juego en las resoluciones, así como el nivel de algebrización de las mismas. Los resultados revelan la complejidad involucrada en el desarrollo de esta competencia, por maestros en formación inicial, quienes prefieren procesos de resolución basados en la regla de tres en detrimento de procedimientos intuitivo-informales o aritméticos.

Palabras clave: proporcionalidad, análisis cognitivo, enfoque ontosemiótico.

Abstract

In the framework of a design-based research, based on the onto-semiotic approach to mathematical knowledge and instruction, the results of a training intervention with prospective primary school teachers are presented, focused on developing the cognitive analysis competence in proportionality tasks. This competence involves the knowledge put at stake in problem-solving processes, as well as the possible conflicts that may arise in their learning. The prospective teachers analyze the solutions proposed by primary school pupils to some proportionality problems. To do so, they identify the objects and meanings involved in the solutions, as well as their algebraization levels. The results reveal the complexity of developing this competence by the prospective teachers, who would rather use problem solving processes based on the rule of three instead of intuitive-informal or arithmetic procedures.

Key words: proportionality, cognitive analysis, onto-semiotic approach.

■ Introducción

Diversas investigaciones en educación matemática señalan la necesidad de implementar estrategias formativas para promover el desarrollo de conocimientos didáctico-matemáticos del futuro profesor, mediante el análisis de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (English, 2008; Ponte y Chapman, 2016). Un conocimiento limitado del contenido matemático dificulta a los profesores la tarea de interpretar las respuestas de los alumnos para tomar decisiones pertinentes. Sin embargo, el conocimiento del contenido no es suficiente para que los profesores de matemáticas reconozcan la comprensión matemática de los alumnos (Fernández, Llinares y Valls, 2012; 2013; Son, 2013).

En el caso específico del razonamiento proporcional en educación primaria, lograr que los maestros adquieran los conocimientos y las competencias requeridos para un desarrollo adecuado de la actividad de enseñanza-aprendizaje en torno a la proporcionalidad, sigue siendo una tarea pendiente en el contexto de la formación inicial de profesores de primaria. Investigaciones como las de Fernández et al. (2012, 2013), muestran que los maestros tienen dificultades para interpretar las respuestas de alumnos de educación primaria cuando resuelven tareas relacionadas con la proporcionalidad, así como para identificar estrategias de resolución no habituales. En particular, los resultados de Fernández et al. (2012) ponen de manifiesto las limitaciones de los maestros en formación para identificar si las estrategias utilizadas por los estudiantes de primaria son correctas o no en diferentes situaciones proporcionales y no proporcionales, ya que no discriminan ambas situaciones, y que consideran menos potentes las estrategias de solución de alumnos que no usan algoritmos.

Esta investigación se enmarca en un proyecto de investigación cuyo objetivo general es analizar y promover el desarrollo profesional en los futuros maestros de educación primaria sobre conocimientos y competencias didáctico-matemáticas relativos al razonamiento proporcional y su conexión con el razonamiento algebraico. En particular, en este trabajo se informa del diseño, implementación y resultados de una acción formativa con futuros maestros de educación primaria dirigida al desarrollo de la competencia de análisis cognitivo utilizando una tarea de proporcionalidad.

■ Marco teórico

En el marco del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos se ha elaborado un modelo de categorías de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (modelo CCDM) del profesor de matemáticas (Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017) que puede orientar la formación de profesores de matemáticas. En dicho modelo se acepta que el profesor debe tener conocimiento matemático *per se*, esto es conocimiento común relativo al nivel educativo donde imparte su docencia, y conocimiento ampliado que le permita articularlo con los niveles superiores. Además, a medida que se ponga en juego algún contenido matemático el profesor debe tener un conocimiento didáctico-matemático de las distintas facetas (epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, mediacional e instruccional) que afectan el proceso educativo. En particular, la faceta cognitiva concierne al conocimiento de cómo lo estudiantes aprenden, razonan y entienden las matemáticas y cómo progresan en su aprendizaje. Así, la competencia para el análisis cognitivo requiere: (a) identificar e interpretar diferentes estrategias de resolución de un problema, (b) reconocer los elementos matemáticos puestos en juego en cada caso y (c) analizar el carácter más o menos algebraico de las prácticas matemáticas involucradas en las resoluciones propuestas.

El modelo de niveles de algebrización de la actividad matemática de Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi (2014) permite a los profesores conocer las características del razonamiento algebraico elemental mediante el reconocimiento de objetos y procesos propios del mismo, por tanto, el reconocimiento por parte de los futuros profesores de los diferentes niveles de algebrización, se considera un aspecto clave del modelo CCDM. Los criterios para delimitar los distintos niveles están basados en los tipos de objetos (conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos), tipo de representaciones usadas (lenguajes en sus diversos registros), procesos de generalización implicados y el cálculo analítico que se pone en juego en la actividad matemática correspondiente. Esto permite

distinguir distintos significados de la proporcionalidad, según la propuesta de Godino, Beltrán-Pellicer, Burgos y Giacomone (2017):

- *Aritmético, nivel 0 de algebrización*: se caracteriza por la aplicación de procedimientos de cálculo aritméticos (multiplicación, división). En la práctica intervienen valores numéricos particulares y se aplican operaciones aritméticas sobre dichos valores; no intervienen objetos y procesos algebraicos.
- *Proto-algebraico de nivel 1 de algebrización*: está centrado en la noción de proporción, de manera que comprende el reconocimiento del valor unitario en un procedimiento de reducción a la unidad, y el uso de representaciones diagramáticas de soluciones.
- *Proto-algebraico de nivel 2 de algebrización*, relativo a la resolución de un problema de valor faltante, basada en el uso de las razones y proporciones, que involucra el uso de una incógnita, el planteamiento de una ecuación de la forma $Ax = B$ y el cálculo analítico involucrado en su resolución.
- *Algebraico-funcional, nivel 3 de algebrización*: se caracteriza por la aplicación de la noción y propiedades de la función lineal.

■ Método

La investigación en la que se enmarcan los resultados, de los cuales se informa en este documento, es una ingeniería didáctica en el sentido generalizado que proponen Godino y colaboradores (Godino, Rivas, Arteaga, Lasa y Wilhelmi, 2014), usando el EOS como teoría de base. Se trata de una experiencia formativa en el ámbito de la formación inicial de maestros de educación primaria con un grupo de 33 estudiantes, en el marco de la asignatura Diseño y Desarrollo del Currículum de Matemáticas, del tercer curso del grado de Educación Primaria en España.

En primer lugar, se llevó a cabo un taller de 2 horas de duración en el que se presentaron las características del Razonamiento Algebraico Elemental (RAE) en primaria, y el modelo de los niveles de algebrización de la actividad matemática de Godino et al. (2014). Se perseguía reflexionar y profundizar en la distinción de tipos de objetos y procesos algebraicos en tareas matemáticas escolares y la asignación de niveles de razonamiento algebraico a la actividad matemática realizada al resolver tareas escolares, algunas de las cuales correspondían a situaciones de proporcionalidad. En concreto, dado que se espera desarrollar en los futuros maestros la competencia para analizar las prácticas desarrolladas por alumnos de primaria, se utilizó la situación del puzle de Brousseau para presentar: 1º el análisis epistémico de posibles soluciones con distintos niveles de algebrización, y 2º el análisis cognitivo de respuestas dadas por alumnos de 5º curso de educación primaria a la misma, dándoles a los futuros maestros la posibilidad de reflexionar sobre la presencia de objetos algebraicos en las producciones de alumnos.

En la siguiente sesión (también de 2 horas de duración), los futuros maestros debían trabajar en equipos para responder a las siguientes consignas:

1. Resolver cuatro problemas matemáticos relativos a la proporcionalidad directa en educación primaria, haciendo uso de al menos dos procedimientos de resolución.
2. Identificar la secuencia de prácticas elementales y los objetos matemáticos (conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) puestos en juego en los procesos de resolución aplicados.
3. Identificar dificultades que potencialmente se pueden presentar en la resolución de los problemas tratados.
4. Asignar de forma justificada los niveles de algebrización implicados en las resoluciones realizadas.
5. Enunciar tareas cuya resolución implique cambios en los niveles de algebrización requeridos.
6. Analizar las respuestas dadas por cuatro alumnos (A, B, C, D) de educación primaria a dos problemas de proporcionalidad directa: dos alumnos (A, B) dan respuesta al primer problema y otros dos alumnos (C, D) dan respuesta al segundo problema. Para la realización de esta sexta y última actividad, por parte de los maestros en formación inicial, se les planteó las cuestiones siguientes:
 - a. *¿Crees que son correctas las respuestas (procedimiento y argumento) dadas por los niños? Justifica tu respuesta.*

- b. Identifica los tipos de lenguajes (natural, numérico, diagramático, simbólico, ...), conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos que identificas en dichas soluciones.
- c. Asigna de forma justificada el nivel de algebraización a sus actividades.

Por razones de espacio, en este documento sólo se informa sobre los resultados de la realización de esta última actividad. La descripción antes expuesta, de las actividades precedentes a esta última, tiene como objeto contextualizar su realización. Mencionemos además que las respuestas de los alumnos de primaria que los participantes debían analizar habían sido usadas como ejemplo de análisis epistémico y reconocimiento de objetos y procesos algebraicos en la fase de formación. En la Figura 1 se presentan los enunciados de estos dos problemas y las soluciones propuestas por los alumnos de primaria.

Figura 1. Problemas propuestos y resoluciones dadas por alumnos de primaria.

Problema 1: Se quiere repartir 40 canicas entre Juan y Saúl según la razón 3:5. ¿Cuántas recibirá cada niño? Explica tu respuesta.

Resolución dada por el alumno A Resolución dada por el alumno B

Problema 2: Para ir a la escuela los alumnos utilizan dos medios de locomoción. Por cada alumno que va en coche hay 3 que van andando. Si hay 212 alumnos en la escuela ¿cuántos alumnos utilizan cada medio de locomoción?

Resolución dada por el alumno C Resolución dada por el alumno D

Elaboración propia.

Un análisis cognitivo previo de estas soluciones mostró aspectos de interés didáctico-matemático para la formación inicial de profesores. Entre algunos de los aspectos generales identificados cabe destacar los siguientes:

- El alumno A obtiene correctamente el resultado por medio de una estrategia de construcción progresiva, basada en una idea intuitiva de reparto. Se emplea un lenguaje natural, numérico e icónico y se opera con valores particulares. La actividad matemática que desarrolla se considera de nivel 0 de algebraización.
- La resolución realizada por el alumno B también es correcta. Una vez determinado el “todo parcial” (número de grupos de canicas en reparto mínimo), plantea las fracciones que corresponden a la relación de canicas que recibe cada niño respecto del total en el reparto y resuelve, mediante operaciones aritméticas (multiplicación en

crúz). El nivel de algebrización en este caso es 1, puesto que, a pesar de expresar las razones involucradas y usar x para referirse a un valor desconocido, no formula una ecuación y los procedimientos realizados son de carácter aritmético.

- Para determinar el número de alumnos que van en coche, el alumno C plantea una ecuación proporcional a partir de la tabla, y la resuelve, por lo que la actividad matemática tiene un nivel de algebrización 2. La justificación se basa en la equivalencia de fracciones obtenidas a partir de la relación de proporcionalidad entre las magnitudes “alumnos que van al colegio andando” y “alumnos que utilizan el coche para ir”.
- La resolución realizada por el alumno D se basa en una idea intuitiva de la relación de proporcionalidad. Aunque no llega a la respuesta correcta, establece la secuencia de valores que se corresponden entre las magnitudes “niños en coche” (columna: “Alumnos C”) y “niños a pie” (columna: “Alumnos P”), buscando las cantidades que cumplen que la suma de ambos es 212. El nivel de algebrización es 1, puesto que establece una correspondencia entre magnitudes proporcionales y usa una secuencia de las mismas.

Los estudiantes para maestro trabajaron en ocho equipos, en su mayoría de cuatro estudiantes.

El trabajo se desarrolló siguiendo la dinámica habitual de las sesiones de clases prácticas: (a) tienen lugar después de la sesión de teoría, (b) durante una hora, en la que se da la práctica, tiene lugar una breve explicación del profesor (15 minutos aproximadamente) y el inicio de su realización por parte de los estudiantes (45 minutos aproximadamente), (c) generalmente requieren de tiempo adicional de trabajo en equipo no presencial para su finalización. Al concluir los informes relativos a las prácticas, estos son entregados al profesor, por medio de la plataforma de trabajo Moodle.

La información a ser analizada se obtuvo de las respuestas dadas, en forma escrita, por los futuros maestros a la consigna propuesta. Los resultados se obtuvieron por medio del análisis de contenido de tales respuestas. Este análisis estuvo orientado a la identificación de respuestas significativas sobre el estado inicial de los significados personales de los estudiantes, el reconocimiento de conflictos y evaluación de los progresos en el desarrollo de la competencia pretendida.

Los tipos de datos a ser considerados provienen de los apartados de la consigna. Para su análisis hemos seguido la siguiente codificación:

- RCa: valoración argumentada del procedimiento y el argumento dado por los alumnos de primaria a sus soluciones, lo cual se refiere, específicamente, a la identificación de prácticas y corrección en la solución de los alumnos de primaria.
- RCb: identificación de los tipos de objetos matemáticos (lenguajes, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos) puestos en juego en la resolución, lo cual se refiere al reconocimiento de objetos en las prácticas de los alumnos de primaria.
- RCc: asignación argumentada de los niveles de algebrización o identificación del nivel de algebrización en las prácticas de los alumnos de primaria.

Asimismo, haremos uso la codificación: E1, E2, ..., E8, para referirnos a los ocho equipos de trabajo. Para referirnos a la valoración realizada por un equipo, por ejemplo E1, a la resolución de un alumno, por ejemplo A, emplearemos la codificación E1-A.

■ Resultados

Identificación de prácticas y corrección en la solución de los alumnos de primaria

En general, la mayoría de los maestros en formación evalúan apropiadamente el procedimiento y resultado de los cuatro alumnos de primaria. Sin embargo, sus interpretaciones de los argumentos expuestos en las resoluciones se

basan principalmente en la descripción de los procedimientos y no en los significados (Burgos, Godino y Rivas, 2019; Fernández et al, 2013). En la Figura 2 se muestra, como ejemplo de este tipo de respuestas, la explicación dada por el equipo E1 a la respuesta del alumno A. Asimismo, se puede ver en esta figura que el equipo E1 muestra poca comprensión del procedimiento empleado por el alumno A y la conexión con su argumento, lo cual es una manifestación común por parte de la mayoría de los equipos al valorar la resolución del alumno A.

Figura 2. Valoración de E1 del grado de corrección de la solución de A.

En el caso de la solución del alumno A el procedimiento sería el adecuado ya que va repartiendo por igual las canicas a Saúl y Juan pero el argumento que da más abajo resulta lioso ya que habla de repartir las canicas según los días y viene a confusión ya que emplea el 8 que ha sacado de 3:5 sin tener conocimiento de que eso no es así, el procedimiento no tiene nada que ver con el argumento dado. El lenguaje utilizado es tanto natural como numérico haciendo hincapié en

Elaboración propia.

Se observa que los maestros en formación inicial muestran dificultades para analizar y evaluar estrategias de resolución no usuales de las tareas propuestas. Al igual que E1 piensa que existe un error en la argumentación que presenta el alumno A (Figura 2), E7 considera incorrecta esta resolución, mientras que E4 señala: "...se podría resolver de manera más sencilla, utilizando un lenguaje menos enrevesado, que al fin y al cabo, más adelante le costará entender". Esto también se puede observar en la Figura 3, en las valoraciones realizadas por E6.

Figura 3. Argumentos sobre el uso de la regla de tres dados por E6.

Consideramos que la respuesta que aporta el alumno A es correcta pero los argumentos que expone no quedan completamente claros; puesto que el procedimiento que sigue es abstracto y en el resultado no expresa de manera entendible el proceso que ha seguido.

[...]

Consideramos que la respuesta que aporta el alumno B es correcta ya que argumenta de manera ordenada y clara especificando los pasos que sigue y la información sobre la que trabaja.

Elaboración propia.

Una situación similar a la anterior se presenta al valorar la resolución dada por el alumno D. Por ejemplo, E8 hace una valoración muy limitada al considerar que el alumno D desarrolla un procedimiento erróneo (Figura 4). E8 parece obviar que este alumno hace uso de una sucesión de magnitudes proporcionales, que podrían conducir a la solución correcta del problema. Estos resultados parecen indicar que la valoración positiva de las respuestas a un problema, por parte de maestros en formación inicial, se basa esencialmente en el uso de procedimientos usuales (sobre todo el de la regla de tres).

En este sentido, se observa que el uso de la regla de tres juega un papel fundamental en las valoraciones dadas por los maestros en formación inicial, quienes lo consideran el procedimiento preferible en las situaciones de proporcionalidad. Por ejemplo, en la respuesta de E8 (Figura 4), se puede observar esta tendencia. Además, como

se muestra en la Figura 4, aun cuando el procedimiento empleado conduzca a una solución correcta, el uso de la regla de tres es el mejor valorado por los maestros en formación inicial. Estos resultados parecen indicar que, para los estudiantes para maestro, la regla de tres ocupa un lugar central para caracterizar la relación de proporcionalidad.

Figura 4. *Respuesta del E8 al evaluar las resoluciones dadas por los alumnos C y D.*

En el problema 2 podemos observar como el alumno C aporta una solución correcta con un simple procedimiento como es una regla de tres entre los alumnos que van en coche y el número total de alumnos lo que le da una perfecta concordancia entre por cada alumno que va en coche tres van andando sin que le sobre ninguno, que es lo que le ha pasado al alumno D, que su procedimiento es erróneo ya que ha llevado la proporción hasta casi el número total de alumnos, sobrándole dos, con lo cual piensa que estos van andando si o si, pero con esta solución no habría 1 alumno en coche por cada 3 que van andando ya que sobran dos, con lo cual este alumno está equivocado.

Elaboración propia.

Por otro lado, se debe reconocer que posiblemente la buena organización y la facilidad que ofrece seguir la resolución dada por el alumno B, deseables en cualquier resolución de problemas, haya influido para obviar o desconocer el aspecto intuitivo y “natural” de las resoluciones de los alumnos A y D.

Reconocimiento de objetos matemáticos en las prácticas de los alumnos de primaria

En lo relativo a la identificación de los tipos de objetos matemáticos puestos en juego en la resolución (lenguajes, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos), hemos identificado tres tipos de respuestas representativas de las 32 presentadas por los equipos:

- *Identificación nominal-descriptiva de objetos* (nombres de objetos, descripción de procedimientos). En esta categoría se encuentran análisis como el de E8, en la descripción de los objetos involucrados en la práctica desarrollada por el alumno B.

Solución Alumno B \Rightarrow *Lenguaje natural, numérico, icónico, gestual, se usan símbolos para operar con ellos. Conjuntos, clases o tipos de números, significado relacional de la igualdad, operaciones aplicando propiedades del álgebra del conjunto de números naturales e igualdad como equivalencia (E8).*

Observamos en la descripción de E8 que la descripción de los objetos se conecta con los característicos de los niveles de algebrización aunque no de forma correcta.

- *Lista de objetos identificados.* En esta categoría de respuestas se encuentran aquellas en las que los futuros maestros enumeran los objetos según sus tipos. Por ejemplo, tal es el caso de la descripción de E5 para la solución del alumno C:

Solución C:

Tipo de lenguaje: escrito, numérico, simbólico y tabular.

Conceptos: cantidades, cifras, proporcionalidad directa, despejar x, multiplicación y división.

Procedimientos: tabla representativa, proporcionalidad directa, multiplicar y dividir

Argumento: el problema va acompañado de una solución redactada por parte del alumno.

Observamos que E5 indica conceptos que son procedimientos (“despejar x”) y procedimientos que son conceptos o propiedades (“proporcionalidad directa”). El argumento hace referencia a la presencia de explicación por parte del alumno y no al tipo de éste.

- *Uso de una tabla objetos/significados.* En la Figura 5 mostramos un ejemplo de esta categoría, en la que el equipo E3 elabora una configuración donde los objetos están referidos a cada práctica elemental identificada.

Figura 5. Identificación de objetos asociada a prácticas elementales de la solución de A, por E3.

b)

<i>Secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea</i>	<i>Objetos referidos en las prácticas (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos.)</i>
1. Se supone que el reparto es constante día a día.	Conceptos: cantidad, suma, secuencia limitada. Proposición: el reparto es constante.
2. Se reparten 8 canicas al día. Para Juan 3 canicas y para Saúl 5.	Conceptos: correspondencia entre cantidades y personas. Proposición: la imagen de la suma es la imagen de las imágenes.
3. Hay 40 canicas, por lo que se reparten en 5 días.	Procedimiento: cálculo de días según las canicas que se dan cada día, hasta llegar a 40. Argumento: se realiza una división de 40 entre 8 y da un resultado de 5 días.
4. Si son 5 días a uno le damos 5 canicas y al otro 3.	Procedimiento: cálculo de canicas según días y canicas totales. Argumento: si son 5 días y uno recibe 5 y el otro 3 se multiplica cada cantidad por los días y da resultado el número total de cada uno.

Elaboración propia.

La respuesta de los equipos a la identificación de los objetos, corresponde a la primera categoría. Salvo E5 que realizó un listado de objetos según tipos y E3 que elaboró configuraciones ontosemióticas como la mostrada en la figura 5 para las distintas respuestas. Aun cuando E2 y E3 presentan una tabla para identificar objetos/significados puestos en juego en la resolución de los problemas, la identificación que hace E2 no es similar a la de E3. En la Figura 6 se muestra la identificación de objetos en la resolución del alumno A, elaborada por el E2. En esta se puede observar que, de manera general, E2 presenta una identificación nominal-descriptiva de objetos del tipo RCb1, sin embargo lo hace en una tabla e intenta dar significados a algunos de los objetos identificados: significado operacional de la igualdad y tipo de lenguaje simbólico. No obstante, se observa que E2 sólo identifica los significados más elementales asociados a la identificación del nivel de algebrización de las prácticas de los alumnos (figura 6) lo cual también es realizado por la mayoría de los equipos incluidos en la primera categoría.

Figura 6. Lista de objetos elaborada por E2 en el análisis de la resolución del Alumno A.

b)

OBJETOS	TRANSFORMACIONES	LENGUAJES
- Números particulares -Significado operacional de la igualdad (operación igual a respuesta) -Símbolos literales como receptores de números particulares	Operaciones aritméticas con números particulares	Natural, numérico, icónico, gestual; pueden intervenir símbolos que refieren a datos desconocidos pero no se opera con ellos.

Elaboración propia.

Por su parte, en el reconocimiento realizado por el E3 (Figura 5), se observa una actuación más acertada al dar un significado de uso a los objetos identificados. Se puede observar que E3 muestra una mayor comprensión de la

resolución analizada. Esto podría ser un indicador de que el uso de la configuración ontosemiótica (secuencia de prácticas elementales, identificación de objetos emergentes en éstas) permite una mayor reflexión sobre las prácticas realizadas en la resolución del problema. Se debe hacer notar que este equipo es el único que califica con un “muy bien” la resolución dada por el alumno A. Este hecho, en todo caso, requerirá de mayor investigación.

Teniendo en cuenta estos resultados, se observa que la mayoría de los maestros en formación inicial muestran dificultades para identificar proposiciones y argumentos en las soluciones elaboradas por los alumnos de primaria. En las respuestas dadas por los equipos, estos sólo reconocen con mayor pertinencia los tipos de lenguaje, los conceptos y los procedimientos puestos en juego en las resoluciones analizadas. Además, este reconocimiento es generalmente nominal-descriptivo (nombres de los conceptos, descripción de los procedimientos), es decir, no se presentan significados de uso asociados a los mismos (Burgos et al, 2019; Fernández et al, 2013). Sólo uno de los equipos (E3) presenta una secuencia de las prácticas elementales puestas en juego en las cuatro resoluciones e identifica objetos y significados utilizados en esas prácticas. Es interesante observar que esto no se le pedía en la consigna de la tarea, lo cual es un indicador de que el equipo decide utilizar la herramienta de identificación ontosemiótica para facilitar su análisis.

Identificación del nivel de algebrización en las prácticas de los alumnos de primaria

Con relación a la asignación justificada de los niveles de algebrización, se observa que la mayoría de los equipos asigna correctamente los niveles de algebrización a las prácticas de los alumnos (19 de 32), aunque encontramos 13 de 32 asignaciones incorrectas. Las asignaciones erróneas se dan en los dos sentidos: una asignación de nivel inferior a uno superior (por 5 equipos en las prácticas de C y D) y una asignación de nivel superior a uno inferior (por 4 equipos, en la práctica de B, fundamentalmente). Veamos cómo se manifiestan estos dos tipos de asignaciones.

El primer tipo de asignaciones erróneas se presentan con las prácticas de los alumnos C y D, en las figuras 7 y 8 se presentan ejemplos de cada caso. En el caso del alumno C, se puede observar que E1 niega el cálculo analítico realizado en la práctica de dicho alumno. Este tipo de error puede estar asociado a una omisión o desconocimiento del cálculo analítico en el que se opera con x .

Figura 7. *Asignación de nivel 1 a la actividad del alumno C (nivel 2) realizada por E1.*

lenguaje natural, numérico y simbólico utilizando la incógnita en la resolución del problema, analizado todo esto este problema se asocia con el nivel 1 ya que introduce una incógnita aunque no opera con ellas pero si realiza operaciones con números particulares.

Elaboración propia.

En el caso del alumno D, los equipos identifican el uso de números particulares, lenguaje no simbólico y operaciones aritméticas como caracterizadores del nivel 0 de algebrización, dejando sin efecto las relaciones que se establecen entre los números y el grado de generalidad con que se hace uso de éstas.

Figura 8. *Asignación de nivel 0 a la actividad del alumno D (nivel 1) realizada por E2.*

c) Nivel 0, porque usa números particulares, aunque no plasma ninguna operación realizada. Utiliza un lenguaje natural y gestual. También hace uso de números particulares y operaciones aritméticas.

Elaboración propia.

Un aspecto común observado en la asignación errónea de un nivel superior a uno inferior (4 de 7) es considerar que el simple uso de la x en la práctica realizada es suficiente para asignar un nivel 2 o 3 de algebrización. Esto fue observado en la asignación de 4 equipos del nivel de algebrización a la práctica realizada por el alumno B. En la figura 9 se muestra un ejemplo de este tipo de asignación.

Figura 9. *Asignación de nivel 2 a la actividad de B (nivel 1) por E3.*

c) El nivel de algebrización de la respuesta es 2, ya que utiliza variables como incógnitas aunque no se realizan operaciones con las variables para obtener formas canónicas de expresión. Si se opera con números naturales aplicando una estructura algebraica y se utiliza simbólico aunque literal.

Elaboración propia.

Al observar las asignaciones correctas de los niveles de algebrización realizados por los maestros en formación inicial, se puede ver que los objetos mayormente identificados, en un orden decreciente de uso, son: los tipos de lenguajes (simbólico versus no-simbólico), el uso de la incógnita, el uso de números particulares, significado de la igualdad, uso de una ecuación y, con muy poca frecuencia, el cálculo analítico implicado en la resolución. Asimismo, buena parte de la identificación de estos objetos se basan en la descripción del procedimiento de resolución sin llegar a evaluar correctamente el papel de los símbolos literales y el cálculo analítico involucrado en la práctica algebraica. Es necesario profundizar en el carácter algebraico de la actividad matemática, discriminar con mayor precisión las actividades aritméticas de las algebraicas, considerando los tipos de objetos, representaciones, procesos de generalización y cálculo analítico.

■ Conclusiones

El foco de atención de este trabajo ha sido el diseño, implementación y evaluación de una acción formativa centrada en el desarrollo de conocimientos y competencia para el análisis cognitivo de maestros en formación sobre tareas de proporcionalidad. El desarrollo de la competencia de análisis cognitivo del profesor, que incluye reconocer estrategias de resolución no habituales y valorar su grado de corrección, constituye un reto en la formación inicial de maestros. Como hemos observado, la regla de tres sigue ocupando un lugar central en la percepción que tienen los futuros maestros sobre la relación de proporcionalidad, lo cual ha constituido un obstáculo para el desarrollo de esta competencia. Por otro lado, se hace necesaria una mayor instrucción para que los futuros maestros conozcan las formas de argumentación y puedan leer entre líneas el argumento que usan explícita o implícitamente sus alumnos.

Las herramientas de estudio puestas en juego para desarrollar la competencia de análisis cognitivo de maestros en formación inicial, han permitido determinar ciertos conflictos de aprendizaje cuando ellos evalúan las prácticas realizadas por estudiantes de educación primaria al resolver problemas de proporcionalidad directa. Entre algunas de las dificultades identificadas se encuentran: la comprensión, análisis y evaluación de procedimientos de resolución no usuales al resolver problemas de proporcionalidad directa, y la preferencia por el uso de la regla de tres como procedimiento de resolución de este tipo de problemas, llegando este proceso de resolución a jugar un papel fundamental para la caracterización de la relación de proporcionalidad en los maestros en formación inicial (Son, 2013; Toluk-Ucar y Bozkus, 2018).

Consideramos que el desarrollo de la competencia de reconocimiento de los niveles de algebrización fomentará en los maestros en formación inicial la posibilidad de valorar con mayor pertinencia los tipos de problemas y actividades a desarrollar con sus alumnos. En tal sentido, al poner en juego la herramienta de identificación

ontosemiótica de reconocimiento de objetos y procesos ha fomentado la identificación de objetos matemáticos que facultan a una correcta asignación de los niveles de algebrización.

Finalmente, la presencia de dificultades como las referidas, la complejidad de realización de tareas de análisis aquí puestas en juego y la importancia que hemos visto le confiere a la regla de tres los maestros en formación inicial, pueden constituir fuentes de conflictos para promover actividades dirigidas al desarrollo del razonamiento proporcional desde la escuela en los términos propuestos por Mochón Cohen (2012). Los resultados de las actuaciones de los equipos de trabajo indican que este tipo de tareas son un reto para los maestros en formación inicial, resultando conflictivas la identificación y discriminación de los tipos de objetos algebraicos y significados en las prácticas matemáticas desarrolladas por estudiantes de educación primaria.

■ Reconocimiento

Investigación realizada como parte del proyecto de investigación PID2019-105601GB-I00 / AEI / 10.13039/501100011033, Grupo FQM-126 (Junta de Andalucía, España).

■ Referencias

- Burgos, M., Godino J. D y Rivas, M. (2019) Análisis epistémico y cognitivo de tareas de proporcionalidad desde la perspectiva de los niveles de algebrización. *Acta Scientiae*, 21 (4), 63-81.
- English, L. D. (2008). Setting an agenda for international research in mathematics education. In *Handbook of international research in mathematics education*, 2nd Edition (pp. 3-19). New York y London: Taylor and Francis (Routledge).
- Fernández, C., Llinares, C., y Valls, J. (2012). Learning to notice students' mathematical thinking through online discussions. *ZDM. Mathematics Education*, DOI 10.1007/s11858-012-0425-y
- Fernández, C., Llinares, S., y Valls, J. (2013). Primary school teacher's noticing of students' mathematical thinking in problem solving. *The Mathematics Enthusiast*, 10(1), 441-468.
- Godino, J. D., Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, 32(1), 199-219.
- Godino, J. D., Beltrán-Pellicer, P., Burgos, M. y Giacomone, B. (2017). Significados pragmáticos y configuraciones ontosemióticas en el estudio de la proporcionalidad. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en <http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html>.
- Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema*, 31(57)
- Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A. y Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico-semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 34(2/3), 167-200.
- Mochón Cohen, S. (2012). Enseñanza del razonamiento proporcional y alternativas para el manejo de la regla de tres. *Educación matemática*, 24(1), 133-157.
- Ponte, J. P., y Chapman, O. (2016). Prospective mathematics teachers' learning and knowledge for teaching. In L. D. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (3rd ed., pp. 275-296). New York, NY: Routledge.
- Son, J. W. (2013). How preservice teachers interpret and respond to student errors: ratio and proportion in similar rectangles. *Educational studies in mathematics*, 84(1), 49-70.
- Toluk-Ucar, Z., y Bozkus, F. (2018). Elementary school students' and prospective teachers' proportional reasoning skills. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 19(2), 205-222.