

PROBLEMAS MATEMÁTICOS ABIERTOS: PERSPECTIVA DOCENTE

OPEN MATHEMATICAL PROBLEMS: A TEACHING PERSPECTIVE

Gilberto Chavarría, Veronica Albanese
Universidad Nacional. (Costa Rica), Universidad de Granada. (España)
gilberto.chavarría.arroyo@una.cr, vealbanese@ugr.es

Resumen

La resolución de problemas es uno de los ejes vertebradores del currículo matemático de Costa Rica. Aquí nos centramos en las opiniones de docentes en ejercicio de Costa Rica sobre el empleo de problemas abiertos o cerrados, es decir que presentan (o no) varias soluciones y métodos de resolución. La encuesta realizada evidencia un grado de acuerdo medio o bajo respecto a la elección y creación de problemas matemáticos abiertos, sin diferencias significativas entre grupos determinados por el grado de formación, la experiencia laboral y la dedicación a la planificación. Igualmente, entre los problemas propuestos por los docentes, casi todos son cerrados. Esto evidencia la necesidad de brindar capacitaciones a los docentes para la creación de problemas cuyos contextos permitan diversas formas de resolverlos.

Palabras clave: resolución de problemas, perspectiva docente, problemas abiertos

Abstract

Problem solving is one of the main axes of Costa Rican mathematics curriculum. Here we focus on the opinions of in-service teachers in Costa Rica, on the use of open or closed problems, that is, those that present (or not) various answers and problem-solving methods. The survey carried out shows a medium or low degree of agreement regarding the choice and creation of open mathematical problems, without significant differences among the groups, determined by the degree of training, work experience and dedication to planning. Likewise, almost all the problems proposed by the teachers are closed.

Key words: mathematical problems, teaching perspective, open problems

■ Introducción

La resolución de problemas ha estado presente a lo largo de la historia de las matemáticas y del desarrollo mismo de la humanidad. Las inquietudes y necesidades que se iban presentando en las diversas culturas, dieron paso a problemas matemáticos cuyo abordaje fue tan variable, que incluyó desde respuestas inmediatas, soluciones diversas –o ausencia de soluciones- y hasta estudios que abarcaron siglos de trabajo.

La resolución de problemas matemáticos no fue exclusiva para personas brillantes, matemáticos inmortalizados en libros de historia o culturas específicas. Ya desde la Edad Antigua, con la aparición de las escuelas, tanto la escritura como las matemáticas tomaron espacios privilegiados dentro de la enseñanza. Y desde ese entonces, la resolución de problemas tomó un rol protagónico dentro del aprendizaje de las matemáticas (Sigarreta et al., 2006).

En esta línea, para Blanco y Pino (2015) la educación formal puede atender tres aspectos: enseñar para resolver problemas, enseñar sobre la resolución de problemas o bien enseñar vía resolución de problemas. Los tres aspectos no son para nada excluyentes; sin embargo, es precisamente el último, uno de los ejes disciplinares del currículo matemático en Costa Rica, donde se sitúa esta investigación (MEP, 2012).

En este contexto, es esperable que el docente sea capaz de escoger, adaptar o crear problemas que estimulen la acción estudiantil. Esta ha sido una tarea particularmente demandante para los docentes desde que se han implementado los Programas de Estudios de Matemáticas en Costa Rica (Baltodano, 2018). A casi una década de ponerse en marcha estos programas se hace necesario *conocer la perspectiva de docentes respecto a la elaboración y escogencia de problemas matemáticos para desarrollar sus clases a nivel de secundaria* (periodo de la educación formal costarricense que abarca desde séptimo hasta undécimo/duodécimo nivel, para edades entre los 12 y 18 años). Esta comunicación se centrará en las percepciones de los docentes sobre los problemas según la cantidad de soluciones y posibles procedimientos para llegar a la respuesta.

■ Problemas cerrados y abiertos

Trabajar en un enfoque de resolución de problemas, hace imperativo pensar sobre el significado de problema matemático. A pesar de que no existe una única definición, autores como Blanco y Pino (2015) concuerdan que una actividad matemática será un problema cuando presente alguna complejidad en su resolución y que en el momento que se asimile el procedimiento para llegar a la solución, dejará de ser un problema. Es este sentido, conciben que un problema no es inherente a la tarea matemática, sino a la relación que hay entre el individuo y esa tarea. Distinguen un problema de un ejercicio en tanto que el resolutor, cuando se enfrenta a un problema, no cuenta con un procedimiento algorítmico que le conducirá de manera certera a la solución. Además, cabe destacar que lo que se presenta como un problema matemático para un estudiante de primer nivel de primaria, no lo será para un estudiante universitario.

Estándares internacionales indican la resolución de problemas como uno de los procesos vertebrados del currículo de matemática en todas las etapas educativas (NCTM, 2013). En los currículos actualmente vigentes en muchos países la resolución de problemas cobra un papel determinante, y Costa Rica, donde se realiza esta investigación, no es una excepción. En efecto, según el Ministerio de Educación Pública de Costa Rica “un problema es un planteamiento o una tarea que busca generar la interrogación y la acción estudiantil utilizando conceptos o métodos matemáticos” (MEP, 2012, p. 29).

Aunque existe una vasta clasificación para los problemas, para este estudio solo nos basaremos en la que relaciona los problemas con la cantidad de resoluciones y soluciones posibles. A este respecto, Blanco y Pino (2015) recopilan una clasificación que distingue los problemas en cerrados y abiertos. Para ellos, “la posibilidad de varias soluciones y, simultáneamente, diferentes estrategias de [re]solución sería lo que caracterizaría a los problemas abiertos” (p.

189). En contraposición, los problemas cerrados tienen una única solución y una formulación tal que el resolutor es guiado a realizar un único proceso de resolución.

Con respecto a los problemas abiertos, Pita et al. (2011) mencionan tres características que los distinguen:

1. No se ofrece de forma explícita toda la información que es necesaria para resolverlo, pero el resolutor cuenta con los conocimientos y de los medios para obtenerla.
2. La estructura del problema permite a quien intenta resolverlo mostrar creatividad y originalidad para redefinirlo.
3. Existe libertad para elegir restricciones y métodos matemáticos diferentes, permitiendo diversas soluciones

Por su parte, el MEP (2012) menciona a los problemas abiertos como problemas de final abierto y los define como: “Aquellos que admiten varias soluciones y aproximaciones, y que pueden ser oportunidades muy valiosas para introducir conceptos y procedimientos, para organizar la lección o para trabajos extra clase por medio de proyectos.” (p. 475).


Además, el MEP (2012) en los Programas de Estudio de Matemáticas proporciona algunos ejemplos de problemas abiertos. A modo de ilustración, para introducir el conocimiento del Teorema de Pitágoras, proponen este problema:

Diego necesita comprar una escalera para subirse al techo de su casa. El techo está a una altura de 97 pulgadas. Para poder tener una buena estabilidad en la escalera al apoyarse en la pared, las patas de la escalera deben estar a una distancia de entre 30 y 40 pulgadas. ¿Cuál podría ser la medida aproximada de la escalera? (MEP, 2012, p. 315)

Aunque en otro nivel educativo, este podría ser un problema cerrado, no lo es para quienes aún no han trabajado sobre Teorema de Pitágoras. Incluso, en el mismo documento se recalca que: “Es importante analizar tanto las soluciones como las estrategias utilizadas. Además, hay que tomar en cuenta que hay gran variedad de soluciones correctas.” (MEP, 2012, p. 315)

Otro problema abierto que plantea el MEP (2012) se presenta en la figura 1

Figura 1. Ejemplo de un problema abierto proporcionado por el Ministerio de Educación Pública de Costa Rica.

 En un “kinder” se tienen 64 cubos de madera de diferente color y de un decímetro de arista. Si se desea guardarlos en una caja de madera, entonces ¿cuáles podrían ser las dimensiones de la caja?



Elaboración propia.

En este caso, tanto la metodología de resolución, como la solución no son únicas, especialmente al considerar los conocimientos previos que tienen los estudiantes a quienes se les propone este problema.

■ Metodología

Este estudio es de naturaleza exploratoria y descriptiva, con un enfoque mixto: cuantitativo y cualitativo.

Los participantes fueron 67 profesores de matemáticas en ejercicio de Costa Rica, seleccionados mediante un muestreo virtual (González et al., 2018). La muestra se caracterizó según:

- la formación: 43 (el 64,18%) docentes presentan estudios superiores al bachillerato de la especialidad, mientras los restantes 24 (35,82%) poseen bachillerato o un diplomado
- los años de experiencias docente: 29 docentes (43,28%) tienen menos de 10 años de experiencia laboral, mientras 38 docentes tienen 10 o más años de experiencia laboral, para un 57,72%.
- el número de horas que dedican a la planificación: 32 docentes declaran dedicar 3 o más horas semanales a la escogencia o elaboración de problemas, lo que corresponde a un 47,76%, mientras que 35 invierten dos o menos horas en esa labor (52,24%).

Se utilizó un cuestionario como instrumento de recolección de datos, previamente validado mediante juicio de expertos. Para ello se contó con nueve especialistas en distintas áreas de investigación.

Figura 2. Ejemplo de algunas preguntas aplicadas a los docentes.

Según la escala anterior, seleccione la opción que corresponde a su grado de acuerdo con la correspondiente afirmación: *

Marca solo un óvalo por fila.

	1	2	3	4	5
Cuando escojo un problema , prefiero que este permita un solo método de resolución.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Elijo problemas que solamente tengan una respuesta posible.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

Elaboración propia.

Los datos analizados en esta comunicación corresponden a ítems construidos de manera tal que los encuestados deben proporcionar un grado de acuerdo o desacuerdo según Escala Likert (de 1 a 5) respecto a afirmaciones elaboradas por los investigadores sobre diversos aspectos relacionados con la creación y selección de problemas matemáticos para las clases de matemáticas. Además, se analizaron las respuestas a un ítem de respuesta abierta en donde se pedía escoger o elaborar un problema matemático que hubiesen utilizado recientemente en sus clases.

Se realizaron pruebas estadísticas de contraste de hipótesis no paramétricas, debido al tamaño limitado de la muestra.

■ Resultados

Es importante aclarar que, en cada ítem se pidió a los docentes indicar qué tan de acuerdo estaban con determinadas afirmaciones, donde 1 significa estar totalmente en desacuerdo y 5 estar totalmente de acuerdo. Cabe destacar también que los ítems sobre las características de los problemas matemáticos empleados en las clases se formularon diferenciando la creación de problemas matemáticos con la escogencia de problemas matemáticos.

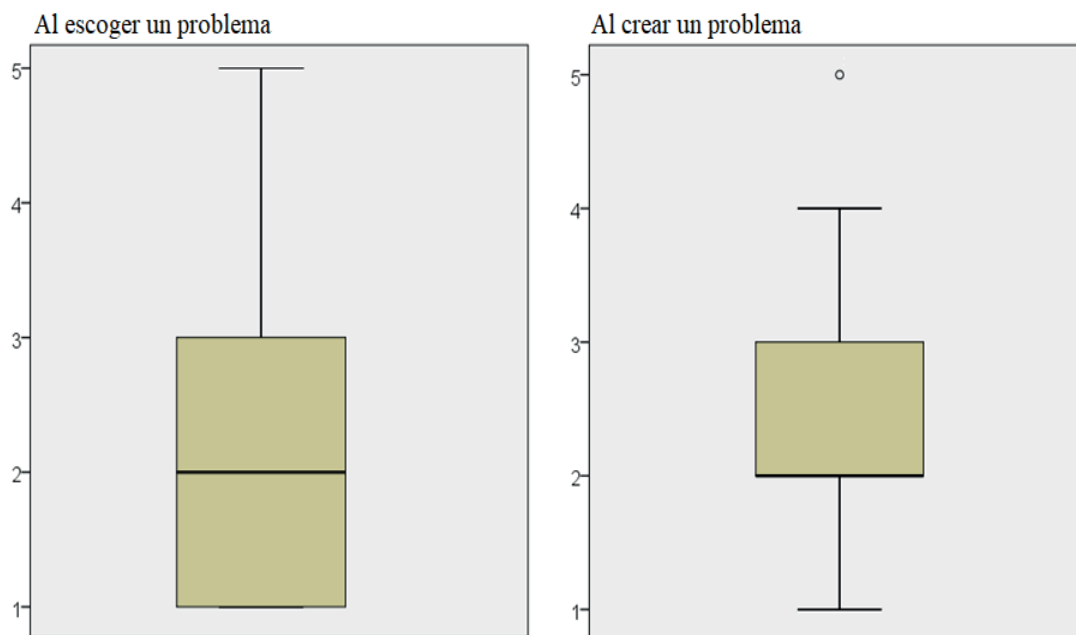
Al consultar a los docentes sobre si estaban de acuerdo en escoger problemas que permitan un solo método de resolución, la media fue de 2,29. En efecto, 59,7% de los encuestados consideraron estar en desacuerdo o totalmente en desacuerdo (puntuación 1 o 2) con escoger problemas cerrados, en contraste con un 10,5% que sí están de acuerdo o totalmente de acuerdo (puntuación 4 o 5). Los docentes que no estaban ni en acuerdo ni en desacuerdo (puntuación 3) fueron el 29,8%.

Con respecto a *crear* problemas con un solo método de resolución, la media fue de 2,37 y un 60% presentó un cierto grado de desacuerdo (puntuación 1 o 2) en elaborar problemas que tienen un solo método para resolverse, contra un 6,2% que está a favor (puntuación 4 o 5). Quienes dieron una puntuación de 3 (medianamente de acuerdo) abarcaron un 33,8%.

Al realizar la prueba de signos de Wilcoxon, se obtuvo como valor estadístico -0,629 y un valor de significación de 0,529 con lo que se concluye que no hubo diferencias significativas entre las opiniones sobre elegir o crear problemas.

En la figura 2 se muestra el diagrama de cajas que sintetiza las opiniones de los docentes, respecto a escoger y crear problemas que tengan un único método de resolución.

Figura 3. Nivel de acuerdo de los docentes con respecto a escoger y crear problemas con un único método de resolución.



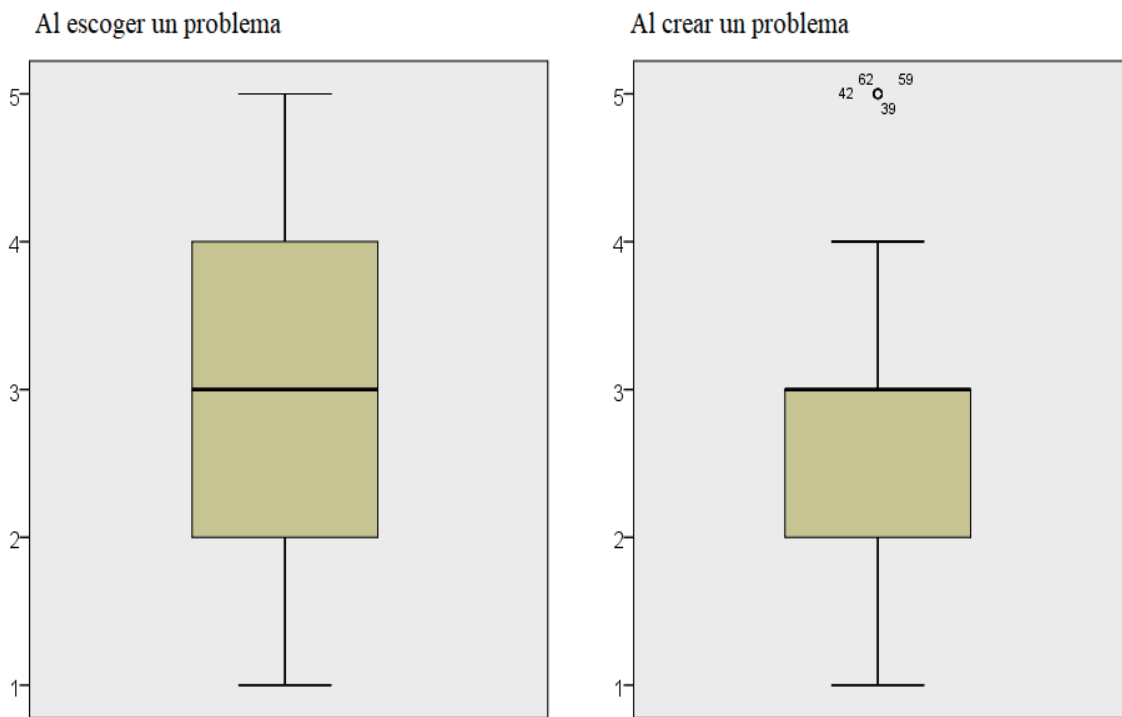
Elaboración propia.

El gráfico muestra como las medianas en ambos casos se ubican en 2, que equivale a estar en desacuerdo. Con respecto a crear problemas matemáticos que tengan un solo método de resolución, se aprecia un valor extremo

ubicado en el valor 5 (totalmente de acuerdo). En ambos casos, el 75% de los encuestados consideran estar de medianamente de acuerdo o totalmente en desacuerdo con este tipo de problemas.

Por su parte, en la figura 3, se muestra las opiniones de los docentes respecto a diseñar y escoger problemas con una única solución. En este caso las medianas coinciden en el valor 3.

Figura 4. Nivel de acuerdo de los docentes con respecto a escoger y crear problemas con una única solución.



Elaboración propia.

Además, al realizar la prueba no paramétrica de Mann Whitney sobre la escogencia de problemas con un único método de resolución, no se identificaron diferencias estadísticamente significativas entre el grado de acuerdo y desacuerdo entre el grupo de docentes que presenta una formación más avanzada que incluya estudios superiores al bachillerato, y los que no presentan formación superior en enseñanza de las matemáticas. Tampoco se presentaron diferencias significativas entre los grupos de docentes según los años de experiencias, o el tiempo que dedican a planear problemas por semana (ver Tabla 1).

Tabla 1. Estadísticos de la prueba Mann Whitney respecto a las opiniones de docentes sobre la escogencia de problemas con un único método de resolución.

Condición	Valor del estadístico Z	Valor de significancia
Experiencia laboral en docencia	-1,425	0,154
Formación profesional	-0,130	0,897
Horas semanales en planear problemas	-0,242	0,809

Elaboración propia.

Por otro lado, en relación con *escoger* problemas que tengan una única solución, la mayoría de los participantes opinaron estar medianamente de acuerdo, con una media de 3,02 detectándose pocos valores extremos. Una situación muy similar se presenta al consultarles sobre la *creación* de problemas con esta condición. En este caso la media del grado de acuerdo y desacuerdo fue de 2,83. Tampoco se presentan diferencias estadísticamente significativas en opiniones con respecto a crear o escoger problemas con una única solución. En las pruebas de Mann Whitney no se evidenciaron diferencias estadísticamente significativas entre las respuestas de los participantes según su experiencia laboral, formación o el número de horas dedicados a la planificación.

Tabla 2 Estadísticos de la prueba Mann Whitney respecto a las opiniones de docentes sobre escogencia de problemas con una única solución.

Condición	Valor del estadístico Z	Valor de significancia
Experiencia laboral en docencia	0,856	-0,182
Formación profesional	0,804	-0,248
Horas semanales en planear problemas	0,176	-1,353

Elaboración propia.

Tabla 3. Estadísticos de la prueba Mann Whitney respecto a las opiniones de docentes sobre creación de problemas con una única solución.

Condición	Valor del estadístico Z	Valor de significancia
Experiencia laboral en docencia	-0,152	0,880
Formación profesional	-0,399	0,690
Horas semanales en planear problemas	-0,382	0,702

Elaboración propia.

Por otra parte, al analizar los 27 problemas que los participantes presentaron en el cuestionario, destacamos que solo 1 de ellos es un problema abierto, que podía admitir más de una respuesta. Esto equivale al 3,7% del total (no todos los docentes contestaron la pregunta)

El único problema abierto tiene como contexto una Cooperativa de productos Lácteos de Costa Rica (Dos Pinos), en la cual se desea cambiar la presentación del envase de la leche semidescremada de un litro, que es la más comercializada en el país. Para tal fin, se realiza un concurso donde se solicita a las personas que indiquen las dimensiones del nuevo envase, de tal modo que se minimicen los gastos de producción, sabiendo que por centímetro cuadrado de cartón Tetra – Pack el costo es de 0,5 colones. Se solicita, por tanto, las dimensiones del envase y el costo según las condiciones dadas.

En este problema, el docente deja libertad al estudiante sobre el método de resolución y aunque la pregunta supone una respuesta única, y con conocimientos de cálculo en efecto esto se cumple, para el nivel de secundaria no es de esperar que se converja a una única solución. Incluso parece que el objetivo del problema no está realmente en la

solución sino en su proceso. Para este caso, con los conocimientos previos de los estudiantes, se esperaría que calculen el área de cada pareja de caras congruentes del envase y que, utilizando las estrategias de ensayo y error vayan cambiando las longitudes hasta encontrar la menor área y por ende el menor costo. Otra posibilidad es usar algún software como Excel y crear las fórmulas en términos del largo, ancho y altura del envase, e ir haciendo las pruebas respectivas; esto también podría ejecutarse con la calculadora. Al ser valores aproximados, podrá haber ciertas diferencias en las soluciones, aunque deberían ser similares. El problema deja abierta la creatividad, e incluso los estudiantes pueden usar el envase ya existente para deducir las fórmulas y realizar las respectivas operaciones. A nivel universitario, si el estudiante tiene conocimientos de cálculo, esto sería un problema cerrado; pero no para secundaria.

La mayoría de los problemas cerrados estaban planteados de manera que se formulara una ecuación o se aplicara una fórmula determinada. Dos ejemplos de este tipo son:

- A. El padre de Juan decide dar la herencia a sus tres hijos, a María le va a tocar la mitad de Juan y a José la tercera parte de María. Si en total son 12 mil metros cuadrados, ¿cuántos, metros cuadrados, recibe cada uno?
- B. Alejandro es arquero en el equipo de fútbol del Liceo Experimental Bilingüe de Belén, en un partido contra el equipo del CTP de Mercedes Norte, rechaza un balón, el cual describe un movimiento parabólico, según la función $h(t) = -0,48t^2 + 2,4t$, donde "t" representa los segundos transcurridos en alcanzar la altura "h", en metros, a la cual se encuentra el balón. De acuerdo con la información anterior, conteste:
¿Cuál es la altura del balón, un segundo después haber "pateado" el balón?
¿Cuál es la altura a los dos segundos?
¿Cuál es la altura máxima que alcanza el balón, y los cuántos segundos alcanza esa altura?
¿Cuántos segundos dura el balón en el aire, hasta llegar nuevamente al césped?

En los dos casos, dependiendo del nivel educativo del estudiante, puede que la actividad planteada sea más un ejercicio que un problema. Esto dependerá de si los alumnos se han ya enfrentado a situaciones similares con anterioridad.

Para el problema A, un estudiante con conocimientos algebraicos buscará plantear una ecuación, o bien, realizar algunas pruebas algebraicas. Si se realiza un procedimiento correcto, se llegará a una única solución.

El problema B podría ser abordado de manera algebraica o con geometría analítica; obteniendo -independientemente del método- una misma respuesta para cada inciso.

■ Conclusiones

Los resultados permiten destacar que hay diferencias de opinión con respecto a la creación o elección de problemas matemáticos que tengan uno o más soluciones, aunque un mayor porcentaje de los encuestados expresan un grado de acuerdo medio o medio-bajo respecto a la creación o selección de problemas matemáticos que tengan uno o más métodos de resolución.

Además, no se evidencia una diferencia estadísticamente significativa entre las opiniones relacionadas a la creación y escogencia de problemas matemáticos cerrados o abiertos y el nivel académico del docente, o sus años de experiencia.

Por otro lado, se destaca que casi todos los problemas propuestos por los docentes (excepto uno) permiten una sola solución y un solo método de resolución. Estos, en su mayoría, pueden resolverse mediante alguna ecuación, aplicación de fórmulas o procedimientos mecánicos. Esto cobra cierta relevancia si se piensa que desde la

investigación se sugiere la propuesta en las aulas de matemáticas de problemas que tengan más soluciones y diversos métodos de resolución (Pita et al., 2011). Esta situación motiva a incentivar a los docentes para que creen problemas matemáticos abiertos, lo cual podría ser posible mediante el uso de contextos reales. De acá se desprende la necesidad de elaborar un curso que tenga como finalidad la elaboración de problemas contextualizados cercanos a la realidad de los estudiantes que permitan distintas formas de resolverlos y soluciones diversas.

■ Referencias

- Baltodano, M. (2018). Desafíos que enfrentan los docentes de Matemática en relación con la planificación didáctica y la mediación pedagógica en la educación secundaria. *Umbral*, 41(2), 25–34. http://www.colypro.com/ee_uploads/revista/UMBRAL-41.pdf.
- Blanco, L., y Pino, J. (2015). ¿Qué entendemos por problema de matemáticas?. In L. Blanco, J. Cárdenas, y A. Caballero (Eds.), *La resolución de problemas de Matemáticas en la formación inicial de profesores de Primaria* (pp. 81-93). Universidad de Extremadura. Servicio de Publicaciones. <http://ddd.uab.cat/record/23388>.
- González, L., Sosa, G., y Fierro, S. (2018). Muestreo virtual online basado en redes sociales para localización de teletrabajadores como participantes de un estudio realizado en Victoria de Durango, México. *PAAKAT: Revista de Tecnología y Sociedad*, 8(15), 21–38. <https://doi.org/10.18381/pk.a9n15.333>.
- MEP. (2012). *Programas de Estudio Matemáticas. Educación General Básica y Ciclo Diversificado*. Ministerio de Educación Pública de Costa Rica.
- NCTM, N. C. of T. of M. (2013). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. SEAM Thales.
- Pita, G., Añino, M., Ravera, E., Miyara, A., Merino, G. A., y Escher, L. (2011). Enseñar Matemática a través de problemas abiertos: un desafío para los docentes (CO). *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática*, March 2015, 11. http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/view/1168/0.
- Sigarreta, J. M., Rodríguez, J. M., y Ruesga, P. (2006). La resolución de problemas : una visión histórica-didáctica. *Boletín de La Asociación Matemática Venezolana*, XIII(1), 53–66. <https://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol13/pruesga.pdf>.