PROPUESTA DE ACTIVIDADES PARA LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

A PROPOSAL OF ACTIVITIES TO WORK MATHEMATICAL MODELING

Ana Luisa Llanes Luna, Carlos Ledezma, Vicenç Font
Universidad de Los Lagos. (Chile), Universitat de Barcelona. (España)
analuisa.llanes@alumnos.ulagos.cl, cledezar25@alumnes.ub.edu, vfont@ub.edu

Resumen
Se reporta la reflexión sobre el diseño de un taller, el cual se encuentra dirigido a profesores de matemática de educación secundaria, cuyo objetivo es introducir a los participantes en la modelización matemática desde un enfoque didáctico-cognitivo. Para ello, se consideran como referentes teóricos, por una parte, el ciclo de modelización desde una perspectiva cognitiva y, por otra, las herramientas propuestas por el Enfoque Onto-Semiótico para el análisis de la actividad matemática. La estructura del taller permite que los participantes pongan de manifiesto sus concepciones sobre el tema, resuelvan problemas ad-hoc a las fases de este ciclo, y que asuman un rol –tanto de estudiantes como de profesores– al momento de abordar la modelización en el aula, pudiendo analizar la actividad matemática que subyace a este proceso. Finalmente, se comentan algunas experiencias previas de implementación de este taller (en su formato extendido) con profesores en distintos niveles de formación, además de reflexionar sobre sus implicancias en la enseñanza.

Palabras clave: formación de profesores, enfoque onto-semiótico, modelización matemática.

Abstract
This paper reports a reflection on the design of a workshop, addressed to secondary school mathematics teachers, which is aimed at introducing participants to mathematical modeling from a didactic-cognitive approach. So, the modeling cycle from a cognitive perspective and the tools provided by the Onto-Semiotic Approach for the analysis of mathematical activity, are considered as theoretical reference. The structure of this workshop allows participants to reveal their conceptions on the topic, to solve ad-hoc problems according to the phases of this cycle, and to assume a role –of both students and teachers– when addressing modeling in the classroom, being able to analyze the mathematical activity that underlies this process. Finally, some previous experiences of implementing this workshop (in its extended format) with teachers at different levels of academic training are discussed, in addition to reflecting on its implications in teaching.

Key words: mathematical modeling, onto-semiotic approach, teachers’ training.

Introducción

Actualmente, existe un amplio consenso a nivel internacional sobre la importancia de incluir la modelización matemática en los currículos de todos los niveles educativos escolares, y en el desarrollo de las competencias asociadas a este proceso (Kaiser, 2020), así como también en la formación de profesores. En la literatura especializada en el campo de la Didáctica de la Matemática, se ha reportado que el trabajo con modelización trae consigo una serie de beneficios, como ayudar a los estudiantes en la mejora de su entendimiento del mundo, dar soporte al aprendizaje de la matemática (motivación, formación de conceptos, mejora en la comprensión y retención), contribuir al desarrollo de varias competencias matemáticas y actitudes apropiadas, propiciar una imagen adecuada de esta disciplina, entre otras (Blum, 2011).

No obstante, en lo que no se ha llegado a un acuerdo transversal, es en cómo hacer concretamente dicha incorporación en el currículo escolar, ya que –además de la problemática que plantean algunos estudios sobre el desconocimiento de algunos profesores para implementar la modelización en el aula (véase Aparisi y Pochulu, 2013; Maaß y Gurlitt, 2010, entre otros)– no hay consenso en cuanto a los objetivos del proceso y a la justificación teórica en el diseño e implementación de su enseñanza, ello derivado de la diversidad de enfoques que se han propuesto en torno a la modelización matemática (Borromeo, 2013).

Con base en lo antes planteado, se diseña este taller para introducir a los profesores del nivel secundario en la modelización matemática desde un enfoque didáctico-cognitivo, cuya importancia reside en que los participantes trabajarán distintas actividades, siguiendo una dinámica activo-participativa, que les permitirá asumir un rol –tanto de estudiantes como de profesores– al momento de abordar la modelización matemática en el aula.

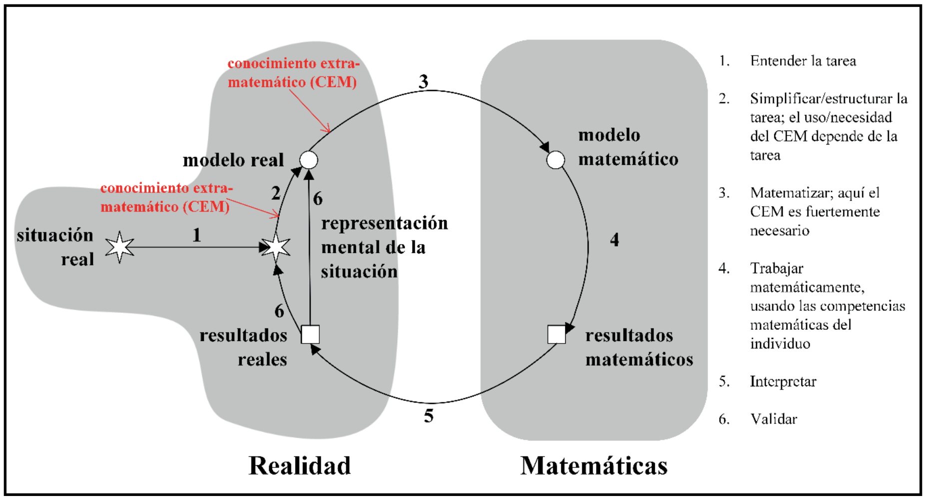
A continuación, se describe la estructura de este trabajo: después de esta introducción, se presenta el fundamento teórico sobre el que se cimenta esta propuesta; luego, se describe la estructura del taller y se presenta un extracto del análisis de la actividad matemática de modelización; finalmente, se comentan algunas experiencias previas de implementación de esta propuesta (en su formato extendido) con profesores en distintos niveles de formación, además de reflexionar sobre sus implicancias en la enseñanza.

Fundamento teórico

En términos generales, el proceso de modelización es entendido como un pasaje sistémico entre el mundo real y el matemático, para así dar solución a una situación-problema de la realidad. Si bien se han diseñado diferentes ciclos para explicar este proceso (Borromeo, 2006), y han emergido distintas perspectivas sobre su implementación (Abassian, Safi, Bush y Bostic, 2020), existe un claro consenso en que su inclusión curricular es necesaria para mejorar el aprendizaje de la matemática.

Este taller considera como referente teórico el ciclo de modelización desde una perspectiva cognitiva (ver Figura 1), propuesto por Borromeo (2018). La elección de este ciclo en particular, se justifica en el alto impacto que tiene en estos momentos dentro de la comunidad académica interesada en la investigación sobre modelización en el ámbito educativo.

Figura 1. *Ciclo de modelización matemática desde una perspectiva cognitiva.*



Fuente: Traducido desde Borromeo (2018, p. 15)

Para explicar este ciclo, se utiliza como ejemplo el problema *El Puerto de Hamburgo* que se presenta en la Figura 2.

Figura 2. *Problema de modelización El Puerto de Hamburgo.*

El Puerto de Hamburgo

En 2007, se enviaron 9,9 millones de contenedores a través del puerto de Hamburgo. Esto lo convierte en el noveno puerto más grande del mundo. En 365 días sólo se colocan dos o tres contenedores en el lugar equivocado. Entonces comienza la búsqueda. El trabajador portuario que encuentra el contenedor tiene un día libre. Por cierto: nunca se ha perdido ningún contenedor en Hamburgo.
Texto original de un boletín de seguros: AOK Rheinland/Hamburg No.2/2008.
¿Qué tamaño tiene el área para el transbordo de los contenedores?

Fuente: Adaptado desde Borromeo (2018, p. 44).

Al leer el enunciado, se pueden observar ciertas características que lo sitúan como un problema de modelización matemática. La información que se presenta no incluye muchos datos relevantes para responder la pregunta que se plantea, lo que hace que el enunciado sea *abierto* y, al mismo tiempo, hace que la situación a resolver sea *compleja*. Además, el contexto en que se sitúa el enunciado es *realista*, pues considera elementos del mundo real (el puerto, los contenedores, la ciudad de Hamburgo) y es consistente con un hecho que ocurre en la realidad, atribuyéndole el carácter de *auténtico*. Bajo estas condiciones, la tarea es claramente un *problema* que, además, puede ser *solucionable mediante un ciclo de modelización*.

Al asignar este problema al estudiante, éste se encuentra con una *situación real* que debe comprender para formar una *representación mental de la situación*. En el tránsito a simplificar la situación, pueden emerger preguntas como: *¿qué tamaño tienen los contenedores?*, *¿cómo se acomodan?*, *¿cuántos se transportan diariamente?*, etc. Estas preguntas pueden guiarle a una serie de simplificaciones, derivadas de su *conocimiento extra-matemático* (experiencias, estimaciones, imágenes mentales), para así construir un *modelo real* de la situación inicial en que, por ejemplo, puede estimar que el área ocupada por cada lote de contenedores es de 30 m^2, que se apilan cinco en cada espacio, y que están en promedio cuatro días antes de ser retirados del puerto. Con estas consideraciones, el tránsito del mundo real hacia el matemático (matematización) hace que emerja un *modelo matemático*, en que una serie de operaciones aritméticas pueden llevar a la obtención de *resultados matemáticos* que, al ser interpretados en la realidad del problema, permiten la obtención de *resultados reales*, y cuya validación es posible, por ejemplo, vía internet (una descripción más detallada de la resolución de este problema se encuentra en Borromeo, 2018, pp. 45-46).

Este ciclo se enmarca dentro de la perspectiva realista de modelización, cuyo foco se centra principalmente en el desarrollo de la *competencia en modelización matemática* (Abassian et al., 2020). Ésta se define, en términos de Niss y Højgaard (2019), como el ser capaz de trabajar (construir, analizar críticamente, evaluar) con modelos matemáticos y tomar en cuenta los elementos del dominio extra-matemático, conforme se concretan las fases del ciclo de modelización. Esta competencia se lleva a cabo a través de distintas *subcompetencias de modelización* (numeradas en la parte derecha de la Figura 1), que posibilitan el tránsito entre las fases del ciclo (véase Maaß, 2006).

Junto con el proceso de modelización, se consideran las herramientas que propone el Enfoque Onto-Semiótico (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007, 2019) para el análisis de la actividad matemática que subyace al proceso de modelización. En una propuesta teórico-reflexiva desarrollada con anterioridad (véase Ledezma, Font y Sala, 2021b), se ponen en juego estas herramientas, de modo tal que se precisan y desvelan elementos explícitos (*prácticas* y *objetos matemáticos*, *procesos*) e implícitos (*normas epistémicas*) que permiten ilustrar con detalles la estructura y funcionamiento de las fases del ciclo de modelización matemática desde una perspectiva cognitiva. En términos del EOS, se define como *práctica matemática* a "cualquier acción o manifestación (lingüística o de otro tipo) llevada a cabo por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar la solución a otras personas, así como para validar y generalizar esa solución a otros contextos y problemas" (Godino y Batanero, 1998, p. 182, traducción de los autores). Mientras que se consideran seis tipos de *objetos matemáticos primarios*: 1) elementos lingüísticos (términos, expresiones, gráficos, etc.), 2) situaciones-problemas, 3) conceptos-definiciones, 4) proposiciones, 5) argumentos, y 6) procedimientos. En el apartado siguiente, se presenta un fragmento del análisis realizado en que se ponen en juego estos elementos.

En el EOS, la modelización matemática es considerada como un *híper* o *mega proceso* (Godino et al., 2007), puesto que implica otros *procesos* más elementales (representación, argumentación, idealización, etc.), y su potenciación en el aula se considera un aspecto que mejora la *idoneidad* del proceso de instrucción (Ledezma, Font y Sala, 2021a; Sala, Font, Giménez y Barquero, 2017).

Descripción del taller y diseños didácticos

El taller que aquí se reporta corresponde a la adaptación de una experiencia previamente implementada (descrita en el apartado siguiente) y que, por razones de disponibilidad de tiempo, se ha estructurado de la forma que se presenta en la Tabla 2.

Tabla 2. *Descripción de las actividades del taller por sesiones.*

Sesión	Actividades
Primera	– Presentación del taller, sus expositores y la dinámica de trabajo. – Resolución del problema de modelización *Pilas de alfalfa* (ver Figura). – Análisis del problema con las herramientas del EOS. – Análisis del problema desde el ciclo de modelización.
Segunda	– Continuación de la resolución y análisis de problemas de modelización. – Reflexión sobre las actividades implementadas y su aplicabilidad en el aula.

Elaboración propia.

Como se muestra en la tabla anterior, el primer problema de modelización que se plantea a los participantes es el de las *Pilas de alfalfa* (ver Figura 3), en el que se solicita calcular la altura de una montaña de pilas de alfalfa a través de una imagen. Este problema es luego analizado y discutido en forma plenaria desde dos perspectivas: primero, utilizando las herramientas de análisis de la actividad matemática que aporta el EOS; segundo, utilizando una de las resoluciones que se tienen documentadas sobre este problema para ejemplificar el ciclo de modelización considerado. Este análisis permite a los participantes asumir la postura tanto de estudiantes como de profesores cuando se enfrentan a una tarea de modelización matemática.

Figura 3. *Problema de modelización Pilas de alfalfa.*

Pilas de alfalfa

Hacia el final del verano, se pueden ver montañas de pilas de alfalfa en el campo, como las de la imagen. Las pilas se acomodan de manera que se ubiquen cinco en la base, cuatro en la siguiente fila, luego tres, dos y, finalmente, una bola de alfalfa en la cúspide.

Intenta hallar la altura de la montaña de pilas de alfalfa.

Fuente: Adaptado desde Borromeo (2007, p. 2084)

La elección de este problema en particular se sustenta, por una parte, en que ha sido analizado desde diferentes enfoques dentro de la literatura especializada (por ejemplo, Borromeo, 2007; Hankeln, Adamek y Greefrath, 2019; Ledezma et al., 2021b; Tekin-Dede, 2019; entre otros) y, por otra parte, por ser un ejemplo paradigmático para describir el ciclo de modelización desde una perspectiva cognitiva (véase Borromeo, 2011, 2018).

Para el análisis de la actividad matemática –con base en las herramientas del EOS–, se plantea a los participantes, por ejemplo, que identifiquen los pasos para resolver el problema (*prácticas matemáticas*), así como la matemática puesta en juego a la hora de resolver el problema (*objetos matemáticos*, *procesos*), y las posibles dificultades a las que se podría enfrentar un estudiante resolutor. Como se ha declarado en el apartado preliminar, se desarrolló con anterioridad una propuesta teórico-reflexiva en que se utilizan estas herramientas para analizar la actividad matemática que subyace al proceso de modelización, y en la Tabla 3 se presenta un fragmento de la misma.

Tabla 3. *Fragmento del análisis del problema con las herramientas del EOS.*

Prácticas matemáticas	Procesos	Objetos matemáticos
Modelo real → Modelo matemático → Resultados matemáticos		
Calcular la parte de la altura de las filas pares que no se superpone con la altura de las filas impares, mediante una comparación visual	– Representación	– Comparación visual de longitudes (procedimiento) – Proposición matemática: *la altura de las filas pares que se superpone con la altura de las impares es ¾ del diámetro de la circunferencia*. – Propiedad monótona de la medida $\left(\mu(A) \leq \mu(B)\right)$
Realizar los cálculos para obtener la altura total de la montaña de pilas de alfalfa	– Argumentación	– Propiedad aditiva de la medida de longitudes $(m[A \cup B] = m[A] + m[B])$ – Medida indirecta (procedimiento) – Proposición (tesis del argumento): *la altura total es de 6,75 m, aproximadamente*. – Argumento (razones): *aplicando el procedimiento de estimación se obtiene que*: a) *el diámetro de la pila es menor que la altura de la mujer; como la mujer mide 1,7 m, la pila mide 1,5 m, aproximadamente*. b) *la altura de las filas pares que se superponen con las impares, es aproximadamente ¾ del diámetro de la circunferencia*. c) *la altura total es la suma de las alturas de las filas impares más la altura de las filas pares*.

Adaptado desde Ledezma et al., 2021b, p. 372.

Tomando en cuenta la pluralidad de contextos educativos de los participantes, son los expositores quienes introducen los elementos constitutivos, tanto del ciclo de modelización considerado como de las herramientas que aporta el EOS para analizar este tipo de actividad matemática. De este modo, no se espera que los participantes realicen el mismo análisis presentado en la Tabla 3 sino que, a partir de interacción y discusión sobre el problema presentado, logren identificar sus elementos constitutivos, más allá de la matemática en juego.

Para la segunda sesión del taller se continúa con la misma dinámica que en la primera, con la diferencia que se dejan a elección de los participantes el problema a resolver de entre un compendio con el que se cuenta. Finalmente, y basados en todo el análisis y la discusión sobre los problemas resueltos, el taller culmina con una reflexión sobre la implementación de la modelización matemática en el aula, de acuerdo a los contextos educativos de los participantes.

Experiencias de implementación

A partir de la operacionalización de la propuesta teórico-reflexiva mencionada en el apartado de Fundamento teórico, es que se diseñó un taller que fue implementado en distintos niveles de formación de profesores (pregrado, máster y doctorado) que cursan sus estudios en dos universidades de la ciudad de Barcelona (España).

En una primera fase de esta experiencia se intervino con dos grupos: uno con 60 profesoras de educación primaria en formación inicial (pregrado), en el contexto de un módulo sobre resolución de problemas; y otro con 20 profesores de matemática de educación secundaria en formación continua (máster profesionalizante), en el contexto de un módulo sobre modelización matemática. La dinámica con ambos grupos fue la siguiente: primero, se introdujo a los sujetos en los aspectos generales de la modelización matemática (conceptualización teórica, diferentes perspectivas, etc.); segundo, se les presentó el problema *Pilas de alfalfa* para su resolución en equipos, y se les pidió que registraran sus resultados; tercero, se presentaron los resultados en forma plenaria y se discutieron las estrategias utilizadas por cada grupo; finalmente, se les presentó el ciclo de modelización desde una perspectiva cognitiva, ejemplificándolo con una de las resoluciones documentadas sobre el problema en cuestión.

Una diferencia sustancial en cuanto a las resoluciones obtenidas durante esta fase fue que, mientras los profesores de educación primaria privilegiaron un *modelo matemático* que les permitió finalmente obtener *resultados reales* para dar respuesta al problema, los profesores de educación secundaria utilizaron más de un *modelo matemático*, pero no vieron la necesidad de llevar sus *resultados matemáticos* a la realidad, ello justificado en el carácter abierto del enunciado. Este tipo de hallazgos se encuentra en consonancia con los reportados por Verschaffel y colaboradores, en estudios de similares características llevados a cabo con profesores de matemáticas de educación primaria y secundaria (véase Chen, Van Dooren, Chen y Verschaffel, 2011; Van Dooren, Verschaffel y Onghena, 2003; Verschaffel, De Corte y Borghart, 1997; entre otros).

En una segunda fase de esta experiencia se intervino con dos grupos más: uno con estudiantes de un máster de investigación en Educación Matemática, en el contexto de una sesión sobre modelización matemática; y otro con estudiantes de un programa de doctorado en Didáctica de la Matemática, en el contexto de un seminario de investigación. A diferencia de las intervenciones de la fase anterior, los sujetos participantes ya contaban con herramientas teóricas sobre modelización matemática, por lo que la dinámica con ellos se centró, principalmente, en la resolución del problema en cuestión para la posterior discusión, tanto de los resultados obtenidos como de las posibles adaptaciones que se podían hacer al enunciado del problema.

Consideraciones finales

Tal como se declaró en el apartado Fundamento teórico, existen distintos ciclos que permiten explicar el proceso de modelización, así como diferentes perspectivas sobre su implementación. Por lo tanto, en este taller se considera un ciclo y una perspectiva específicos para el trabajo con modelización, enfocados ambos principalmente en el desarrollo de la *competencia en modelización matemática*. No obstante, y tomando en cuenta que las propuestas teóricas pueden en ocasiones desconectarse del contexto del aula común de matemáticas, es que en este taller se privilegia la componente de utilidad práctica del ciclo de modelización considerado y, a raíz de la discusión docente con los participantes, se pretende reflexionar sobre su implementación en el aula.

En términos generales, se han consensuado algunos elementos que los profesores deben considerar al momento de abordar la modelización de mejor forma en el aula, como los siguientes:

- Conocimiento de las tareas de modelización, en cuanto a sus características, tipos y propósitos de evaluación (véase Haines y Crouch, 2001; Houston, 2007; Maaß, 2010; Niss, 1993; Vos, 2007).

- Habilidad para diagnosticar dificultades de los estudiantes y/o bloqueos durante las fases del ciclo de modelización (Galbraith y Stillman, 2006).
- Conocimiento de un amplio espectro de modos de intervención (Leiß, 2007) y la habilidad para realizarlos de manera apropiada.
- Lograr un balance permanente entre la independencia de los estudiantes en su trabajo de resolución, y la guía del docente durante el desarrollo de la tarea (Blum, 2011).

Finalmente, diversos estudios han sido realizados con foco en el rol de la modelización matemática dentro de la formación de profesores y su impacto en la enseñanza futura, los cuales han sido desarrollados desde diferentes perspectivas y contextos a nivel mundial. Por citar algunos, en el contexto alemán, Kuntze (2011) compara las visiones –entre profesores en formación y en ejercicio– sobre las tareas de modelización y su complejidad; en el contexto australiano, Stillman y Brown (2011) estudian las creencias sobre el uso de este tipo de tareas, al mismo tiempo que analizan las diferencias entre profesores que recibieron una formación en modelización matemática de forma paralela (durante el pregrado) o especializada (después del pregrado), y sus implicancias en el ejercicio docente. En el contexto español, Ledezma y colaboradores (Ledezma et al., 2021a; Ledezma, Sala, Breda y Sánchez, 2021) analizan la reflexión docente que realizaron los futuros profesores de matemática de educación secundaria en sus Trabajos Finales de Máster, tomando como herramienta los Criterios de Idoneidad Didáctica propuestos por el EOS.

En otros contextos, también se ha estudiado el conocimiento profesional sobre las competencias en modelización (Kaiser, Schwarz y Tiedemann, 2013), sobre su futura enseñanza en la educación escolar (Tan y Ang, 2013), sobre su aprendizaje durante la formación de profesores (Winter y Venkat, 2013), y su rol en la formación de ingenieros (Cosmes, 2020; Cosmes y Montoya, 2021).

Agradecimientos

Este estudio fue realizado en el marco del Proyecto ANID/PFCHA nro. 72200458 (Chile), y del Proyecto de Investigación en Formación de Profesorado PGC2018-098603-B-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE).

Referencias

Abassian, A., Safi, F., Bush, S. y Bostic, J. (2020). Five different perspectives on mathematical modeling in mathematics education. *Investigations in Mathematics Learning, 12*(1), 53-65. https://doi.org/10.1080/19477503.2019.1595360

Aparisi, L. y Pochulu, M. (2013). Dificultades que enfrentan los profesores en escenarios de modelización. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26* (pp. 1387-1397). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Blum, W. (2011). Can modelling be taught and learnt? Some answers from empirical research. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo y G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling: ICTMA 14* (pp. 15-30). Dordrecht, Países Bajos: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_3

Borromeo, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38*(2), 86-95. https://doi.org/10.1007/bf02655883

Borromeo, R. (2007). Personal experiences and extra-mathematical knowledge as an influence factor on modelling routes of pupils. En D. Pitta-Pantazi y C. Philippou (Eds.), *European Research in Mathematics Education V: Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2080-2089). Lárnaca, Chipre: University of Cyprus, ERME.

Borromeo, R. (2011). *Wege zur Innenwelt des mathematischen Modellierens: Kognitive Analysen zu Modellierungsprozessen im Mathematikunterricht*. Wiesbaden, Alemania: Vieweg+Teubner Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-8348-9784-8

Borromeo, R. (2013). Mathematical modelling in European education. *Journal of Mathematics Education at Teachers College, 4*(2), 18-24.

Borromeo, R. (2018). *Learning How to Teach Mathematical Modeling in School and Teacher Education*. Cham, Suiza: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68072-9

Chen, L., Van Dooren, W., Chen, Q. y Verschaffel, L. (2011). An investigation on Chinese teachers' realistic problem posing and problem solving ability and beliefs. *International Journal of Science and Mathematics Education, 9*(4), 919-948. https://doi.org/10.1007/s10763-010-9259-7

Cosmes, S. (2020). *La modelización matemática en la formación de ingenieros. El caso de Ingeniería Civil* (Tesis doctoral). Recuperado desde Catálogo Bibliográfico de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. (https://catalogo.pucv.cl/cgi-bin/koha/opac-detail.pl?biblionumber=432566)

Cosmes, S. y Montoya, E. (2021). Understanding links between mathematics and engineering through mathematical modelling – The case of training civil engineers in a course of structural analysis. En F. K. S. Leung, G. A. Stillman, G. Kaiser y K. L. Wong (Eds.), *Mathematical Modelling Education in East and West* (pp. 527-537). Cham, Suiza: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-66996-6_44

Galbraith, P. y Stillman, G. (2006). A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38*(2), 143-162. https://doi.org/10.1007/bf02655886

Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area for research in Mathematics Education. En A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity. An ICMI Study* (pp. 177-195). Dordrecht, Países Bajos: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-011-5470-3_12

Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM – Mathematics Education, 39*(1), 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2019). The Onto-Semiotic Approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics, 39*(1), 38-43.

Haines, C. y Crouch, R. (2001). Recognizing constructs within mathematical modelling. *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA, 20*(3), 129-138. https://doi.org/10.1093/teamat/20.3.129

Hankeln, C., Adamek, C. y Greefrath, G. (2019). Assessing sub-competencies of mathematical modelling – Development of a new test instrument. En G. A. Stillman y J. P. Brown (Eds.), *Lines of Inquity in Mathematical Modelling Research in Education* (pp. 143-160). Cham, Suiza: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-14931-4_8

Houston, K. (2007). Assessing the "phases" of mathematical modelling. En W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn y M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study* (pp. 249-256). Boston, MA: Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_26

Kaiser, G. (2020). Mathematical modelling and applications in education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (2da ed.) (pp. 553-561). Cham, Suiza: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_101

Kaiser, G., Schwarz, B. y Tiedemann, S. (2013). Future teachers' professional knowledge on modeling. En R. Lesh, P. L. Galbraith, C. Haines y A. Hurford (Eds.), *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies: ICTMA 13* (pp 433-444). Boston, MA: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-6271-8_37

Kuntze, S. (2011). In-service and prospective teachers' views about modelling tasks in the mathematics classroom – Results of a quantitative empirical study. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo y G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling: ICTMA 14* (pp. 279-288). Dordrecht, Países Bajos: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_28

Ledezma, C., Font, V. y Sala, G. (2021a). Análisis de la reflexión realizada por un futuro profesor sobre el papel de la modelización matemática en la mejora de un proceso de instrucción para enseñar trigonometría. *PARADIGMA, 42* (Extra 2), 290-312. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2021.p290-312.id1043

Ledezma, C., Font, V. y Sala, G. (2021b). Un análisis onto-semiótico de la actividad matemática del proceso de modelización. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 367-375). Valencia, España: SEIEM.

Ledezma, C., Sala, G., Breda, A. y Sánchez, A. (2021). Analysis of a preservice teacher's reflection on the role of mathematical modelling in his master's thesis. En M. Inprasitha, N. Changsri y N. Boonsena (Eds.), *Proceedings of the 44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 195-204). Khon Kaen, Tailandia: PME.

Leiß, D. (2007). *Lehrerinterventionen im selbständigkeitsorientierten Prozess der Lösung einer mathematischen Modellierungsaufgabe*. Hildesheim, Alemania: Franzbecker.

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies?. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38*(2), 113-142. https://doi.org/10.1007/bf02655885

Maaß, K. (2010). Classification scheme for modelling tasks. *Journal für Mathematik-Didaktik, 31*(2), 285-311. https://doi.org/10.1007/s13138-010-0010-2

Maaß, K. y Gurlitt, J. (2010). Designing a teacher questionnaire to evaluate professional development in modelling. En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne y F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2056-2065). Lyon, Francia: Institut National de Recherche Pédagogique, ERME.

Niss, M. (Ed.). (1993). *Investigations into Assessment in Mathematics Education: An ICMI Study*. Dordrecht, Países Bajos: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-1974-2

Niss, M. y Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics, 102*(1), 9-28. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9

Sala, G., Font, V., Giménez, J. y Barquero, B. (2017). Inquiry and modelling in a real archaeological context. En G. Stillman, W. Blum y G. Kaiser (Eds.), *Mathematical Modelling and Applications: Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education* (pp. 325-335). Cham, Suiza: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-62968-1_28

Stillman, G. y Brown, J. P. (2011). Pre-service secondary mathematics teachers' affinity with using modelling tasks in teaching years 8-10. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo y G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling: ICTMA 14* (pp. 289-298). Dordrecht, Países Bajos: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_29

Tan, L. S. y Ang, K. C. (2013). Pre-service secondary school teachers' knowledge in mathematical modelling – A case study. En G. A. Stillman, G. Kaiser, W. Blum y J. P. Brown (Eds.), *Teaching Mathematical Modelling: Connecting to Research and Practice* (pp. 373-383). Dordrecht, Países Bajos: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-6540-5_31

Tekin-Dede, A. (2019). Arguments constructed within the mathematical modelling cycle. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 50*(2), 292-314. https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1501825

Van Dooren, W., Verschaffel, L. y Onghena, P. (2003). Pre-service teachers' preferred strategies for solving arithmetic and algebra word problems. *Journal of Mathematics Teacher Education, 6*(1), 27-52. https://doi.org/10.1023/a:1022109006658

Verschaffel, L., De Corte, E. y Borghart, I. (1997). Pre-service teachers' conceptions and beliefs about the role of real-world knowledge in mathematical modelling of school word problems. *Learning and Instruction, 7*(4), 339-359. https://doi.org/10.1016/s0959-4752(97)00008-x

Vos, P. (2007). Assessment of applied mathematics and modelling: Using a laboratory-like environment. En W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn y M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study* (pp. 441-448). Boston, MA: Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_49

Winter, M. y Venkat, H. (2013). Pre-service teacher learning for mathematical modellling. En G. A. Stillman, G. Kaiser, W. Blum y J. P. Brown (Eds.), *Teaching Mathematical Modelling: Connecting to Research and Practice* (pp. 395-404). Dordrecht, Países Bajos: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-6540-5_33