VOL 34, NÚMERO 2, AÑO 2021

MOVILIZACIÓN DE PROCESOS DE MATEMÁTICOS EN LA PRÁCTICA ARGUMENTATIVA USANDO EL SOFTWARE GEOGEBRA

MOBILIZING MATHEMATICAL PROCESSES IN ARGUMENTATIVE PRACTICE USING GEOGEBRA SOFTWARE

Guadalupe Morales Ramírez, Víctor Larios Osorio, Norma Violeta Rubio Goycochea
Universidad Autónoma de Querétaro, (México), Pontificia Universidad Católica, (Perú).
gmorales28@alumnos.uaq.mx, vil@uaq.mx, nrubio@pucp.edu.pe

Resumen
En este artículo se muestran los primeros resultados de un proyecto en desarrollo, cuyo objetivo es dar cuenta de la movilización de algunos procesos matemáticos propuestos por el enfoque ontosemiótico, cuando un grupo de alumnos de bachillerato justifica y argumenta situaciones en el contexto geométrico mediante el uso del software de GeoGebra. El análisis cualitativo se centró en las respuestas manifestadas en las hojas de trabajo y en los archivos dinámicos elaborados en el GeoGebra, esto en el contexto de los teselados regulares y semirregulares. Se concluye que los alumnos movilizan principalmente el proceso de materialización, visualización y significación, lo que conlleva a desencadenar argumentos poco estructurados mediante el uso de un lenguaje informal, pues los significados referenciales sobre las traslaciones isométricas se muestran de manera superficial, lo que conlleva a los alumnos a justificar ambiguamente.

Palabras clave: enfoque ontosemiótico, procesos matemáticos, GeoGebra

Abstract
This article shows the first results of an ongoing project, whose objective is to account for the mobilization of some mathematical processes proposed by the onto-semiotic approach, when a group of high school students justify and argue situations in the geometric context by using GeoGebra software. The qualitative analysis focused on the responses expressed in the worksheets and in the dynamic files elaborated in GeoGebra, this in the context of regular and semi-regular tessellations. It is concluded that students mainly mobilize the process of materialization, visualization, and meaning, which leads to unleashing unstructured arguments through the use of informal language; since the referential meanings on isometric translations are shown superficially, which leads students to justify ambiguously.

Key words: onto-semiotic approach, mathematical processes, GeoGebra

Introducción

El aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes de cualquier nivel educativo está asociado con las experiencias que desarrolla durante su vida académica, las cuales tienen que ver con procesos cognitivos relacionados con pensar, explicar, percibir, memorizar, razonar, etc. Según Piaget (1961) el individuo es capaz de abstraer reflexivamente a través de sus acciones operacionales, es decir, todas las actividades cognitivas que pone en juego el sujeto para extraer de ellos ciertos caracteres y utilizarlos con otros fines (nuevas adaptaciones o nuevos problemas). Así que, desde esta perspectiva, el razonamiento y los errores que comenten los individuos es parte del desarrollo de sus procesos cognitivos, donde los objetos y sus representaciones juegan un papel fundamental en la construcción del conocimiento. Por otro lado, Vygotsky (1979) asocia el desarrollo del pensamiento cognitivo con las relaciones sociales y culturales, contemplando las interacciones y aprehensiones sobre el uso de recursos o herramientas tecnológicas que incorpora en el desarrollo del conocimiento.

En el contexto de las matemáticas, se habla de procesos matemáticos que están ligados a procesos cognitivos presentes en la resolución de problemas, estos procesos matemáticos son evidenciados de acuerdo con el tipo de problema y el ambiente generado durante su resolución (Perdomo, Camacho y Santos-Trigo, 2012). Ante esta realidad, los programas curriculares del bachillerato mexicano (alumnos de 15 a 18 años), de la Secretaría de Educación Pública (SEP, 2017), han resaltado que los alumnos deben ser competentes para argumentar la solución de problemas a través de un razonamiento lógicamente estructurado, con el fin de desarrollar capacidades cognitivas. Asimismo, estos programas han puesto énfasis en la incorporación del uso de herramientas computacionales como un medio que apoye el razonamiento y los diversos procesos matemáticos emergentes en el desarrollo de la resolución de problemas. Este giro dentro de los programas curriculares ha llevado a dar importancia al estudio de los procesos matemáticos, esto es respaldado por la National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) donde se propone que la enseñanza debe estar centrada en el contenido matemático y los procesos implicados, como el de prueba, razonamiento, visualización, comunicación, particularización, generalización, representación, entre otros. Según Rubio y Font (2017) la diversidad de procesos matemáticos presentes en la actividad matemática permite tener claridad sobre los significados y aprendizajes alcanzados por el alumno, esto por el hecho de que se pueden analizar desde el desarrollo de otros procesos concatenados en un tiempo establecido. Por tanto, es relevante examinar y evaluar los significados a través de procesos matemáticos manifestados en la práctica matemática de los alumnos, más aún si se involucra el uso de tecnologías digitales.

Lo anterior se aborda en el estudio de Fajardo y Larios (2019), donde se identifican algunos procesos matemáticos en la práctica argumentativa de alumnos de secundaria, en un ambiente de geometría dinámica. En particular el software GeoGebra, el cual a partir del uso los alumnos son capaces de abstraer reglas generales que les permite transitar del proceso de particularización al de generalización, y viceversa. En este sentido, diversos estudios (Radford, 2006; Bussi y Mariotti, 2008; Karadag y McDougall, 2011; Mejía y Molina, 2013; Larios, Pino-Fan y González, 2017; Morales, Larios y Rubio, 2021) han indagado sobre el uso de las tecnologías digitales, cuyo énfasis se hace en el uso de la geometría dinámica como un medio que permite a los alumnos explorar, realizar conjeturas en un proceso de formulación, prueba y reformulación de ideas matemáticas, por tanto, evaluar procesos matemáticos a partir de una situación problema permite tener referencia de los significados y conocimientos desarrollados por los alumnos.

Siguiendo esta línea de investigación, el presente trabajo propone como objetivo describir los procesos matemáticos que ponen en juego los alumnos de bachillerato cuando realizan justificaciones sobre el proceso de construcción de teselados regulares y semirregulares, en un ambiente de geometría dinámica. Cabe resaltar que los procesos matemáticos en los que ponemos nuestra atención son los propuestos en la teoría del Enfoque Ontosemiótico, misma que da fundamento a este trabajo de investigación.

Marco teórico

Este estudio se fundamenta en el marco de herramientas teóricas metodológicas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) propuesto por Godino, Batanero y Font (2007). En particular se enfatiza en el proceso matemático desde el punto de vista de proceso-producto, la configuración ontosemiótica como parte del análisis de los objetos movilizados y la geometría dinámica como un medio que favorece los procesos matemáticos involucrados en el aprendizaje de los alumnos.

Desde esta perspectiva, las *prácticas matemáticas* son aquellas acciones (operativas) realizadas por un individuo durante la resolución de un problema matemático y las comunicaciones (discursivas) que se hace de la solución, con el fin de validar y generalizar en otros contextos y problemas (Godino y Batanero, 1994). Tomando en cuenta lo anterior, se asume que la *práctica argumentativa* se realiza cuando el alumno desarrolla una práctica matemática (operativa o discursiva) referente a una situación problema, la cual requiere de una justificación, validación, descripción, explicación, argumentación o demostración en el proceso de solución del problema, en el que puede o no manifestar un razonamiento lógico-deductivo (Morales, Rubio y Larios, en prensa). En el desarrollo de estas prácticas argumentativas intervienen y emergen una red deobjetos y procesos matemáticos, lo que se conoce en el EOS por *configuración ontosemiótica* (Font y Godino, 2006).

De esta manera el *proceso matemático* se asume como la secuencia de acciones que es activada o desarrollada, durante un cierto tiempo, para conseguir un objetivo, generalmente una respuesta (salida) ante la propuesta de una tarea (entrada), las cuales están sometidas a reglas matemáticas o metamatemáticas (Rubio, 2012). Así el proceso matemático permite explorar el funcionamiento dinámico de la configuración ontosemiótica de objetos y procesos matemáticos activados en las prácticas matemáticas. El EOS considera una lista de dieciséis procesos matemáticos, seis de ellos (comunicación (C), argumentación (A), algoritmización (Al), enunciación (E), definición (De) y problematización (P)) podríamos asociarlos con los objetos matemáticos primarios (lenguaje, argumento, procedimientos, definiciones, proposiciones y situaciones problema) que dan estructuran a la configuración ontosemiótica. Mientras que el resto de los procesos matemáticos se agrupan en facetas duales (institucionalización (In)-personalización (Pe), idealización (I)-materialización (M), descomposición (D)-reificación (Re), significación (S)-representación (R), particularización (Pa)-generalización (G)), las cuales se caracterizan como una forma de "estar participando" en el desarrollo de la práctica matemática (Rubio y Font, 2017). En este estudio se intenta identificar y describir algunos de estos procesos matemáticos a través del análisis de los objetos matemáticos intervinientes y emergentes que ponen en juego los alumnos de bachillerato cuando desarrollan prácticas argumentativas mediante el uso del software GeoGebra.

Metodología

Se trata de un estudio de caso que contempla una metodología cualitativa de corte descriptiva Cohen, Manion y Morrison (2018), la cual conformó cuatro fases de acuerdo con la ingeniería didáctica propuesta por Godino, Rivas, Arteaga, Lasa y Wilhelmi (2014). Dichas fases consistieron en un 1) estudio preliminar, 2) diseño de experimento, 3) implementación y 4) evaluación o análisis retrospectivo, las cuales tomaron en cuenta un diseño de actividades cuya tarea principal fue la construcción de teselados regulares y semirregulares, por cuestiones de espacio se muestra un ejemplo de cada una de las construcciones realizados en el GeoGebra. Dichas actividades se trabajaron con un grupo de veinte alumnos que cursaban la asignatura de Geometría Analítica, correspondiente al de tercer semestre de bachillerato. Además, el desarrollo de las actividades fue trabajada en parejas, ya que las computadoras fueron limitadas, las cuales se eligieron por conveniencia pues era necesario que los alumnos usaran el software GeoGebra y se encontraran cursando dicha asignatura. La implementación se desarrolló en 8 sesiones de 50 minutos en el laboratorio de matemáticas y en un horario normal de clases de una Escuela de Bachilleres de la Universidad Autónoma de Querétaro.

A continuación, se describen las fases que contribuyeron al desarrollo de este trabajo.

- Estudio preliminar: consistió en un análisis de contenido usando la configuración epistémica del EOS y un análisis a priori de los procesos matemáticos.
- Diseño de experimento: radicó en la selección y secuenciación de las situaciones (preguntas abiertas) propuestas.
- Implementación: se observó la interacción entre los alumnos y el software de geometría dinámica.
- Evaluación o análisis retrospectivo: consistió en el análisis a posteriori de los procesos matemáticos del EOS, identificados en las respuestas manifestadas por las parejas de alumnos de este estudio.

Los datos recabados en este estudio fueron a través de las hojas de trabajo (actividades), los archivos dinámicos sobre los protocolos de construcción de los teselados generados a través del software GeoGebra, la observación participante y las notas de campo. Además, la intervención del investigador a cargo se centró en responder dudas respecto a las situaciones y el uso del GeoGebra, con el fin de no influir en las respuestas de los alumnos.

Descripción de las actividades

Es importante señalar que se abordaron situaciones que incluían preguntas relacionadas con los conocimientos previos, para asegurarnos que los alumnos tuvieran las nociones que involucraban la construcción del teselado, haciendo énfasis en las transformaciones isométricas. Además, se hicieron sugerencias respecto el uso y aplicación de las herramientas del GeoGebra.

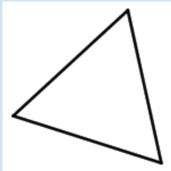
Actividad sobre la construcción de teselados regulares: se explicitó la noción de teselado regular y se pidió a los alumnos construir y justificar el proceso de construcción, mediante la aplicación de las isometrías del GeoGebra.

Actividad sobre la construcción de teselados semirregulares: se explicitó la noción de teselado semirregular y se pidió a los alumnos construir y justificar el proceso de construcción, mediante la aplicación de las isometrías del GeoGebra.

A manera de ejemplo y por cuestiones de espacio solo se muestra en la Tabla 1 algunas situaciones referentes a la construcción del teselado regular, la solución experta de acuerdo con el uso de las herramientas del GeoGebra y el proceso matemático asociado a cada situación.

Tabla 1. ***Actividad didáctica sobre la construcción de un teselado regular y los procesos matemáticos asociados.***

Situación problema		Solución experta	Proceso matemático
1. Si quisieras teselar o cubrir un plano con algún polígono regular ¿Qué polígonos regulares utilizarías? Justifica tu respuesta.		El alumno propone polígonos regulares que sirvan para formar un teselando, cumpliendo con las características puestas en el concepto de teselado regular.	Particularización
2. Dibuja un teselado con algún polígono regular que hayas propuesto en la pregunta anterior.		A partir de los polígonos regulares propuestos por el alumno, se pretende que el alumno dibuje a papel y lápiz el teselado que considera puede formar dichos polígonos.	Representación y significación Particularización
Polígono regular	Marca con una X cuál de estos polígonos pueden teselar un plano	¿Por qué?	
		Para formar un teselado sin dejar huecos y sin que las figuras se sobrepongan deben formar un	Generalización

<table>
<tr><td>
Triángulo equilátero</td><td>X</td><td>ángulo de 360° en cada uno de sus vértices, esto se puede verificar dividiendo 360° entre el ángulo interno del polígono y se verifica que la división sea un número exacto o entero.
En el caso del triángulo equilátero la división es exacta de 360° entre 60° es 6, por tanto, se puede formar un teselado con triángulos equiláteros.</td><td>Significación

Personalización

Algoritmización</td></tr>
<tr><td>3. ¿Cuánto mide la suma de ángulos que rodea el punto D en el teselado triangular? Justifica tu respuesta.</td><td colspan="2">El ángulo en cualquier vértice del teselado debe ser 360°, pues la medida del ángulo interior de un triángulo es de 60°, por lo que la medida de la suma de ángulos que concurren en el vértice D es de 360°.</td><td>Definición y significación

Materialización y Algoritmización</td></tr>
<tr><td>4. Utiliza las trasformaciones isométricas (traslación, rotación y reflexión) para construir un teselado en el GeoGebra con hexágonos regulares. Posteriormente guarda el archivo de la siguiente manera: T6_APELLIDO</td><td colspan="2">La solución experta sobre la construcción del teselado utilizando hexágonos regulares puede caer en los siguientes casos.
• Utilizando traslación
• Utilizando rotación
• Utilizando reflexión-traslación
• Utilizando reflexión-rotación
• Utilizando rotación-traslación
• Utilizando rotación-reflexión-traslación
• Unión de hexágonos regulares</td><td>Algoritmización y Materialización

Personalización

Significación y Representación</td></tr>
<tr><td>5. Si mueves algún punto del hexágono original con la herramienta  ¿Sigue siendo un teselado? Justifica tu respuesta.</td><td colspan="2">En cualquier construcción de teselado bajo el uso de las transformaciones isométricas las propiedades del teselado deberían conservarse bajo la aplicación de la prueba de arrastre del software GeoGebra.</td><td>Algoritmización y Materialización

Significación</td></tr>
<tr><td>6. Si alguien quisiera construir esta misma teselación, ¿Cómo se lo explicarías? Escribe detalladamente la secuencia de pasos que realizaste en GeoGebra para la construcción del teselado.</td><td colspan="2">Para esta consigna se retoman las posibilidades anteriores de la consigna 4, analizando el procedimiento donde intervienen y emergen objetos matemáticos, explicitando a detalle los pasos que sirvieron para generar el teselado regular, así como el uso de las herramientas del software en el desarrollo del proceso de construcción.</td><td>Algoritmización y Argumentación Materialización

Descomposición y reificación</td></tr>
</table>

Elaboración propia.

Análisis y resultados

Al ser una investigación en curso, se presentan los primeros resultados preliminares de un grupo de 20 alumnos, cuyo análisis se centró en la identificación de procesos matemáticos, propuestos por el marco del EOS, asociados a las respuestas de las actividades manifestados por los alumnos, referente a la construcción de teselados regulares y semirregulares. En esta sección se muestran los procesos matemáticos identificados en las 10 parejas de alumnos, los cuales fueron: significación (S), descomposición (D), Enunciación (E), particularización (Pa), personalización (Pe), representación (R), materialización (M), visualización (V), definición (De) e idealización (I). Por cuestión de espacio, se muestra los procesos matemáticos correspondientes a la actividad que se centró en la construcción de teselados regulares y semirregulares. Además, se usó el símbolo de guion (-) para representar que en esa situación no se identificó algún proceso matemático.

En la Tabla 1 se muestran los procesos matemáticos mayormente identificados fue el de visualización, materialización y significación. En un primero momento, los alumnos recurrieron a materializar su pensamiento a través de la propuesta de figuras poligonales regulares, que utilizarían en la construcción de un teselado regular, por lo que el proceso de idealización está relacionado con el de materialización al proponer de manera escrita y posteriormente mediante un dibujo los polígonos que utilizarían para la construcción. Según el EOS, para transitar del objeto ostensivo al objeto no ostensivo en las prácticas matemáticas, generalmente no perceptibles, se requiere de sus ostensivos asociados, por ejemplo, símbolos, gráficos, figuras, notaciones, entre otros (Font y Contreras, 2008). Las situaciones que involucraron la explicación sobre el proceso de construcción condujeron a los alumnos a movilizar el proceso de significación y visualización, ya que, a partir de la aplicación de herramientas del GeoGebra, como el de traslación, simetría axial, vectores, ángulos de rotación, entre otros. Además, los alumnos hicieron explícito la secuencia de pasos en términos de lo que realizaron en la construcción de los teselados regulares. Esto permitió que el significado fuera desarrollado en términos de la usabilidad de las herramientas del GeoGebra, y no tanto de los conceptos involucrados en la construcción del teselado regular. A continuación, se presentan la identificación de los procesos matemáticos asociados a las parejas que desarrollaron las actividades sobre la construcción del teselado regular y semirregular.

Tabla 2. *Procesos matemáticos identificados en las parejas de alumnos sobre la construcción de los teselados regulares*

	P1	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**	**P7**	**P8**	**P9**	**P10**
Actividad	**Procesos matemáticos**									
S1	Pa, S	S	S	I, S	I	V	I	-	I, Pe	I
S2	Pa, S	M	M	M	M	M	M	M	M	M
S3	R, S, D	De	-	-	S	-	V	-	-	De, V
S4	V	V	-	V	V	V	V	V	V	V
S5	-	V	-	-	S	V	-	-	S, V	S, V
S6	Pa, S	V	De, S	-	-	V	S, V	V	S	V
S7	M	M	M	M	-	M	M	M	M	M
S8	S, V	V	De, S	S, V	-	-	V	De, V	V	S
S9	S	S	S	-	-	R, S	S	-	S, V	S

Elaboración propia

La **Tabla 2 muestra que el proceso matemático recurrente fue el de materialización, aquí los alumnos realizan un proceso de construcción donde a través del software mediatizan y materializan el pensamiento, es decir, el proceso de materialización sitúa el** conocimiento matemático en el campo del artefacto (Radford, 2006). En el desarrollo de esta actividad se resalta el proceso de materialización, el cual fue identificado cuando los alumnos propusieron, a lápiz y papel, la combinación de polígonos regulares que utilizarían en la construcción de teselados semirregulares. Por otro lado, en la explicación pocos alumnos explicaron correctamente su procedimiento y se hizo evidente el uso de la percepción visual a través de un lenguaje informal.

VOL 34, NÚMERO 2, AÑO 2021

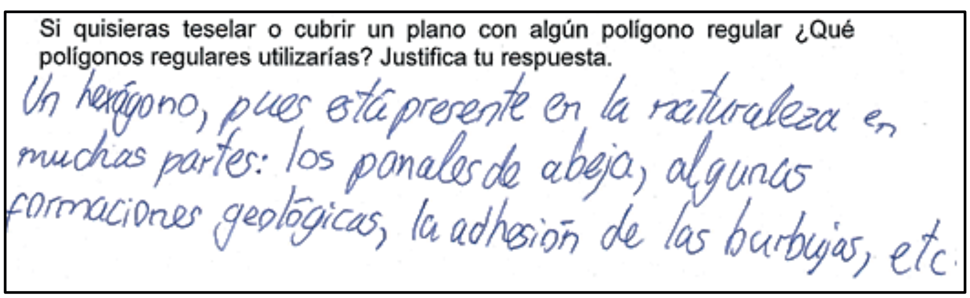
Tabla 3. *Procesos matemáticos identificados en las parejas de alumnos sobre la construcción de los teselados semirregulares*

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10
Actividad	**Procesos matemáticos**									
S1	M	I, M	M	M	M	M	M	-	I	M
S2	S, V	V	-	De, M, Pa, S	-	V	M	-	M, S	S, V
S3	M	M	M	M, R	-	M	M	M	M	M
S4	S, M	M	M	-	-	M	M	M, V	M	M
S5	S	S	S	-	-	R, S	M, R	V	S	S
S6	M	M	M	-	-	M	M	M	M	M
S7	S	S	S	M	-	S	V	S	S	S
S8	M	M	M	-	-	M	-	M	M	M
S9	S	S	S	M	M	S	I	-	S	S

Elaboración propia.

A continuación, se muestran algunos ejemplos de los procesos matemáticos identificados en las respuestas de los alumnos (pareja 9) , la cual fue elegida por mostrar variedad de procesos y respuestas detalladas sobre la justificación del proceso de construcción de los teselados. La Figura 2 muestra un proceso de personalización, donde se ponen en juego los conocimientos previos del alumno, así asocia el hexágono regular en contextos familiares de la vida real. De esta manera, evoca ejemplos en donde es común visualizar un teselado.

Figura 1. *Identificación del proceso de personalización de la pareja 9 de alumnos.*

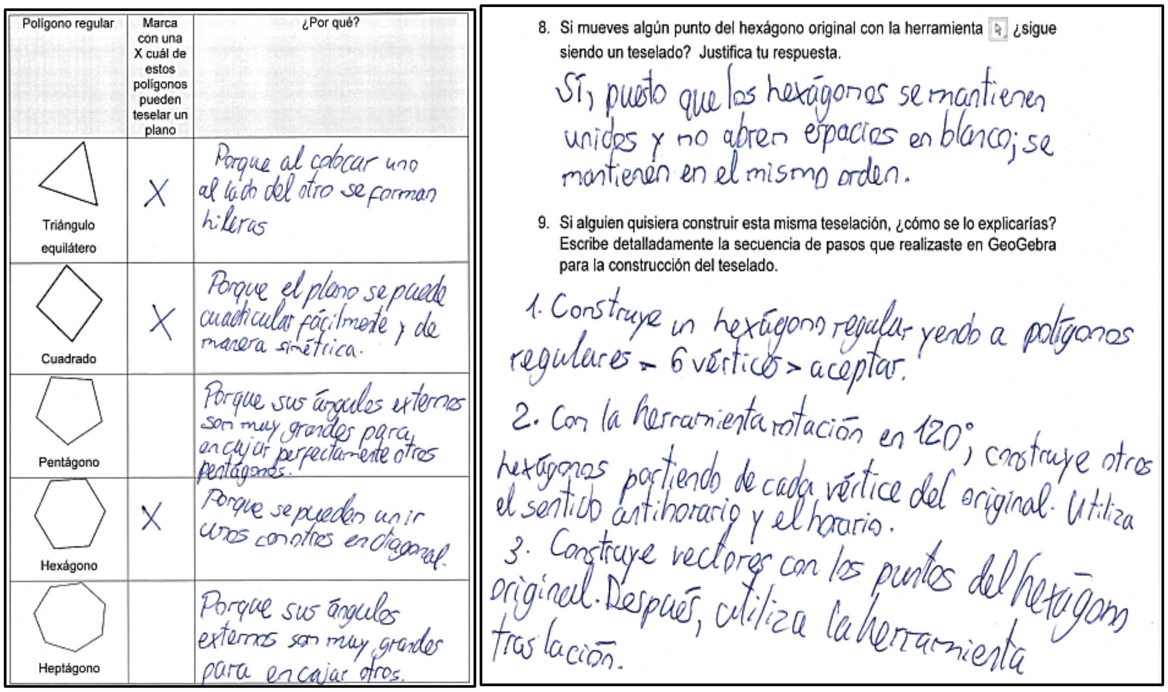

Si quisieras teselar o cubrir un plano con algún polígono regular ¿Qué polígonos regulares utilizarías? Justifica tu respuesta.

Un hexágono, pues está presente en la naturaleza en muchas partes: los panales de abeja, algunas formaciones geológicas, la adhesión de las burbujas, etc.

Elaboración propia.

La Figura 3 muestra el proceso de visualización y significación, ya que el alumno en un primer momento recurre a su percepción visual para identificar con qué polígonos regulares podría formar un teselado regular, así recurre a decir que: sus ángulos son más grandes o que el plano se puede cuadricular fácilmente. Sin embargo, esto es expresado en un lenguaje informal y poco estructurado. También pone en juego elementos de justificación, que pone de manifiesto el proceso de significación, por ejemplo, cuando el alumno fue capaz de relacionar los vectores correctamente para generar la construcción del teselado regular, así también cuando identificó una medida de ángulo (120°) para rotar el polígono y que también le permitió generar el teselado correctamente. Por lo que, de acuerdo con el protocolo de construcción, el teselado forma parte del proceso de materialización que el alumno materializa a través de las herramientas del software GeoGebra.

Figura 2. *Identificación del proceso de visualización, significación y materialización de la pareja 9 de alumnos.*



Polígono regular	Marca con una X cuál de estos polígonos pueden teselar un plano	¿Por qué?
Triángulo equilátero	X	Porque al colocar uno al lado del otro se forman hileras
Cuadrado	X	Porque el plano se puede cuadricular fácilmente y de manera simétrica.
Pentágono		Porque sus ángulos externos son muy grandes para encajar perfectamente otros pentágonos.
Hexágono	X	Porque se pueden unir unos con otros en diagonal.
Heptágono		Porque sus ángulos externos son muy grandes para encajar otros.

8. Si mueves algún punto del hexágono original con la herramienta ¿sigue siendo un teselado? Justifica tu respuesta.

Sí, puesto que los hexágonos se mantienen unidos y no abren espacios en blanco; se mantienen en el mismo orden.

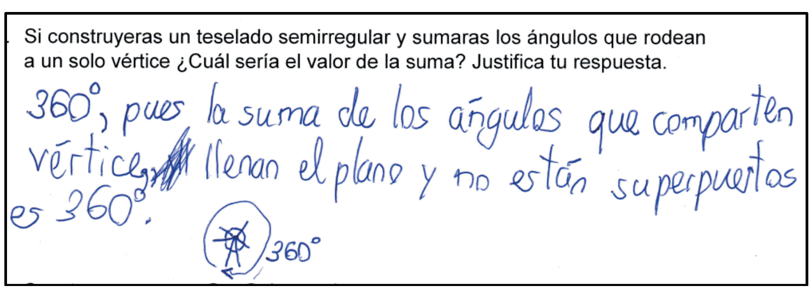
9. Si alguien quisiera construir esta misma teselación, ¿cómo se lo explicarías? Escribe detalladamente la secuencia de pasos que realizaste en GeoGebra para la construcción del teselado.

1. Construye un hexágono regular yendo a polígonos regulares → 6 vértices → aceptar.
2. Con la herramienta rotación en 120°, construye otros hexágonos partiendo de cada vértice del original. Utiliza el sentido antihorario y el horario.
3. Construye vectores con los puntos del hexágono original. Después, utiliza la herramienta traslación.

Elaboración propia.

En la Figura 4 se identifica un proceso de significación a través del proceso de la visualización, ya que el alumno evoca una representación del teselado que le permite identificar una propiedad de los teselados, el cual es que la suma de ángulos en cualquier vértice del polígono que conforma el teselado es de 360°, así el alumno recurre a dibujar la representación del ángulo mencionado, para dar significado a la suma de los ángulos formados en cada vértice del teselado. De esta manera, los alumnos son capaces de concatenar procesos matemáticos, por ejemplo, partiendo de un proceso de visualización, pasar por un proceso de representación y finalmente llegar a un proceso de significación, de esta manera los alumnos amplían y refuerzan sus conocimientos, aunque este sea impreciso.

Figura 3. *Identificación del proceso de visualización y significación de la pareja 9 de alumnos.*



Si construyeras un teselado semirregular y sumaras los ángulos que rodean a un solo vértice ¿Cuál sería el valor de la suma? Justifica tu respuesta.

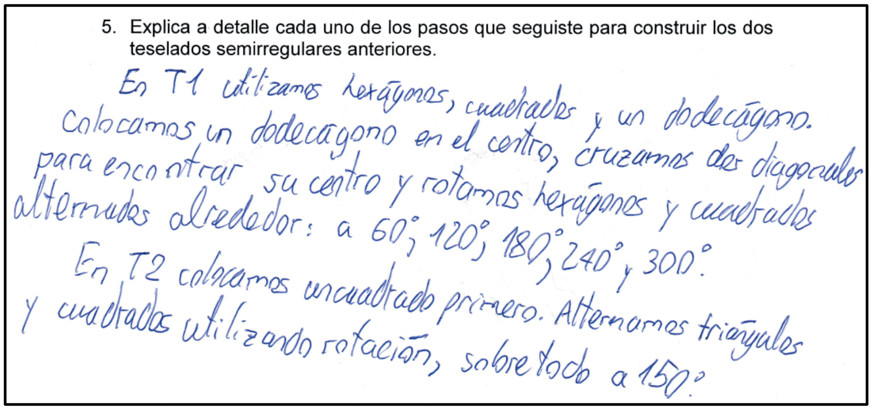
360°, pues la suma de los ángulos que comparten vértice, llenan el plano y no están superpuestos es 360°.

360°

Elaboración propia.

La Figura 5 muestra el proceso de visualización y materialización como parte de la construcción del teselado semirregular, donde la percepción visual ayudó para decidir qué combinación es posible y permite generar un teselado semirregular, por lo que los alumnos debieron tener en cuenta la media de los ángulos interiores de los polígonos regulares utilizados (hexágono, cuadrado, dodecágono). Así el proceso de significación es recurrente, para relacionar medidas que permiten rotar el polígono para construir correctamente el teselado semirregular. Por tanto, al visualizar el comportamiento de los objetos matemáticos en el software GeoGebra, como las transformaciones isométricas, los alumnos abstraen conocimientos que los lleva a tomar decisiones en su proceso de construcciones geométrica, esto se ve implicado en su proceso de comunicación y argumentación.

Figura 4. *Identificación del proceso de visualización, materialización y significación de la pareja 9 de alumnos.*



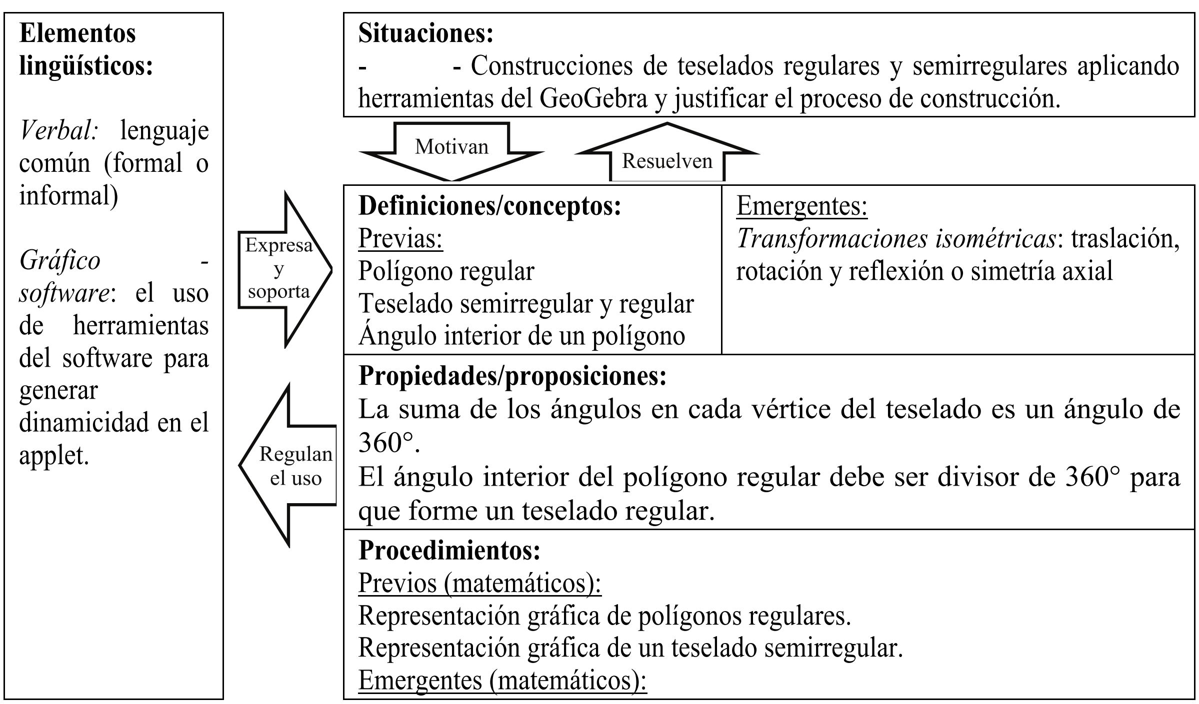
5. Explica a detalle cada uno de los pasos que seguiste para construir los dos teselados semirregulares anteriores.

En T1 utilizamos hexágonos, cuadrados y un dodecágono. Colocamos un dodecágono en el centro, cruzamos dos diagonales para encontrar su centro y rotamos hexágonos y cuadrados alternados alrededor: a 60°, 120°, 180°, 240°, 300°.
En T2 colocamos un cuadrado primero. Alternamos triángulos y cuadrados utilizando rotación, sobre todo a 150°.

Elaboración propia.

La configuración de objetos y procesos matemáticos permitió analizar y detallar la anatomía de la red de objetos movilizados por los alumnos, en particular, la Figura 5 presenta la movilización de objetos y procesos de una pareja de alumnos, el cual fue representativo para la justificación del proceso de construcción del teselado regular y semirregular, donde se resalta el uso de las isometrías en el plano. Por lo que, a continuación, se muestra la relación de los objetos matemáticos primarios, propuestos por el EOS, mediante la configuración cognitiva asociada a la pareja 9 de alumnos.

Figura 5. *Configuración cognitiva sobre las isometrías en el plano en la construcción de teselados de una pareja de alumnos.*



	Dibujar la combinación de polígonos regulares que conllevan la representación de un teselado semirregular. Cálculo de la medida del ángulo formado en cualquier vértice de un teselado semirregular. Previos (software): Aplicación de herramientas que permiten la construcción del teselado semirregular formado por triángulos equiláteros y cuadrados Emergentes (software): Construcción de un teselado regular usando hexágonos regulares Construcción de un teselado semirregular utilizando triángulos equiláteros y cuadrados aplicando transformaciones isométricas, traslación, rotación o simetría axial. Validación de la construcción del teselado semirregular a través de la herramienta de “arrastre” .
	Justifican
	Argumentos: Mediante la manipulación y exploración de un teselado triangular, se argumenta que la medida del ángulo en cada vértice del teselado es de 360°. Se justifica la construcción del teselado a través de la aplicación de las transformaciones isométricas (traslación, rotación y simetría axial) y se valida cuando se la herramienta de arrastre en cualquiera de los polígonos originales.

Elaboración propia.

Conclusiones

A través del análisis realizado respecto a la clasificación de los procesos matemáticos, del EOS, sobre las respuestas de los alumnos y la configuración cognitiva, se ha podido vislumbrar la concatenación de procesos matemáticos que movilizan los alumnos de este estudio en sus prácticas matemáticas, al realizar construcciones de teselados mediante el uso de las herramientas de transformaciones isométricas del software de geometría dinámica GeoGebra. Esta herramienta digital puede favorecer procesos matemáticos, como el de visualización, representación, materialización y argumentación, sin embargo estos procesos no son necesariamente lineales (avances y retrocesos), lo que les permite a los alumnos a desarrollar habilidades de razonamiento y de observación al permitir diferenciar progresivamente entre dibujo (representación) y figura (relación conceptual entre dibujo y objeto geométrico) (Larios, Pino-Fan y González, 2017). Así a través de la resolución de problemas que involucran el uso de la geometría dinámica, los alumnos se ven inmersos en una nueva geometría que les ofrece la oportunidad de transitar sobre procesos de conjeturación, exploración, visualización, comunicación, prueba y validación.

Aunque los procesos fueron identificados superficialmente, esto da luz para replantear el diseño de las actividades que permita evidenciar otros procesos matemáticos en el desarrollo de las prácticas argumentativas respecto al proceso de construcción de los teselados regulares y semirregulares. Por lo que es conveniente considerar, en este estudio, un rediseño de las situaciones que guíen al alumno a movilizar diferentes nociones matemáticas cuando se utiliza la geometría dinámica en la construcción de teselados, *por ejemplo, al aplicar la traslación en la construcción de un teselado es conveniente considerar las diferentes representaciones de los vectores que se deben utilizar para la construcción del teselado, así como la ubicación adecuada de los vectores para la correcta traslación del polígono*, esto con la intención de evidenciar múltiples procesos matemáticos en el desarrollo de las prácticas matemáticas de los alumnos. La evidencia de tales procesos matemáticos permitirá a los profesionales de la Educación Matemática tener amplia referencia sobre los significados personales de sus alumnos, lo que podría ser un medio por el cual conlleve a la evaluación de los conocimientos matemáticos.

Además, el uso del software GeoGebra evidenció un proceso operativo, a través del protocolo de construcción del GeoGebra, mismo que apoyó la práctica argumentativa aunque este haya sido a través de un lenguaje informal o coloquial, es decir, sin recurrir a los términos adecuados en el contexto de la matemática. Además, consideramos que el análisis de estos procesos es un trabajo complejo que requiere de mayor indagación sobre el conocimiento de los alumnos, así que para profundizar en este estudió se dará un seguimiento de manera más personal, en vez de analizar las prácticas en parejas.

Agradecimientos

Trabajo desarrollado con apoyo del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) con número de beca 330779 y del proyecto de investigación en formación de profesorado: PGC2018-098603-B-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE).

Referencias bibliográficas

Bussi, B., & Mariotti, A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. *Handbook of international research in mathematics education,* New York.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2018). Research Methods in Education. Routledge.

Fajardo, M. & Larios, V. (2019). Descripción de procesos matemáticos en prácticas argumentativas. *Educación matemática*, *31*(3), 61-84.

Font, V. & Contreras, A. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics,* 69, 33-52.

Font, V. y Godino, J. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educaçao Matemática Pesquisa*, 8(1).

Font, V. & Rubio, N. V. (2017). Procesos matemáticos en el enfoque ontosemiótico. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*.

Godino, J., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325-355.

Godino, J., Batanero, C. & Font, V. (2007). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática**.** ZDM. *The International Journal on Mathematics Education*. 39 (1-2). pp. 127-135.

Godino, J., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A., & Wilhelmi, M. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico semiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 34, 167–200.

Karadag, Z. & McDougall, D. (2011). GeoGebra as a cognitive tool. In *Model-Centered Learning* (pp. 169-181). Sense Publisher.

Larios, V., Pino-Fan, L. y González, N. (2017). Esquemas argumentativos de estudiantes de secundaria en ambientes de geometría dinámica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 12, 39-57.

Mejía, C., & Molina, O. (2014). Mediación y Geometría Dinámica: una alternativa para involucrar a los estudiantes en la actividad demostrativa en geometría. *Revista Científica*. 660-664.

Morales, G., Rubio, N., & Larios, V. (en prensa). Tipificación de argumentos producidos por las prácticas matemáticas de alumnos del nivel medio en ambientes de geometría dinámica. *Bolema: Boletim de Educação Matemática.* 70(2), pp. 664-689.

National of Council Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). Principles standards for school mathematics, NCTM. *Reston, VA*.

Perdomo-Díaz, J., Camacho, M. & Santos-Trigo, M. (2012). Procesos cognitivos involucrados en la resolución de problemas. En M. Marín-Rodríguez; N. Climent-Rodríguez (eds.), *Investigación en Educación Matemática*. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM (pp. 65-76). Ciudad Real: SEIEM.

Piaget, J. (1961). La formación del símbolo en el niño: imitación, juego y sueño. Editorial. Fondo de cultura Económica. México.

Radford. L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Número especial sobre Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático, 103-129.

Rubio, N. (2012). Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemáticos. (Tesis doctoral). Universitat de Barcelona. España.

SEP. (2017). El modelo educativo 2016; el planteamiento pedagógico de la Reforma Educativa, Ciudad de México: MAG Edición en Impresos y Digitales, S.C.

Vygotsky, L. (1979) El desarrollo de los procesos psicológicos superiores. Barcelona: Grijalbo.