Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

SECCIÓN 5 / USO DE LOS RECURSOS TECNOLÓGICOS EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

VOL 34, NÚMERO 2, AÑO 2021

A DERIVADA DE UMA FUNÇÃO: UM ESTUDO COM O SOFTWARE GEOGEBRA PARA O DESENVOLVIMENTO DA CONCEPÇÃO MELHOR APROXIMAÇÃO

THE DERIVATIVE OF A FUNCTION: A STUDY WITH GEOGEBRA SOFTWARE FOR THE DEVELOPMENT OF THE CONCEPTION OF THE BEST APPROXIMATION

Roberto Seidi Imafuku; Rosana Nogueira de Lima; William Vieira

IFSP/Campus Guarulhos, Centro Nacional de Educação-CENAED, IFSP/Campus Guarulhos. (Brasil)

robertoseidi@yahoo.com.br, rosananlima@gmail.com, wvieira@ifsp.edu.br

Resumo

Nesta investigação, analisa-se a contribuição de um software que possibilita o uso de múltiplas representações para o enriquecimento da imagem de conceito de derivada de um grupo de alunos de Licenciatura em Matemática que já haviam estudado tal conceito. Foi desenvolvido e aplicado um conjunto de cinco atividades, analisado à luz dos Três Mundos da Matemática, da imagem de conceito e das concepções de derivada. Verificou-se que as múltiplas representações, a dinamicidade, o sincronismo entre as janelas e o recurso do *zoom* possibilitaram a exploração, a investigação, a criação de conjecturas e o enriquecimento da imagem de conceito de derivada como melhor aproximação.

Palavras chave: derivadas, três mundos da Matemática, GeoGebra

Abstract

This research analyzes the contribution of GeoGebra software that enables the use of multiple representations to enrich the derivative concept image of a group of students, from the Mathematics degree course, who had already studied such concept. A set of five activities was developed and applied, analyzed in the light of the Three Worlds of Mathematics, the concept image and the derivative concepts. It was found that the multiple representations, the dynamics, the synchronism between the windows and the zoom feature, made possible the exploration, the investigation, the creation of conjectures and the enrichment of the derivative concept image as the best approximation.

Key words: derivative, Three Worlds of Mathematics, GeoGebra

Introdução

Conhecimentos abordados nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) têm papel de destaque no processo de formação de professores de Matemática. A Sociedade Brasileira de Educação Matemática, no boletim 21 de 2013, aponta que tais conhecimentos são necessários para a compreensão dos números reais, das funções, das aproximações, dos conceitos de infinito e das variações, dando condições ao futuro professor para enfrentar as possíveis dificuldades conceituais que poderão surgir durante sua atuação profissional. Destaca, também, a importância fundamental que o tratamento dado a problemas de cunho variacional nas disciplinas de CDI tem para o futuro professor, pois o leva a compreensão de como problemas dessa natureza devem ser abordados e discutidos desde o ensino básico.

A importância do estudo de problemas de cunho variacional por licenciandos em Matemática, também são evidenciados por pesquisas que utilizaram sequências didáticas (González & Dolores, 2016; Mação, 2014) e atividades envolvendo o uso de softwares (Loureiro, 2012; Richit, Benites, Escher & Miskulin, 2012) ao abordar o estudo das derivadas.

Ao avaliarem o conhecimento de estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática sobre o conceito de derivada, González e Dolores (2016) verificaram que grande parte dos participantes entendia a derivada de uma função apenas como uma fórmula, e apenas 15% dos quarenta e cinco participantes tinha uma ideia mais próxima da definição, pois a identificaram como a inclinação da reta tangente ao gráfico da função, um limite ou a taxa de variação de uma função, isto é, tinham as concepções simbólica, geométrica, lógica de derivada. Os autores apontam que, numa tentativa de minimizar as dificuldades dos estudantes, o trabalho docente vai além de conceber e disponibilizar ferramentas com as quais os alunos possam trabalhar para a construção do seu próprio conhecimento. É preciso envolver o estudante, seus pares e o professor, responsabilizando-os pelo próprio conhecimento.

Nesse sentido, Mação (2014) destaca a importância de se ter uma abordagem em que o estudante se interesse pelo problema, de maneira que ele sinta a necessidade de construir um novo conhecimento, e enfatiza que uma abordagem apenas com aulas expositivas pode não ser capaz de levar ao desenvolvimento de senso crítico levando os alunos a associar "o cálculo da derivada apenas a um processo mecânico de cálculo algébrico" (Mação, 2014, p. 166), perspectiva também verificada por González e Dolores (2016). Com relação às distintas maneiras de conceber a derivada de uma função, o autor afirma que é necessário que sejam realizadas abordagens que permitam o desenvolvimento de "[...] outras formas de entender a derivada, para possibilitar aos sujeitos mais interpretações possíveis, que podem tornar o ensino da derivada menos formal, mais intuitivo e mais voltado para o contexto em que vai ser aplicado" (Mação, 2014, p. 167).

Em uma abordagem com tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC) para o ensino e a aprendizagem de derivadas, Loureiro (2012) utilizou um applet para explorar a noção intuitiva de taxa média de variação, a aplicação da definição de taxa média de variação, a interpretação física da taxa média de variação, a interpretação geométrica da taxa média de variação e a derivada de uma função num ponto – Interpretação geométrica, buscando dar significado para a derivada. Ela conclui que o uso do applet, para abordar o conceito de derivada de uma função em um ponto parece ter permitido que os estudantes construíssem imagens mentais consistentes relacionadas ao conceito de derivada, o que a levou a crer que ocorreu a formação da definição de conceito da derivada de uma função em um ponto nos participantes de sua pesquisa.

Richit et al. (2012) realizaram um estudo com o software GeoGebra para investigar qual o alcance e as potencialidades deste software enquanto alternativa teórico-metodológica na introdução e visualização de conceitos matemáticos. Para tal, elaboraram e aplicaram um conjunto de atividades a fim de propiciar uma investigação visual, geométrica e algébrica dos conteúdos de Funções, Limites, Derivadas e Integrais. Os autores afirmam que o GeoGebra se mostrou adequado para a realização dessas investigações, pois possibilitou que os estudantes criassem hipóteses e conjecturas acerca de conceitos como o de Derivada e Integral. Além disso, apontam que o software facilitou a investigação, uma vez que permitiu que o número de repetições durante a verificação do comportamento das funções fosse reduzido por meio da ferramenta controle deslizante, utilizado para representar os parâmetros das funções.

Tendo em vista a importância do estudo das variações e as potencialidades propiciadas pelas TDIC, desenvolvemos uma pesquisa com o objetivo investigar a contribuição da utilização do software GeoGebra, que possibilita o uso de múltiplas representações, no enriquecimento da imagem de conceito de derivada de futuros professores de matemática.

Com esse objetivo, nos apoiamos nas ideias de Imagem de Conceito (Tall & Vinner, 1981), dos Três Mundos da Matemática (Tall, 2013) e nas concepções de derivada (Thurston, 1994) para a elaboração de conjunto de atividades e para a análise dos dados.

Marco teórico

A estrutura cognitiva individual total que está associada a determinado conceito é denominada por Tall e Vinner (1981) de *imagem de conceito*. Nela estão incluídas todas as imagens mentais (formas de conceber a derivada), propriedades (derivada da diferença, regra da cadeia) e processos associados (formas de representação, elementos da definição, entre outros) isto é, todos os atributos mentais devem constar em tal imagem.

Tall (2013) diz que o desenvolvimento de conhecimentos matemáticos de longo prazo é mais do que associar novas ideias às já existentes, mas sim uma reconstrução por meio de reorganizações de conexões mentais entre todos os atributos da imagem de conceito que um indivíduo possa ter sobre um determinado objeto matemático.

Tall (2013) discute o desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos desde a infância, no contato das crianças com objetos físicos, até o conhecimento da matemática formal, com as definições da Teoria dos Conjuntos, e defende que tal desenvolvimento se dá por diferentes jornadas pelos três mundos matemáticos: o corporificado, o simbólico e o formal.

O primeiro mundo é o conceitual corporificado que se baseia nas percepções e ações humanas, que resulta em imagens mentais relacionadas aos diversos objetos matemáticos. Essas ações possibilitam verbalizações cada vez mais sofisticadas, uma vez que, ao interagir com tais objetos, um sujeito reconhece formas e propriedades, tornando-se capaz de descrevê-las. Por exemplo, dar zoom nas proximidades de um ponto do gráfico de uma função em que passa uma reta tangente ao gráfico faz com que a reta tangente aparentemente se sobreponha ao gráfico da função, o que pode levar o indivíduo a ideia de que a reta tangente é a reta que dá a melhor aproximação aos valores da função nas proximidades desse ponto.

O mundo operacional simbólico é desenvolvido a partir de representações simbólicas de ações corporificadas que permitem a manipulação e os procedimentos de cálculo. Por exemplo, o uso das técnicas algébricas para determinar a derivada de uma função.

O mundo axiomático formal tem características da matemática formal e se refere à construção do conhecimento formal com os axiomas, definições e teoremas, de forma que as propriedades de um objeto matemático são deduzidas a partir de demonstrações matemáticas. No caso das derivadas, um exemplo é a demonstração da propriedade da derivada da soma por meio da definição. Imafuku (2018, p. 44) diz que “o Mundo Formal em sua totalidade só é trabalhado no Ensino Superior, no qual a construção axiomática da Matemática é realizada e discutida”, e que características desse mundo aparecem, e devem aparecer, desde os primeiros anos de escolaridade, como por exemplo os conjuntos numéricos, as relações, as funções e as taxas de variação, que são fundamentais para o estudo do Cálculo e da Análise (Imafuku, 2018).

Tall (2013) sugere que uma abordagem para os conceitos do Cálculo pode ser iniciada com a apresentação visual e dinâmica, como a mudança de inclinação em um gráfico e a área sob um gráfico, que podem ser aproximados por cálculos numéricos ou expressos precisamente por fórmulas simbólicas para diferenciação ou por técnicas relacionadas à integração. Afirma também que essas ideias podem ser abordadas formalmente, por meio de uma apresentação axiomática, em Análise Matemática.

Thurston (1994) diz que a derivada de uma função, pode ser concebida de ao menos sete maneiras distintas
(1) Infinitesimal: a razão da variação infinitesimal do valor da função para uma variação infinitesimal da variável.
(2) Simbólica: a derivada de x^n é $n.x^{n-1}$, a derivada de $sen(x)$ é $cos\ (x)$, a derivada de $f \circ g$ é $f' \circ g\ .g'$ etc.
(3) Lógica: $f'(x) = d$ se, e somente se, para cada ϵ existe um δ tal que quando $0 < |x| < \delta$, $\left|\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} - d\right| < \epsilon$.
(4) Geométrica: a derivada é o coeficiente angular da tangente ao gráfico da função, isto se o gráfico tem uma tangente.
(5) Taxa: a velocidade instantânea de $f(t)$ quando t é o tempo.
(6) Aproximação: A derivada de uma função é a melhor aproximação linear para a função próximo a um ponto.
(7) Microscópica: A derivada de uma função é o limite que se obtém olhando-a com microscópios cada vez mais poderosos. (Thurston, 1994, p. 3).

No que segue, apresentamos os procedimentos envolvidos em nossa investigação.

Metodología

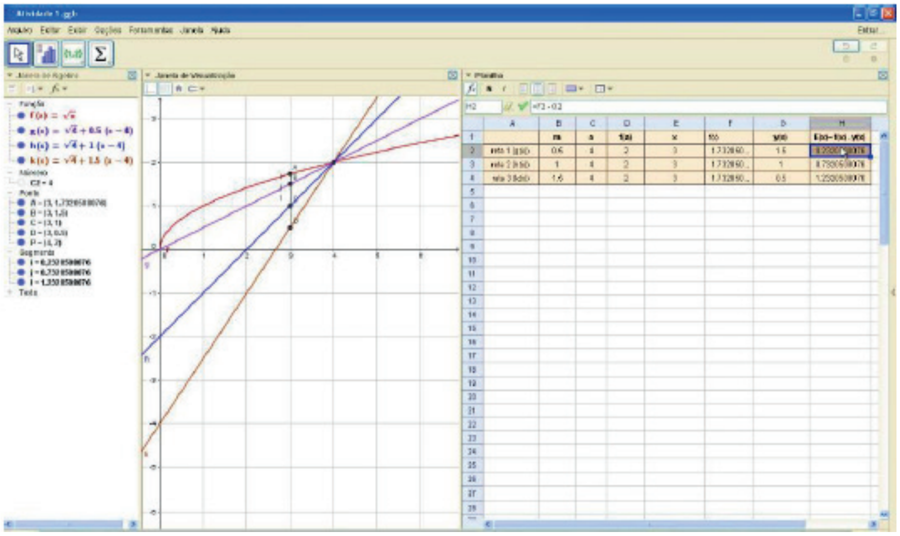
No desenvolvimento de nossa pesquisa, elaboramos um conjunto de cinco atividades com o uso do software GeoGebra, com o qual abordamos a concepção de derivada como Melhor Aproximação (Thurston, 1994), a fim de enriquecer a Imagem de conceito de derivada dos participantes como a reta que dá a melhor aproximação aos valores de uma função nas proximidades de um ponto.

Aplicamos as atividades para sete estudantes, organizados em um trio e duas duplas, que, por meio da exploração das janelas de visualização, da janela de álgebra e da tabela, puderam explorar as representações numérica, algébrica e gráfica de algumas retas, com características dos Mundos Corporificado e Simbólico, em busca daquela que dá a melhor aproximação. A função $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sqrt{x}$, para valores próximos ao ponto de abscissa $x = 4$, foi explorada pelos participantes para que, ao final das atividades, pudessem determinar a reta que dá a melhor aproximação, com características do Mundo Formal, por meio do limite dos erros de aproximação dos valores da função na proximidade de um ponto.

Resultados

Nas duas primeiras atividades, os grupos deveriam completar uma tabela, na qual foram disponibilizados os valores 0.5, 1.0 e 1.5 que deveriam ser utilizados como coeficientes angulares de três possíveis retas, representar as retas na janela de visualização e determinar os erros de aproximação para os valores da função no ponto de abscissa $x = 3$ e $x = 5$ (valores à esquerda e à direita do ponto dado). Os três grupos alcançaram o objetivo das atividades e, por meio da manipulação das representações gráficas, algébrica, numérica e tabular, apresentaram características corporificadas e simbólicas, determinando a reta que melhor aproxima, nas condições dadas, o valor da função dada nas proximidades de um ponto e entendendo a distância entre a reta e a função como o erro cometido ao realizar tal aproximação. O diálogo dos integrantes do Grupo 1 exemplifica essa situação.

Figura 1. *Tela da Atividade 1 com a resposta do Grupo 1.*



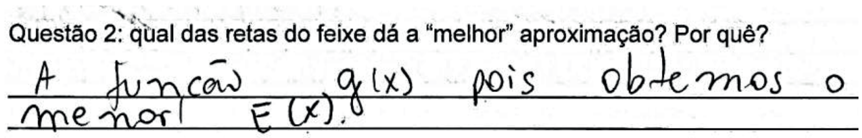
Fonte: Dados da pesquisa

Mário: A melhor aproximação pra mim é esse feixe aqui, oh! [apontando para a reta g (Figura 1), cujo coeficiente angular é $m = 0{,}5$]
Alemão: Como assim, melhor aproximação?
Mário: Então, por exemplo, oh... você tem essa curva aqui... [apontando para o gráfico da função f] qual reta você... qual dessas retas você acha que... se assemelha mais com... se você for observar, oh... essa aqui, oh... [apontando para a reta g] começa na... na...
Alemão: Ah é, no zero. [referindo-se à reta g]
Mário: Essa aqui começa no zero, entende?
Alemão: Verdade!
Mário: Então...
Alemão: Acho que ela é a melhor, a que se aproxima mais...
Mário: Acho que é a g.
Alemão: ... porque ela começa na origem também. A reta... é y, é? Ou g, né?
Mário: Agora tem que explicar o porquê
Alemão: Hum...
Mário: Ou porque a variação... a variação aqui, oh, do segmento é menor [apontando para os segmentos que indicam a distância entre cada uma das retas e o gráfico da função f].
Alemão: Isso, também!... é a menor, verdade!... A variação... do coeficiente angular, né?

Acreditamos que o Grupo 1 compreendeu o porquê de a reta g ser a que dá a melhor aproximação para a função nas proximidades do ponto de abscissa três, com valores à esquerda do ponto, por meio do uso de objetos dos Mundo Corporificado, os gráficos; e do Mundo Simbólico, registros numérico e algébrico.

Na segunda atividade, destacamos o diálogo e o protocolo (Figura 2) produzidos pelo Grupo 3.
Nelito: Acho que é essa aqui de novo (apontando a reta g (Figura 1)).
Léia: De novo a vermelha, né?
Nelito: É... quem é essa reta aí?
Léia: Eu acho que é a... acaba sendo a g de novo [selecionando a reta com o *mouse*].
Nelito: Hummm... Mas a que tá mais próximo é ela, né? ... a g.

Figura 2. *resposta do Grupo 3 para a Questão 2.*

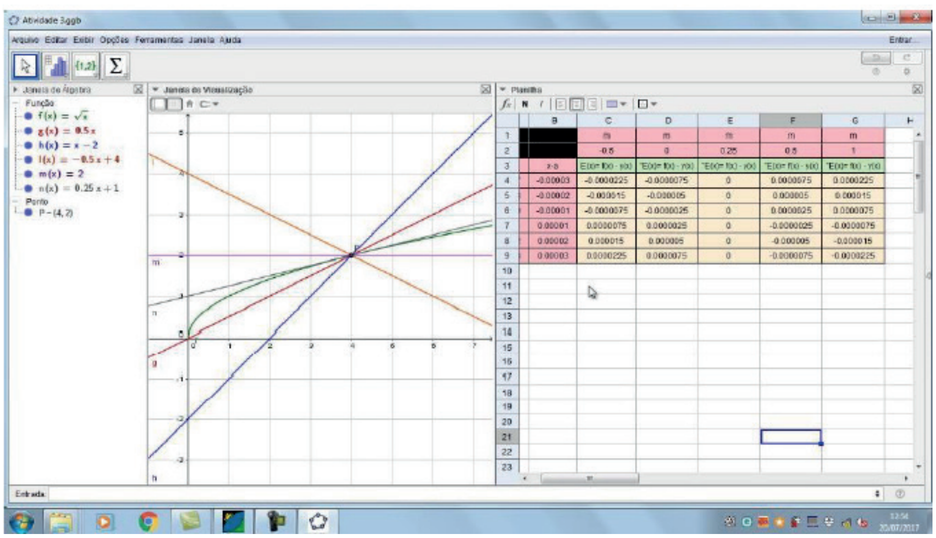

Questão 2: qual das retas do feixe dá a "melhor" aproximação? Por quê?
A funcão g(x) pois obtemos o menor E(x).

Fonte: Dados da pesquisa

O Grupo apresentou características do Mundo Corporificado ao analisar a proximidade entre as retas e a função, e características do Mundo Simbólico, pois ao associar o erro à proximidade das retas à função, associou a representação gráfica à representação numérica.

Na terceira atividade, similar as duas primeiras, foram disponibilizados cinco valores (-0.5; 0; 0.25; 0.5 e 1.0), que os participantes deveriam utilizar como coeficientes angulares de retas que contêm o ponto $(\mathbf{4},\mathbf{2})$ para, em seguida, determinar os erros de aproximação à esquerda e à direita, com valores da abscissa próximos de $\boldsymbol{x} = \mathbf{4}$ na ordem dos centésimos de milésimos. Os três grupos chegaram ao objetivo da atividade, uma vez que conseguiram determinar a reta que dá a melhor aproximação aos valores da função nas proximidades desse ponto, analisando qual apresenta os menores erros de aproximação pela direita e pela esquerda, com erros de centésimos de milésimos. Apresentamos a discussão realizada pelos integrantes do Grupo 2, para a escolha da reta que dá a melhor aproximação na Atividade 3 (Figura 3).

Figura 3. Tela da Atividade 3 com a resposta do Grupo 2.



Fonte: Dados da pesquisa

Theodoro: Todas as funções no quatro vão estar iguais, vai dar quatro e dois... para valores de x maiores do que quatro... maiores do que quatro são esses três aqui... quatro zero um, quatro zero dois e quatro zero três [fazendo a leitura de uma forma rápida dos valores 4,00001; 4,00002 e 4,00003, respectivamente].
Iceman: Sim, sim...
Theodoro: Quais são as melhores? A melhor... é uma só que é a melhor... é a que o erro tá dando zero... o erro dela é zero... tem duas muito próximas com zero zero vinte e cinco.
Michael Corleone: Todos aí são erros?
Theodoro: É, isso daqui é erro. E de x não significa erro de x?
Michael Corleone: Tá!

Theodoro: Aí perguntou... pela tabela, qual a... qual... é uma reta!
Michael Corleone: Entendeu!
Theodoro: Mas pra todos os valores que a gente colocou, todos os valores próximos de quatro.
Michael Corleone: Eu acho que é essa daí.
Theodoro: Essa reta tá com erro zero.
Michael Corleone: Então é ela.
Theodoro: Qual é a letra dela [perguntando sobre o nome dado a reta].
Iceman: g!
Theodoro: O m é zero vinte e cinco ou menos zero vinte e cinco?
Iceman: zero vinte e cinco positivo. Ahhh... o outro é a mesma coisa, só que da esquerda... vai ser o mesmo cara, velho!
Michael Corleone: Ele é o mais próximo pela esquerda também?
Iceman: Sim!

No diálogo, entendemos que o grupo, por meio da análise dos registros numéricos dos erros na tabela, apresentou características simbólicas ao eleger a reta com coeficiente angular $m = 0{,}25$ como a que dá a melhor aproximação da função, tanto pelo lado direito quanto pelo lado esquerdo, por provocar um erro zero (valor que aparece na tabela da Figura 3). Entretanto, a ideia de ter um erro zero incomodou os integrantes do grupo, como podemos ver no seguinte diálogo.
Theodoro: É a n do mesmo jeito... é sempre igual.
Iceman: É a menor taxa de erro, né?... Não parece que tipo... tá errado a gente colocar erro zero?
Theodoro: Eu tô pensando nisso... tá muito certo pra... pra... pra ser matemática.
Iceman: Tá muito certo pra ser matemática... Theodoro [falando como se estivesse fazendo uma citação da fala de Theodoro].
Theodoro: Erro zero... pra dar erro zero... O GeoGebra está enganando a gente, porque o GeoGebra está com menos casas decimais. Tem erro aqui!
Iceman: Amigão... tem erro, mas está em uma casa decimal bem distante.
Theodoro: Então vamos escrever que os erros estão próximos de zero.

Figura 4. E registram a resposta apresentada na

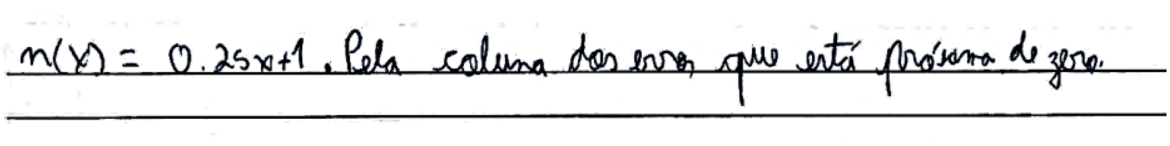

n(x) = 0.25x+1. Pela coluna dos erros que está próxima de zero.

Figura 4: protocolo apresentado pelo Grupo 2 como resposta para a Questão 3.
Fonte: Dados da pesquisa

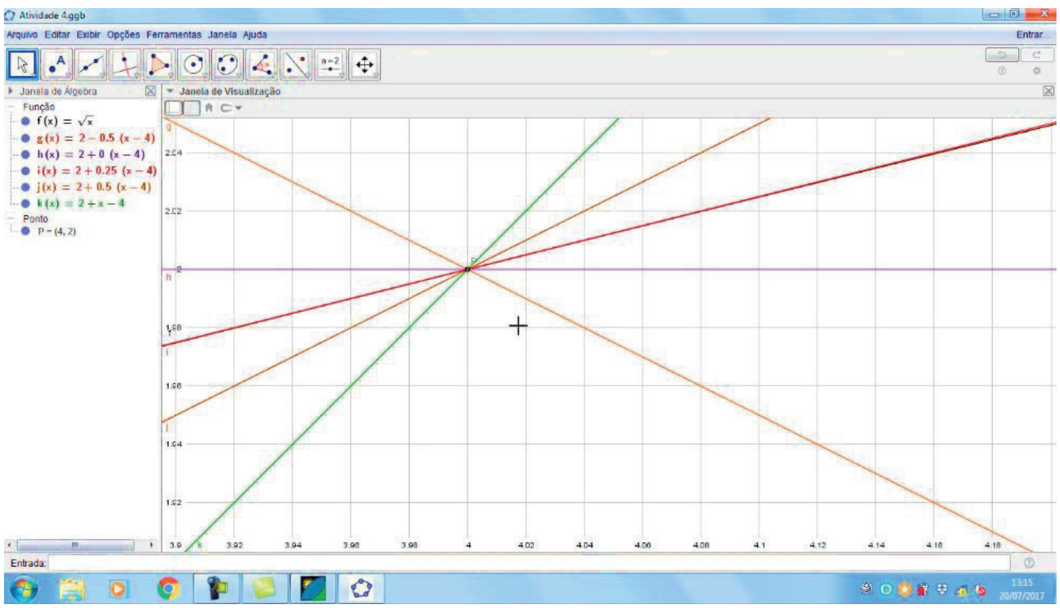
Entendemos que o grupo apresentou características simbólicas para a escolha da reta que dá a melhor aproximação dos valores da função nas proximidades do ponto $P(4, f(4))$, ao analisar os valores numéricos e concluir que a reta é a que tem coeficiente angular $m = 0{,}25$, e características formais da melhor aproximação, inclusive tecendo críticas ao erro de aproximação exibido na tela do GeoGebra.

Na atividade 4, disponibilizamos um arquivo com as representações algébricas e gráficas da função $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sqrt{x}$; e das retas de equação $g(x) = 2 - 0{,}5(x-4)$, $h(x) = 2 - 0(x-4)$, $i(x) = 2 + 0{,}25(x-4)$, $j(x) = 2 + 0{,}5(x-4)$ e $k(x) = 2 + 1(x-4)$ que interceptam a função f no ponto $P = (4, f(4))$, para que, por meio do recurso *zoom* do software GeoGebra os participantes pudessem verificar que a reta que dá uma boa aproximação para os valores da função próximos ao ponto de abscissa $x = 4$ aparenta sobrepor-se ao gráfico da função f, e que só existe uma nas condições dadas.

Nesta atividade, observamos que o Grupo 1 não conseguiu compreender que, nas proximidades de um ponto, os gráficos de uma função e o da reta que dá a melhor aproximação para valores da função praticamente se sobrepõem. Entendemos que isso pode ter ocorrido pela pouca exploração do zoom, isto é, da característica corporificada disponível no software, uma vez que, durante a análise do vídeo desta atividade, percebemos que os integrantes do grupo não aproximaram o gráfico de forma necessária para realizarem a análise.

Após Theodoro aproximar a função por meio do *zoom* (Figura 5), o Grupo 2 iniciou uma discussão do item 4.1, e percebem que a reta que dá a melhor aproximação para os valores da função próximos ao ponto de abscissa $x = 4$ é aquela que, devido ao zoom, se confunde com o gráfico da função (
Figura 6).

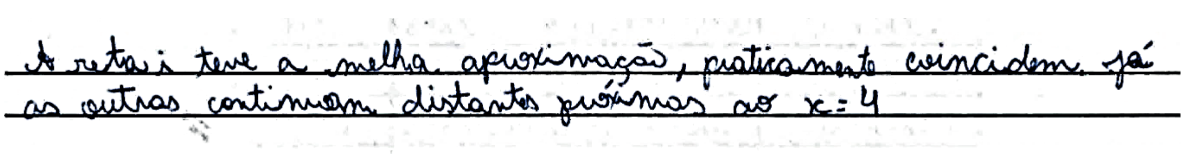
Figura 5. *Tela da Atividade 4 após o Grupo 2 dar o zoom.*



Fonte: Dados da pesquisa

Theodoro: A i e a f, elas estão quase... [referindo-se à reta i e à função f]
Michael Corleone: Quase uma em cima da outra.
Theodoro: A f quase desaparece, oh! [dando mais *zoom*] elas praticamente coincidem.
Michael Corleone: Elas coincidem... as outras continuam, parece, bem distantes.
Theodoro: A reta f e a reta i praticamente se coincidem. Teve a melhor aproximação.
Michael Corleone: E as outras parecem que continuam longe... parece não, continuam!

Figura 6. *Protocolo apresentado pelo Grupo 2 como resposta para a Questão 4.*



Fonte: Dados da pesquisa

O Grupo 2 apresentou características do Mundo Corporificado ao manipular, por meio do recurso zoom, os gráficos presentes na janela de visualização. Essa manipulação possibilitou ao grupo a percepção de que a reta que dá a melhor aproximação da função, nas proximidades do ponto P, se assemelha ao gráfico da função dada, propiciando assim a melhor aproximação linear, desenvolvendo, assim, características do Mundo Formal.

Na quinta atividade, optamos por não utilizar o software, pois tivemos por objetivo desenvolver a compreensão da derivada como o coeficiente angular da reta que dá a melhor aproximação dos valores da função nas proximidades de um ponto, ou seja, explorando características simbólico-formais que envolvem a equação da reta e o uso do limite de uma função. Após as análises, verificamos que o Grupo 1, que não teve êxito na atividade 4, apresentou dificuldades e não relacionou a ideia da reta que dá a melhor aproximação para valores de uma função nas proximidades de um ponto dado ao erro de aproximação presente nas equações envolvendo limites. Destacamos a seguir a discussão realizada pelo Grupo 2, por entender que foi o único que desenvolveu características simbólico-formais durante essa atividade.

Ao analisar o item 5.2 da Atividade 5 (Figura 7), o grupo relaciona a notação simbólico-formal do limite, com a ideia de que a reta que dá a melhor aproximação é a que proporciona o menor erro.

Figura 7. *Questão 5.2 da Atividade 5*

Para encontrar a reta que dá a “melhor” aproximação impomos, matematicamente, que $\lim_{x \to 4} \frac{f(x) - y(x)}{x - 4} = 0$. Analise essa “imposição”! Dê um argumento “intuitivo” que a justifica.

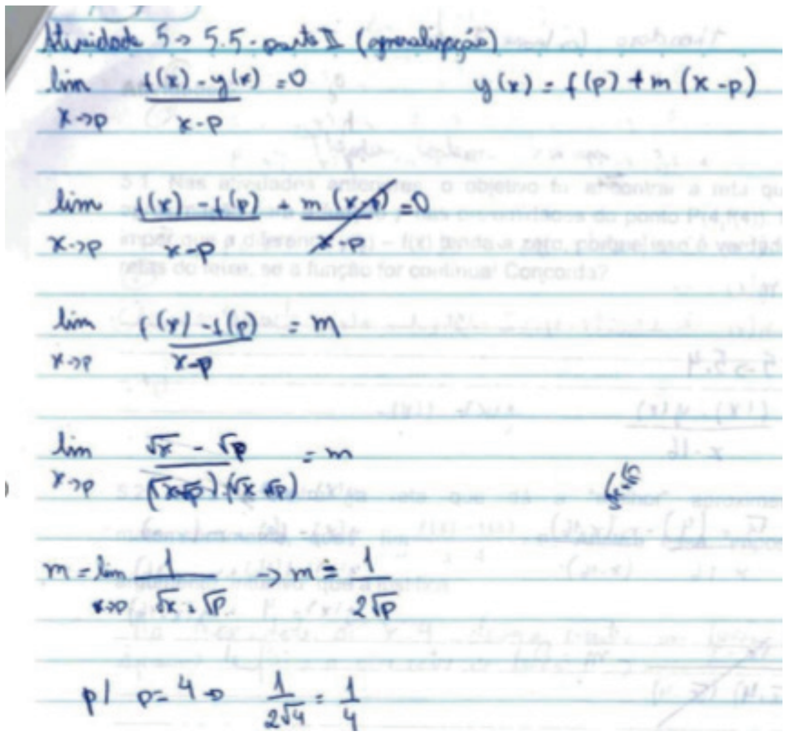
Fonte: Dados da pesquisa

Theodoro: Como que a gente vai fazer? A gente tem que dividir uma coisa pela outra e tem que dar zero. Quando essa coisa dá zero?
Michael Corleone: Isso aqui tem que ser diferente de zero e esse tem que ser igual a zero [referindo-se respectivamente ao denominador e ao numerador].
Theodoro: Tem que ser igual a zero. Quando que isso aqui vai ser igual a zero? Quando f de x…
Michael Corleone: for igual a y de x.
Theodoro: Mas é verdade para todas elas. Mas se a gente usar o argumento que f de x menos y de x tem que ser zero, então quer dizer que f de x é igual a y de x, o que é verdade para todas elas.
Michael Corleone: Sim!
Theodoro: Tem que ser verdade pra ela e pros pontos próximos também, porque não é verdade que o x é igual a quatro.
Michael Corleone: x tende a quatro.
Theodoro: tende a quatro. A gente tem que achar qual função f de x é igual ou tender a y e f de x vai tender a y de x. Então, tem que achar… é a mais próxima.
Michael Corleone: É a mais próxima! A função y de x que é mais próxima de f de x.
Theodoro: Isso é suficientemente intuitivo? [referindo-se ao enunciado que solicitava uma justificativa “intuitiva”]
Michael Corleone: É… a mais pró… y de x vai ser a mais próxima dessa e garantir que isso aqui seja diferente de zero.
Theodoro: Isso é voltar para o mesmo raciocínio que tem que achar a função que tem o menor erro.
Michael Corleone: porque a que tem o menor erro é a que está mais próxima.

Entendemos que as características simbólico-formais, presentes na notação de limite, foram bem compreendidas pelo grupo, que relacionou corretamente à ideia de que o erro de aproximação dos valores da função deve tender a zero nos pontos próximos do ponto de abscissa $x = 4$. Acreditamos que a compreensão demonstrada pelo grupo do significado da notação de limite solicitada no item 5.2 apresenta características simbólico-formais, do estágio da Matemática Teórica.

Na resolução do item 5.5 (
Figura 8), que pede para verificar se é possível calcular o coeficiente angular da reta que dá a melhor aproximação em um ponto qualquer pelo processo de limite, e os integrantes do grupo entendem o porquê o processo dá o coeficiente angular da reta melhor aproximação.

Figura 8. *Resposta do Grupo 2 para a o item 5.5*


Atividade 5 → 5.5 - parte II (generalização)

$\lim_{x\to p} \frac{f(x)-y(x)}{x-p} = 0$ $y(x) = f(p) + m(x-p)$

$\lim_{x\to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p} + \frac{m\cancel{(x-p)}}{\cancel{x-p}} = 0$

$\lim_{x\to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p} = m$

$\lim_{x\to p} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{p}}{(\sqrt{x}-\sqrt{p})(\sqrt{x}+\sqrt{p})} = m$

$m = \lim_{x\to p} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{p}} \rightarrow m = \frac{1}{2\sqrt{p}}$

p/ $p=4 \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$

Fonte: Dados da pesquisa

Entendemos que as características simbólicas-formais, do cálculo do coeficiente angular da reta que dá a melhor aproximação relacionada ao conceito de derivada, propiciaram a compreensão da Concepção Melhor Aproximação de derivada, uma vez que os integrantes do grupo compreenderam a derivada como o coeficiente angular da reta que dá a melhor aproximação dos valores da função nas proximidades de um ponto.

Conclusões

Os resultados obtidos apontam que o uso do software GeoGebra auxiliou no enriquecimento da imagem de conceito dos participantes, pois puderam compreender que a reta que dá a melhor aproximação dos valores da função na vizinhança de um ponto é aquela que gera o menor erro de aproximação. As ideias desenvolvidas com o software, inicialmente, com características corporificada-simbólicas, alavancaram a compreensão de características formais relacionadas à Concepção Melhor Aproximação, por meio de questões nas folhas de atividade, e permitiram aos participantes entender a derivada como o coeficiente angular da reta que dá a melhor aproximação para valores da função na vizinhança de um ponto.

A sincronicidade e a dinamicidade das representações proporcionadas pelo software GeoGebra, permitiram que parte dos participantes relacionassem o valor numérico do erro à distância entre a função e a reta, possibilitando a compreensão de que nas proximidades de um ponto a reta com melhor aproximação aparentemente se sobrepõe ao gráfico da função, fato que foi explorado por meio do recurso zoom do software.

Assim como apontam Gonçalvez (2012) e Richt et al. (2012), entendemos que o software GeoGebra, com as múltiplas representações, a dinamicidade, o sincronismo entre as janelas e o recurso do *zoom*, contribuiu para a criação de um ambiente em que foram possíveis a exploração e a investigação durante as atividades possibilitando a elaboração de conjecturas e o enriquecimento da imagem de conceito de derivada com a Concepção Melhor Aproximação.

Referências bibliográficas

García, M. D. S., & Dolores, C. (2016). Diseño de una situación de aprendizaje para la comprensión de la derivada. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *46*, 49-70.

Gonçalves, D. C. (2012). *Aplicações das derivadas no Cálculo I: atividades investigativas utilizando o GeoGebra*. Dissertação de Mestrado não publicada, Universidade Federal de Ouro Preto. Brasil.

Imafuku, R. I. (2018). *O uso dos softwares simcalc e geogebra para o enriquecimento da imagem de conceito de derivada.* Tese de doutorado não publicada, Universidade Anhanguera de São Paulo. Brasil.

Loureiro, V. I. D. L. (2012). *Função Derivada: uma abordagem didática no Ensino Secundário*. Dissertação de Mestrado não publicada, Universidade de Aveiro. Portugal.

Mação, D. P. (2014). *Uma proposta de ensino para o conceito de derivada*. Dissertação de Mestrado não publicada, Universidade Anhanguera de São Paulo. Brasil.

Richit, A., Benites, V. C., Escher, M. A. & Miskulin, R. G. S. (2012). Contribuições do software GeoGebra no estudo de cálculo diferencial e integral: uma experiência com alunos do curso de geologia. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, São Paulo, *1*(1), 90-99.

Sociedade Brasileira de Educação Matemática (2013). *A formação do professor de matemática no curso de licenciatura: reflexões produzidas pela comissão paritária sbm/sbem*, 21.

Tall, D. (2013). *How humans learn to think mathematically.* New York: Cambridge University Press.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *3*(12), 151-169.

Thurston, W. P. (1994). On the Proof and Progress in Mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, *30*(2),161-177.