

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ECUACIONES ADITIVAS

DANIELA BALAGUERA, VALERIA MAESTRE, JESÚS OSORIO Y ANDRÉS
PINZÓN

BOGOTÁ, DICIEMBRE DE 2022

ECUACIONES ADITIVAS

En este documento, presentamos la cartilla correspondiente al informe final del diseño, implementación y análisis de la unidad didáctica de ecuaciones aditivas, del grupo 1 de la novena cohorte de la Maestría en Educación Matemática, de la Facultad de Educación, de la Universidad de los Andes. Nuestro grupo de trabajo está compuesto por tres profesores de matemáticas, que, cuando realizamos la maestría, estábamos laborando en instituciones del sector privado ubicadas en las ciudades de Bogotá D.C. y Barranquilla. Como profesionales de la Educación Matemática, nos mueve la vocación de ayudar en la formación de jóvenes matemáticamente competentes y seres íntegros que sean capaces de resolver problemas matemáticos en diferentes contextos de su diario vivir.

Implementamos nuestra unidad didáctica de manera presencial en el Liceo de Cervantes Barranquilla. Este colegio busca formar con calidad y excelencia personas líderes, con cultura global e interesadas por el bien común de la sociedad, mediante el aprender a ser, saber hacer y aprender a compartir (PEI, 2019). Además, el modelo pedagógico que fundamenta el proceder del colegio es el constructivismo humanista. El colegio es de carácter privado y confesional cristiano – católico. Pertenece a la comunidad agustiniana y está inscrito dentro del calendario A. Trabaja con jornada continua y ofrece certificado como colegio bilingüe nacional.

Escogimos grado sexto (6^ºA) para la implementación de la unidad didáctica. Este grupo contaba con 26 estudiantes que, académicamente, poseían un alto desempeño en el área de matemáticas y se destacaban por su excelente disposición y comportamiento en clase y su interés por la asignatura. Evidenciamos estas características al tener en cuenta la participación de algunos estudiantes en diversos eventos matemáticos que ocurren dentro y fuera de la institución, por las calificaciones obtenidas en el área durante el grado inmediatamente anterior y por la percepción del profesor del área.

Nuestro propósito con la unidad didáctica es que el estudiante comprenda que una ecuación aditiva establece una relación de igualdad entre dos expresiones en las que hay una incógnita o valor desconocido que se debe encontrar. Igualmente, pretendemos que el estudiante logre representar matemáticamente situaciones de su vida cotidiana a partir de ecuaciones aditivas. Finalmente, tenemos la intención de ayudar a los estudiantes a superar algunos errores en los que ellos suelen incurrir, como el de sumar o restar un número en un solo lado de la ecuación y el de plantear incorrectamente una ecuación que describe una situación problema.

En la tabla 1, presentamos la contribución de la unidad didáctica a los estándares básicos de competencias en matemáticas (Ministerio de Educación Nacional, 2006). Para esto, tenemos en cuenta los procedimientos y conceptos que deben aplicar los estudiantes para alcanzar los objetivos de aprendizaje.

Tabla 1
Contribución a estándares básicos de competencias

Estándar	Tipo de pensamiento
Resuelvo y formulo problemas utilizando propiedades básicas de la teoría de números, como las de la igualdad, las de las distintas formas de la desigualdad y las de la adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación.	Numérico
Formulo y resuelvo problemas en situaciones aditivas y multiplicativas, en diferentes contextos y dominios numéricos.	Numérico
Utilizo métodos informales (ensayo y error, complementación) en la solución de ecuaciones.	Variacional

A continuación, presentamos a qué derechos básicos de aprendizaje (DBA) contribuimos con la unidad didáctica (Ministerio de Educación Nacional, 2016). Los dos primeros DBA corresponden a grado sexto y el tercero a séptimo.

- ◆ DBA 3: reconoce y establece diferentes relaciones (orden y equivalencia) entre elementos de diversos dominios numéricos y los utiliza para argumentar procedimientos sencillos.
- ◆ DBA 9: opera sobre números desconocidos y encuentra las operaciones apropiadas al contexto para resolver problemas.
- ◆ DBA 7: plantea y resuelve ecuaciones, las describe verbalmente y representa situaciones de variación de manera numérica, simbólica o gráfica

En los siguientes apartados, describiremos el diseño de la unidad didáctica. En primer lugar, presentamos el análisis conceptual del tema de las ecuaciones aditivas, los aspectos cognitivos que pretendemos abordar y la estructura general de la unidad didáctica. En segundo lugar, exponemos las tareas de aprendizaje junto con su descripción y sugerencias metodológicas al momento de implementarlas. En tercer lugar, describimos el sistema de evaluación que utilizamos para evaluar el aprendizaje de los estudiantes al finalizar la implementación. Finalmente, cerramos con las conclusiones del trabajo que realizamos al diseñar la unidad didáctica.

1. ANÁLISIS DE CONTENIDO

Al momento de enseñar un tema de las matemáticas escolares, es importante estudiar su estructura conceptual, los sistemas de representación y los fenómenos que dan sentido a ese tema. A continuación, describiremos estos tres aspectos relacionados con el tema de ecuaciones aditivas.

1.1. Estructura conceptual

En la figura 1, presentamos el mapa conceptual de la estructura matemática de la unidad didáctica. El objetivo con este mapa conceptual es exponer los elementos del campo conceptual del tema ecuaciones aditivas y los procedimientos ejecutados sobre esos elementos. En el campo

conceptual, definimos una ecuación aditiva como una igualdad entre dos expresiones (miembros) en las que existen valores conocidos (números naturales) y un valor desconocido o incógnita, que se representa mediante letras o símbolos. En relación con el campo procedimental, encontramos que existen diferentes métodos para dar solución a las ecuaciones. En el caso de las ecuaciones aditivas, podemos emplear la propiedad uniforme de las igualdades, el tanteo, las sumas y las restas. Emplear la propiedad uniforme de las igualdades consiste en sumar o restar un número en ambos lados de la ecuación para despejar la incógnita. Emplear el tanteo consiste en darle valores a la incógnita hasta que se encuentre un número que cumpla con la igualdad.

Ahora, las ecuaciones aditivas, al ser igualdades, cumplen con las siguientes propiedades: reflexiva, simétrica, transitiva, uniforme y cancelativa. Cabe resaltar que estas propiedades nos permiten justificar el uso de los métodos explicados anteriormente para dar solución a una ecuación aditiva. La propiedad reflexiva indica que todo número o expresión matemática es igual a sí misma. La propiedad simétrica consiste en que el orden de los dos miembros de una igualdad se puede cambiar sin afectarla. Por ejemplo, la igualdad $x + 1 = 2$ es equivalente a la igualdad $2 = x + 1$. La transitividad también está relacionada con los miembros de la igualdad, pues establece que si dos igualdades tienen un miembro en común los otros dos también son iguales. La propiedad uniforme, quizás una de las más importantes al resolver una ecuación, indica que si se aumenta o disminuye la misma cantidad a ambos lados de la igualdad esta se mantiene. Es decir, lo que se suma o se resta a un lado de la ecuación para despejar la incógnita, se debe hacer en el otro para mantener la igualdad. Por último, la propiedad cancelativa hace referencia a la posibilidad de eliminar los elementos iguales de los lados de la ecuación sin que esta se vea afectada. Por ejemplo, la ecuación $x + 3 = 1 + 1 + 3$ no se altera si se resta el número 3 a ambos lados de la ecuación, pues el resultado será el mismo que el de la ecuación $x = 1 + 1$.

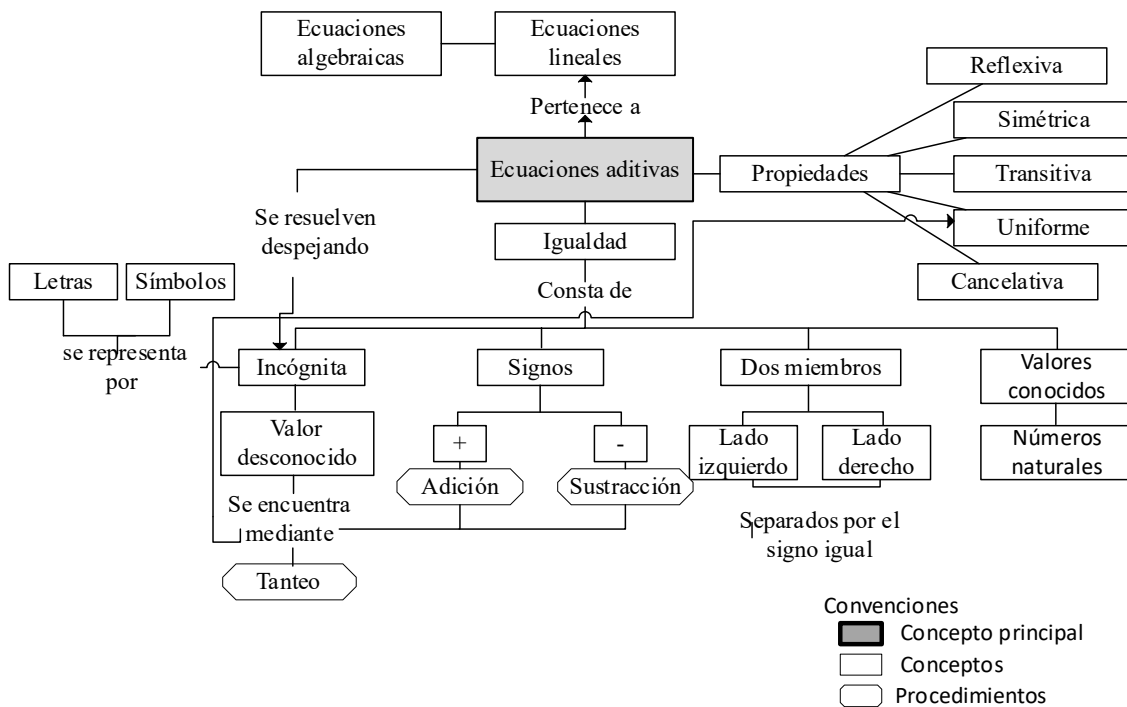


Figura 1. Estructura conceptual de las ecuaciones aditivas

1.2. Sistemas de representación

Los sistemas de representación, como conjunto de signos que se ciñen a unas reglas para su creación, manipulación y transformación (Cañadas, Gómez y Pinzón, 2018), nos permiten presentar un mismo tema matemático de diferentes maneras. Para el caso del tema de las ecuaciones aditivas, identificamos los siguientes sistemas de representación (figura 2): gráfico, simbólico, numérico, manipulativo, ejecutable, geométrico, pictórico y verbal.

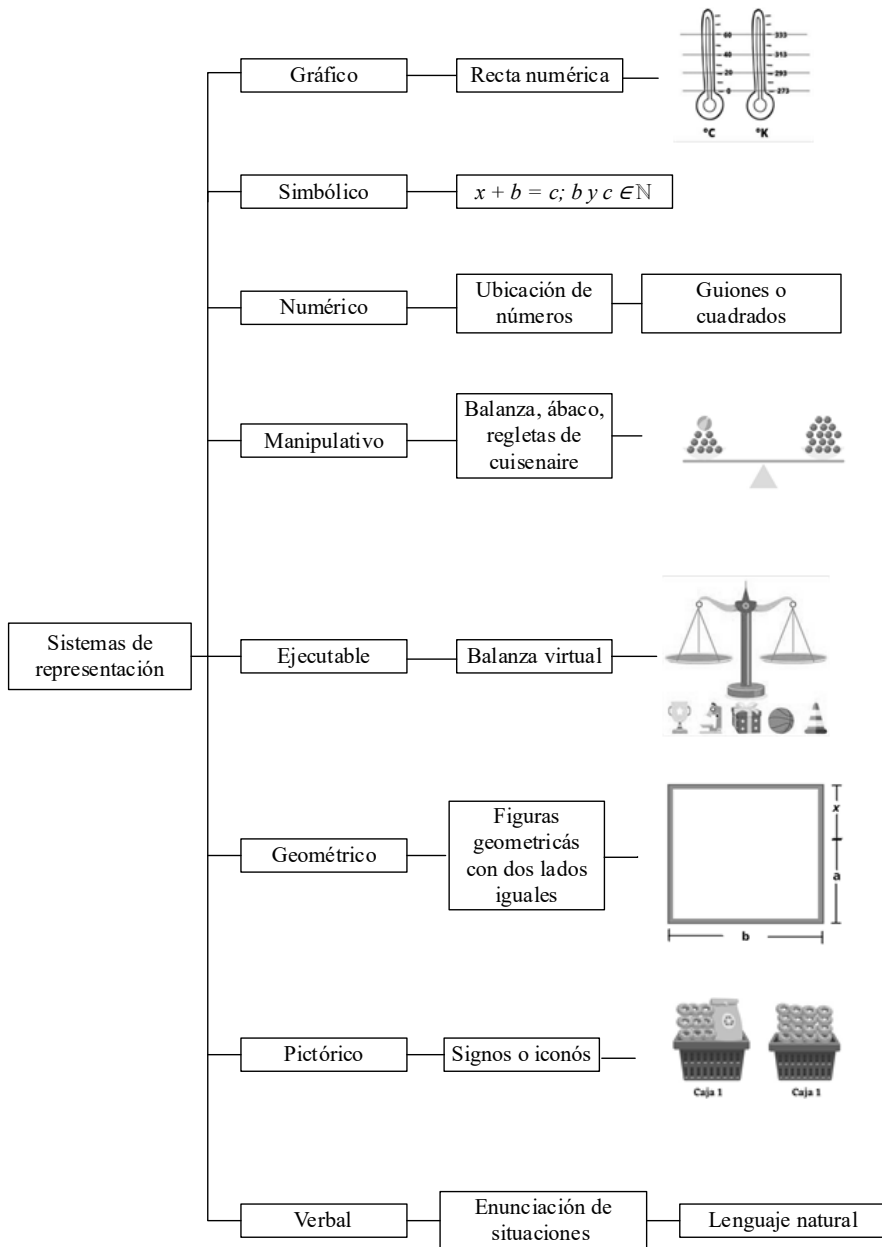


Figura 2. Sistemas de representación para las ecuaciones aditivas

A continuación, describimos los sistemas de representación relevantes para el tema.

Sistema de representación gráfico. Mediante el sistema de representación gráfico podemos representar una ecuación aditiva al relacionar los valores de dos rectas numéricas mediante una función o relación aditiva entre estos valores. Cada recta numérica tiene una determinada escala de valores según la ecuación que se quiere representar. En relación con los elementos de la ecuación, los

valores conocidos serían los valores que están relacionados uno a uno en las rectas numéricas. El valor desconocido de la ecuación aditiva podría ser la diferencia que hay entre los valores relacionados.

Sistema de representación simbólico. El sistema de representación simbólico nos permite representar una ecuación aditiva mediante números, letras y símbolos de los números y las operaciones aritméticas. Como se puede observar en el mapa conceptual de la figura 2, podemos representar una ecuación aditiva mediante la expresión algebraica estándar: $x + b = c$, $b \leq c$. Esta expresión evidencia los principales elementos que caracterizan una ecuación aditiva: la letra x que representa el valor desconocido o la incógnita; las letras b y c que representan valores conocidos; el símbolo igual que da cuenta de la igualdad y el signo más que representa la operación de la adición.

Sistema de representación numérico. El sistema de representación numérico nos permite representar una ecuación aditiva mediante el uso de números y símbolos característicos de la ecuación (signos más o menos y el símbolo igual). Esto se puede evidenciar cuando se utiliza un cuadrado o guión bajo para representar la incógnita, pues en estos espacios se deben ubicar números hasta que se encuentre el que cumpla con la igualdad.

Sistema de representación ejecutable. En relación con programas o aplicaciones que permitan representar una ecuación aditiva, encontramos distintos manipuladores algebraicos de balanzas virtuales, cada uno con “sus elementos propios y sus propias reglas para representar, combinar y operar con esos elementos” (Cañadas, Gómez y Pinzón, 2018, p. 81). Por ejemplo, en el juego virtual (figura 3) de la página Educaplus, llamado “Equilibra la balanza”, los platos de la balanza representan los dos miembros de la ecuación, la masa del regalo sorpresa simboliza la incógnita, y la masa de otro objeto junto con la suma de la masa de algunas pesas los valores conocidos de la ecuación aditiva.

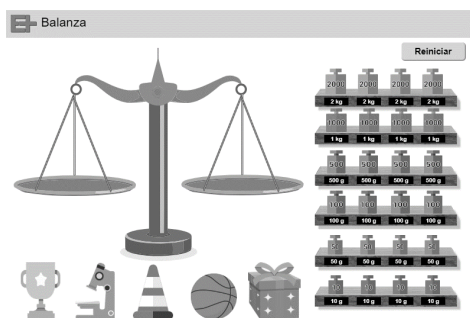


Figura 3. Simulador virtual “Equilibra la balanza”

Sistema de representación geométrico. En relación con el sistema de representación geométrico, podemos representar una ecuación aditiva mediante una figura geométrica con al menos dos lados iguales. Si la figura geométrica tiene por lo menos dos lados iguales, podemos asignarle un valor b a uno de estos lados iguales y representar en el otro lado igual esta medida mediante la expresión $x + c$. De esta manera, podemos igualar $b = x + c$ para encontrar el valor de la incógnita x , al conocer los valores de b y c .

Sistema de representación pictórico. El sistema de representación pictórico permite utilizar signos o iconos para representar los elementos que conforman las ecuaciones aditivas: los valores conocidos, la incógnita y el signo igual. Por ejemplo, los elementos de la ecuación $x + 9 = 16$ son representados como objetos de la canasta familiar, las donas representan los valores conocidos de la ecuación y la bolsa hace referencia a la incógnita (figura 4).



Figura 4. Sistema de representación pictórico

Sistema de representación verbal. Las ecuaciones aditivas también pueden ser representadas mediante el sistema de representación verbal. Para esto, se hace uso del lenguaje común, principalmente, de expresiones que implican el uso de palabras asociadas a los verbos “aumentar” y “disminuir”. Por ejemplo, “un número aumentado en 9 es igual a 16” es una oración que representa la ecuación aditiva $x + 9 = 16$.

1.3. Fenómenos que dan sentido al tema de ecuaciones aditivas

En este apartado, primero, identificamos y describimos algunos de los fenómenos que le dan sentido al tema de ecuaciones aditivas, a partir de las diferentes situaciones y problemas que suelen resolverse mediante el uso de estas ecuaciones. En el campo de la economía, podemos implementar las ecuaciones aditivas para determinar la cantidad de dinero que recibe una persona; determinar los egresos que ha tenido una persona en un determinado momento; y calcular la cantidad y el precio de los artículos que se venden o que una persona compra para suplir sus necesidades. En el campo de la ciencia química, las ecuaciones aditivas pueden ser utilizadas para encontrar la cantidad de neutrones presentes en un elemento. En el campo de la física, también podemos encontrar las magnitudes de las resistencias de un circuito eléctrico en serie a partir de la ecuación aditiva $R_T = R_1 + R_2 + \dots + R_n$ y las magnitudes de los condensadores de un circuito eléctrico en paralelo mediante la ecuación aditiva $C_T = C_1 + C_2 + \dots + C_n$. En estas ecuaciones, la incógnita puede ser alguna de las magnitudes y los valores conocidos la suma de las demás magnitudes y la magnitud total, ya sean de las resistencias o de los condensadores.

Por otro lado, en el campo de la demografía podemos usar ecuaciones aditivas para encontrar la cantidad de habitantes de una determinada población. En el campo de la cocina, en un comedor comunitario, el cocinero puede calcular qué cantidad de producto se tenía antes de la preparación de un alimento a partir de lo que se utilizó y de lo que sobró. Finalmente, en el campo de la geometría, las ecuaciones aditivas también pueden ser significativas para abordar los siguientes fenómenos: dimensión de un objeto o de figuras geométricas, distancia entre dos objetos y medidas de ángulos internos, ángulos suplementarios y complementarios de un triángulo.

Ahora, agrupamos los fenómenos mencionados según las características estructurales que comparten o que los relaciona. Una característica estructural puede ser la posición de la incógnita en la ecuación planteada, con respecto a los valores conocidos. Para esto, tenemos en cuenta la estructura matemática de las ecuaciones aditivas, dada por la expresión algebraica $x + b = c$. En esta estructura, x representa la incógnita y b y c valores conocidos pertenecientes al conjunto de los naturales. A partir de esto, definimos tres subestructuras en las que clasificamos las ecuaciones que podrían modelar situaciones en los diferentes fenómenos identificados: $x + b = c$ ($b < c$), $b - x = c$ ($b > c$) y $x - b = c$. En relación con la segunda subestructura, tenemos los casos en los que la incógnita se le resta a un valor conocido, por lo que el valor de la incógnita será un número natural. De esta manera, dadas las subestructuras de las ecuaciones, clasificamos los fenómenos en tres grupos que denominamos contextos fenomenológicos: adición de un valor conocido, sustracción de un valor conocido y sustracción de un valor desconocido. Es decir, cada contexto fenomenológico agrupa fenómenos según las características estructurales que tienen en común las ecuaciones que modelan situaciones propias de estos fenómenos.

Por otra parte, también podemos organizar los fenómenos mencionados a partir de los tipos de contextos establecidos por el marco de PISA 2012: personal, social, profesional y científico (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte de España, 2013). Para ilustrar, en el contexto personal, agrupamos los fenómenos económicos asociados a las finanzas personales de un individuo: ingresos, egresos y compra y venta de artículos. En el contexto social, determinamos dos fenómenos asociados con actividades propias de la comunidad local, como lo es la preparación de alimentos para un comedor comunitario y el cálculo de habitantes de una determinada población o comunidad con ciertas características sociales. En el contexto profesional, identificamos la venta de productos como una actividad de carácter laboral, ya sea que la realice una persona o una empresa. Finalmente, en el contexto científico, organizamos la mayoría de los fenómenos que relacionamos con el tema de ecuaciones aditivas: velocidad final de un objeto en caída libre, número de neutrones de un elemento químico, perímetros, dimensión de un objeto o de figuras geométricas, ángulos internos de un triángulo, resistencias y condensadores de un circuito eléctrico, y distancia entre dos objetos. Realizamos esta agrupación al tener en cuenta que estos fenómenos implican la aplicación de las matemáticas en el campo de las ciencias y la tecnología. Por ejemplo, si bien los circuitos eléctricos forman parte de la física, también están relacionados con la electricidad que requieren los dispositivos electrónicos.

A continuación, presentamos un esquema (figura 5) en el que agrupamos los diferentes fenómenos abordados según las subestructuras y los contextos fenomenológicos que determinamos.

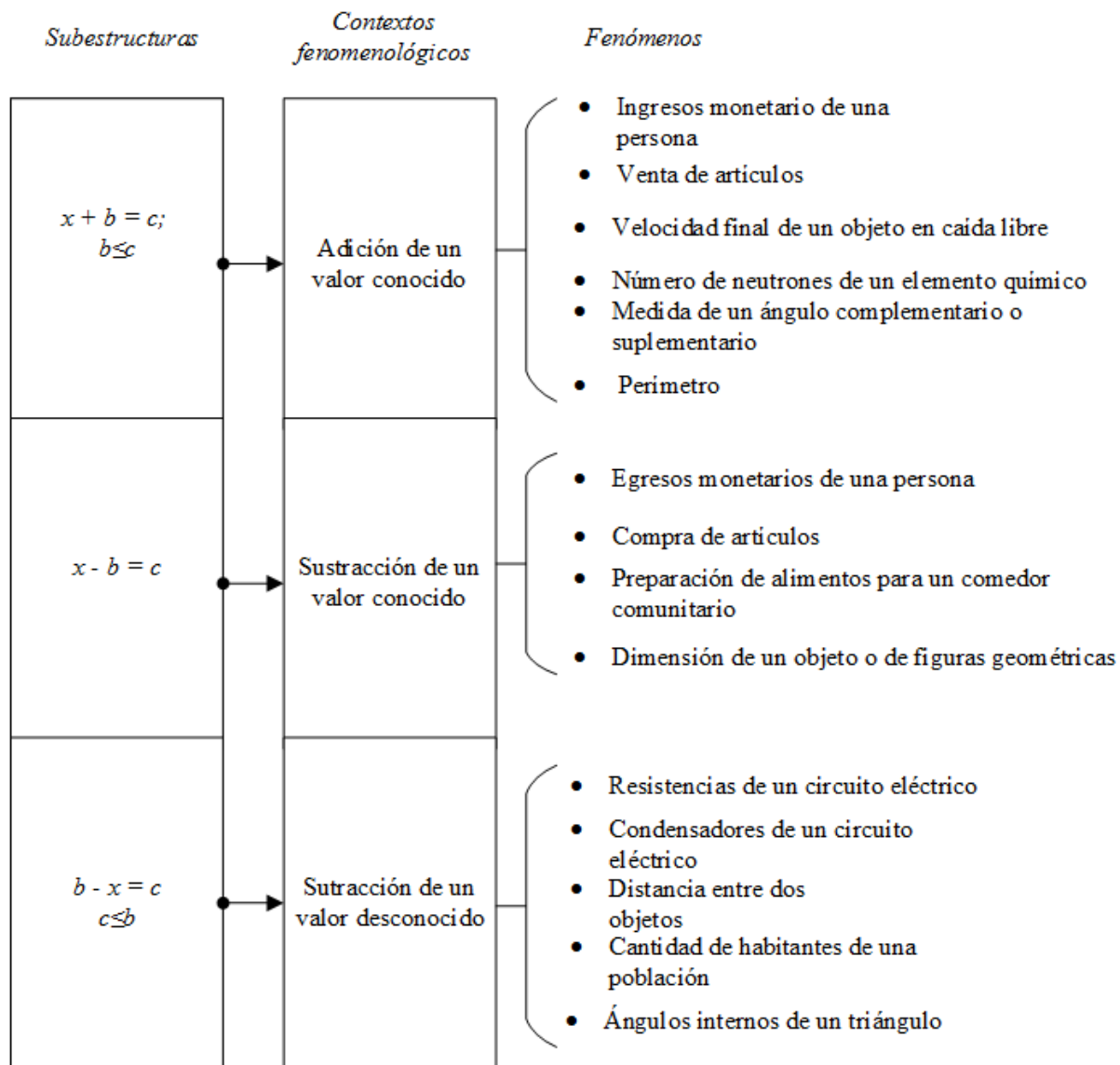


Figura 5. Fenómenos que dan sentido al tema de ecuaciones aditivas

2. ANÁLISIS COGNITIVO

En este apartado, abordamos las previsiones sobre los aprendizajes de los estudiantes en términos de las expectativas de aprendizaje de tipo cognitivo y de tipo afectivo, las limitaciones de aprendizaje y los criterios de logros. En relación con las expectativas de tipo cognitivo, presentaremos las expectativas de aprendizaje de nivel superior y los objetivos de aprendizaje que pretendemos desarrollar con la implementación de la unidad didáctica.

2.1. Expectativas de aprendizaje de nivel superior

Consideramos las capacidades matemáticas fundamentales y los procesos matemáticos definidos en el marco conceptual PISA 2012 (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte de España, 2013) para determinar las expectativas de nivel superior. Por un lado, con esta unidad didáctica, esperamos que los estudiantes desarrollen en mayor medida las capacidades matemáticas fundamentales de matematización (M), representación (R), comunicación (C), razonamiento y argumentación (RA) y utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico (U).

Por otro lado, pretendemos contribuir a los procesos matemáticos de formular, emplear e interpretar. En el caso del proceso de formular, los estudiantes deben reconocer aspectos matemáticos presentes en los enunciados de las tareas y representar las situaciones mediante ecuaciones aditivas. Para contribuir al proceso de emplear, proponemos tareas en las que los estudiantes deben emplear el concepto y los métodos de solución de una ecuación aditiva, así como también deben razonar sobre los datos presentes en la formulación de las tareas para responderlas. Por último, para el proceso interpretar, los estudiantes deben analizar las respuestas o soluciones obtenidas en las tareas, reflexionar sobre ellas, interpretarlas y sacar conclusiones en el contexto de la tarea.

2.2. Objetivos de aprendizaje

Planteamos dos objetivos de aprendizaje que nos permiten expresar qué esperamos que los estudiantes aprendan sobre las ecuaciones aditivas. Para esto, tenemos en cuenta que los estudiantes deben realizar conexiones entre los conceptos, procedimientos, sistemas de representación y fenómenos característicos del tema. Asimismo, diseñamos los objetivos de aprendizaje con base en las expectativas de aprendizaje de nivel superior a las que pretendemos contribuir. Dado lo anterior, presentamos los dos objetivos de aprendizaje planteados.

- ◆ *Objetivo 1.* Formular la ecuación aditiva que modela una situación en un contexto real.
- ◆ *Objetivo 2.* Resolver ecuaciones aditivas mediante la propiedad uniforme de las igualdades, el tanteo, sumas y restas.

2.3. Expectativas de tipo afectivo

La dimensión afectiva del estudiante interviene en su proceso de aprendizaje, al tener en cuenta los estados de ánimo, los sentimientos y la motivación que tiene durante este proceso. Por ejemplo, si un estudiante se siente poco motivado al desarrollar una tarea de aprendizaje dada, puede que esto se deba al poco interés que la tarea le evoca. Esto puede causar un bajo rendimiento o desempeño en la actuación y aprendizaje del estudiante. Por esta razón, es importante establecer expectativas relacionadas con los aspectos afectivos y de la motivación. En esta unidad didáctica, la seguridad al expresarse o dar una respuesta, el interés por resolver situaciones que involucren las matemáticas en la vida cotidiana, y el hábito de verificar y corregir lo realizado, fueron los pilares fundamentales de las expectativas de tipo afectivo. Por esto, pretendemos contribuir al desarrollo de las siguientes expectativas afectivas:

- ◆ *EA1.* Adquirir seguridad al plantear y comunicar la ecuación aditiva que modela una situación en un contexto real.
- ◆ *EA2.* Desarrollar el interés por resolver situaciones mediante el uso de las ecuaciones aditivas.

- ♦ *EA3*. Desarrollar el hábito de verificar el resultado obtenido al plantear y resolver ecuaciones aditivas.

2.4. Limitaciones de aprendizaje

Consideramos como limitaciones de aprendizaje las dificultades que obstaculizan el aprendizaje de los estudiantes y los errores en los que ellos pueden incurrir como manifestación de esas dificultades (González y Gómez, 2018). Tomamos los errores como las acciones que el estudiante realiza como muestra de un proceso incorrecto al resolver una tarea dada. Dado que estas acciones se relacionan con una circunstancia o dificultad particular, clasificamos y organizamos los errores a partir de cada una de las dificultades de aprendizaje planteadas.

Para definir las dificultades relacionadas con el aprendizaje de las ecuaciones aditivas, consideramos las dos categorías de dificultades planteadas por Socas (1997). En primer lugar, consideramos las siguientes dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos: (a) aplicación de la propiedad uniforme de las igualdades, (b) empleo de la propiedad uniforme de las igualdades y (c) representación de la ecuación aditiva que modela una situación dada. Estas dificultades hacen referencia a cómo el estudiante entiende el concepto de ecuación aditiva, cómo lo relaciona con los conocimientos previos sobre la adición y sus propiedades, y cómo puede plantear y representar una ecuación aditiva que modela una situación. En segundo lugar, definimos las siguientes dificultades asociadas a los procesos propios del pensamiento matemático: (a) determinación de la información que se requiere para plantear una ecuación aditiva y (b) validación de la ecuación y de su solución. Estas dificultades se deben a los procesos que los estudiantes deben llevar a cabo para argumentar o explicar por qué el planteamiento de una ecuación aditiva es correcto, a partir de la información brindada en cada tarea.

En la tabla 2, presentamos el listado de dificultades y errores más frecuentes y significativos en los que pueden incurrir los estudiantes. El listado completo se encuentra en el anexo 1.

Tabla 2

Listado de dificultades y errores representativos para el tema de ecuaciones aditivas

E	Descripción
D1. Aplicación de la propiedad uniforme de las igualdades.	
1	Aplicar la propiedad uniforme del valor conocido b en un solo miembro de la ecuación.
2	Aplicar la propiedad uniforme del valor conocido c en un solo miembro de la ecuación.
5	Aplicar la propiedad uniforme de la incógnita en un solo miembro de la ecuación.
D2. Determinación de la información que se requiere para plantear una ecuación aditiva	
6	Asociar datos que no son relevantes para encontrar los valores conocidos de la ecuación aditiva que modela una situación.
21	Identificar el valor conocido que representa el parte-todo como el todo de una ecuación aditiva dada.
22	Identificar el valor conocido que representa el todo como el parte-todo de una ecuación aditiva dada.
53	Sumar reiteradamente dos o más valores dados que no corresponden para encontrar la medida de una magnitud por medio del tanteo.
54	Identificar como valor conocido b la medida que no corresponde a una magnitud dada.
59	Restar reiteradamente dos o más valores dados que no corresponden para encontrar la medida de una magnitud por medio del tanteo.
83	Encontrar solo algunas de las medidas de magnitudes para determinar el valor conocido b .
65	Identificar una regularidad que no corresponde a la relación que hay entre los miembros de una secuencia.
D3. Empleo de la propiedad uniforme	
31	Identificar el elemento opuesto del valor conocido que no es necesario para dar solución a la ecuación aditiva.
32	Obtener un resultado que no corresponde en la suma de los términos conocidos con el elemento opuesto del valor conocido b .
33	Obtener un resultado que no corresponde en la suma de los términos conocidos con el elemento opuesto del valor conocido c .
D4. Validación de la ecuación y de su solución	
85	Escribir que la solución es correcta aun cuando encuentra diferencias entre el enunciado de la tarea y la respuesta obtenida.

Tabla 2

Listado de dificultades y errores representativos para el tema de ecuaciones aditivas

E	Descripción
86	Escribir que la solución de la tarea es el valor numérico de la incógnita cuando necesita contextualizar ese valor con base en el enunciado y la pregunta de la tarea.
D5. Representación de la ecuación aditiva que modela una situación dada	
39	Obtener un desequilibrio en la balanza al ubicar en sus platos los objetos que corresponden a los elementos de una ecuación aditiva.
75	Identifica únicamente un valor conocido de una ecuación aditiva representada geoméricamente.
45	Extraer información que no corresponde con la ecuación aditiva representada gráficamente.

Nota. E: error, D: dificultad.

2.5. Criterios de logro

Consideramos importante compartir con los estudiantes lo que esperamos que ellos realicen al resolver las tareas de aprendizaje. Para esto, diseñamos los criterios de logro que establecen qué procedimientos concretos deben llevar a cabo los estudiantes en el proceso de solución de una tarea. Redactamos cada criterio de logro de manera que el estudiante los comprenda y pueda evaluar su desempeño en el alcance de los objetivos de aprendizaje. En la tabla 3, presentamos un listado de ejemplos de criterios de logro asociados al primer objetivo. El listado completo de criterios de logro se encuentra en el anexo 2.

Tabla 3
Ejemplo de criterios de logro para el primer objetivo

CdL	Descripción
1.1	Identifico la información que me brinda el enunciado para resolver la tarea.
1.2	Identifico qué datos me brinda un gráfico sobre una ecuación aditiva.
1.5	Identifico que una cantidad depende de otra al sumarle o restarle un valor.
19	Asigno un símbolo o letra al valor que debo encontrar.
27	Selecciono la resta como operación que vincula los elementos de la ecuación, ya sea de la forma $x - b = c$ o $b - x = c$
28	Asocio los valores conocidos b y c con las partes del todo de la ecuación aditiva de la forma $x - b = c$
29	Verifico y justifico por qué la ecuación aditiva encontrada da respuesta a la pregunta de la tarea.

Nota. CdL: criterio de logro.

2.6. Grafos de criterios de logro de los objetivos de aprendizaje

Los estudiantes desarrollan cada objetivo de aprendizaje mediante la activación de un conjunto de procedimientos que se les comparte en términos de criterios de logro. Por esto, con el fin de brindarle a los estudiantes un esquema que les permita identificar el orden y la relación que hay entre cada uno de esos procedimientos, diseñamos un grafo de criterios de logro por cada objetivo de aprendizaje. Cada grafo de criterios de logro se estructura y está compuesto por las diferentes estrategias de solución que el estudiante puede emplear para resolver las tareas de aprendizaje de cada objetivo. Además, en cada grafo de criterios de logro, encontramos los errores en los que pueden incurrir los estudiantes al resolver las tareas. Estos errores están asociados a un determinado criterio de logro, pero no todos los criterios de logros tienen un error asociado, pues los procedimientos relacionados con la toma de decisiones no tienen errores.

En el caso del primer objetivo de aprendizaje, el grafo de criterios de logros se caracteriza por evidenciar tres estrategias de solución para las tareas propuestas para el alcance de este objetivo. Los primeros criterios de logro están relacionados con la identificación de la información necesaria para el planteamiento de la ecuación aditiva (figura 6), a partir del enunciado de las tareas y de los sistemas de representación que las caracteriza. Luego, encontramos los criterios de logros que dan cuenta de la selección de la operación y la subestructura que relacionará los elementos de la ecuación aditiva, lo que define las tres estrategias de solución de las tres tareas propuestas (figura 7). Por último, encontramos los criterios de logro relacionados con la representación y verificación de la ecuación aditiva planteada.

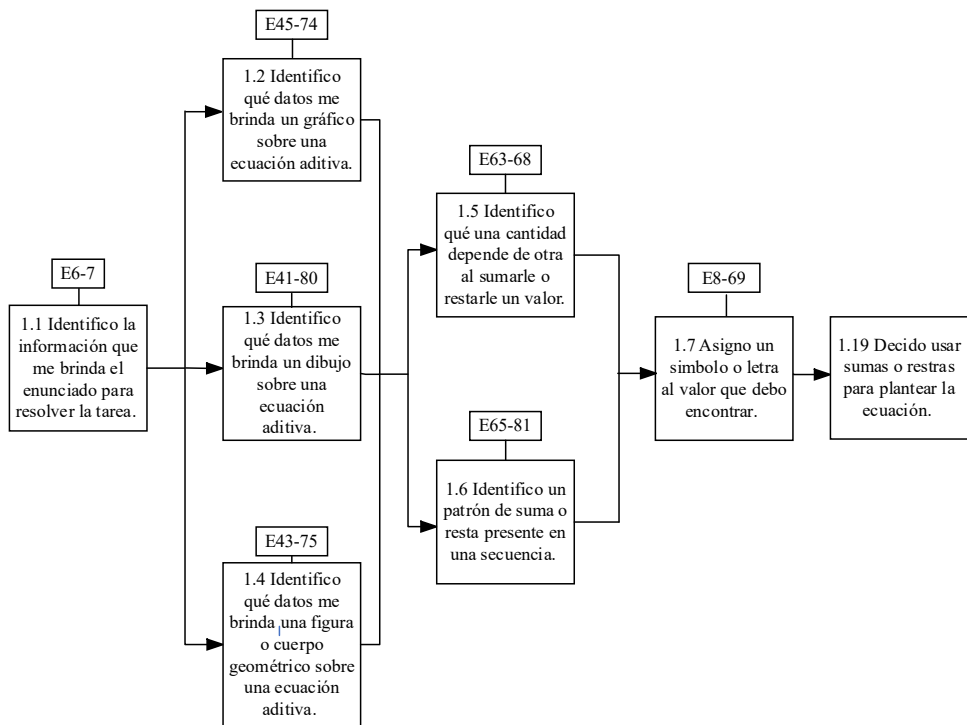


Figura 6. Primera parte del grafo de criterios de logro del primer objetivo de aprendizaje

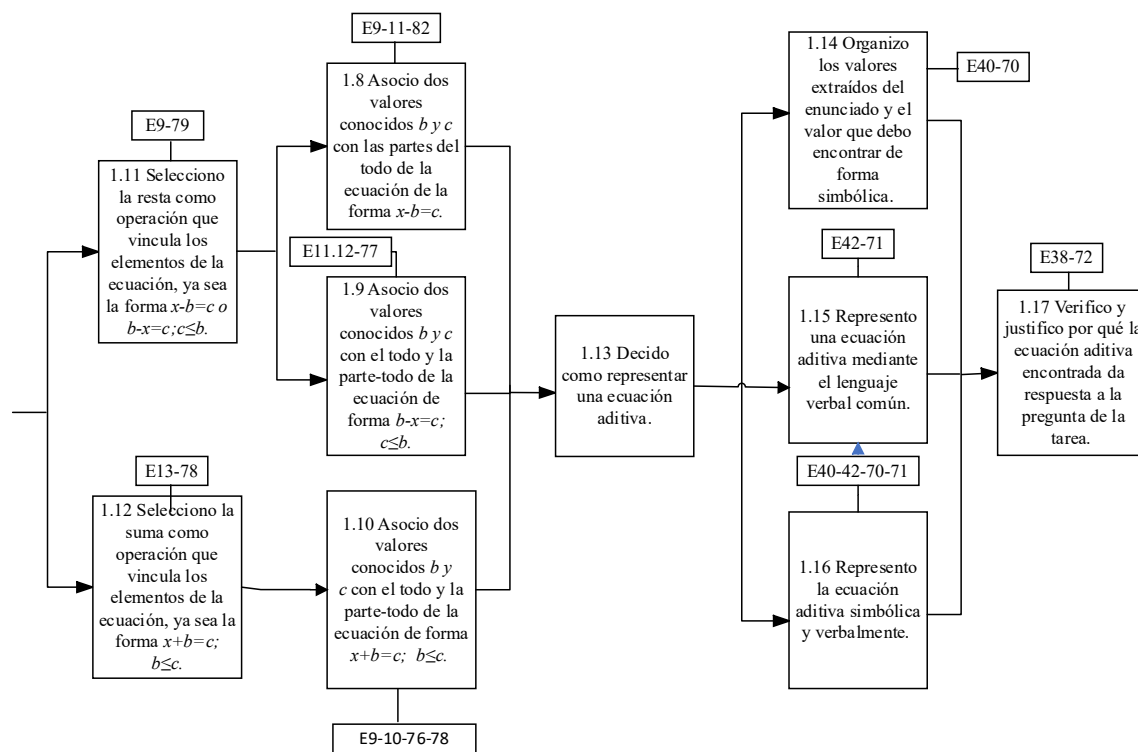


Figura 7. Segunda parte del grafo de criterios de logro del primer objetivo de aprendizaje

En relación con el segundo objetivo de aprendizaje, el grafo de criterios de logro también comienza con un criterio asociado a la interpretación de la información (figura 8). Después, encontramos un criterio relacionado con la decisión sobre qué método, entre sumas y restas o la propiedad uniforme de las igualdades, el estudiante utiliza para resolver las ecuaciones aditivas de las tareas. A partir de esta decisión, el estudiante aplica un método o el otro. Por otra parte, tenemos el método del tanteo, para el que el estudiante debe encontrar una determinada información antes de utilizar este método de solución. En la tarea en la que prevemos que el estudiante utilice el tanteo, los estudiantes deben completar una tabla. Por último, al encontrar la solución de las tareas, los estudiantes deben verificar que la información sea coherente y correcta, para dar una respuesta completa a la tarea.

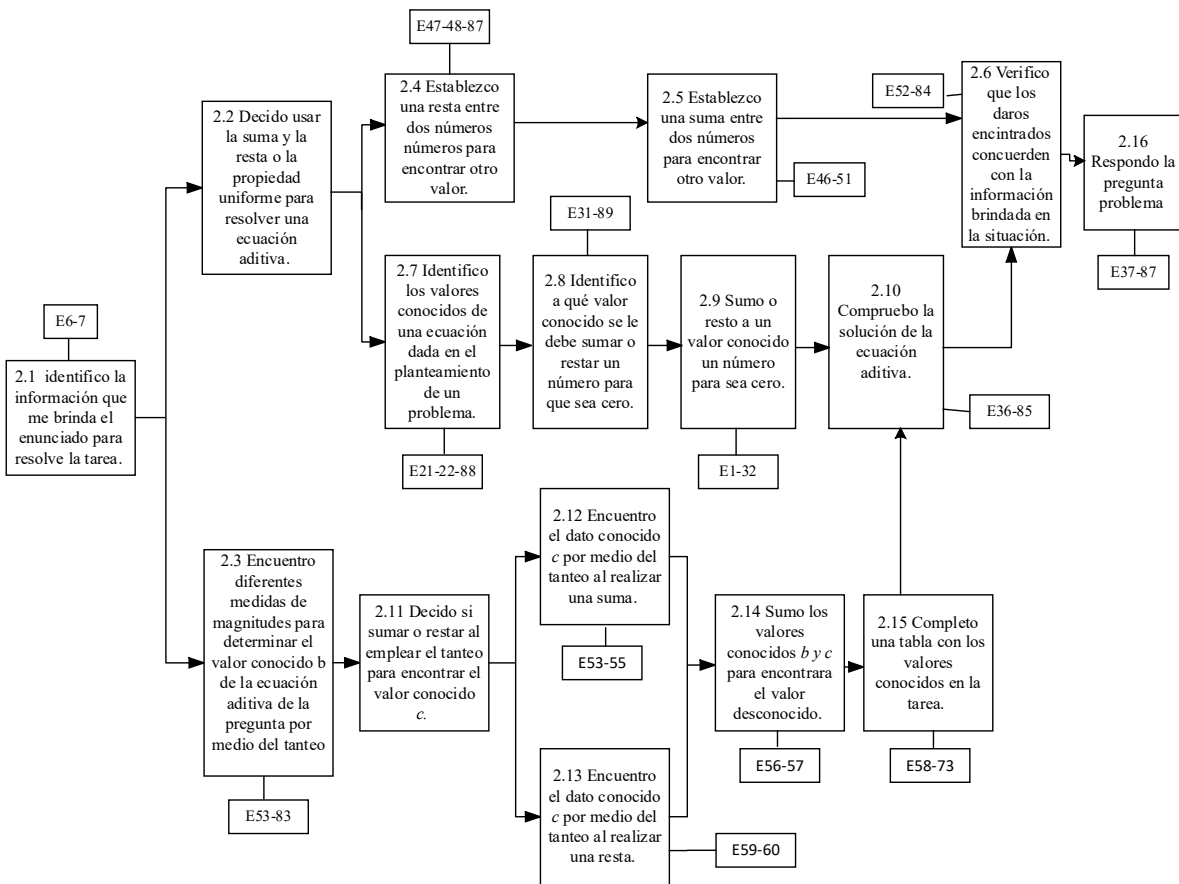


Figura 8. Grafo de criterios de logro del segundo objetivo de aprendizaje

3. ESQUEMA GENERAL DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

En este apartado, compartimos la estructura de la unidad didáctica (tabla 4). Primero, presentamos la unidad didáctica, aplicamos la tarea diagnóstica, compartimos los resultados de esta prueba e implementamos estrategias para la superación de dificultades identificadas. Después, presentamos los objetivos de aprendizaje de la unidad didáctica e implementamos las tareas de aprendizaje que permitirán su alcance. Por último, evaluamos los aprendizajes de los estudiantes mediante el examen final, retroalimentamos su desempeño en esta evaluación y realizamos el cierre de la unidad didáctica. Para realizar lo anterior, pretendemos tomar siete sesiones de clase, cada una con un tiempo de duración entre 80 a 90 minutos. Cabe resaltar que cada sesión de clase se compone de unas etapas. Por ejemplo, en la sesión 4, retroalimentamos los trabajos realizados por los estudiantes en la sesión 3; presentamos las tareas de aprendizaje T1.3 y T2.1 junto con sus criterios de logro y el diario del estudiante; y brindamos el espacio para que los estudiantes diligencien los respectivos diarios al terminar cada una de las tareas.

Tabla 4

Estructura global de la unidad didáctica

Sesión	Actividad	Etapas	Tiempo
1	Presentación del tema y tarea diagnóstica	Presentación de la unidad didáctica.	15 min
		Aplicación tarea diagnóstica.	65 min
2	Adopción de medidas a partir de resultados de la tarea diagnóstica	Puesta en común de resultados de la tarea diagnóstica.	15 min
		Actividades propuestas por el libro guía para superar dificultades detectadas en la tarea diagnóstica.	65 min
3	Sesión de implementación #1	Presentación de los objetivos (énfasis en el objetivo 1).	45 min
		Presentación de la tarea T1.1, instrucciones y solución.	
		Presentación de los criterios de logro y diario del estudiante.	
		Diligenciamiento, recolección y puesta en común de los diarios del estudiante.	45 min
4	Sesión de implementación #2	Presentación de la tarea T1.2, instrucciones y solución.	
		Presentación de los criterios de logro y diario del estudiante.	
		Diligenciamiento, recolección y puesta en común de los diarios del estudiante.	
		Retroalimentación de los trabajos realizados en la sesión anterior.	42 min
4	Sesión de implementación #2	Presentación de la tarea T1.3, instrucciones y solución.	
		Presentación de los criterios de logro y diario del estudiante.	
		Diligenciamiento, recolección y puesta en común de los diarios del estudiante.	
			48 min

Tabla 4

Estructura global de la unidad didáctica

		Presentación de la tarea T2.1, instrucciones y solución.	
		Presentación de los criterios de logro y diario del estudiante.	
		Diligenciamiento, recolección y puesta en común de los diarios del estudiante.	
		Retroalimentación de los trabajos realizados en la sesión anterior.	38 min
		Presentación de la tarea T2.2, instrucciones y solución.	
		Presentación de los criterios de logro y diario del estudiante.	
		Diligenciamiento, recolección y puesta en común de los diarios del estudiante.	
5	Sesión de implementación #3	Presentación de la tarea T2.3, instrucciones y solución.	47 min
		Presentación de los criterios de logro y diario del estudiante.	
		Diligenciamiento, recolección y puesta en común de los diarios del estudiante.	
		Retroalimentación del trabajo realizado.	
6	Examen final	Realización del examen final.	70 min
		Puesta en común del examen final.	15 min
7	Sesión de cierre	Puesta en común de la evaluación total y de las preguntas asociadas a la implementación de la unidad didáctica.	85 min

Nota. T1.1 = Prismas; T1.2 Conversión de temperatura; T1.3 Modelando patrones; T2.1 El regalo sorpresa; T2.2 Cargas de vehículos; T2.3 Ecuaciones visuales.

4. TAREA DIAGNÓSTICA

En este apartado, presentamos la tarea diagnóstica que diseñamos para indagar sobre los conocimientos previos de los estudiantes antes de comenzar la unidad didáctica. Estos conceptos y

procedimientos están asociados con las operaciones básicas dentro del conjunto de los números naturales, los elementos de figuras y de cuerpos geométricos. A continuación, presentamos el listado de conocimientos previos (tabla 5).

Tabla 5

Listado de conocimientos previos del tema ecuaciones aditivas

CP	Descripción
1	Sumar números naturales.
2	Restar números naturales.
3	Multiplicar números naturales.
4	Dividir números naturales.
5	Identificar la jerarquía de las operaciones básicas.
6	Identificar el número de caras de un prisma.
7	Utilizar el concepto de igualdad.
8	Utilizar el significado de equilibrio de la balanza como equivalencia.
9	Interpretar la frecuencia de los datos representados en un diagrama de barras.
10	Completar una tabla de datos con los valores faltantes.
11	Identificar el número de lados de la base de un prisma.
12	Identificar el número de vértices de una figura o cuerpo geométrico.

Nota. CP: conocimientos previos.

De acuerdo con los conocimientos previos, diseñamos la tarea diagnóstica que los estudiantes deben completar de manera individual en la guía entregada. Proponemos llevar a cabo la tarea diagnóstica en 50 minutos, para luego hacer una retroalimentación en la que se aborden dificultades y errores observados en la actuación de los estudiantes. En relación con la estructura de esta tarea, tenemos la primera pregunta relacionada con los conocimientos previos sobre suma, multiplicación y jerarquía de operaciones básicas (CP1, CP3 y CP5). En relación con el CP5 sobre la jerarquía de las operaciones, una dificultad asociada es el incumplimiento de los criterios para resolver operaciones básicas en el orden correcto: primero paréntesis, luego multiplicaciones y divisiones y después las sumas y restas. El estudiante puede incurrir en los siguientes errores: (a) sumar o restar antes de multiplicar o de dividir y (b) operar un sumando en una expresión algebraica con el número que multiplica a los términos de un paréntesis.

En el ejercicio de la segunda situación, buscamos indagar sobre el conocimiento previo del concepto de igualdad (CP7). Es posible que los estudiantes incurran en el error de considerar iguales objetos, cantidades o medidas que no lo son. Por ejemplo, el estudiante puede concluir que 100 libras esterlina es igual a 100.000 pesos colombianos, al usar una tasa de cambio que no corresponde. En el tercer y octavo ejercicio, el estudiante puede activar los conocimientos previos de sumar y restar (CP1 y CP2). Asimismo, el estudiante puede interpretar la frecuencia de los datos

representados en el diagrama de barras y completar la tabla asociada a esta información (CP9 y CP10). En este momento, los estudiantes pueden incurrir en el error de ubicar las cantidades de los números, según su valor posicional, en las columnas que no corresponden al momento de realizar la operación. También, es posible que realicen las operaciones de izquierda a derecha o que identifiquen información que no corresponde con el gráfico presentado.

En el cuarto ejercicio, además de sumar, el estudiante puede dividir (CP4). En el noveno ejercicio, el estudiante también puede activar sus conocimientos previos sobre división como lo son el cociente y el residuo. Para estos dos ejercicios, se pueden presentar algunos errores asociados al proceso de división. Por ejemplo, es posible que separe en el dividendo cantidades más pequeñas que las del divisor u omitir ceros en el cociente. En el quinto ejercicio, evaluamos el conocimiento previo sobre el significado de equilibrio de la balanza como equivalencia. Para este ejercicio, los estudiantes deben encontrar el valor de la figura grande a partir del valor de las figuras pequeñas y deben encontrar la equivalencia que hay entre ellas. Por lo tanto, pueden incurrir en el error de encontrar el valor que no corresponde al de la figura grande al multiplicar incorrectamente el valor de la figura pequeña por la cantidad de estas. En este ejercicio, también evaluamos el conocimiento previo de multiplicación (CP3).

Para que el estudiante demuestre sus conocimientos sobre los elementos de una figura o cuerpo geométrico (CP6, CP11 y CP12), proponemos el quinto y sexto ejercicio. La dificultad asociada a este conocimiento previo es la descripción de las propiedades de objetos tridimensionales desde diferentes posiciones y vista, relacionado con la percepción visual. Esto se debe a que los estudiantes pueden incurrir en el error de identificar o contar únicamente los elementos que están a la vista y no aquellos que están ocultos, como sucede en el caso de las caras de un prisma. Finalmente, en el décimo ejercicio, los estudiantes deben activar sus conocimientos previos sobre la multiplicación.

A continuación, presentamos la formulación de la tarea diagnóstica.

Tarea diagnóstica

1. Un edificio tiene cuatro pisos. La altura del primer piso es 4 metros y los otros tres pisos tienen cada uno 3 metros de altura. ¿Qué procedimiento permite encontrar la altura total de los cuatro pisos del edificio?

$$4 + (3 \times 3) = 7 \times 3$$

$$4 + (3 \times 3) = 4 + 9$$

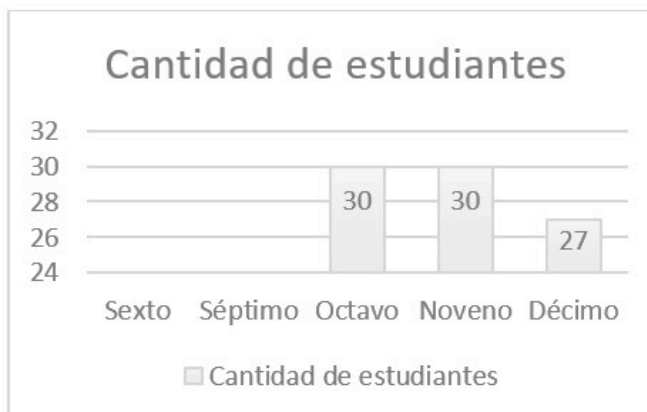
$$4 \times (3 + 1) = 12 + 1$$

$$4 \times (3 + 3) = 4 + 6$$

2. Harry, un ciudadano de Reino Unido, vendrá a Bogotá para realizar un intercambio estudiantil. Si una libra esterlina equivale a 5.350 pesos colombianos ¿Cuánto recibiría Harry aproximadamente en pesos colombianos por 28 libras en una casa de cambio?



3. En la siguiente grafica está registrada la cantidad de estudiantes que hay en diferentes grados del colegio y en la tabla se presenta la cantidad de hombres y mujeres en cada grado. Encuentra los datos que hacen falta en la tabla y en la gráfica.



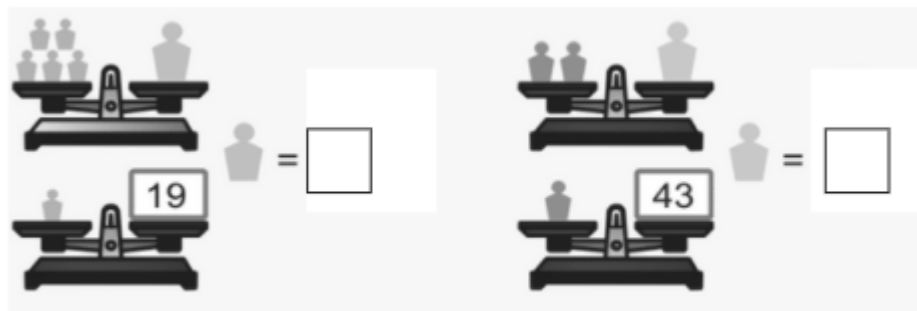
Grados	Hombres	Mujeres
Sexto	12	
Séptimo		14
Octavo	13	
Noveno		12
Décimo		13
Total	70	70

4. Observa las siguientes figuras. El valor total corresponde al área de la figura que está dividida en partes iguales. Determina el valor de la región sombreada en cada figura.

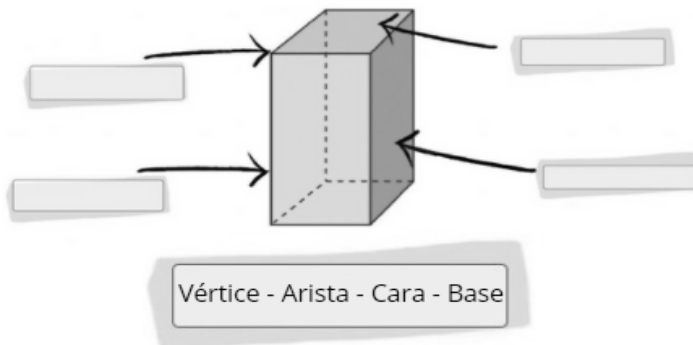

 Valor total: 50
 Región:


 Valor total: 161
 Región:

5. Teniendo en cuenta las equivalencias en los siguientes grupos de balanza, determina el valor de las figuras indicadas:



6. Nombra los elementos del poliedro.



7. Completa las siguientes operaciones

$$\begin{array}{r}
 9.314 \\
 2.732 \\
 + 7.958 \\
 \hline
 \square
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 6.603 \\
 4.808 \\
 + 3.323 \\
 \hline
 \square
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 137001 \\ - 4732 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 220704 \\ - 7701 \\ \hline \end{array}$$

8. Encuentra el cociente y el residuo en las siguientes operaciones

1. $389 \div 8 =$ _____ 2. $154 \div 7 =$ _____

9. Realiza las siguientes multiplicaciones

1 a.
$$\begin{array}{r} 891 \\ \times 41 \\ \hline \end{array}$$

2 a.
$$\begin{array}{r} 605 \\ \times 84 \\ \hline \end{array}$$

Al finalizar la tarea, le recomendamos al profesor que les brinde un espacio a los estudiantes en el que se corrijan entre ellos mismos. Para esto, el profesor debe pedir que los estudiantes pasen la hoja de la tarea diagnóstica a otro compañero y que califiquen la hoja que llegue a su lugar de trabajo. De esta manera, el estudiante puede corregir a sus compañeros y a la vez identificar sus propios errores al realizar la comparación con su trabajo. Segundo, el profesor puede realizar una corrección de la tarea diagnóstica con el grupo completo, para poder hacer un contraste con la calificación de pares realizada por los estudiantes.

5. TAREAS DE APRENDIZAJE DEL PRIMER OBJETIVO

En este apartado, presentamos las tres tareas de aprendizaje que contribuyen al desarrollo del primer objetivo de aprendizaje. Para cada tarea, realizamos una descripción detallada en términos de sus requisitos, aportes al objetivo, metas, formulación, conceptos y procedimientos, sistemas de representación, contextos PISA, agrupamiento e interacción y temporalidad. Asimismo, presentamos errores, grafo de criterios de logro de la tarea, actuación del profesor, sugerencias metodológicas y la evaluación.

5.1. Tarea de aprendizaje T1.1 Prismas

Con esta primera tarea de aprendizaje, buscamos que el estudiante represente simbólicamente una ecuación que modele una relación aditiva presente entre dos cantidades. Presentamos un listado de prismas que los estudiantes deben utilizar para plantear la ecuación aditiva que modela la relación que existe entre el número de lados de la base de un prisma y el número de caras de este. Con esta tarea, esperamos que el estudiante aprenda que para plantear una ecuación aditiva necesita identificar cuál será la incógnita de la ecuación, los valores conocidos y la operación que vincula estos elementos.

Requisitos

Para esta tarea, sugerimos que el estudiante utilice los conocimientos que posee sobre las propiedades y elementos de los prismas, así como su destreza para contar dichos elementos. También,

proponemos como requisito de la tarea que el estudiante sea capaz de extraer información presente en un sistema de representación geométrico.

Aportes de la tarea al objetivo de aprendizaje

En esta tarea, buscamos que el estudiante determine una ecuación aditiva o una expresión verbal que represente la relación que existe entre la cantidad de caras y lados de la base de un prisma, mediante una expresión algebraica. Esto se logra al tener en cuenta que la cantidad de caras de un prisma está determinada por el número de lados de su base más 2. Por otro lado, buscamos que los estudiantes superen errores relacionados con la identificación incorrecta de los valores conocidos de la ecuación aditiva que modela una situación, así como errores asociados a la modelación de regularidades presentes en una representación geométrica.

Formulación de la tarea

El profesor entrega la tarea impresa a los estudiantes. Esta tarea contiene la imagen de la figura 9 junto con la tabla y la pregunta de la tarea.

Observa los prismas presentes en la imagen y determina el número de caras y lados de la base donde está apoyado. Luego, completa la tabla con la información encontrada y según el ejemplo dado. De manera general ¿cómo podemos determinar el número de lados de la base de otro prisma a partir de su cantidad de caras? Trabaja con otro compañero y luego discute con otra pareja tu respuesta.

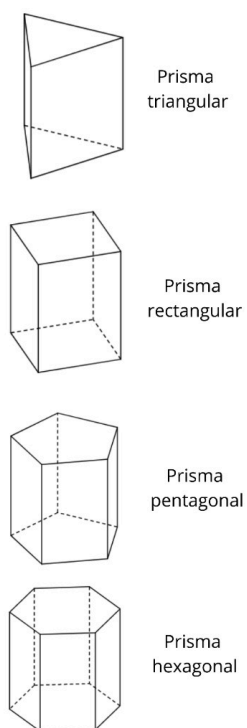


Figura 9. Prismas

Prisma	Lados de la base	Caras
Triangular	3	5
Rectangular		
Pentagonal		
Hexagonal		
Heptagonal		
Octagonal		

Conceptos y procedimientos

Esta tarea involucra los conceptos de ecuación aditiva, incógnita, valores conocidos e igualdad. En relación con los procedimientos involucrados, la tarea requiere del conteo o identificación de la

cantidad de lados de la base de un prisma y el número de caras de este. También, solicitamos el diligenciamiento de una tabla con la información requerida.

Sistemas de representación

Incluimos los sistemas de representación geométrico, tabular y simbólico para el desarrollo de la tarea.

Contextos PISA en los que se sitúa la tarea

La tarea se sitúa en un contexto científico según el marco de referencia PISA 2012, al tener en cuenta que la tarea involucra una situación geométrica dentro de las matemáticas.

Materiales y recursos

Esta tarea requiere de la impresión de su formulación e instrucciones básicas para resolverla. Además, el estudiante necesita su cuaderno y lápices.

Agrupamiento e interacción

La tarea requiere que los estudiantes trabajen por parejas. La comunicación predominante es entre los estudiantes que conforman estas parejas y el profesor. El profesor propone diferentes prismas a los estudiantes y una tabla que deben completar con la cantidad de lados y de caras que tiene cada uno, junto con un ejemplo de cómo se hace. Luego de resolver la tarea en parejas, los estudiantes deben buscar otros compañeros para comparar y justificar su respuesta, lo que da lugar a otra interacción entre estudiantes. Finalmente, hay un espacio de discusión entre el profesor y el grupo completo. Durante este espacio, planeamos abordar los elementos de una ecuación aditiva y el cómo se puede plantear a partir de una determinada situación.

Temporalidad

Sugerimos desarrollar la tarea en varias etapas. En la primera, el profesor presenta la tarea y aborda el ejemplo dado en la tabla, para que el estudiante proceda a solucionarla con su compañero de grupo. Esta etapa toma un tiempo de 15 minutos. En la segunda etapa, los estudiantes tienen 5 minutos para buscar otra pareja de compañeros y presentarles su solución. En la tercera etapa, el profesor realiza una retroalimentación de la resolución de la tarea con el grupo completo en 5 minutos. En la cuarta etapa, el profesor tendrá un espacio de 15 minutos para abordar el diario del estudiante, la forma de diligenciarlo y para recogerlo cuando esté diligenciado. La tarea puede ser realizada en 40 minutos.

Errores en los que puede incurrir el estudiante y ayudas

Durante el desarrollo de la tarea, los estudiantes podrían asociar datos que no son relevantes para encontrar los valores conocidos de la ecuación aditiva que modela la situación (E6) o extraer información que no corresponde con el sistema de representación geométrico (E43). Por esto, el profesor podrá solicitar a los estudiantes que lean el enunciado de la tarea en voz alta y que escriban los datos que son necesarios para resolver la situación, así como la información encontrada al completar la tabla de la tarea.

Igualmente, los estudiantes pueden incurrir en el error de identificar una constante, o valor conocido para la ecuación aditiva, que no corresponde a la relación de dependencia aditiva que se presenta en la tarea (C64). Para afrontar este error, el profesor puede realizar las siguientes preguntas: ¿cuántas unidades se le suma a la cantidad de lados de la base para obtener el número de caras? ¿el número de lados o de caras depende de algo? y ¿cuál es la diferencia entre la cantidad de caras y la cantidad de lados? Finalmente, el estudiante puede incurrir en el error de argumentar la validez del planteamiento de una ecuación con afirmaciones que no corresponden con la información del problema (E38). En este caso, el profesor podría recordar a los estudiantes que deben explicar por qué su ecuación representa la situación de la tarea. El listado de errores se encuentra en el anexo 1.

Grafo de criterios de logro de la tarea

El grafo de criterios de logro del primer objetivo de aprendizaje nos permite observar qué procedimientos debe realizar el estudiante para resolver la tarea. Los cuadros resaltados nos indican cuál es la estrategia de solución o la secuencia de procedimientos prevista para dar respuesta a la tarea T1.1 prismas (figura 10 y 11). Como en la mayoría de las tareas, el estudiante comienza por la identificación de la información requerida para formular la ecuación aditiva. Luego, continúa con la determinación de los elementos de la ecuación y la subestructura que caracterizará la relación que debe existir entre los valores conocidos y la incógnita. Finalmente, el estudiante debe explicar o argumentar la validez de la ecuación planteada.

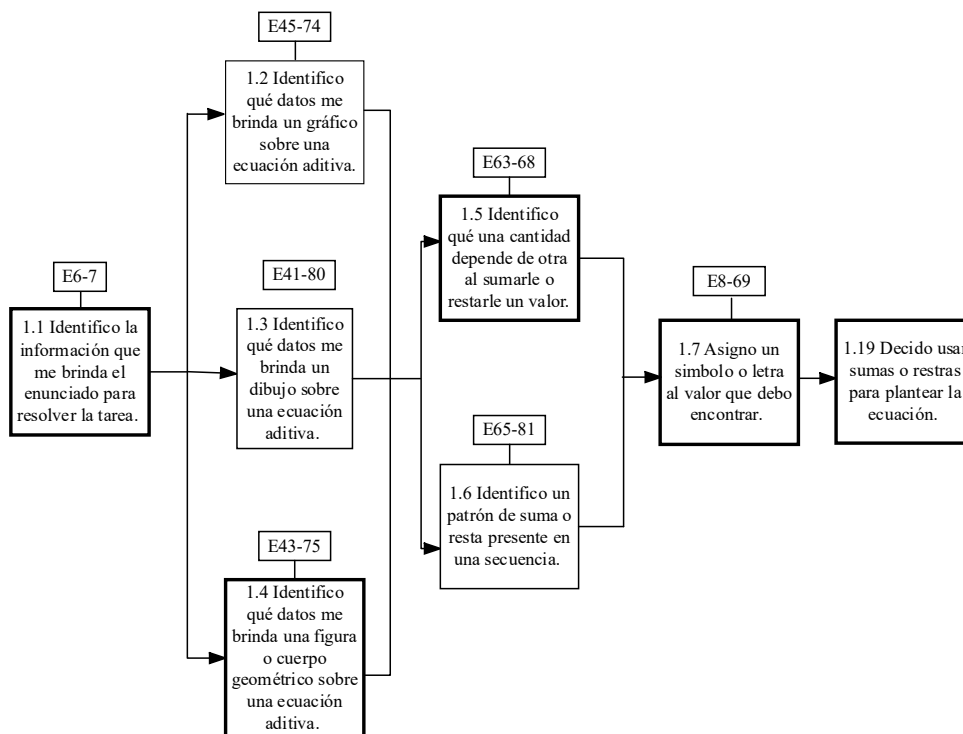


Figura 10. Primera parte del grafo de criterios de logro de la tarea 1.1 Prismas

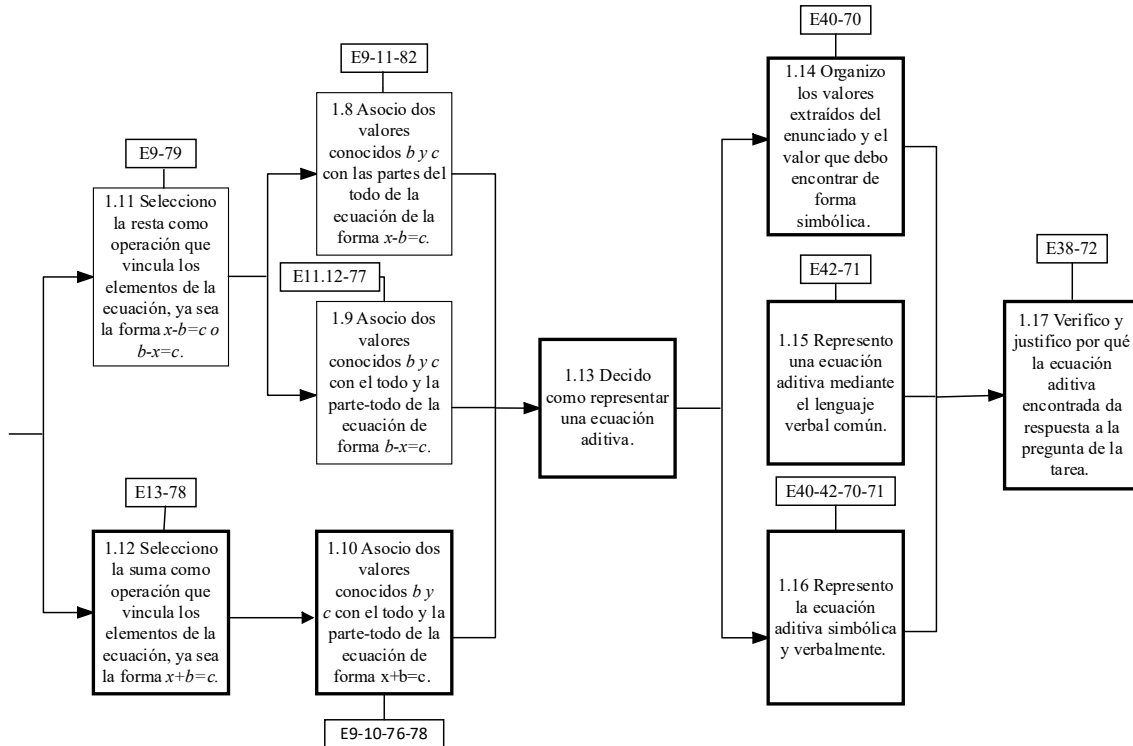


Figura 11. Segunda parte del grafo de criterios de logro de la tarea 1.1 Prismas

Actuación del profesor

El profesor presenta la tarea y su grafo de criterios, para que los estudiantes tengan una idea de qué deben hacer. Asimismo, el profesor entrega las instrucciones y la formulación de la tarea en hojas impresas, para que las parejas de estudiantes completen la tabla presente en esta. Finalmente, el profesor atiende a las inquietudes de los estudiantes, les brinda ayuda al identificar dificultades y promueve la interacción entre los estudiantes.

Sugerencias metodológicas

Para la superación de dificultades y errores, le proponemos al profesor implementar ayudas cada vez que el estudiante incurra en un error. También, consideramos que el profesor debe promover en sus estudiantes el interés por plantear ecuaciones que modelen situaciones reales, así como la importancia de verificar y asegurarse de que la solución obtenida sea correcta. Por otro lado, le recomendamos al profesor verificar que los estudiantes completen la tabla de la tarea y que compartan sus respuestas con sus compañeros en el momento indicado. Finalmente, en el caso de que los estudiantes no identifiquen la relación entre el número de lados de la base de un prisma y el número de caras de este, el profesor puede sugerirle a los estudiantes que utilicen prismas con un número de lados mayor a 5.

Evaluación

La respuesta final de la tarea debe dar cuenta de la relación aditiva que hay entre el número de caras de un prisma y el número de lados de su base, ya sea en una ecuación aditiva simbólica o en una oración que represente esa ecuación. En este sentido, el profesor debe verificar que la constante o valor conocido de la ecuación planteada sea 2 y que este debe ser sumado al número de lados de la base (representado idealmente con una letra) para encontrar el número de caras del prisma (representado con otra letra). En el caso de la representación verbal, los estudiantes deben expresar que la cantidad de lados de la base de un prisma es igual a la cantidad de caras menos 2. El estudiante debe saber que la incógnita es el número de lados de la base y que el número de caras del prisma es un valor conocido. El profesor puede tomar notas de la observación realizada en cada grupo de estudiantes, para que tenga el registro de la actuación de ellos al momento de evaluar su trabajo. Además, el profesor debe recoger las hojas en las que trabajaron los estudiantes, para tener la evidencia final de su desempeño.

5.2. Tarea de aprendizaje T1.2 Conversión de temperatura

Con esta tarea de aprendizaje, pretendemos que el estudiante logre plantear una ecuación aditiva que modele la conversión de escalas de temperaturas de Celsius a Kelvin. Para esto, presentamos cuatro equivalencias entre temperaturas, que están representadas en dos rectas numéricas (termómetros). Los valores conocidos de la ecuación aditiva son las temperaturas dadas y la incógnita es la constante que representa la diferencia entre ambas temperaturas.

Requisitos

La tarea requiere que el estudiante ubique los números naturales en la recta numérica, que conozca el concepto de ecuación y sus elementos y que sea capaz de extraer información presente en un sistema de representación gráfico.

Aportes de la tarea a los objetivos de aprendizaje

Con esta tarea, buscamos que el estudiante pueda representar de forma simbólica o verbal una ecuación que modela la relación de dependencia aditiva presente entre las medidas de dos magnitudes. Asimismo, pretendemos que los estudiantes superen errores relacionados con la identificación incorrecta de los valores conocidos de la ecuación aditiva que modela una situación.

Formulación

El profesor proyecta mediante un proyector de video la tarea a los estudiantes. Esta tarea contiene el enunciado y la figura 12 que muestra un gráfico.

Actualmente, la escala termométrica del Sistema Internacional es la Kelvin ($^{\circ}\text{K}$), pero existen otras escalas mucho más utilizadas como la Celsius ($^{\circ}\text{C}$). En la información de diferentes productos que tenemos en nuestro hogar es muy probable que se tengan escalas de temperatura diferentes, por lo que a veces es necesario conocer las equivalencias entre dichas escalas. En clase de química, Jesús descifró la fórmula de conversión de la temperatura Kelvin a Celsius. Para esto, Jesús realizó cuatro conversiones y encontró las siguientes equivalencias entre temperaturas, que están representadas en las siguientes rectas numéricas (termómetros). ¿Cuál es la fórmula que Jesús encontró para convertir la temperatura dada en grados Kelvin a grados

Celsius? Luego de encontrar la respuesta de manera individual, reúnete con un compañero y discute la solución.

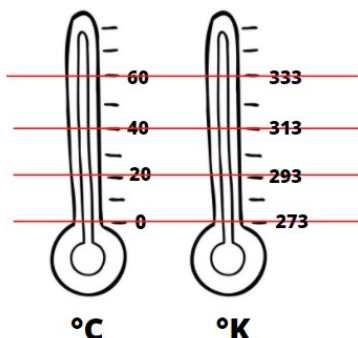


Figura 12. Conversión de temperatura

Conceptos y procedimientos

El desarrollo de esta tarea involucra conceptos como la identificación de los elementos que componen a una ecuación representados mediante un sistema de representación gráfico y el reconocimiento de una relación de dependencia aditiva entre dos cantidades.

Sistemas de representación

Con esta tarea, buscamos fortalecer el sistema de representación gráfico mediante la identificación de los elementos de una ecuación aditiva representados en una recta numérica. Además, los estudiantes deben representar su solución usando el sistema de representación simbólico o el sistema de representación verbal.

Contextos PISA

La tarea T1.2 está enmarcada en un contexto científico de acuerdo con el marco conceptual de PISA 2012, pues se presenta una situación relacionada con la conversión de escala de temperaturas de Celsius a Kelvin.

Materiales y recursos

Esta tarea requiere el uso de un proyector de video para presentar la tarea en el tablero. Además, el estudiante necesita su cuaderno y lápiz para escribir la respuesta de la tarea.

Agrupamiento e interacciones

La tarea requiere que los estudiantes trabajen de manera individual al resolver la tarea. Luego, deben reunirse con algún compañero y discutir sus respuestas y los procedimientos realizados. Después de la discusión, los dos estudiantes deben exponer la manera cómo plantearon la ecuación aditiva que modela la situación. El profesor resuelve las inquietudes que se generen en el desarrollo de la tarea.

Temporalidad

Sugerimos desarrollar la tarea en varias etapas. En la primera etapa de 15 minutos, el profesor presenta y da las instrucciones de la actividad, para que el estudiante proceda a solucionarla individualmente. En la segunda, los estudiantes discuten sus respuestas con un compañero sin la intervención del profesor y luego ambos exponen cómo llegaron a la solución a la tarea. Esta etapa toma un tiempo de 10 minutos. En la tercera etapa de 7 minutos, el profesor presenta la meta de la tarea y los criterios de logro, para que los estudiantes diligencien y entreguen los diarios. Por último, el profesor tiene 5 minutos para retroalimentar la tarea y presentar los diarios de una muestra como ejemplo. De esta manera, tendremos 37 minutos para llevar a cabo esta tarea de aprendizaje.

Errores en los que puede incurrir el estudiante y ayudas

En la solución de la tarea T1.2, los estudiantes podrían incurrir en el error de asociar información por la que no se está preguntando con la incógnita de la ecuación aditiva de la tarea (E7) y en el error de extraer información que no corresponde con la ecuación aditiva representada gráficamente (E45). Como ayuda, el profesor lee la pregunta de la tarea e identifica cuál es el dato desconocido de la situación y les pregunta a los estudiantes qué datos les brinda la recta numérica de los termómetros. Asimismo, el profesor pregunta a los estudiantes cuál es la diferencia que hay entre las medidas de las temperaturas, pues los estudiantes pueden incurrir en el error de identificar una constante que no corresponde en una relación de dependencia aditiva (E63). El listado de errores se encuentra en el anexo 1.

Grafo de criterios de logro

En las figuras 13 y 14, presentamos el grafo de criterios de logro del objetivo 1. En este grafo, resaltamos los criterios de logro que el estudiante puede activar al tratar de resolver la tarea de aprendizaje T1.2. Primero, el estudiante debe identificar la información que le brinda el enunciado y el gráfico para resolver la tarea. Asimismo, el estudiante identifica que una cantidad depende de otra al sumarle o restarle un valor y le asigna un símbolo o letra al valor que debe encontrar (incógnita). Por último, el estudiante plantea la ecuación aditiva que representa la situación al asociar dos valores conocidos con las partes del todo de la ecuación de la forma $x - b = c$ y decide representar la ecuación aditiva simbólica o verbalmente.

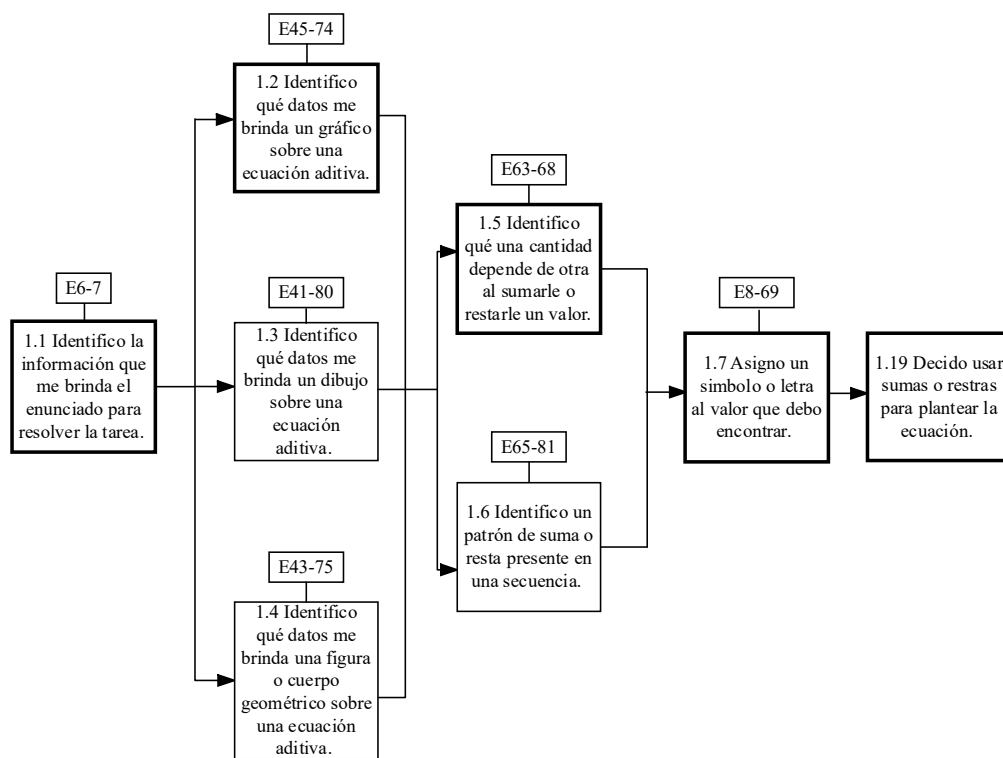


Figura 13. Primera parte del grafo de criterios de logro de la tarea 1.2 Conversión de temperaturas

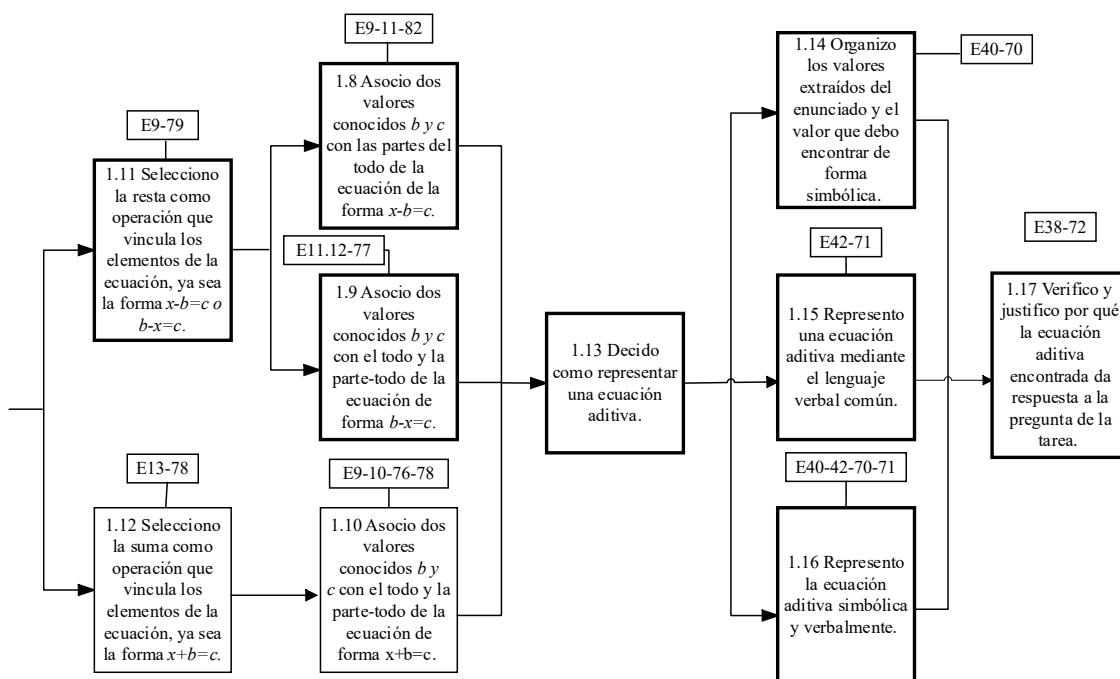


Figura 14. Segunda parte del grafo de criterios de logro de la tarea 1.2 Conversión de temperaturas

Actuación del profesor

Durante la aplicación de la tarea, el profesor debe encaminar a los estudiantes a identificar la relación de dependencia aditiva en la situación. Para esto, el profesor puede preguntar al grupo cuál es la diferencia que hay entre las medidas de las temperaturas y cómo representaría esa diferencia. Además, el profesor hace seguimiento a las discusiones de los estudiantes para identificar los posibles errores en los que puedan incurrir.

Sugerencias metodológicas y aclaraciones

El profesor debe estar atento a las posibles soluciones de la tarea y registrar los errores en los que más incurren los estudiantes al resolverla. El registro de estos errores le permite diseñar una retroalimentación de la tarea. Por ejemplo, el profesor puede brindar ejemplos sobre cómo convertir la temperatura dada en grados Kelvin a grados Celsius con medidas pequeñas. De esta manera, los estudiantes podrían identificar que hay una diferencia de 273 grados entre ambas escalas de temperaturas.

Evaluación

El profesor debe verificar si los estudiantes plantearon correctamente la ecuación aditiva que modele la conversión de escalas de temperaturas de Celsius a Kelvin. Además, consideramos que el profesor puede dar mayor valoración a los criterios de logro relacionados con la identificación de

la relación de dependencia aditiva entre las magnitudes dadas y la representación de la ecuación aditiva de forma verbal o simbólica.

5.3. Tarea de aprendizaje T1.3 Modelando patrones

El propósito con esta tarea es que el estudiante represente verbal o simbólicamente relaciones aditivas de cambio presentes en una situación dada a partir de dos valores conocidos. En el caso de esta tarea, los valores conocidos son la cantidad de objetos de un miembro de la secuencia y el cambio que hay con respecto al anterior.

Requisitos

Para esta tarea, sugerimos que los estudiantes utilicen los conocimientos que poseen sobre la cantidad de objetos en una colección, patrones, el concepto de ecuación y valores desconocidos. Esto le permite al estudiante generalizar la ecuación que modela la cantidad de objetos presentes en las secuencias. Finalmente, proponemos como requisito de la tarea que el estudiante sea capaz de extraer información presente en un sistema de representación pictórico.

Aportes de la tarea al objetivo

Con esta tarea de aprendizaje, buscamos contribuir a la representación verbal o simbólica de una situación dada a partir de valores conocidos que se encuentran relacionados mediante una relación aditiva de cambio. Asimismo, buscamos que los estudiantes puedan modelar patrones presentes en una representación pictórica.

Formulación de la tarea

El profesor entrega la tarea impresa al estudiante.

Observa la secuencia de elementos de la imagen. ¿Cómo podemos determinar de manera general la cantidad de elementos que hay en una posición particular a partir de la posición anterior? Reúnete con dos compañeros para solucionar la tarea.



Figura 15. Secuencia

Conceptos y procedimientos implicados en la tarea

Los conceptos y procedimientos presentes en esta tarea son ecuación aditiva, secuencias y patrones, suma y resta de números naturales.

Sistemas de representación que se activan

Para representar la solución de la tarea, el estudiante puede hacer uso del sistema de representación simbólico o verbal. También, utilizamos el sistema de representación pictórico para representar la secuencia de las monedas.

Contextos PISA

La tarea de aprendizaje T1.3 Modelando patrones se sitúa en el contexto personal según el marco conceptual de PISA 2012, pues la tarea aborda una situación de secuencia relacionada con monedas.

Materiales y recursos

Para esta tarea, los estudiantes necesitan las impresiones de las secuencias con la instrucción dada, su cuaderno y lápices.

Agrupamiento e interacción en clase

En un primer momento, la interacción predominante es entre el profesor y los estudiantes, pues al presentar la tarea pueden surgir diferentes dudas sobre su formulación y lo que el estudiante debe realizar. Luego de que el profesor presenta la tarea, los estudiantes se organizan en grupo de tres y discuten de qué manera encontrarán la ecuación. Además, cuando los estudiantes hayan formulado la ecuación, deben pensar sobre cuál será la justificación que brindarán en relación con el planteamiento e identificación de los elementos de la ecuación encontrada. Al final, el profesor y el grupo completo llevan a cabo una discusión de sus resultados.

Temporalidad

Sugerimos desarrollar la tarea en varias etapas. Durante la primera, en los primeros 5 minutos, el profesor presenta la tarea con las instrucciones y reparte el material. En la segunda etapa que dura 15 minutos, el estudiante procede a solucionar la tarea junto con sus dos compañeros. En la tercera etapa, el profesor realiza una discusión de la tarea con el grupo completo, en la que los estudiantes observan el trabajo realizado por sus compañeros. Esta etapa se desarrolla en 5 minutos. En la cuarta etapa, el profesor presenta la meta de la tarea, sus criterios de logro y brinda el espacio para el diligenciamiento y entrega de diarios de los estudiantes, en un tiempo de 12 minutos. En total, la tarea se lleva a cabo en 37 minutos.

Errores y ayudas

Al abordar la tarea, los estudiantes pueden incurrir en errores relacionados con la identificación incorrecta de los valores conocidos de la ecuación aditiva que modela la situación, así como en errores asociados con la modelación de patrones presentes en una representación pictórica. Para evitar que los estudiantes incurran en estos errores, el profesor puede interactuar con ellos y ofrecerles algunas ayudas como la de mencionar que se debe tener en cuenta los elementos de cada miembro de la secuencia individualmente, es decir, no deben acumularse con los elementos de las secuencias anteriores y también, el profesor puede preguntarles por cuál es la relación entre la cantidad de monedas en una posición particular y las monedas de la posición siguiente. El listado de errores se encuentra en el anexo 1.

Grafo de criterio de logro

El grafo de criterios de logro muestra los posibles caminos y procedimientos que el estudiante puede utilizar para solucionar la tarea (figuras 16 y 17). En el caso particular de la tarea de aprendizaje T1.3, el estudiante aborda la tarea al identificar la información que le brinda el enunciado y el dibujo. Luego, el estudiante puede identificar el patrón de suma o resta y así asignarle un símbolo o una letra al valor que debe encontrar. Seguidamente, el estudiante debe decidir si usar sumas o restas para plantear la ecuación y asociar los valores conocidos según la subestructura correspondiente. En el siguiente paso, el estudiante decide cómo representar la ecuación; para esto, el estudiante tiene la opción de representarla de manera simbólica o verbal. Finalmente, el estudiante verifica y justifica que la ecuación aditiva obtenida da respuesta a la pregunta de la tarea.

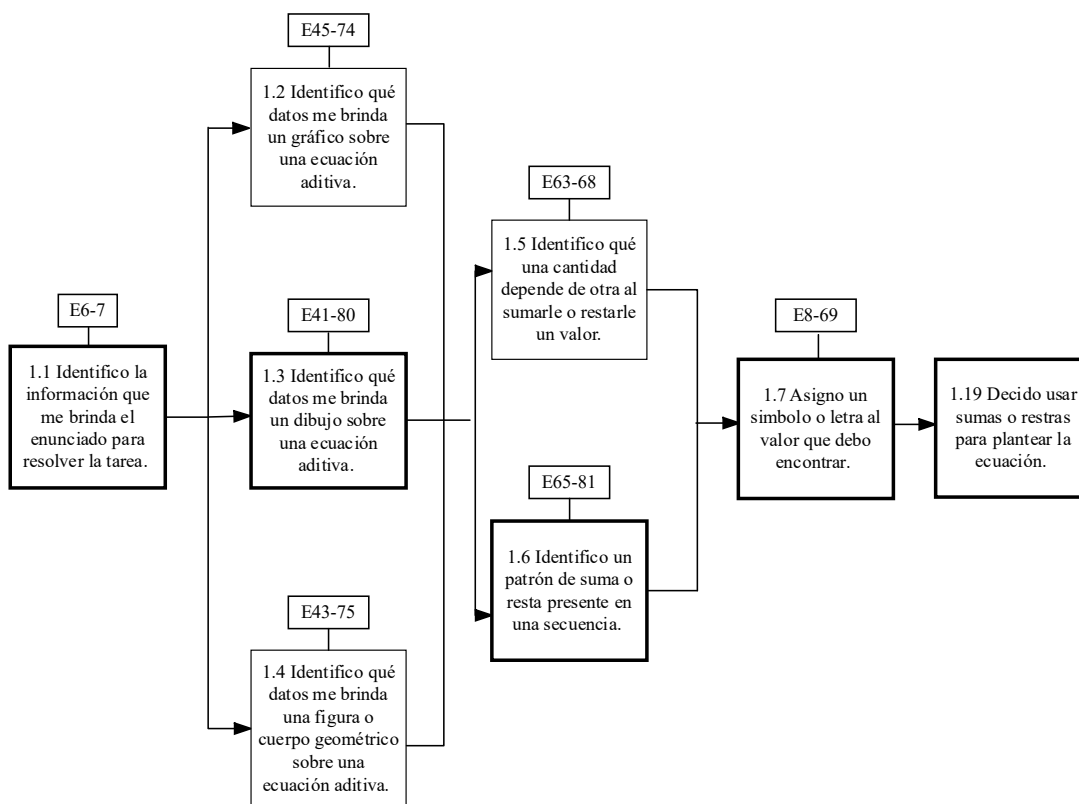


Figura 16. Primera parte del grafo de criterios de logro de la tarea 1.3 Secuencia

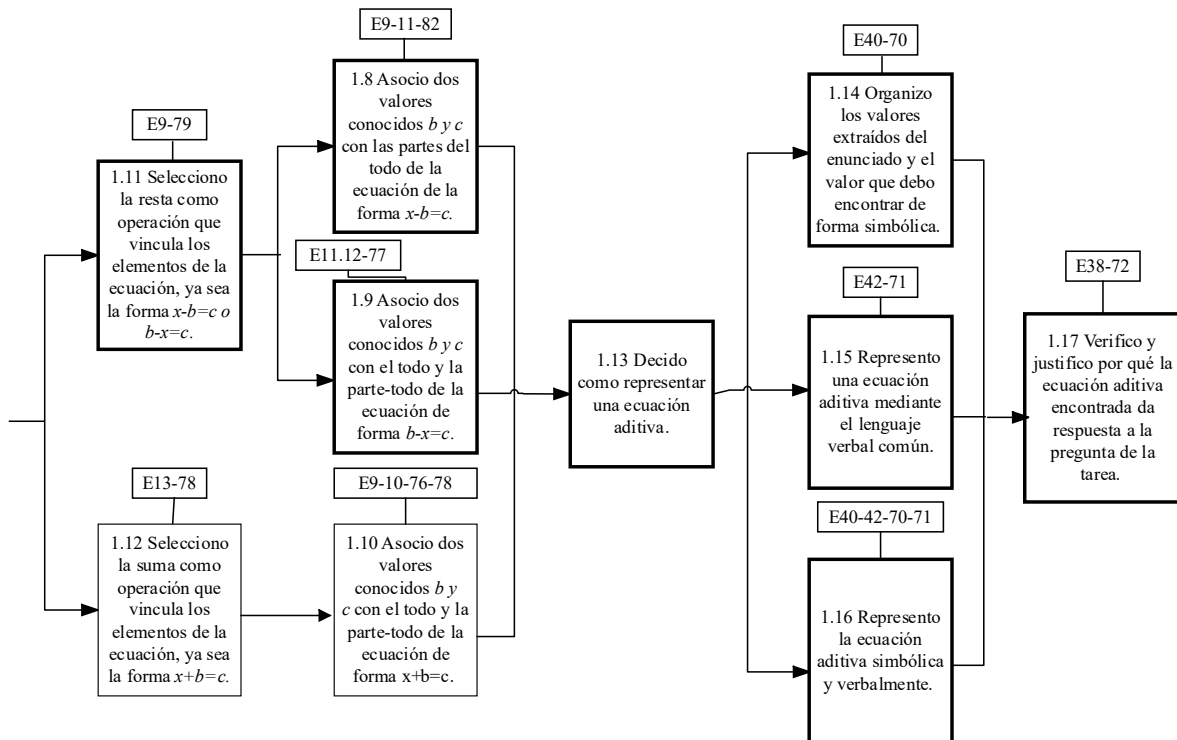


Figura 17. Segunda parte del grafo de criterios de logro de la tarea 1.3 Secuencia

Sugerencias metodológicas y aclaraciones

Sugerimos al profesor que, durante el momento de las instrucciones iniciales, haga énfasis en la importancia de tener en cuenta los elementos de cada miembro de la secuencia individualmente, es decir, el profesor debe recomendar a los estudiantes que lean bien lo que pide la tarea y que al final, hagan el proceso de verificación y justificación de la ecuación obtenida. Asimismo, el manejo del tiempo es fundamental durante la realización de esta tarea, pues la identificación del patrón y la representación de la ecuación aditiva suelen ser un poco complejas para algunos estudiantes. Además, es posible que algunos estudiantes necesiten un poco más de tiempo en ciertos momentos de la resolución de la tarea.

Evaluación

Para esta tarea, la respuesta final debe dar muestra de una representación verbal o simbólica que presente la relación aditiva de cambio entre un elemento de la secuencia de monedas y el siguiente. Es importante que el estudiante haga el proceso de verificar y justificar al finalizar la tarea.

6. TAREAS DE APRENDIZAJE DEL SEGUNDO OBJETIVO

En este apartado, presentamos las tres tareas de aprendizaje que contribuyen al desarrollo del segundo objetivo de aprendizaje.

6.1. Tarea de aprendizaje T2.1 El regalo sorpresa

Con esta tarea de aprendizaje, buscamos que el estudiante solucione ecuaciones aditivas presentes en un simulador virtual de una balanza, es decir, en un sistema de representación ejecutable. Como método de solución, los estudiantes deben utilizar el tanteo y encontrar la masa de un objeto especial presente en el simulador, que corresponde al regalo sorpresa. Los elementos que contiene el simulador, como pesas y diferentes objetos, le permitirán al estudiante encontrar la masa del regalo sorpresa mediante equilibrios que debe formar entre los platos de la balanza.

Requisitos

Para esta tarea, sugerimos que los estudiantes utilicen los conocimientos que poseen sobre los conceptos de equivalencia y de ecuación aditiva. Asimismo, es necesario que el estudiante utilice sus destrezas al momento de realizar cálculos aritméticos de suma y resta, pues debe encontrar y comparar las masas de diferentes objetos. En relación con el sistema de representación ejecutable, la tarea requiere que el estudiante tenga destrezas relacionadas con la manipulación de simuladores virtuales, como seleccionar y trasladar objetos de un lugar a otro en una misma pantalla.

Aporte de la tarea al objetivo de aprendizaje

La meta con esta tarea es que el estudiante pueda solucionar ecuaciones aditivas mediante el tanteo. También, esperamos que el estudiante identifique equivalencias entre las cantidades de una magnitud dada (masa), para encontrar un valor desconocido al formar estas equivalencias. Por último, buscamos que los estudiantes superen errores asociados a la utilización del tanteo, como sumar reiteradamente dos o más valores dados que no corresponden para encontrar un dato (medida de una magnitud).

Formulación de la tarea

El profesor proyecta la formulación de la tarea en el tablero. Esta tarea contiene una tabla y las instrucciones que los estudiantes deben seguir.

En el simulador *Equilibra la balanza* se presentan diferentes objetos, una balanza y unas pesas de diferentes masas. Los objetos y las pesas se pueden ubicar de diferentes maneras en los platos de la balanza hasta obtener un equilibrio. Reúnete con un compañero y completa la siguiente tabla con la masa de cada objeto. Explica cómo has encontrado la masa del regalo sorpresa.

Objeto	Masa
Trofeo	
Microscopio	

Objeto	Masa
Cono de señalización	
Balón de baloncesto	
Regalo sorpresa	

Conceptos y procedimientos

Esta tarea involucra los conceptos de ecuación aditiva, equivalencia y equilibrio. En relación con el campo procedimental, los estudiantes deben tener conocimientos sobre el tanteo, sumas y restas.

Sistemas de representación

Incluimos los sistemas de representación tabular, simbólico, numérico y ejecutable para el desarrollo de la tarea. El sistema de representación ejecutable está dado por un simulador virtual de una balanza, que contiene unas pesas y unos objetos cuya masa deberá ser encontrada por los estudiantes.

Contextos PISA en los que se sitúa la tarea

La tarea se sitúa en un contexto personal según el marco de referencia PISA 2012, al tener en cuenta que la tarea involucra una situación cercana a las actividades del propio individuo. En este caso, cuando un individuo realiza una compra en una tienda o mercado, puede que se requiera de una balanza para pesar algunos alimentos.

Materiales y recursos

Para esta tarea el profesor utiliza el simulador virtual gratis Equilibra la balanza de la plataforma E+educaplus.org. Este programa simula una balanza real y posee unas características específicas. Por ejemplo, la masa del regalo sorpresa debe ser representada en términos de otro objeto cualquiera y algunas pesas, pues el total de pesas no es suficiente para representar su masa. Es decir, si colocamos todas las pesas posibles en un plato de la balanza, no lograremos encontrar la masa total del regalo porque esta es mayor. La masa de los demás objetos si se puede calcular mediante las pesas que posee el simulador. Por lo anterior, el profesor debe tener acceso a una sala de computadores, pues los estudiantes lo necesitarán para utilizar el simulador virtual de la balanza. Adicionalmente, el profesor requiere de un proyector de video o televisor que le permita proyectar la tarea en el tablero. Finalmente, los estudiantes necesitarán su cuaderno y un lápiz para desarrollar la tarea.

Agrupamiento e interacción

La tarea requiere que los estudiantes se organicen en parejas durante toda la tarea, para que puedan construir estrategias de solución colaborativamente. La comunicación predominante es entre los estudiantes que conforman los grupos y el profesor. Primero, el profesor presenta a los estudiantes el simulador de la balanza y sus reglas de uso, para contextualizar la tarea e indicar lo que deben

realizar los estudiantes. En este momento, el profesor expone las características del simulador mencionadas anteriormente, por lo que los estudiantes pueden hacer preguntas sobre el manejo de este recurso. Luego, cuando los estudiantes estén trabajando en parejas, el profesor estará pasando por los grupos para resolver dudas o ayudar con las dificultades y errores que se presenten. Finalmente, el profesor realiza un cierre con el grupo completo, en el que se discuten las soluciones encontradas.

Temporalidad

La tarea se desarrolla en varias etapas. En la primera, el profesor retoma el tema de ecuaciones aditivas y lo visto en la clase anterior, para que los estudiantes recuerden la definición de ecuación aditiva y sus elementos. En la segunda etapa, el profesor presenta el simulador de la balanza y sus reglas de uso. La tercera etapa consiste en brindar la instrucción de la tarea. Después, en la cuarta etapa, el estudiante procederá a solucionar la tarea junto con su compañero, para luego realizar una discusión de la tarea con el grupo completo. Después, en la quinta etapa, tenemos un espacio de 15 minutos para abordar el diario del estudiante. Durante los primeros 5 minutos, describimos de nuevo la meta de la tarea y a qué criterios de logros del segundo objetivo de aprendizaje apunta, para que el estudiante diligencie el diario en los próximos 5 minutos. Luego, el profesor tiene 2 minutos para recoger los diarios diligenciados y 3 minutos para que los estudiantes de la muestra los compartan. De esta manera, tenemos 45 minutos para llevar a cabo esta tarea de aprendizaje.

Errores en los que puede incurrir el estudiante y ayudas

Al abordar la tarea, los estudiantes podrían incurrir en errores asociados con la determinación de la masa de los diferentes objetos presentes en el simulador. Los estudiantes deben ubicar los objetos en uno de los platos de la balanza y en el otro ubicar pesas para encontrar su masa, lo que se logra mediante un equilibrio. De ahí que los estudiantes puedan incurrir en los errores de sumar cuando no es necesario en el tanteo para encontrar un valor conocido de su ecuación aditiva, como la masa de un objeto (E53 y E60). Para que el estudiante supere este error, el profesor puede realizar las siguientes preguntas: ¿qué valores debes agregar en el plato de la balanza para que esté en equilibrio con cada uno de los objetos? y ¿qué operación debes utilizar para encontrar el valor desconocido? Por otro lado, los estudiantes pueden incurrir en errores al comprobar y verificar la solución obtenida en la tarea (E85 y E86). Como ayudas para estos errores (anexo 3), el profesor puede recordar a los estudiantes que deben explicar cómo encontraron la respuesta de la tarea. También, podría ser necesario que el profesor pregunte de qué manera el simulador de la balanza indica que hay un equilibrio entre sus platos. El listado de errores se encuentra en el anexo 1.

Grafo de criterios de logro de la tarea

Los cuadros resaltados en el grafo de criterios de logro del segundo objetivo de aprendizaje nos permiten observar qué procedimientos debe realizar el estudiante para resolver la tarea (figura 18). En primer lugar, el estudiante debe interpretar la información del enunciado de la tarea para resolverla. Luego, el estudiante utiliza el método del tanteo para encontrar la masa de los diferentes objetos presentes en el simulador de la balanza con las pesas del simulador, excepto para el regalo sorpresa. Luego de tener la masa de cada objeto, el estudiante ubica en uno de los platos de la balanza uno de los objetos y otras pesas para formar un equilibrio con el otro plato en el que se

encuentra el regalo sorpresa. De esta manera, el estudiante habrá encontrado la masa del regalo sorpresa y podrá completar la tabla brindada en la formulación de la tarea. Finalmente, el estudiante comprueba la solución de la ecuación aditiva, verifica que la información de la tarea concuerde con la solución y responde la pregunta del problema.

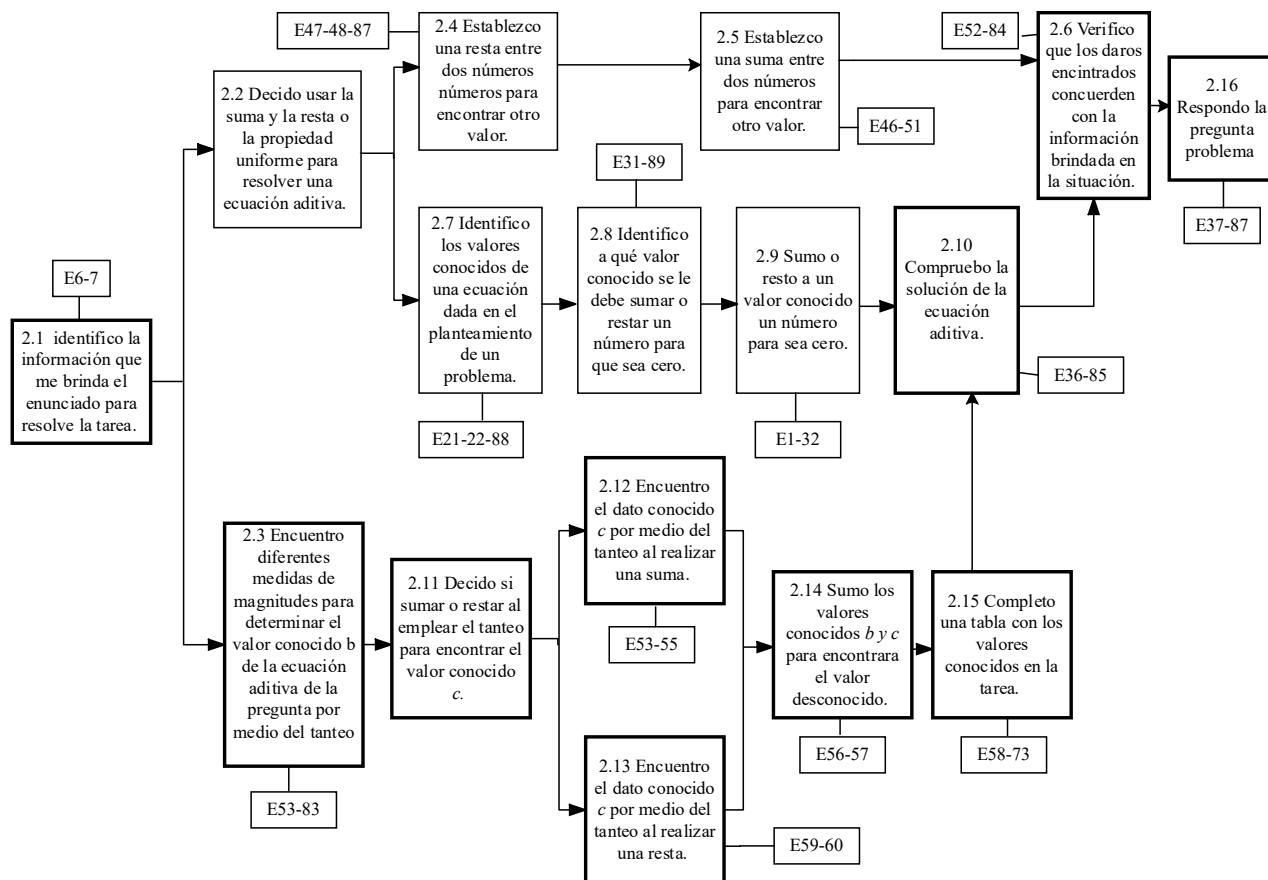


Figura 18. Grafo de criterios de logro de la tarea T2.1 El regalo sorpresa

Actuación del profesor

El profesor lleva a los estudiantes a la sala de computadores y allí presenta la tarea junto con el grafo de criterios de logro. Luego, el profesor proyecta las instrucciones de la tarea e indica a los estudiantes a qué enlace deben acceder para utilizar el simulador de la balanza. Después, el profesor brinda el espacio para que los estudiantes conformen las parejas y procedan a solucionarla. Finalmente, el profesor atiende a las dudas de los estudiantes y les brinda las ayudas planteadas al identificar errores en su actuación.

Sugerencias metodológicas

Para la superación de dificultades y errores, le proponemos al profesor implementar ayudas cada vez que el estudiante incurra en un error. También, consideramos que el profesor debe promover

en sus estudiantes el interés por encontrar la masa del regalo sorpresa, lo que puede ser un reto para ellos. Es importante que el profesor organice el traslado de los estudiantes desde el salón de clases hacia la sala de computadores y viceversa. En caso de que los estudiantes tengan dispositivos electrónicos que puedan utilizar dentro del salón de clases, el profesor debe pensar el desarrollo de la tarea con ellos. Finalmente, el profesor debe recordar a los estudiantes que deben verificar todo el tiempo que haya un equilibrio entre los platos de la balanza al pesar los objetos.

Evaluación

El producto final de la tarea debe ser el diligenciamiento de la tabla de las masas de los diferentes objetos, incluyendo el regalo sorpresa. Asimismo, el estudiante debe explicar cómo ha encontrado la masa del regalo sorpresa en términos de los demás objetos y las pesas presentes en el simulador. El profesor debe verificar que los estudiantes manejen adecuadamente el concepto de equilibrio y el método del tanteo para solucionar la ecuación aditiva implícita en la tarea. Dado que el trabajo se realiza en el simulador, el profesor debe asegurarse de que los estudiantes completen la tabla ya sea en una hoja o en un documento online que se pueda compartir por correo. De esta manera, el profesor podrá tener evidencia de los resultados de los estudiantes.

6.2. Tarea de aprendizaje T2.2 Cargas de vehículos

Con esta tarea, buscamos que el estudiante le encuentre sentido a la aplicación de la propiedad uniforme al solucionar ecuaciones aditivas. Asimismo, esta tarea permite que los estudiantes puedan comprender la modelación de una situación real representada mediante una ecuación aditiva. Por otro lado, con esta tarea, buscamos que el estudiante desarrolle el interés por resolver situaciones mediante el uso de las ecuaciones aditivas y cree el hábito de verificar el resultado obtenido al resolverlas.

Requisitos

Para esta tarea, sugerimos que el estudiante utilice el conocimiento que tiene sobre comparación de cantidades de magnitudes, desigualdades, ecuaciones aditivas y la propiedad uniforme de la adición. Además, es necesario que el estudiante aplique la propiedad uniforme de manera intuitiva al ver la necesidad de eliminar cargas en ambos vehículos de la tarea.

Aportes de la tarea al objetivo de aprendizaje

Con esta tarea de aprendizaje, buscamos contribuir a la utilización de la propiedad uniforme para resolver una situación que representa una ecuación aditiva. De igual manera, pretendemos que el estudiante sea capaz de comprender una situación de la vida real modelada por una ecuación aditiva.

Formulación de la tarea.

El profesor presenta la tarea a los estudiantes con el proyector de video. La proyección contiene la imagen (figura 19) de la tarea, su instrucción y la pregunta que debe ser resuelta.

Una empresa de transporte de carga usa distintos tipos de vehículos para llevar mercancía a su destino. Observa la imagen en la que se presentan los pesos de algunas cargas. Si la carga total de ambos carros es la misma, es decir, si $A1 + A2 = B1 + B2 + B3$, ¿cuál es la masa de la carga desconocida? Discute con tus compañeros la situación.

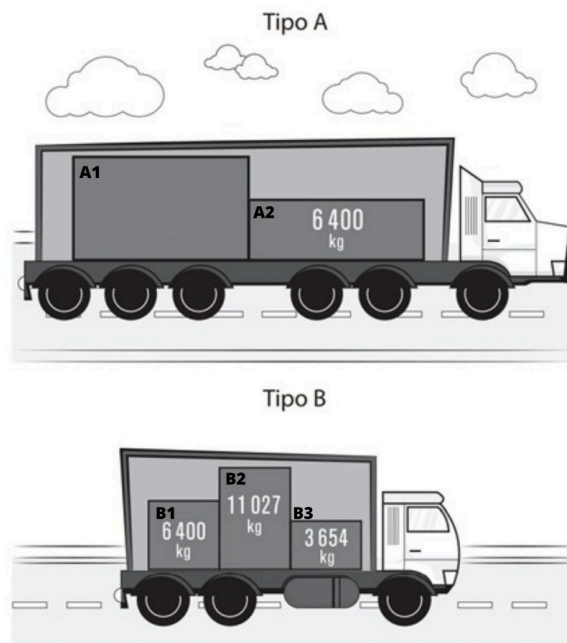


Figura 19. Cargas de vehículos (Tomado de Mariño et al, 2019).

Conceptos y procedimientos

Esta tarea involucra los conceptos de ecuación aditiva, incógnita, valores conocidos y desconocidos y la propiedad uniforme de las igualdades. En relación con los procedimientos involucrados, la tarea requiere de la aplicación de la propiedad uniforme, la adición, la sustracción y la comparación de números naturales.

Sistemas de representación

Incluimos los sistemas de representación pictórico y simbólico en la formulación de la tarea. Asimismo, el estudiante puede hacer uso de la representación verbal o simbólica para dar respuesta a la pregunta de la tarea.

Contextos PISA en los que se sitúa la tarea

La tarea se sitúa en un contexto social según el marco de referencia PISA 2012, al tener en cuenta que la tarea involucra una situación de transporte de mercancías.

Materiales y recursos

Para esta tarea, el profesor debe contar con un proyector de video para presentar la instrucción y la imagen en el tablero. Los estudiantes necesitan su cuaderno y sus lápices.

Agrupamiento e interacción

La tarea requiere que el estudiante trabaje de manera individual para encontrar el valor de A1. La comunicación predominante es entre el profesor y los estudiantes. Durante la presentación de la

tarea y las instrucciones, el profesor debe hacer énfasis en los términos presentes en la ecuación y los datos proporcionados en la imagen. Durante la resolución de la tarea, el profesor debe resolver las dudas que tengan los estudiantes sobre cómo despejar la incógnita de la ecuación y les brindará las ayudas relacionadas con las dificultades que puedan tener. En relación con la interacción entre estudiantes, habrá un espacio en el que los estudiantes buscarán con quien discutir su respuesta y procedimientos realizados. Para esto, el profesor indica a los estudiantes que deben disponer de la ubicación de sus asientos de tal manera que puedan agruparse con un compañero. Además, al finalizar el espacio en parejas, el profesor debe dirigir una puesta en común de la tarea con el grupo completo, en la que el profesor presenta la propiedad uniforme para resolver ecuaciones aditivas.

Temporalidad

La tarea se desarrolla en varias etapas. En la primera, el profesor presenta la tarea y sus instrucciones en 3 minutos. En la segunda, el estudiante procederá a solucionar la tarea de manera individual durante 8 minutos, para luego realizar la discusión con uno de sus compañeros en 4 minutos. Seguidamente, el profesor dirige una discusión sobre los resultados entre todos los estudiantes del salón, en un tiempo de 5 minutos. Después, los estudiantes tienen un espacio de 12 minutos para abordar el diario del estudiante. Durante los primeros 4 minutos, el profesor describe de nuevo la meta de la tarea y a qué criterios de logros del segundo objetivo de aprendizaje apunta, para que el estudiante diligencie el diario en los 3 minutos siguientes. Luego, el profesor tiene 2 minutos para recoger los diarios diligenciados y 3 minutos para que los estudiantes de la muestra compartan sus opiniones. De esta manera, la tarea de aprendizaje puede ser realizada en 32 minutos.

Errores en los que puede incurrir el estudiante y ayudas

Durante la realización de la tarea T2.2, los estudiantes pueden incurrir en los siguientes errores: identificar un número que se le debe restar a un valor que no es necesario para despejar la incógnita de la ecuación aditiva (E31), traducir de un sistema de representación a la resta cuando debe ser suma (E46) y el de relacionar un valor encontrado y otro conocido del enunciado que se comparan mediante una resta en vez de suma para encontrar un valor desconocido (E51). Para evitar que los estudiantes incurran en los errores mencionados anteriormente, el profesor puede preguntar por la operación que el estudiante debe utilizar para encontrar el valor que hace falta. Asimismo, el profesor puede preguntar a la clase qué pasa si se resta un número a un solo lado de la ecuación. El listado de errores se encuentra en el anexo 1 y el listado de ayudas en el anexo 3.

Grafo de criterios de logro de la tarea

En este apartado, presentamos el grafo de criterios de logro de la tarea T2.2 (figura 20). El estudiante inicia con la identificación de la información necesaria para resolver la tarea. Luego, continúa con la decisión de usar sumas y restas o el empleo de la propiedad uniforme de las igualdades. Después, activan los procedimientos asociados con identificar a qué valor conocido de la ecuación se le debe sumar o restar un número para despejar la incógnita. Seguidamente, el estudiante establece una suma entre dos números que se comparan para encontrar otro valor y responde la pregunta de la tarea.

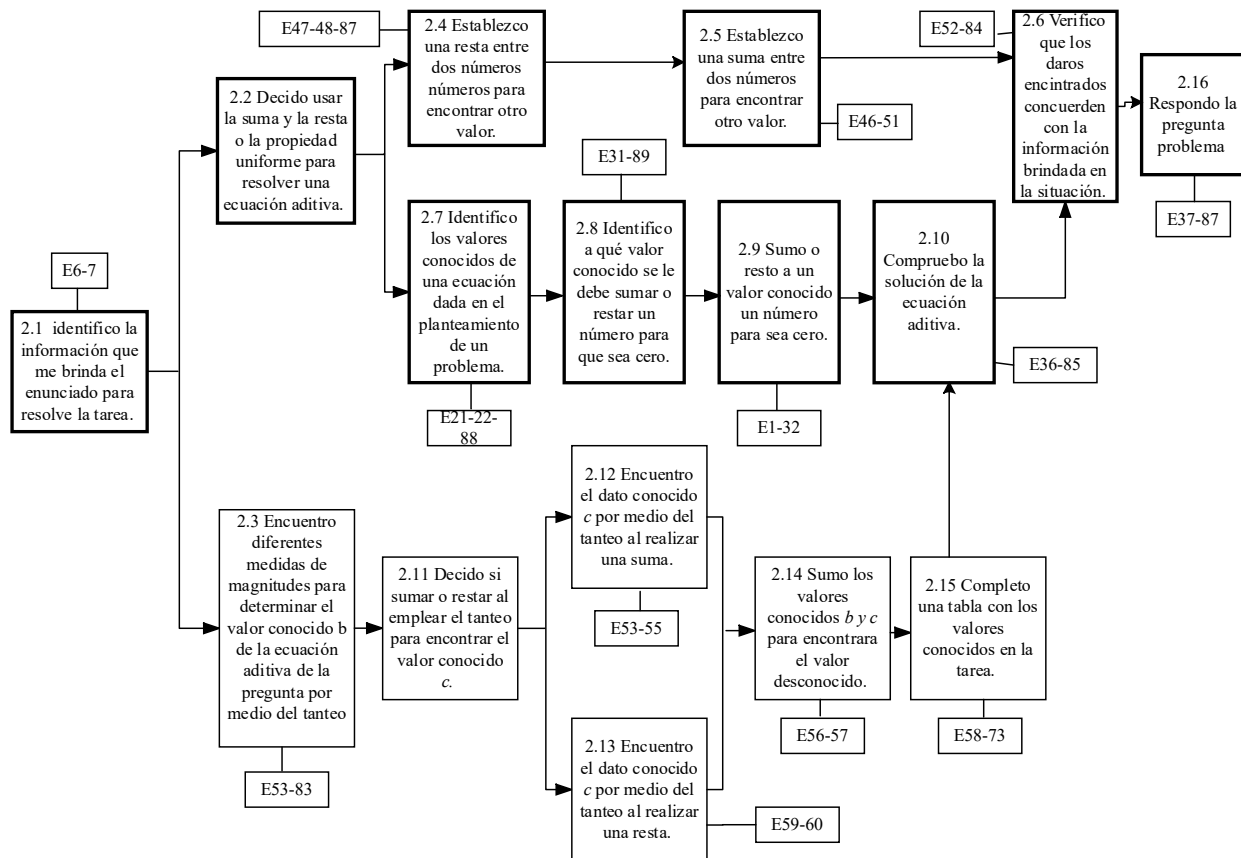


Figura 20. Grafo de criterios de logro de la tarea T2.2 Cargas de vehículos

Actuación del profesor

El profesor presenta la tarea y sus instrucciones mediante el proyector para que los estudiantes la resuelvan de manera individual. Luego, el profesor da la instrucción de organizarse en parejas para compartir las respuestas y análisis realizados. Finalmente, el profesor dirige la discusión con todos los estudiantes en la que se comentan las respuestas encontradas y los procedimientos utilizados.

Sugerencias metodológicas

Para la superación de dificultades y errores, le proponemos al profesor implementar las ayudas descritas anteriormente. Asimismo, es importante que el profesor esté al tanto del trabajo que cada estudiante hace de manera individual y que aclare todas las dudas con respecto a las instrucciones de la tarea. Finalmente, el profesor debe propiciar el cumplimiento de los tiempos asignados para cada momento de la tarea. De esta manera, la tarea no se extiende demasiado y podemos alcanzar la meta establecida.

Evaluación

La respuesta final debe responder a la pregunta de la tarea. Es decir, el estudiante debe mostrar el valor que corresponde a la masa de la carga desconocida y el procedimiento que llevó a cabo para encontrar ese valor. Además, el profesor puede dar mayor valoración al cumplimiento de los criterios de logro relacionados con el empleo de la propiedad uniforme y la utilización de sumas o restas para hallar el valor desconocido. Finalmente, el profesor debe verificar que los estudiantes compartan las respuestas con el compañero seleccionado, para que puedan hacer el proceso de comparación, verificación y corrección de su respuesta.

6.3. Tarea de aprendizaje T2.3 Ecuaciones visuales

Con esta tarea de aprendizaje, buscamos que el estudiante resuelva diferentes ecuaciones aditivas mediante el uso de un simulador virtual. Para esto, el estudiante debe encontrar el valor de una de las pesas de la tercera báscula por medio del tanteo para encontrar el valor de las demás pesas, ya sea mediante el uso del tanteo o la propiedad uniforme de las igualdades. Cuando el estudiante ha encontrado el valor correcto de cada pesa, el programa se lo indicará al mostrar el número de la parte de arriba de las pesas en verde.

Requisitos

Para esta tarea, sugerimos que los estudiantes utilicen su conocimiento formal sobre el concepto de ecuación aditiva y sus elementos y que los estudiantes sean capaces de emplear el tanteo y la propiedad uniforme de las igualdades como procesos para resolver una ecuación aditiva. Finalmente, la tarea requiere que el estudiante tenga destrezas relacionadas con la manipulación de simuladores virtuales, como seleccionar y trasladar objetos de un lugar a otro en una misma pantalla.

Aportes de la tarea al objetivo de aprendizaje

Con esta tarea, pretendemos que el estudiante vea la importancia de relacionar un valor desconocido (incógnita) con otros dos conocidos (parte-todo y todo) en una ecuación aditiva para resolverla. Por otro lado, buscamos que los estudiantes superen errores relacionados con la identificación del valor conocido que representa el parte-todo como el todo de una ecuación aditiva dada.

Formulación

A continuación, presentamos la formulación de la tarea, que incluye un simulador de básculas y el enunciado con las instrucciones.

En este simulador se presentan tres básculas y en cada una se ubica un par de pesas de diferente color, al tener en cuenta que solo hay tres colores. En cada báscula, se indica el total de la suma de los valores que corresponden a cada pesa ubicada en estas. Reúnete con dos compañeros y calcula el valor de cada pesa con la ayuda de los gráficos.



Figura 21. Simulador Ecuaciones visuales II sin solución

Conceptos y procedimientos

Esta tarea involucra los conceptos de ecuación aditiva y sus elementos. En relación con los procedimientos involucrados, la tarea requiere de la aplicación del tanteo y la propiedad uniforme de las igualdades.

Sistemas de representación

Con esta tarea, buscamos que el estudiante utilice el sistema de representación ejecutable mediante el uso de un simulador virtual que permite resolver ecuaciones aditivas.

Contextos PISA

La tarea T2.3 está enmarcada en un contexto personal de acuerdo con el marco conceptual de PISA 2012, pues se presenta una situación relacionada con el uso de básculas.

Materiales y recursos

Esta tarea requiere el uso de un dispositivo electrónico en el que los estudiantes puedan acceder al simulador gratis Ecuaciones visuales II de la plataforma E+educaplus.org.

Agrupamiento e interacciones

La tarea requiere que los estudiantes se organicen en grupos de tres personas. La comunicación predominante es entre el profesor y el grupo completo, pues en este momento se abordan las instrucciones y el modo de uso del simulador presente en la tarea. Por ejemplo, el profesor dice a los estudiantes que el simulador les indica cuándo el valor de una de las pesas presentes en la situación de la tarea es correcto y cuándo no. Esta información es clave porque el simulador no deja continuar con la tarea hasta que el estudiante no encuentre el primer valor correcto. En un segundo momento, los estudiantes de cada grupo deben interactuar entre ellos mismos para establecer las estrategias y procedimientos a utilizar para resolver la tarea y encontrar el valor de

todas las pesas presentes en esta. Finalmente, la comunicación será de nuevo entre el profesor y el grupo completo, pues el profesor pregunta a los estudiantes de qué manera resolvieron la tarea y qué procedimientos llevaron a cabo. Esto se hace con el fin de mostrar a los estudiantes cómo una tarea se puede resolver por el tanteo y por la propiedad uniforme de las igualdades, y cuáles son aquellas características que hay que tener en cuenta para llevar a cabo uno u otro procedimiento.

Temporalidad

La tarea se desarrolla en varias etapas. En la primera, el profesor tiene un espacio de 5 minutos para retomar brevemente lo visto en la clase anterior. En la segunda etapa, el profesor presenta el simulador y sus reglas de uso. Esta etapa tiene una duración de 7 minutos. La tercera etapa es dar la instrucción de la tarea. Después, en la cuarta etapa, los estudiantes tienen un tiempo de 20 minutos para solucionar la tarea junto con sus compañeros, para que luego participen en la discusión grupal de la tarea. Después, en la quinta etapa, tenemos un espacio de 10 minutos para abordar el diario del estudiante. Durante los primeros 4 minutos, el profesor describe de nuevo la meta de la tarea y a qué criterios de logros del segundo objetivo de aprendizaje apunta, para que el estudiante diligencie el diario en los 4 minutos siguientes. Luego, el profesor tiene 2 minutos para recoger los diarios diligenciados. De esta manera, tenemos 42 minutos para llevar a cabo esta tarea de aprendizaje.

Errores en los que puede incurrir el estudiante y ayudas

En la solución de la tarea T2.3, los estudiantes pueden incurrir en los errores de sumar o restar un número en un solo miembro de la ecuación al intentar despejar la incógnita (E1) y relacionar dos valores conocidos que se comparan mediante una suma en lugar de una resta para encontrar un valor desconocido (E48). Como ayuda, el profesor puede leer el enunciado en voz alta y escribir los datos que son necesarios para resolver la situación y preguntar a los estudiantes qué operación pueden utilizar para encontrar el valor que hace falta. El listado de errores se encuentra en el anexo 1 y el de las ayudas en el anexo 3.

Grafo de criterios de logro

En la figura 22, presentamos el grafo de criterios de logro del objetivo 2. En este grafo, resaltamos los criterios de logro que el estudiante puede activar al tratar de resolver la tarea de aprendizaje T2.3. Primero, el estudiante debe identificar la información que le brinda el enunciado. Luego, el estudiante decide usar la propiedad uniforme de las igualdades o el tanteo para resolver la ecuación aditiva. En el caso de la propiedad uniforme, el estudiante identifica el valor conocido de la ecuación al que se le debe sumar o restar un número para despejar la incógnita. Por último, el estudiante comprueba la solución de la ecuación aditiva y verifica que los datos encontrados concuerden con la información brindada en la situación.

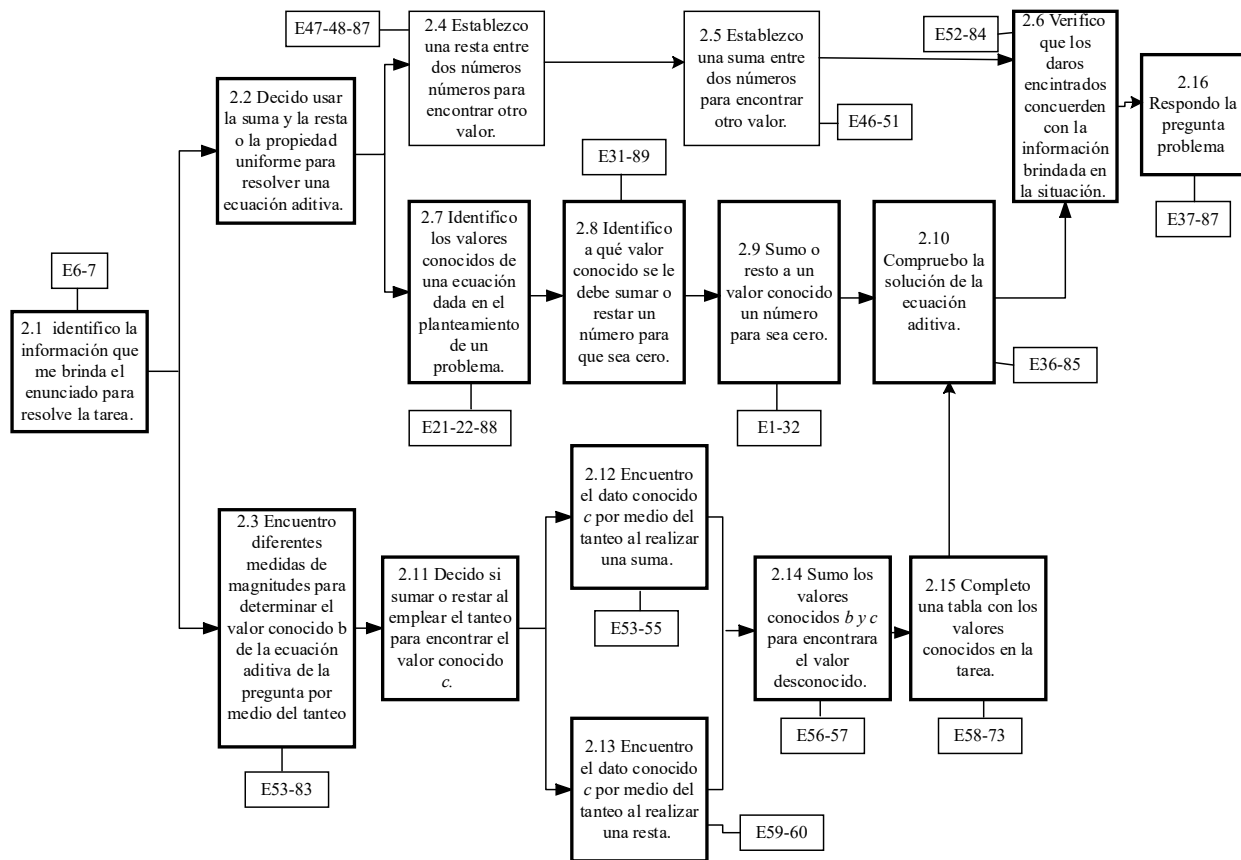


Figura 22. Grafo de criterios de logro de la tarea de aprendizaje T2.3 Ecuaciones visuales

Actuación del profesor

Durante la aplicación de la tarea, el profesor debe encaminar a los estudiantes a que identifiquen los elementos de la ecuación. Para esto, el profesor puede preguntar al grupo cuáles son los valores conocidos y la incógnita. Además, el profesor hace seguimiento a las discusiones de los estudiantes para identificar los posibles errores en los que puedan incurrir. Asimismo, es necesario que el profesor explique cómo utilizar el simulador virtual que utilizamos en la tarea. Por ejemplo, el profesor les puede aclarar a los estudiantes que el simulador mostrará en verde los números de cada balanza si estos son los correctos.

Sugerencias metodológicas y aclaraciones

El profesor puede pedir a los estudiantes tomar una captura de pantalla de la solución de la tarea, pues de esta manera se puede registrar si los estudiantes lograron resolver la ecuación aditiva. Asimismo, el profesor debe estar atento al desarrollo de la tarea y registrar los errores en los que más incurrieron los estudiantes al resolverla. El registro de estos errores le permite al profesor diseñar una retroalimentación de la tarea.

Evaluación






El profesor debe verificar mediante el simulador virtual si los estudiantes resolvieron la ecuación aditiva, pues si el estudiante ha encontrado el valor correcto de cada pesa, el programa se lo indicará al colocar el número de la parte de arriba de las pesas en verde.

7. EXAMEN FINAL

En este apartado, presentamos el examen final que nos permite evaluar en qué medida los estudiantes alcanzan los objetivos de aprendizaje propuestos en la unidad didáctica. En total, el examen está compuesto por cinco preguntas. Las tres primeras preguntas del examen evalúan si el estudiante logra el primer objetivo relacionado con formular ecuaciones aditivas que modelan una situación dada. Las dos últimas preguntas nos permiten conocer si el estudiante logra el segundo objetivo, el de resolver ecuaciones aditivas para dar respuesta a una situación particular. A continuación, presentamos las tareas del examen final.

Examen final

1. La empresa Air-e calcula el valor a pagar del servicio de luz de sus clientes al tener en cuenta el valor del consumo de la energía, el valor a pagar por el aseo y el valor del impuesto del alumbrado público. A continuación, observa un historial de pagos realizados en un hogar por el consumo de luz en los meses de enero, febrero y marzo. Completa la tabla e indica cómo podemos encontrar el total a pagar de la luz consumida en un hogar.



	Energía	Aseo	Alumbrado público	Valor total a pagar
Enero	27.000	34.980		66.310
Febrero	32.000	34.980		71.310
Marzo	40.500	34.980		79.810

Figura 23. Recibo de luz. Elaboración propia.

2. Zaray tiene una tarjeta de crédito que le dio el banco Amigo. Con esta tarjeta, Zaray realizó las siguientes compras: una chaqueta de cuero de 259.900, un jean de 199.900 y unos tenis de 135.900. Si el cupo de la tarjeta es de 2 millones y Zaray quiere comprar un computador, ¿cuál es el precio del computador más costoso que ella podría comprar con la tarjeta de crédito?

3. En la siguiente secuencia de triángulos, observarás la medida de los ángulos internos de cada uno. Ten en cuenta que la suma de las medidas de los ángulos internos de los triángulos es 180° . A partir de esto, escribe una ecuación que te permita calcular la medida del ángulo C del triángulo IV.

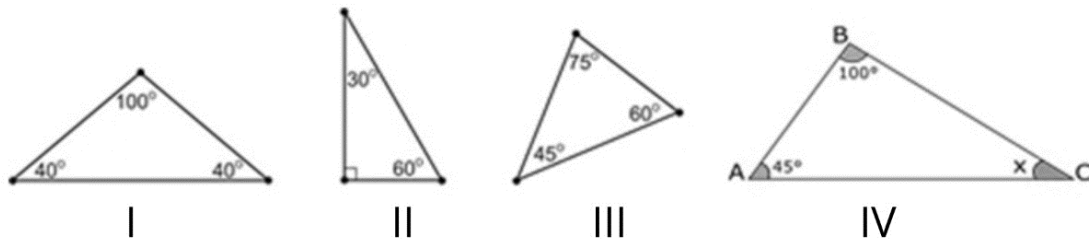


Figura 24. Medidas internas de un triángulo. Imágenes adaptadas de internet.

4. Se preguntó a los 130 niños de sexto grado por su fruta favorita. Los datos obtenidos se presentan en el siguiente gráfico. ¿Cuántos niños de los encuestados prefieren manzana? Explica cómo encontraste esta cantidad.

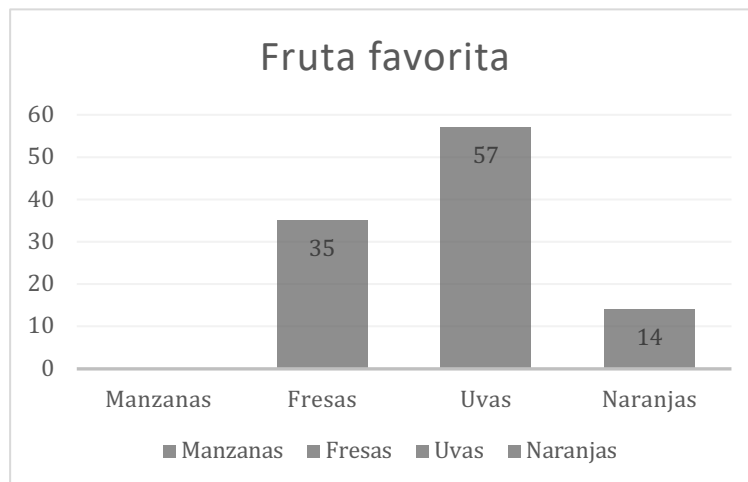


Gráfico 1. Diagrama de barras sobre la encuesta de 130 niños de grado sexto.

5. Para el día de la familia, se presentará una obra de teatro en el auditorio del colegio. El auditorio tiene capacidad para 1250 personas. Los estudiantes de preescolar vendieron 420 boletas y los de primaria vendieron 120 boletas más que los estudiantes de preescolar. Los estudiantes de bachillerato vendieron el resto de la boletería (Tomado de Mariño et al, 2019).

La ecuación $x + 420 + 540 = 1250$ nos permite encontrar el número de boletas vendidas por los estudiantes de bachillerato, al tener en cuenta que x representa esta cantidad. ¿Cuántas boletas vendieron los estudiantes de bachillerato?

- a) 290
- b) 710
- c) 540
- d) 960

Justifica tu respuesta.

Para la calificación del examen, diseñamos una rúbrica para evaluar la activación de los criterios de logro presentados en los grafos de cada objetivo de aprendizaje. En el caso del primer objetivo,

tenemos en cuenta los procedimientos que el estudiante debe realizar para plantear una ecuación aditiva (tabla 6). Estos procedimientos están relacionados con la extracción de información relevante y necesaria para resolver la tarea y con la formulación de las ecuaciones aditivas mediante las tres subestructuras definidas. En el nivel de desempeño superior, el estudiante debe ser capaz de activar todos los procedimientos sin incurrir en ningún error. En el nivel de desempeño alto, el estudiante puede incurrir en errores asociados a la argumentación de la validez de una ecuación aditiva mediante el uso de afirmaciones que no corresponden con los aspectos de la situación de la tarea (E8). En el nivel básico, el estudiante puede incurrir en errores asociados al planteamiento incorrecto de la ecuación dado que no ha seleccionado correctamente la operación que vincula sus elementos (E15 y E13). Asimismo, los estudiantes pueden activar parcialmente los procedimientos relacionados con la representación simbólica o verbal de una ecuación aditiva. Finalmente, un estudiante está en nivel bajo si identifica la información que es necesaria para resolver la tarea (CdL1.1, CdL 1.2, CdL1.3 y CdL 1.4), pero no logra relacionarla con los elementos de la ecuación aditiva. Es decir, el estudiante no logra plantear la ecuación aditiva.

Tabla 6
Niveles de desempeño e indicadores para el objetivo 1.

Nivel de desempeño	Indicadores	Puntos por preguntas
Superior	El estudiante activa todos los procedimientos previstos para formular una ecuación aditiva que modela una situación en contexto real, sin incurrir en errores principalmente relacionados con los siguientes criterios de logro: CdL 1.1, CdL 1.10, CdL 1.9, CdL 1.12, CdL 1.11, CdL 1.8, CdL 1.5 y CdL 1.6.	P1. 30 puntos.
		P2. 15 puntos.
		P3. 15 puntos.
Alto	El estudiante activa todos los procedimientos previstos para plantear una ecuación aditiva que modela una situación en contexto real, sin incurrir en errores principalmente relacionados con los siguientes criterios de logro: CdL 1.1 CdL 1.10, CdL 1.9, CdL 1.12, CdL 1.11, CdL 1.8, CdL 1.5 y CdL 1.6. Es decir, el estudiante determina: los valores conocidos de la ecuación, la operación que los vincula con la incógnita y la representación que utilizará para representar la ecuación. El estudiante puede incurrir en el error de argumentar la validez del planteamiento de una ecuación con afirmaciones que no corresponden con la información del problema (E38).	P1. Entre 25 - 29 puntos.
		P2. Entre 10 - 14 puntos.
		P3. Entre 10 - 14 puntos.
Básico	El estudiante plantea una ecuación aditiva al activar parcialmente algunos de los siguientes criterios de logro:	P1. Entre 15 y 24 puntos

Tabla 6

Niveles de desempeño e indicadores para el objetivo 1.

	<p>CdL 1.11, CdL 1.12, CdL 1.17, CdL 1.14, CdL 1.15 y CdL1.6. Es decir, el estudiante:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Determina incorrectamente la operación que vincula los valores conocidos a la incógnita de la ecuación (E15 y E13). - Determina correctamente los valores conocidos y la operación de la ecuación, pero no representa correctamente la ecuación 	<p>P2. Entre 5 - 10 puntos.</p>
		<p>P3. Entre 5 - 10 puntos.</p>
Bajo	<p>El estudiante identifica la información que es necesaria para resolver la tarea (CdL 1.1, CdL 1.2, CdL 1.3, y CdL 1.4), pero no logra relacionarla con los elementos de la ecuación aditiva. Es decir, el estudiante determina incorrectamente los valores conocidos y la operación de la incógnita, lo que no le permite plantear la ecuación correcta.</p>	<p>P1. Entre 0 y 14 puntos.</p>
		<p>P2. Entre 0 y 4 puntos.</p>
		<p>P1. Entre 0 y 4 puntos.</p>

En el caso del segundo objetivo, tenemos en cuenta los principales métodos para solucionar una ecuación aditiva (tabla 7). Estos métodos son los siguientes: tanteo, el uso de la propiedad uniforme de las igualdades, sumas y restas. En el nivel de desempeño superior, el estudiante debe ser capaz de activar los criterios de logro sin incurrir en ningún error. En el nivel de desempeño alto, el estudiante puede encontrar la solución de la ecuación aditiva de la situación, pero podría incurrir en el error de responder la pregunta del problema con información diferente a la obtenida (E37). En el nivel básico, el estudiante puede incurrir en el error de sumar o restar un número solo en uno de los lados de la ecuación al momento de despejar la incógnita (E1 y E2). Asimismo, ellos podrían incurrir en errores asociados con el proceso de sumar y restar. Es decir, en este nivel básico, el estudiante continuó con la tarea, pero la respuesta es incorrecta porque se equivocó al sumar o restar los valores de esta. Igualmente, puede que el estudiante incurra en errores asociados al tanteo. Por ejemplo, encuentra un dato conocido por medio del tanteo al realizar operaciones diferentes a la suma (E55). Finalmente, en el nivel bajo, el estudiante no logra dar respuesta a la situación de la tarea porque no logra solucionar la ecuación aditiva correspondiente.

Tabla 7
Niveles de desempeño e indicadores para el objetivo 2.

Nivel de desempeño	Indicadores	Calificación de las preguntas 4 y 5
Superior	El estudiante activa todos los criterios de logro para resolver ecuaciones aditivas mediante el tanteo, el uso de la propiedad uniforme de las igualdades, sumas y restas.	P4. 25 puntos.
		P5. 15 puntos.
Alto	El estudiante activa todos los criterios de logro para resolver ecuaciones aditivas mediante el tanteo, el uso de la propiedad uniforme de las igualdades, sumas y restas.	P4. Entre 20 y 24 puntos.
	El estudiante puede incurrir en el error de responder la pregunta del problema con información que no corresponde (E37).	P5. Entre 10 y 14 puntos.
Básico	El estudiante utiliza la adición, la propiedad uniforme de las igualdades y el tanteo para solucionar ecuaciones aditivas, pero incurre en errores relacionados con estos métodos de solución.	P4. Entre 15 y 19 puntos.
	<p>El estudiante incurre en el error de sumar o restar un número en un solo miembro de la ecuación (E1 y E2).</p> <p>El estudiante activa parcialmente los criterios de logro CdL 2.4, CdL 2.5 y CdL 2.6, pues incurre en errores asociados con las operaciones de la suma y la resta.</p> <p>El estudiante activa parcialmente procedimientos asociados al tanteo, pues incurre en errores asociados a estos.</p>	P4. Entre 5 y 9 puntos.
Bajo		P4. Entre 0 y 14 puntos.

	El estudiante identifica la información que es necesaria para resolver la tarea (CdL 2.1), pero no logra utilizarla para resolver ecuaciones aditivas.	P4. Entre 0 y 4 puntos.
--	--	-------------------------

8. CONCLUSIONES

La planificación e implementación de unidades didácticas es un ejercicio importante para la práctica del profesor. Es necesario que los profesores formen estudiantes matemáticamente competentes, de manera que ellos puedan utilizar las matemáticas para la interpretación y resolución de problemas que encontrarán en su vida cotidiana en diferentes contextos. Por esto, los profesores deben planear su enseñanza mediante el diseño, implementación y evaluación de clases que les permita a los estudiantes aprender los contenidos de forma organizada y con unos objetivos de aprendizaje claros y concretos. El diseño de la unidad didáctica del tema de las ecuaciones aditivas nos permitió reflexionar sobre la complejidad e importancia de analizar un tema para su enseñanza, con base en el modelo de análisis didáctico (Gómez, 2018). En primer lugar, al momento de enseñar un tema de las matemáticas escolares, es importante identificar y analizar su estructura matemática y conceptual. Esto nos permite conocer qué conceptos y procedimientos están relacionados con el tema y cuáles son relevantes al momento de enseñarlo. En el caso de las ecuaciones aditivas, son importantes los conceptos de igualdad, equilibrio, incógnita y valores conocidos, y los procedimientos relacionados con los métodos de solución de una ecuación aditiva, como el tanteo, el uso de la propiedad uniforme de las igualdades, y sumas y restas.

En segundo lugar, encontramos que es necesario estudiar los diferentes sistemas de representación mediante los cuales podemos representar las ecuaciones aditivas, y en general cualquier tema de las matemáticas escolares. Por ejemplo, en nuestra unidad didáctica, las ecuaciones aditivas son representadas mediante los sistemas de representación geométrico, pictórico, ejecutable, simbólico y verbal. Por otro lado, debemos identificar en qué contextos podemos plantear situaciones que requieran del uso de las ecuaciones aditivas para ser solucionadas, de manera que el estudiante le encuentre sentido al tema dentro de la realidad.

En tercer lugar, mediante el análisis de la dimensión cognitiva, de la instrucción y de la evaluación, pudimos establecer los objetivos de aprendizaje de la unidad didáctica, las tareas que contribuyen a su desarrollo y el sistema de evaluación final para conocer qué aprendieron los estudiantes. De la misma manera, reflexionamos sobre las dificultades que los estudiantes pueden tener al momento de aprender y sobre los errores en los que pueden incurrir al solucionar las tareas de aprendizaje. Hicimos esto al tener en cuenta nuestras previsiones sobre lo que el estudiante puede realizar al desarrollar cada tarea. Si el estudiante realiza incorrectamente un procedimiento, debemos identificar en qué error incurrió y qué dificultad presentó.

En relación con las tareas de aprendizaje, destacamos los diferentes sistemas de representación que utilizamos para representar las ecuaciones aditivas y las situaciones situadas en contextos de tipo personal, científico y social según el marco conceptual PISA 2012. Igualmente, destacamos los diferentes tipos de interacción, agrupamiento y comunicación planteados para el desarrollo de cada tarea, pues los estudiantes trabajan en parejas, grupos de tres personas, individualmente y con

el grupo completo y el profesor. Por último, cada tarea contribuye a un aspecto del objetivo de aprendizaje en el que se encuentra enmarcada, como el planteamiento de la ecuación aditiva en términos de una subestructura o la solución de las ecuaciones mediante un determinado método.

Por otro lado, en aquellas instituciones en las que los estudiantes no tengan dispositivos para acceder a internet, como en la sala de computadores o de tecnología, los profesores no podrán implementar las tareas T2.1 y T2.3 que utilizan simuladores. En este caso, el profesor podría modificar los recursos y materiales de la tarea de manera que pueda implementarla. Por ejemplo, el profesor podría utilizar balanzas reales con diferentes objetos y seguir la misma idea de la tarea correspondiente.

Finalmente, cerramos con algunas reflexiones sobre los aprendizajes que obtuvimos durante el programa. En un primer momento, tuvimos la oportunidad de fortalecer nuestros conocimientos sobre el currículo de las instituciones en las que laboramos. Esto nos permitió conocer los lineamientos curriculares que rigen los planes de área de estas instituciones y estudiar qué tan coherentes son estos con el currículo nacional. Adicionalmente, el diseño e implementación de la unidad didáctica nos brindó la oportunidad de fortalecer nuestra práctica pedagógica en el aula de clases. Esto se debe a los diferentes análisis que realizamos con base en los organizadores del currículo y a los análisis de instrucción y evaluación. Logramos diseñar tareas de aprendizaje en las que los estudiantes deben utilizar el tema para resolver situaciones que se enmarcan en diferentes contextos. Asimismo, identificamos diferentes formas de representar el tema de las ecuaciones aditivas, y en general cualquier tema. Por último, aprendimos cómo podemos valorar el aprendizaje de los estudiantes mediante procedimientos y errores observables en su desempeño en la resolución de las tareas de aprendizaje.

ANEXOS

A continuación, presentamos el listado de anexos relacionados en este documento (tabla 8)

Tabla 8
Listado de anexos

A	Descripción
1	Listado de dificultades y errores.
2	Listado de criterios de logro.
3	Listado de ayudas para los errores.
4	Imprimibles de las tareas.

Nota. A: anexo.

REFERENCIAS

- Cañadas, M. C., Gómez, P., & Pinzón, A. (2018). Análisis de contenido. En P. Gómez (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 53-112). Bogotá: Universidad de los Andes.
- Gómez, P. (2018). *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares*. Bogotá: Universidad de los Andes.
- González, M. J. y Gómez, P. (2018). Análisis cognitivo. En P. Gómez (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 113-196). Bogotá: Universidad de los Andes.
- Liceo de Cervantes Barranquilla (2019). Proyecto institucional educativo PEI.
- Mariño, A., Suárez, I., Romero, I., Villegas, M y León, C. (2019). *Aprender a aprender Matemáticas 6*. Bogotá, Colombia: Norma
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2013). *Marcos y pruebas de evaluación de pisa 2012: Matemáticas, lectura y ciencias*. Recuperado de <https://bit.ly/2JydXIF>
- Ministerio de Educación Nacional. (2016). *Derechos básicos de aprendizaje*. Bogotá: Autor.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Bogotá: Autor. Disponible en <https://bit.ly/3SNj7fg>
- Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: Instituto de Ciencias de la Educación (ice) – Horsori.