Maestría en Educación Matemática

Probabilidad simple

Yudy Galindo, Andrea Suárez y Rocío Gómez

Bogotá, Diciembre de 2023

1. INTRODUCCIÓN

A continuación, presentamos el diseño de la unidad didáctica sobre probabilidad simple, desarrollado por el grupo 1 de la décima cohorte de la Maestría en Educación Matemática de la Universidad de los Andes. El trabajo consistió en el diseño, implementación y evaluación de una unidad didáctica del tema de probabilidad simple a partir de varios referentes. El primer referente es el análisis de la normatividad curricular colombiana, el marco conceptual de PISA (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2012) y la práctica curricular existente en las instituciones (manual de convivencia, plan de área de matemáticas y sistema institucional de evaluación [SIE]). El segundo referente es el análisis didáctico que se ubica en el nivel de planificación local dentro de la teoría curricular (Gómez, 2007, p. 20) y está compuesto por el análisis de contenido, el análisis cognitivo, el análisis de instrucción y el análisis de actuación. El tercer referente es el análisis de datos, que se centró en la organización y análisis de los datos producidos en la implementación de la unidad didáctica en el aula. Por último, evaluamos la planificación y la implementación de la unidad didáctica.

Implementamos nuestra unidad didáctica en el colegio Antonio Van Uden, institución educativa de carácter oficial, ubicada en la localidad de Fontibón de la ciudad de Bogotá. Este colegio tiene el modelo de la Enseñanza para la Comprensión (Manual de convivencia 2021, p. 11) y su modalidad es presencial. El plan de área de matemáticas toma como referencia los estándares básicos de competencias matemáticas (Ministerio de Educación Nacional [MEN], 2006) y los derechos básicos de aprendizaje (MEN, 2016). El plan de estudios del colegio se encuentra organizado por áreas, con sus asignaturas correspondientes. Para el caso del área de matemáticas, las asignaturas son Aritmética, Geometría y Estadística. En este colegio, el tema de probabilidad simple se encuentra en el área de matemáticas, en la asignatura Estadística para grado noveno (ver anexo 1).

Desde el ámbito curricular, el tema de probabilidad simple se contempla en el documento de los estándares curriculares para matemáticas. Para grado octavo y noveno, encontramos dos estándares relacionados con el tema de probabilidad que son "Calculo probabilidad de eventos simples usando métodos diversos (listados, diagramas de árbol y técnicas de control)" y "Uso conceptos básicos de probabilidad (espacio muestral, evento, independencia, etc.)" (MEN, 2006, p.87). Estos estándares se encuentran enmarcados en el pensamiento aleatorio y sistemas de datos. Adicionalmente, en el documento de los derechos básicos de aprendizaje, encontramos el derecho número 11 de grado noveno: “Encuentra el número de posibles resultados de experimentos aleatorios con reemplazo y sin reemplazo, usando técnicas de conteo adecuadas, y argumenta la selección realizada en el contexto de la situación abordada” (MEN, 2016, p.73), que también hace referencia al tema de probabilidad simple.

La palabra probabilidad es comúnmente utilizada en el lenguaje cotidiano, gracias a las múltiples aplicaciones que tiene en la vida diaria. Sin embargo, el concepto de probabilidad requiere identificar y caracterizar algunas nociones previas que permitan aclarar su correcto manejo. Un problema que encontramos al concretar el tema de nuestra unidad didáctica es que los estudiantes de grado noveno no tienen el dominio suficiente de los conceptos asociados al pensamiento variacional y aleatorio. Esta dificultad es notoria en los estudiantes del colegio Antonio Van Uden, debido al poco énfasis que se da en grados anteriores a la asignatura Estadística, a pesar de que esta asignatura se encuentra contemplada en el plan de área de matemáticas desde grado sexto y en los documentos curriculares.

Dada la importancia que tiene el estudio de la probabilidad y la estadística durante la educación básica, creamos una unidad didáctica que cualquier profesor de matemáticas pueda utilizar o implementar con sus estudiantes y que le permita ayudarlos a desarrollar la comprensión de fenómenos de la vida cotidiana, en situaciones no deterministas en las que sea necesario usar la regla de Laplace para calcular probabilidades simples, resolver problemas que impliquen la toma de decisiones y crear algunas predicciones.

Para la consolidación de esta propuesta didáctica, tuvimos en cuenta cada uno de los elementos del análisis didáctico. Inicialmente, realizamos una delimitación del tema, planteamos diferentes expectativas, diseñamos seis tareas de aprendizaje enmarcadas en contextos cercanos al estudiante y diseñamos instrumentos de recolección de información. Estos últimos elementos nos sirvieron para realizar la evaluación de la unidad didáctica luego de su implementación.

1. ANTES DE IMPLEMENTAR

En este apartado, presentamos el análisis de contenido que fundamenta nuestra unidad didáctica, a partir de tres conceptos pedagógicos: el concepto de probabilidad simple, sus formas de representación y los fenómenos que le dan sentido al estudio de dicho concepto.

1.1. Estructura conceptual

En la figura 1, presentamos la estructura conceptual en la que se enmarca el tema de probabilidad simple.

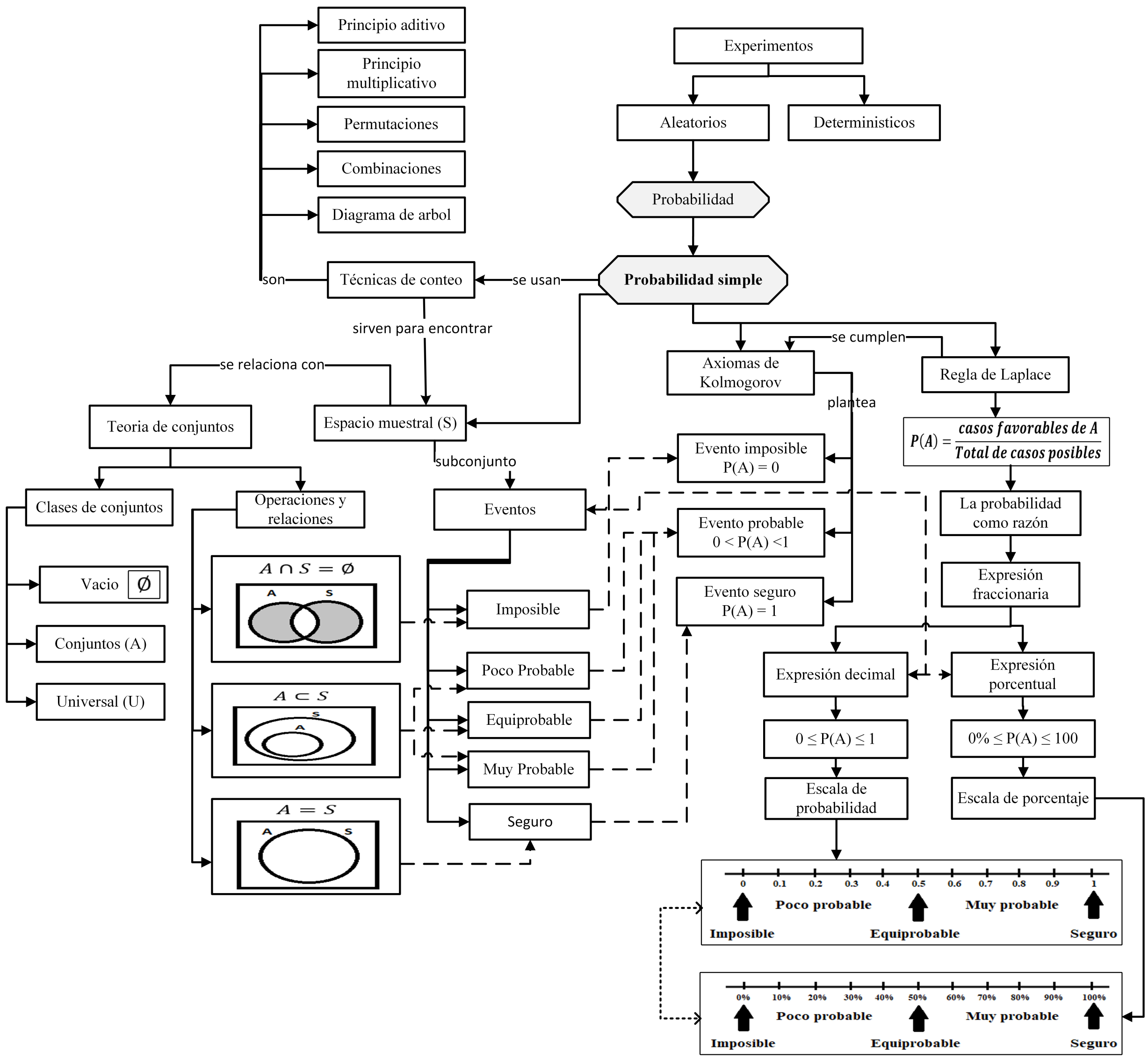


Figura 1. Mapa conceptual de la estructura conceptual de probabilidad simple

Una primera aproximación a los conceptos y procedimientos nos permitió identificar dos conceptos previos relevantes para hablar de probabilidad simple: experimentos aleatorios y espacios muestrales. Encontramos los experimentos aleatorios en fenómenos que se pueden realizar un gran número de veces en condiciones similares y dan lugar a un conjunto de dos o más posibles resultados. Estos resultados reciben el nombre de experimentos. Es importante aclarar que los experimentos que permiten identificar el concepto de probabilidad son los de tipo aleatorio. Por ejemplo, al lanzar un dado corriente una vez, no se puede predecir cuál será el resultado que se va a obtener. Sin embargo, se sabe que el conjunto de los posibles resultados es $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Estos fenómenos se ven afectados por la incertidumbre. Esta incertidumbre se refleja en frases como "probablemente...", "es poco probable que...", "hay muchas posibilidades de que...”. El concepto de espacios muestrales se relaciona con las técnicas de conteo, la teoría de conjuntos y con los axiomas de probabilidad.

En relación con los conceptos propios de la probabilidad simple, identificamos los planteamientos que, hacia 1933, el matemático ruso Andrey Kolmogorov presentó como una definición de probabilidad centrada en el cumplimiento de una serie de axiomas que aún permanecen vigentes (ver figura 2). En matemáticas, un axioma se entiende como un resultado que no necesita demostración y del que se desarrolla una teoría o se definen otros términos.

Sea (Ω, A) el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio.
Una función $P: A \to \mathbb{R}$ es una **función (medida) de probabilidad** sobre (Ω, A) si verifica:
A1: $P(A) \geq 0, \forall A \in A \to$ Axioma de no negatividad
A2: $P(\Omega) = 1 \to$ Axioma del suceso seguro
A3: $\{A_i\}_{i \in \mathbf{N}} \subseteq A$ y $A_i \cap A_j = \emptyset,\ \forall i \neq j \Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i) \to$ Axioma de aditividad

Figura 2. Axiomas de Kolmogorov

Adicionalmente, para el año 1812, se conoce la definición de probabilidad de Pierre-Simón Laplace, astrónomo, físico y matemático francés, definida como el cociente de cantidad de casos favorables sobre los casos posibles.

1.2. Sistemas de representación

Para establecer los sistemas de representación para el tema de probabilidad simple, tuvimos en cuenta la definición de Kaput (1992) que enfatiza el carácter sistémico de la noción de sistemas de representación retomado por Cañadas, Gómez y Pinzón (2018).

> *Un sistema de representación está compuesto por signos que se ciñen a unas reglas. Estas reglas determinan cómo crear un signo que pertenezca al sistema, cómo reconocer si un signo dado pertenece a él, y cómo transformar unos signos en otros, estableciendo relaciones entre ellos* (*Cañadas, Gómez y Pinzón* , 2018, p.18).

En la figura 3, presentamos los cinco sistemas de representación que consideramos para el tema de probabilidad simple. Estos sistemas son los sistemas de representación verbal, numérico, simbólico, pictórico y tabular. Cada sistema de representación se relaciona con objetos particulares del tema.

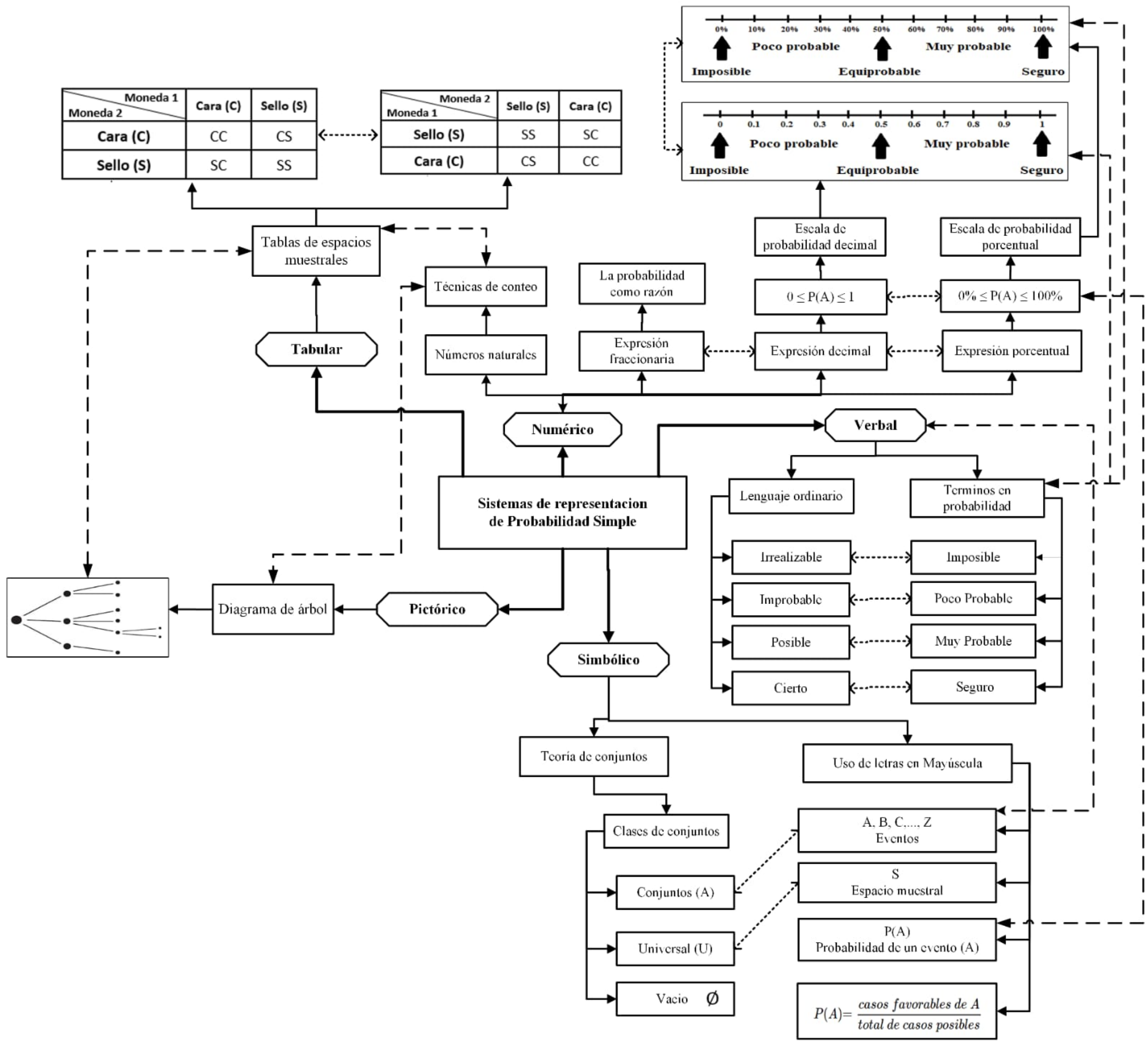


Figura 3. Sistemas de representación de probabilidad simple

A continuación, describimos brevemente cada uno de los sistemas de representación y sus relaciones.

Sistema de representación verbal

En probabilidad simple, se usan expresiones del lenguaje común tales como “no es posible que ocurra”, “es probable que ocurra”, “qué tan probable es que ocurra…” o “qué puede ocurrir u obtener si…” en las que queremos expresar qué puede pasar o, por el contrario, qué es imposible que pueda suceder al realizar el experimento.

Por otro lado, el lenguaje usado en el sistema de representación verbal se puede relacionar con el sistema de representación numérico, por ejemplo, cuando se asigna el valor de cero a un evento imposible o cuando se asigna un valor numérico entre cero y uno a un evento posible. El sistema de representación verbal, también se puede relacionar con el sistema de representación simbólico cuando representamos expresiones como la probabilidad de que ocurra un evento A con la expresión $P(A)$. Por ejemplo, al lanzar un dado de seis caras balanceado, es seguro que se obtenga 1, 2, 3, 4, 5 o 6, es imposible que se obtenga un 7, y un posible evento sería “obtener 6”, representado por $P(6) = \frac{1}{6}$.

Sistema de representación numérico
En este sistema de representación, identificamos los valores numéricos asociados con los diferentes conceptos relacionados con el cálculo de la probabilidad simple. Se usan los números naturales al contar la cantidad de sucesos que se encuentran en el espacio muestral y/o los eventos favorables, ya sea por simple observación o a partir de diferentes técnicas de conteo. Esto nos permite relacionar este sistema de representación con el sistema de representación pictórico.

Recordemos que la probabilidad simple de un evento se define como una razón que compara los resultados favorables con los resultados totales. Entonces, podemos expresar la probabilidad de un evento simple, primero, en forma de fracción al hallar la razón; segundo, en forma decimal, al calcular el cociente de la fracción (un número entre 0 y 1); por último, en forma porcentual, al expresar el decimal obtenido en forma de porcentaje.

Sistema de representación simbólico
Evidenciamos el sistema de representación simbólico en el uso de signos y expresiones de elementos propios de la probabilidad simple. Por ejemplo, (a) el espacio muestral se denota con la letra mayúscula “S”; (b) los eventos se denotan con una letra del abecedario en mayúsculas, como “A”, “B”, “C”, etc.; (c) la probabilidad de un evento se denota como P(A); y (d) la expresión matemática de la regla de Laplace que permite calcular la probabilidad de representa como $P(A) = \frac{casos\ favorables\ de\ A}{total\ de\ casos\ posibles}$.

Sistema de representación pictórico
Podemos evidenciar el sistema de representación pictórico en el uso del diagrama de árbol. En probabilidad, el diagrama de árbol es una representación usada para identificar y contar los elementos que forman el espacio muestral y el total de casos favorables.

Sistema de representación tabular
Identificamos el sistema de representación tabular, al construir, observar y contar todos los posibles eventos que conforman el espacio muestral de un experimento aleatorio por medio de su organización en tablas.

1.3. Fenomenología
El objetivo de la fenomenología es analizar aquellos fenómenos observables que le dan explicación o caracterizan un tema. Estos fenómenos son los que le dan sentido al tema y le permiten al estudiante identificar cuándo aplicar el conocimiento que construye junto al profesor.

En la cotidianidad, la presencia de fenómenos asociados con el azar es constante y se asocia a la observación de múltiples sucesos del entorno, por ejemplo, cuando realizamos o participamos en actividades o juegos como cartas, dados y/o rifas. Adicionalmente, cuando hacemos predicciones del clima para la agricultura, la pesca y las crecientes de los ríos.

Desde el ámbito educativo, la enseñanza de la probabilidad brinda al estudiante el razonamiento probabilístico necesario para enfrentarse a situaciones de incertidumbre y azar en la vida cotidiana. Además, desarrollar el tema de probabilidad en la educación básica y media permite desarrollar el pensamiento intuitivo en las matemáticas escolares.

Algunos fenómenos observables en los que el concepto de probabilidad simple toma sentido y le permiten al estudiante aplicar el conocimiento relacionado con ese concepto son el cambio climático, los juegos de azar (lotería, dados, apuestas), las elecciones, en la salud y la magia. Enmarcamos estos fenómenos en contextos cercanos a los estudiantes, tales como social, personal, profesional y científico (PISA, 2012). Además, en cada uno de estos fenómenos, podemos identificar situaciones específicas que permiten responder preguntas como ¿es seguro que?, ¿es probable que? o ¿no es probable que? Por ejemplo, en los juegos de azar, no es probable ganar sin hacer una apuesta, es posible obtener un numero entre el 1 y el 6 al lanzar un dado o es seguro obtener cara o sello al lanzar una moneda. Luego de identificar varias situaciones asociadas a la probabilidad simple en cada uno de los fenómenos, notamos que estos fenómenos se pueden agrupar en tres grandes grupos, dado que comparten características estructurales. A estos tres grandes grupos los llamaremos contextos fenomenológicos. Dichos contextos fenomenológicos son evento seguro, evento probable y evento imposible. A continuación, describimos estos contextos fenomenológicos.

Evento imposible

Los eventos imposibles se relacionan con la teoría de conjuntos desde la identificación de dos conjuntos: el evento A y el espacio muestral S. El conjunto A será un conjunto vacío ya que no contiene ningún elemento del conjunto del espacio muestral ($A \cap S = \emptyset$). Por la intersección vacía de los dos conjuntos, la probabilidad de ocurrencia es cero, $P(A) = 0$. Por ejemplo, la probabilidad de ganarse la lotería sin comprarla es cero, al no tener eventos favorables dentro del espacio muestral del experimento. Adicionalmente, se relaciona con el axioma de Kolmogorov, $P(\emptyset) = 0$, en el que el conjunto vacío representa en probabilidad el suceso imposible.

Evento posible

Los eventos posibles se asocian con los eventos que son subconjuntos del espacio muestral y su probabilidad de ocurrencia es un número entre cero y uno ($0 < P(A) < 1$). Además, el evento posible se relaciona con el primer axioma de Kolmogorov, $P(A) \geq 0$. Pero, esta relación se da únicamente con valores mayores (no iguales) a cero; por ejemplo, al calcular la probabilidad de obtener alguno de los seis números al lanzar un dado balanceado. Estos eventos son probables, ya que cada uno de ellos es un subconjunto del espacio muestral $S = \{1,2,3,4,5,6\}$. Como ejemplo, calculamos la probabilidad de obtener 5 que corresponde al evento $A = \{5\}$. Aplicamos entonces la regla de Laplace:

$$P(5) = \frac{1}{6}$$

$$P(5) = 0{,}16$$

Para este caso específico del lanzamiento del dado balanceado, la probabilidad de ocurrencia de cada uno los eventos es un número inferior a 1.

En este contexto fenomenológico, evidenciamos que se encuentran la mayor parte de los eventos que identificamos. Por esta razón, creamos una escala de probabilidad cualitativa que, en el contexto fenomenológico "probable", nos lleva a clasificar los eventos así: poco probable, equiprobable, y muy probable. Relacionamos esta escala con los axiomas de Kolmogorov y la regla de Laplace así: (a) poco probable, $0 < P(A) < 0{,}5$; (b) equiprobable, $P(A) = 0{,}5$; y (c) muy probable, $0{,}5 < P(A) < 1$.

Evento seguro

Para el caso de la probabilidad simple, cuando el conjunto S (espacio muestral) y el conjunto A (evento A) son iguales, decimos que los eventos tienen probabilidad de ocurrencia segura. Por ejemplo, al calcular la probabilidad de que en verano haga sol, el evento favorable y el espacio muestral son iguales. Los eventos seguros se relacionan con el segundo axioma de Kolmogorov que describe los eventos elementales o seguros. La probabilidad de un evento seguro **Ω**, es igual a 1, denotado simbólicamente como $P(\Omega) = 1$. A continuación, en la figura 4, mostramos las relaciones entre los axiomas de Kolmogorov, la teoría de conjuntos y los contextos fenomenológicos por medio de un mapa conceptual.

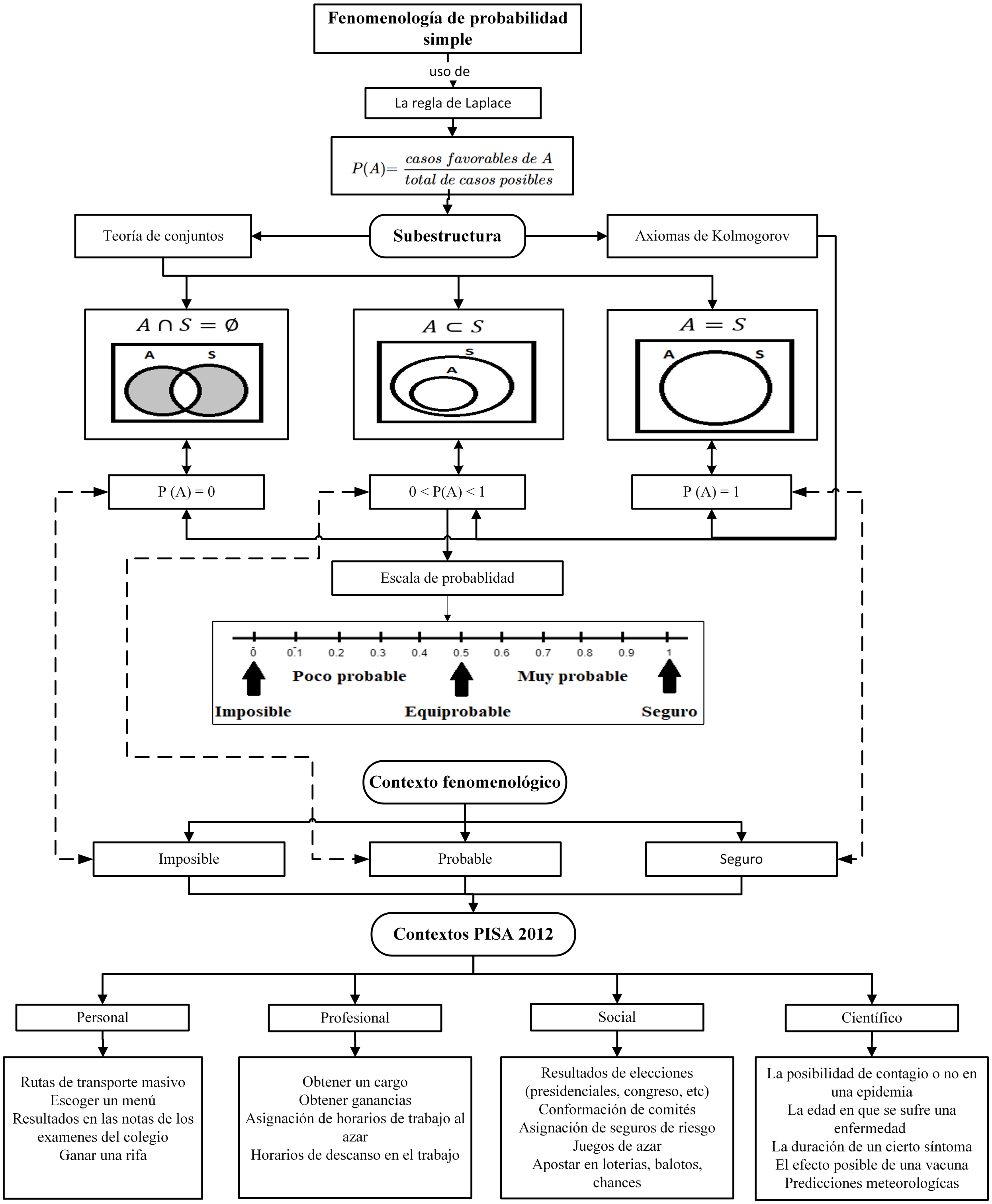


Figura 4. Fenomenología

2. DIMENSIÓN COGNITIVA

En este apartado, describimos lo que esperamos que los estudiantes aprendan una vez resuelvan las actividades propuestas en nuestra unidad didáctica. Establecimos expectativas de aprendizaje que dan sentido al tema de probabilidad simple en tres niveles: nivel superior, medio e inferior. Posteriormente, presentamos las expectativas de tipo afectivo, las limitaciones de aprendizaje al prever las dificultades y errores en que podrían incurrir los estudiantes al desarrollar las actividades. Y finalmente, presentamos la caracterización de los objetivos de aprendizaje.

2.1. Expectativas de aprendizaje

A continuación, describimos las expectativas de aprendizaje de nivel superior, nivel medio y nivel inferior.

Expectativas de aprendizaje de nivel superior

En el nivel superior, encontramos las expectativas de largo alcance. Estas expectativas están relacionadas con los procesos y las capacidades matemáticas fundamentales propuestas en el marco conceptual del proyecto PISA 2012. Específicamente, con la propuesta de nuestra unidad didáctica, pretendemos que los estudiantes desarrollen las capacidades matemáticas fundamentales de comunicación, matematización, representación, razonamiento y argumentación, diseño de estrategias para resolver problemas y utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico. Adicionalmente, buscamos que el estudiante aplique los procesos matemáticos de (a) formular, que se refiere a la capacidad de transformar una situación real a una que pueda ser tratada de forma matemática; (b) emplear, en el que se usan conceptos, procedimientos, datos y herramientas para obtener resultados o resolver problemas; y (c) interpretar, asociado a la interpretación, aplicación y valoración de resultados matemáticos con relación al contexto (PISA, 2012, p.9), para solucionar situaciones problema relacionadas con la probabilidad simple.

Expectativas de aprendizaje de nivel medio

En el nivel medio, encontramos los dos objetivos de aprendizaje que planteamos para nuestra unidad didáctica. A partir de la estructura conceptual, los sistemas de representación, la fenomenología y las expectativas de nivel superior, identificamos una serie de procedimientos que esperamos el estudiante realice al desarrollar las tareas propuestas en la unidad didáctica. Por ejemplo, primero, esperamos que el estudiante deduzca el espacio muestral a partir de diferentes métodos (diagrama de árbol, tablas de espacio muestral, listados, de la figura o el enunciado); segundo, que analice que eventos se van a estudiar y pueda identificar los resultados favorables a partir del espacio muestral; tercero, que con la información que tiene hasta este momento, use la regla de Laplace para calcular la probabilidad de ocurrencia de un evento especifico y pueda expresar dicha probabilidad de forma fraccionaria, decimal y porcentual; y, por último, que pueda reconocer en la situación problema, eventos seguros, eventos posibles y eventos imposibles.

Con base en esta secuencia de procedimientos esperados, planteamos para nuestra unidad didáctica los siguientes objetivos de aprendizaje.

Objetivo 1. Calcular la probabilidad de ocurrencia de eventos simples usando la regla de Laplace y expresarla en forma fraccionaria, decimal o porcentual.

Objetivo 2. Usar la probabilidad simple para caracterizar la ocurrencia segura, probable e imposible de un evento en una situación problema.

Los dos objetivos se relacionan con los procesos matemáticos propuestos por PISA 2012. El primer objetivo se relaciona con los procesos de formular y emplear. Y el segundo objetivo se relaciona con los procesos de emplear e interpretar.

Expectativas de aprendizaje de nivel inferior

En las expectativas de aprendizaje de nivel inferior, describimos los conocimientos previos que nos permiten delimitar lo que consideramos rutinario para los estudiantes (González y Gómez, 2015, p. 21). Con el objetivo de determinar el punto de partida de lo que podemos considerar rutinario para el estudiante, organizamos los conocimientos previos en tres grupos. El primer grupo está relacionado con identificar y representar el espacio muestral de un experimento a partir de diferentes métodos (tablas de espacio muestral, listas de datos, diagramas de árbol). Identifica el espacio muestral en un experimento aleatorio a partir de listas de datos y representa el espacio muestral de un experimento aleatorio en tablas de espacio muestral es un ejemplo de este grupo. El segundo grupo está relacionado con la representación fraccionaria, decimal y porcentual de la probabilidad, la relación de orden y las diferentes conversiones entre números racionales. Establece relaciones de orden entre dos o más números fraccionarios con diferente denominador y expresa una fracción como un número decimal es un ejemplo de este grupo. Y, el tercer grupo está asociado con estadística, principalmente con las tablas de frecuencia y la interpretación de gráficos estadísticos. El listado completo de conocimientos previos se encuentra en el anexo 2.

2.2. Expectativas afectivas

Planteamos cuatro expectativas de tipo afectivo de acuerdo con dos enfoques: el enfoque centrado en factores personales intrínsecos y extrínsecos, ya que este se centra en analizar el interés del estudiante por aprender, y el enfoque que entrelaza motivación y aprendizaje, que pretende analizar las actitudes y los hábitos favorables al aprendizaje de los estudiantes (González y Gómez, 2018). En la tabla 1, presentamos las expectativas de tipo afectivo que pretendemos activar en los estudiantes.

Tabla 1

Listado de expectativas afectivas de probabilidad simple

EA	Descripción
1	Desarrollar interés por argumentar las soluciones de situaciones problema asociadas a la probabilidad simple.
2	Desarrollar curiosidad por interpretar y relacionar las diferentes expresiones numéricas (fracción, decimal, porcentaje), ya sea para expresar la solución o para interpretar datos dentro de situaciones problema de probabilidad simple.

Tabla 1
Listado de expectativas afectivas de probabilidad simple

EA	Descripción
3	Desarrollar una predisposición favorable para que el estudiante explique la solución de situaciones problema de aleatoriedad cuando la probabilidad de un evento es segura, probable e imposible y con esto, pueda tomar decisiones.
4	Valorar la utilidad de las diferentes representaciones numéricas (fracción, decimal, porcentaje) de la probabilidad simple para la toma de decisiones en situaciones reales.

Nota. EA: expectativa afectiva.

Las cuatro expectativas afectivas se relacionan con los enfoques mencionados así: la EA1 y la EA4 con el enfoque centrado en factores personales y la EA2 y la EA3 con el enfoque que entrelaza motivación y aprendizaje.

2.3. Limitaciones de aprendizaje

Las limitaciones de aprendizaje están compuestas por los errores y dificultades en los que pueden incurrir los estudiantes durante el desarrollo de diferentes tareas propuestas en la unidad didáctica. Conocer de manera general o especifica las dificultades y los errores asociados permite direccionar el proceso de enseñanza-aprendizaje del tema de probabilidad simple.

Para establecer las dificultades relacionadas con probabilidad simple, nos basamos en dos de las cinco categorías de dificultades propuestas por Socas (1997, p. 126). La primera se refiere a las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos. Podemos evidenciar algunas de estas dificultades en las formas de representar conceptos claves de la probabilidad simple, por ejemplo, al representar espacios muestrales muy grandes como los posibles resultados del baloto. La segunda tiene que ver con las dificultades asociadas a los procesos propios del pensamiento matemático. Por ejemplo, podemos encontrar dificultades para la comprensión del azar cuando el estudiante nunca ha estado familiarizado con este tipo de situaciones en su entorno, o cuando asocia el azar con concepciones previas o predicción basada en informaciones no válidas (supersticiones).

Organizamos el listado de dificultades en seis grupos: dificultad para comprender el enunciado de una situación problema en el que se involucre el azar y la aleatoriedad (D1); dificultad para establecer los espacios muestrales correspondientes a experimentos aleatorios (D2); dificultad para usar de forma adecuada la regla de Laplace (D3); dificultad para establecer la cantidad de resultados favorables en una situación problema o experimento (D4); dificultad para operar los valores numéricos obtenidos en una situación problema de probabilidad simple (D5); y dificultad para relacionar las escalas de probabilidad cualitativa y cuantitativa con sus errores asociados (D6). Para cada una de las dificultades, identificamos los errores asociados. En la tabla 2, mostramos como ejemplo los errores asociados con la dificultad D3.

Tabla 2
Ejemplos del listado de dificultades y errores

E	Descripción
	D3. Dificultad para usar de forma correcta la regla de Laplace
29	Utilizar los casos desfavorables respecto a los casos posibles para calcular la probabilidad de un evento.
30	Utilizar los casos favorables respecto a los casos desfavorables para calcular la probabilidad de un evento.
31	Asociar la regla de Laplace cómo el total de resultados posibles sobre el total de resultados favorables

Nota. E: error

El listado completo de dificultades y errores se encuentra en el anexo 3.

2.4. Caracterización de los objetivos de aprendizaje

Para caracterizar cada objetivo de aprendizaje y poder visualizar cómo cada tarea contribuye al logro del objetivo, primero, identificamos una serie de procedimientos que el estudiante podía realizar al desarrollar las tareas. A partir de esta información, logramos asociar algunos procedimientos que tenían características específicas y los llamamos criterios de logro (CdL). Con estos criterios definidos, procedimos a construir las diferentes estrategias de solución que tiene cada tarea. Finalmente, en cada objetivo presentamos todas las estrategias de solución que encontramos en un grafo al que denominamos grafo de criterios de logro. A continuación, presentamos una breve descripción del grafo de criterios de logro de cada objetivo.

Grafo de criterios de logro del primer objetivo

En la figura 5, de izquierda a derecha, mostramos, primero, el CdL1.1, criterio en el que el estudiante debe reconocer que la situación planteada se soluciona con probabilidad simple y establece cuáles son los eventos que se van a analizar. Enseguida, aparece un primer grupo formado por los criterios de logro 1.8, 1.12, 1.9, 1.10, 1.11 y 1.2, asociados a decidir y hallar el espacio muestral y el total de resultados favorables a partir de diferentes métodos (enunciado, tablas de espacios muestrales, listados o diagramas de árbol). A continuación, presentamos un segundo grupo de procedimientos relacionados con los criterios 1.3, 1.4, 1.5 y 1.6, que están asociados directamente con las expresiones numéricas de la probabilidad simple (fraccionaria, decimal y porcentual). En este último grupo de criterios, los estudiantes deben utilizar la regla de Laplace para expresar la probabilidad como fracción. Luego, deciden si la expresan como decimal o como porcentaje. Finalmente, encontramos el CdL1.7, en el que el estudiante justifica y argumenta la solución de la situación problema. El listado completo de los criterios de logro del primer objetivo se encuentra en el anexo 4.

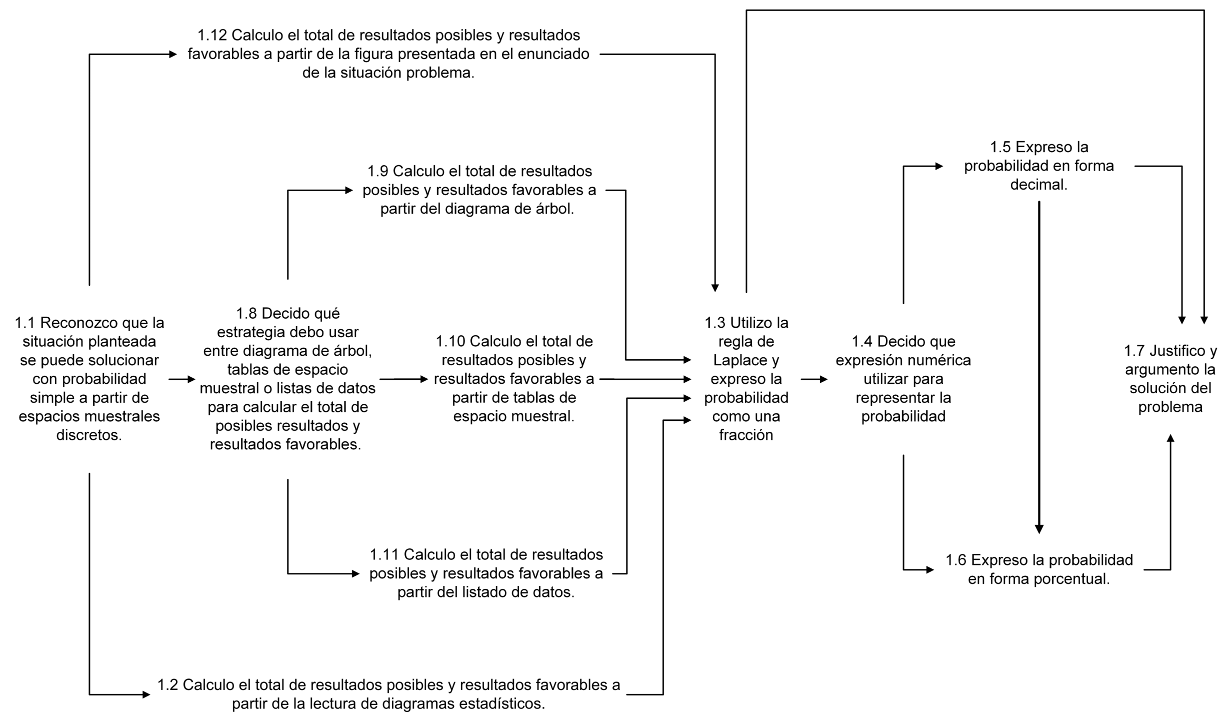


Figura 5. Grafo de criterios de logro del objetivo 1

Grafo de criterios de logro del segundo objetivo

En la figura 6, presentamos el grafo de criterios de logro del segundo objetivo. De izquierda a derecha, el primer criterio CdL2.1 tiene que ver con la lectura e interpretación de la tarea. Enseguida, el grafo indica las posibles estrategias que el estudiante puede utilizar para deducir el espacio muestral y el total de resultados favorables por medio de diagrama de árbol, tablas, listados, enunciado o figuras (criterios 2.7, 2.8, 2.9, 2.10, 2.16 y 2.11). Posteriormente, el estudiante decide si puede identificar cuándo un evento es seguro, muy probable, poco probable o imposible a partir del total de resultados favorables (criterios 2.17 y 2.18) o debe hallar la probabilidad primero como fracción a partir de la regla de Laplace (CdL2.2), como decimal (CdL2.4) o como porcentaje (CdL2.5). A continuación, el estudiante relaciona la probabilidad numérica con la escala de probabilidad cualitativa (CdL2.12, 2.13, 2.14). Finalmente, compara las probabilidades (CdL2.15) y da solución a la tarea de aprendizaje (CdL2.6). El listado completo de los criterios de logro del segundo objetivo se encuentra en el anexo 5.

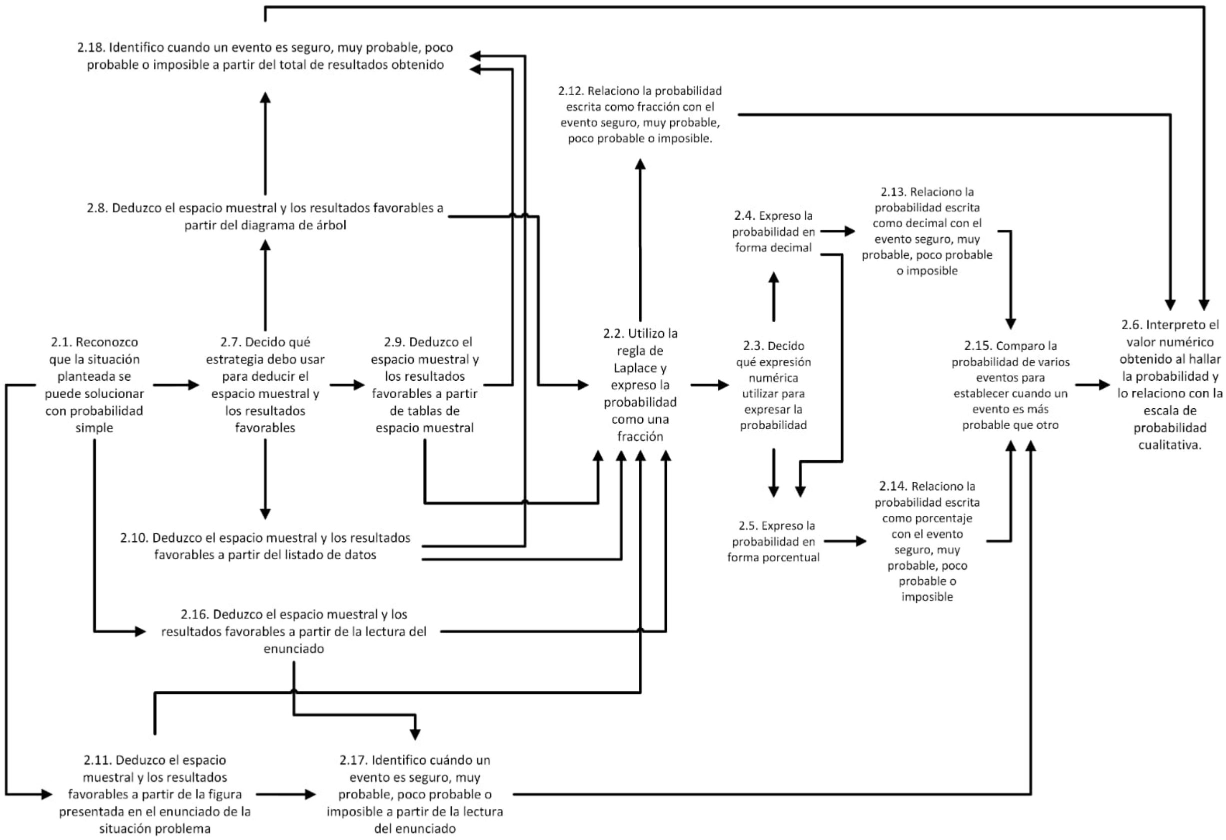


Figura 6. Grafo de criterios de logro del objetivo 2

3. ESQUEMA GENERAL DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

La unidad didáctica está diseñada para 13 sesiones de clase. En la primera sesión, se hará la presentación de la unidad didáctica. Las sesiones dos, tres y cuatro estarán enfocadas a la tarea diagnóstica y la puesta en común de los resultados obtenidos en esa tarea. En la sesión 5, se implementarán las acciones de mejora. De la sesión 6 a la 11, se implementarán las seis tareas propuestas para la unidad didáctica. En la sesión 12, se realizará el examen final. Y finalmente, en la sesión 13, se realizará la puesta en común del examen final y se darán acciones de mejora para los estudiantes que no alcanzaron los objetivos. En la tabla 3, presentamos el cronograma final de implementación de la unidad didáctica.

Tabla 3

Puesta a punto de la unidad didáctica

Sesión	Tarea	Descripción	Tiempo (Minutos)
1	Presentación de la unidad didáctica	Desarrollar la puesta en común del desarrollo de la unidad didáctica de probabilidad simple.	30
2	Prueba diagnóstica	Implementación de la tarea diagnóstica parte 1 y parte 2.	60
3	Prueba diagnóstica	Implementación de la tarea diagnóstica parte 3 y parte 4.	60
4	Puesta en común resultados prueba diagnóstica	Desarrollar la puesta en común de los resultados de la prueba diagnóstica con los estudiantes y abordaje de los errores encontrados.	60
5	Actividades de mejora	Usar la página de KhanAcademy en la casa para que los estudiantes desarrollen y superen los errores detectados.	30
6	1.1. Monedas	Implementación de la primera tarea del primer objetivo. Pretendemos contribuir a que los estudiantes reconozcan la regla de Laplace, con un primer acercamiento al tema de probabilidad, pero, a partir de la razón entre el número de veces que sucede un evento (caer cara, caer sello) y el número total de resultados (repeticiones).	62
7	1.2 Cartas	Implementación de la segunda tarea del primer objetivo. Pretendemos que los estudiantes tengan la necesidad de usar la regla de Laplace para hallar la probabilidad de eventos simples y expresen las probabilidades, ya sea de forma fraccionaria, decimal o porcentual.	62
8	1.3 Deportes	Implementación de la tercera tarea del primer objetivo. Pretendemos contribuir a que los estudiantes utilicen la regla de Laplace en el cálculo de probabilidad en situaciones de la cotidianidad. Además, esperamos que representen las probabilidades en forma fraccionaria, decimal y porcentual, para que, finalmente, comparen la probabilidad de ocurrencia para saber cuándo un evento es más probable que otro.	62

Tabla 3
Puesta a punto de la unidad didáctica

Sesión	Tarea	Descripción	Tiempo (Minutos)
9	2.1 Dados	Implementación de la primera tarea del segundo objetivo. Buscamos que el estudiante establezca la relación entre las escalas de probabilidad numérica (fraccionaria, decimal y porcentual) con la escala de probabilidad cualitativa; reconozca en un juego de azar eventos imposibles, poco probables, muy probables y seguros; y establezca que la probabilidad de un evento es un número comprendido entre 0 y 1.	60
10	2.2 Bolas	Implementación de la segunda tarea del segundo objetivo. Buscamos que el estudiante establezca la relación entre las escalas de probabilidad numéricas (fraccionaria, decimal y porcentual) con la escala de probabilidad cualitativa, al identificar los aspectos matemáticos de azar presentados en una situación problema y, posteriormente, representar matemáticamente la situación para establecer cuándo un evento es imposible, poco probable, muy probable y seguro.	50
11	2.3 Ruleta	Implementación de la tercera tarea del segundo objetivo. Buscamos que, mediante el análisis y la interpretación de una situación problema enmarcada en un contexto real de tipo personal, el estudiante analice y cree situaciones en las que la probabilidad de los eventos sea imposible, poco probable, muy probable y segura de ocurrir.	72
12	Examen final	Identificar el logro de los objetivos 1 y 2.	40
13	Sesión final	Desarrollar la puesta en común de los resultados del examen final.	45

2. TAREA DIAGNÓSTICA

En este apartado, presentamos la tarea diagnóstica que nos permite averiguar si los estudiantes tienen los conocimientos previos necesarios para comenzar con el desarrollo de la unidad didáctica de probabilidad simple y, en caso de que no sea así, proporcionarles las ayudas adecuadas para superar dichas dificultades.

Para el diseño de la tarea diagnóstica, identificamos en primer lugar los conocimientos previos que consideramos deben tener los estudiantes para desarrollar de manera satisfactoria las diferentes tareas de la unidad didáctica. Concretamos así, que, para estudiar el tema de probabilidad simple, requerimos que el estudiante tenga conocimientos en temas relacionados con operaciones con números racionales, orden entre números racionales, experimentos aleatorios y espacio muestral. El listado detallado de los conocimientos previos que se asocian con los temas mencionados se muestra en el anexo 2. Enseguida, diseñamos una tarea diagnóstica formada por cuatro apartados. Cada uno de estos apartados se asocia con algunos de los conocimientos previos que identificamos. A continuación, presentamos la formulación de la tarea diagnóstica de nuestra unidad didáctica.

Parte 1: Números racionales (relación de orden y conversión entre números racionales)

1. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas (v) o falsas (f)

   a. La fracción generatriz de $3,\overline{4}$ es $\frac{3}{4}$ ( )

   b. El decimal equivalente a la fracción $\frac{5}{9}$ es $0,\overline{5}$ ( )

   c. $\frac{183}{25}$ es la fracción generatriz de $7,32$ ( )

   d. La fracción generatriz de 1,5 es $\frac{3}{2}$ ( )

   e. El porcentaje asociado a la fracción $\frac{3}{4}$ es 75% ( )

   f. La fracción generatriz de $0,1\overline{6}$ es $\frac{1}{5}$ ( )

   g. 1,9 es el decimal equivalente a 19% ( )

h. 5% es el porcentaje equivalente al decimal 0,5 ( )

i. El porcentaje 25% es equivalente a la fracción $\frac{5}{2}$ ( )

2. Ordene de menor a mayor las siguientes listas de números racionales

a. $\frac{1}{5};\ -\frac{3}{5};\frac{4}{5};\ -3;\ 4;\ \frac{7}{5};\ -\frac{9}{5}$

b. $\frac{3}{4};\ -\frac{5}{6};\ -\frac{1}{12};\frac{2}{3};\ -5\ ;\ -2;\frac{1}{2}$

c. $1{,}4\ ;\ -0{,}3\overline{2};-0,\overline{32};\ -0{,}32\overline{3};\ 0{,}32;\ 0,\overline{3}$

d. $-3{,}5;-2;\ \ -\frac{8}{5};\ 2,\overline{7};\ \frac{5}{3};\ 0{,}2\overline{5};\frac{25}{6};\ 5$

Parte 2: Sucesos determinísticos y aleatorios

3. Determine cuáles de los siguientes experimentos son determinísticos y cuáles son aleatorios. Escriba su respuesta sobre la línea.

a. Obtener un número par al lanzar dos dados_______________________

b. Mezclar agua y azúcar _______________________

c. Crear el color verde, mezclando amarillo con azul_______________________

d. Sumar 2 con 3 y obtener 5 _______________________

e. Apostar en una carrera de caballos _______________________

f. Escoger un representante del curso de los 30 estudiantes de grado noveno _______________________

Parte 3: Espacio muestral

4. Escriba el espacio muestral de cada uno de los siguientes experimentos aleatorios.

a. David y Juliana juegan a lanzar un dado.

b. Yudy y Manuel lanzan en un juego dos monedas diferentes.

c. Juan compra una boleta para la rifa de una iPod. Cada boleta tiene un número de dos dígitos, pero los dos dígitos no pueden ser iguales. El experimento consiste en escoger una boleta.

5. Una familia quiere cenar Pizza y para ello van a “Pícolos Pizza”. Allí se ofrece una variedad de pizzas personalizadas y los clientes pueden elegir entre dos opciones para la base, el queso y la salsa, y añadir luego un aderezo opcional[1].

[1] Tomada de https://www.nagwa.com/es/worksheets/438152493759/

Base	Queso	Salsa	Aderezo
Delgada o gruesa	Chédar o mozzarella	Tomate o barbacoa	Chorizo, piña o champiñones

a. Represente la situación anterior usando un diagrama de árbol.

b. Determine todos los posibles resultados sobre cómo se puede armar una pizza con la variedad de bases, quesos, salsas y aderezos que ofrece la pizzería.

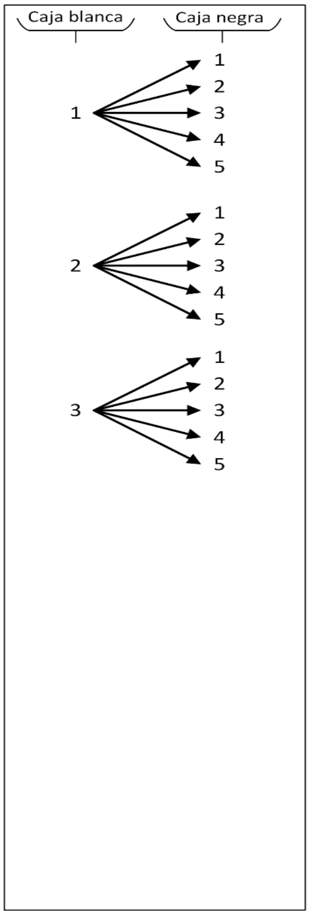
6. Considere el siguiente experimento: se elige un número al azar entre el 1, 2, 3, 4, o 5 y se elige un color entre el rojo, el verde y el azul. Realice una lista con los elementos del espacio muestral.

7. En una caja blanca hay 3 fichas marcadas con los números 1, 2 y 3 respectivamente. En una caja negra, hay 5 fichas marcadas con los números 1, 2, 3, 4 y 5 respectivamente.

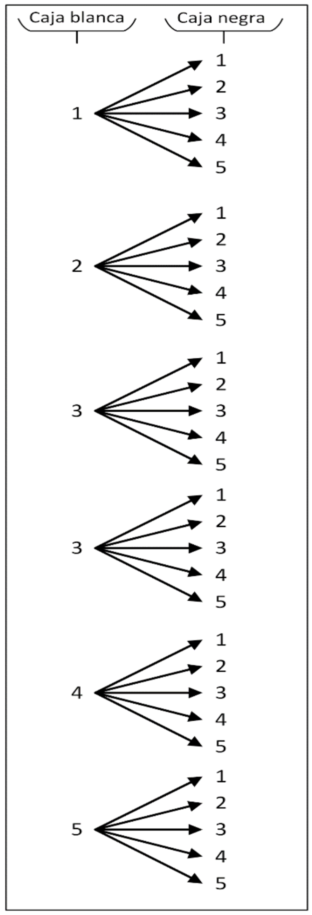
   ¿Cuál de los siguientes diagramas de árbol representa los posibles resultados de sacar, al azar, primero una ficha de la caja blanca y después una ficha de la caja negra?[2]

[2] Tomado de https://acortar.link/8i2UwJ, página 9

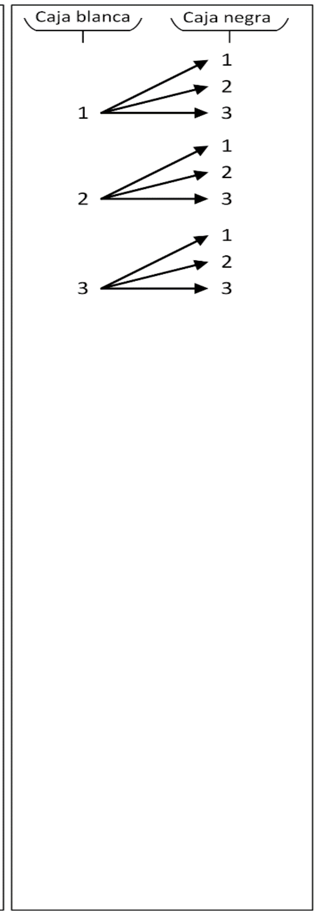
A.



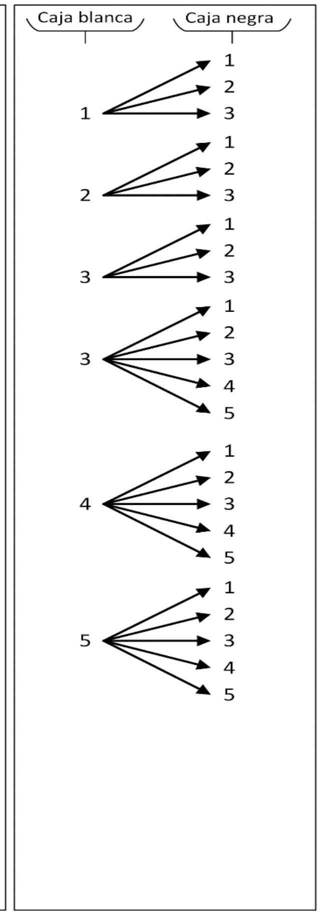
B.



C.



D.



8. En la tabla se presentan los resultados que pueden obtenerse cuando se lanzan una, dos o tres monedas corrientes. Se muestra, además, en cada caso, la probabilidad de obtener exactamente una cara.

C: Cara
S: Sello

Número de monedas	Posibles resultados
Una	C S
Dos	CC SC CS SS
Tres	CCC CCS CSC SSS SCC SSC SCS CSS

De la tabla, se puede concluir que, cuando se lanzan 4 monedas, el total de posibles resultados es

A.

Cuatro	CCCC CCCS CCSC CCSS CSCC CSCS CSSC CSSS SCCC SCCS SCSC SCSS SSCC SSCS SSSC SSSS

B.

Cuatro	CCCC CCCS CCSC CSCC CSCS CSSC SCCS SCSC SCSS SSCS SSSC SSSS

C.

Cuatro	CCCC CCCS CCSC CCSS CSCC CSCS CSCC CSSS SCCC SCSS SCSC SCSS SSCC SSCS SSSC SSSS

D

Cuatro	CCCC CCCS CCSC CSCC CSCS CSSC SCCS SCSC SCSS SSCS SSSC SSSS

Parte 4: Tablas de frecuencia

9. Se le pidió a un grupo de personas que indicaran su color favorito y se obtuvieron los siguientes resultados:

   Negro, azul, amarillo, rojo, azul, azul, rojo, negro, amarillo, rojo, rojo, amarillo, amarillo, azul, rojo, negro, azul, rojo, negro, amarillo.

   a. Elabore una tabla de frecuencias, y agregue la frecuencia relativa y la frecuencia porcentual.

10. El comité social de una empresa va a organizar una fiesta. Para ello, pregunta a los 80 empleados si tienen hijos o no. Los resultados son:[3]

    De los 30 hombres empleados, 20 tienen hijos.

    De las 50 mujeres empleadas, 36 tienen hijos.

    Las abreviaturas que encontrará en los gráficos estadísticos son

    HCh: Hombre con hijos

    HSh: Hombre sin hijos

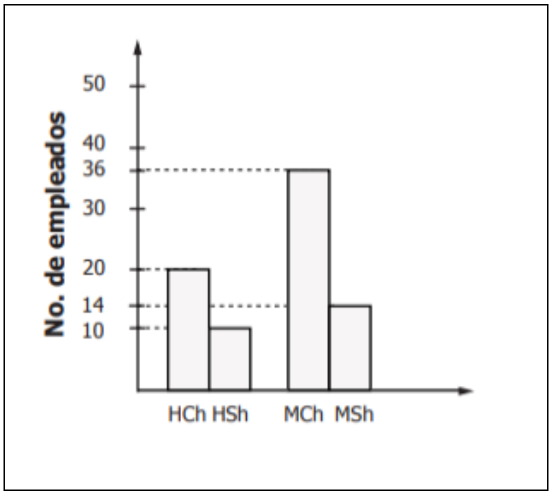
[3] Tomado de https://n9.cl/9kmv1. Página 5.

MCh: Mujer con hijos

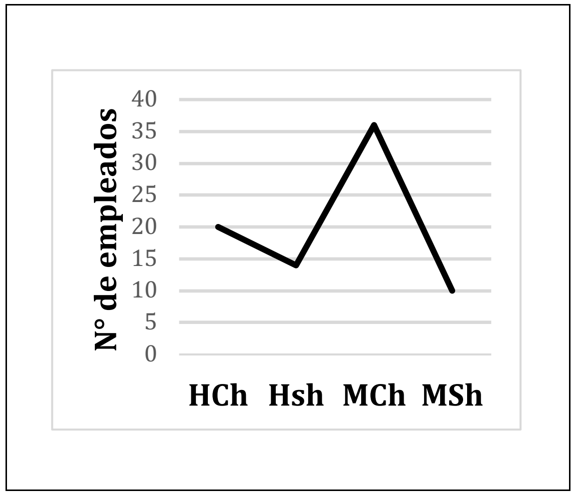
MSh: Mujer sin hijos

¿Cuál es la gráfica que representa correctamente la información de la encuesta?

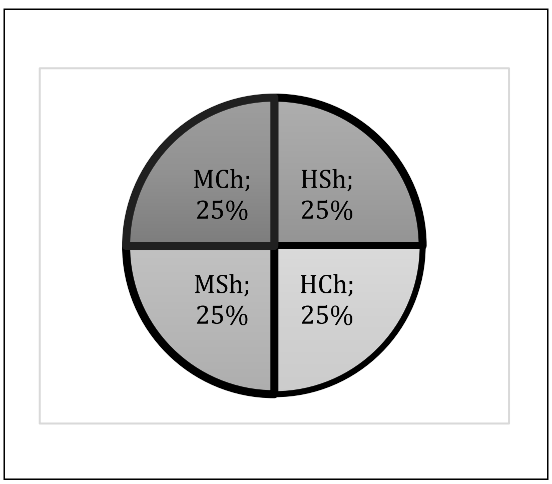
A.



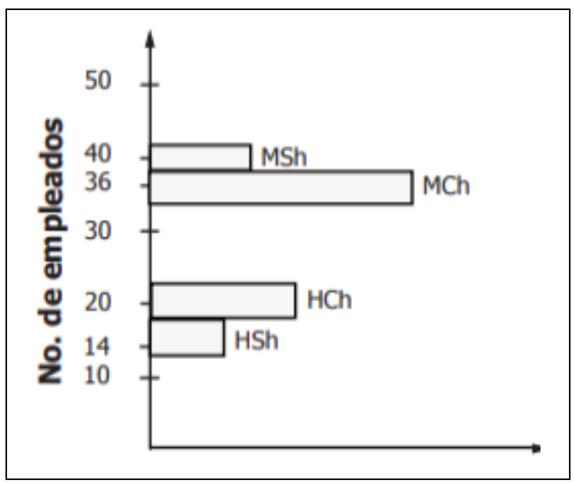
B.



C.



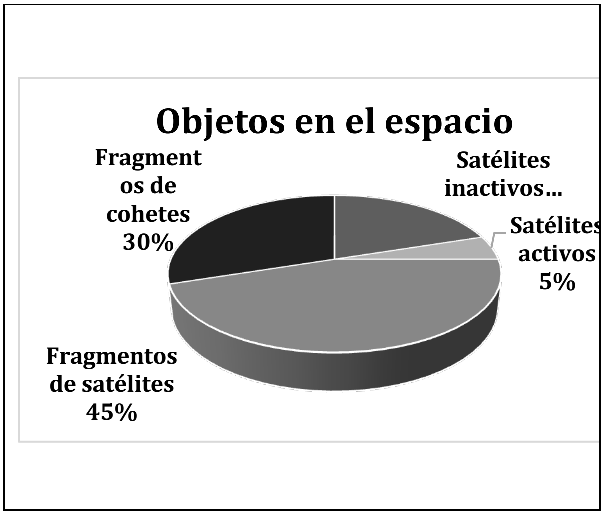
D.



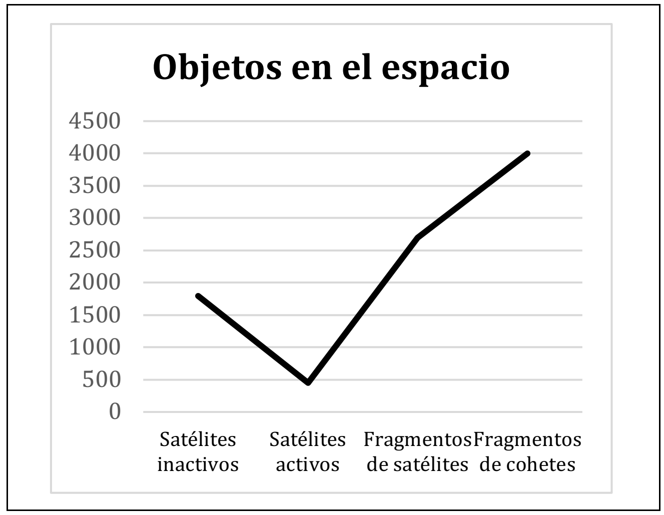
11. En la órbita espacial de la Tierra, hay aproximadamente 9000 objetos construidos por el ser humano. De estos objetos, 1800 son satélites inactivos, 450 son satélites activos, 4050 son fragmentos de satélites y 2700 son fragmentos de cohetes. ¿Cuál de los siguientes diagramas representa de manera más precisa la situación?[4]

[4] Tomado de https://acortar.link/8i2UwJ, Página 12

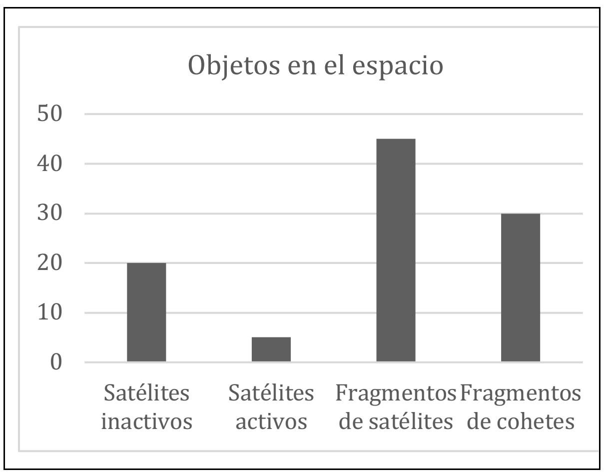
A.



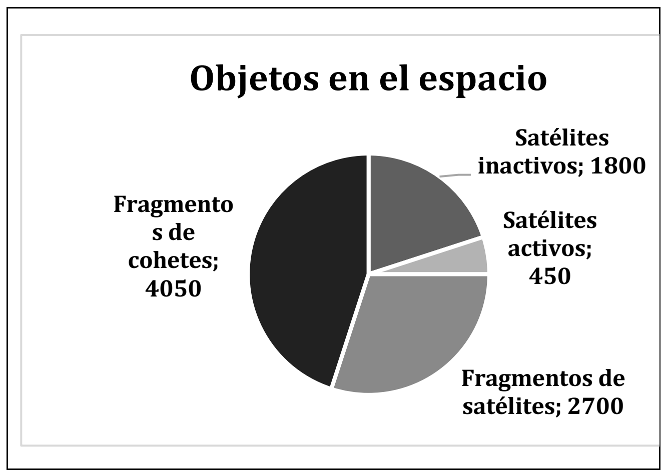
B.



C.



D.



12. Marque con una X cuál o cuáles de los siguientes juegos de mesa conoce y ha jugado (online o en físico).

    Parqués ____

    Ruleta ____

    Baraja española ____

    Dominó ____

    Juego de naipes ____

En la tabla 4, mostramos la relación entre los conocimientos previos y las preguntas formuladas en la tarea diagnóstica.

Tabla 4

Relación entre los conocimientos previos y las preguntas de la tarea diagnóstica.

CP	Descripción	Pregunta
1	Identificar la presencia del azar en situaciones problema de tipo aleatorio.	3
2	Diferenciar entre situaciones deterministas y aleatorias.	3
3	Identificar el espacio muestral en un experimento aleatorio, al usar tablas de espacios muestrales.	8
4	Identificar el espacio muestral en un experimento aleatorio, al usar diagramas de árbol.	7
5	Identificar el espacio muestral en un experimento aleatorio, al usar listas de datos.	8
6	Representar el espacio muestral de un experimento aleatorio en tablas de espacios muestrales.	4 y 8
7	Representar el espacio muestral de un experimento aleatorio en diagramas de árbol.	5
8	Representar el espacio muestral de un experimento aleatorio en listas de datos.	6
9	Establecer relaciones de orden entre dos o más números enteros.	2d
10	Establecer relaciones de orden entre dos o más números fraccionarios con igual denominador.	2a
11	Establecer relaciones de orden entre dos o más números fraccionarios con diferente denominador.	2(b, d)
12	Establecer relaciones de orden entre dos o más números decimales.	2(c, d)
13	Expresar una fracción como un número decimal.	1(b, c)
14	Expresar un número decimal como una fracción.	1(a, d, f)
15	Expresar un número decimal como un porcentaje.	1(g)
16	Expresar un porcentaje como un número decimal.	1(h)
17	Expresar una fracción como un porcentaje.	1(e)
18	Expresar un porcentaje como una fracción.	1(i)

Tabla 4

Relación entre los conocimientos previos y las preguntas de la tarea diagnóstica.

CP	Descripción	Pregunta
19	Interpretar información de gráficos estadísticos (diagramas de barras, circular, histogramas, entre otros).	10 y 11
20	Recolectar información y organizarla en tablas de frecuencias.	9
21	Hallar la frecuencia absoluta y relativa en un grupo de datos.	9

Nota. CP= conocimientos previos

Cuando identificamos que un estudiante presenta dificultad con alguno de los conocimientos previos, usamos acciones de mejora. Estas acciones de mejora tienen como objetivo aclarar dudas y asegurarnos de que, antes de iniciar el desarrollo de las tareas de aprendizaje, los estudiantes tengan los conocimientos previos necesarios. En la tabla 5, mostramos un ejemplo de dificultad, la pregunta de la tarea diagnóstica en la que se puede evidenciar esa dificultad, los errores asociados y su respectiva acción de mejora.

Tabla 5

Listado de acciones de mejora, dificultades y errores asociados a los conocimientos previos

Pregunta	Error	Enlace
D2. Dificultad para identificar y representar el espacio muestral en una situación problema		
8	Reconocer en la tabla de espacios muestrales menos resultados posibles.	Espacio muestral (practica) | Khan Academy
7	Obtener del diagrama de árbol más o menos resultados posibles.	Diagrama de árbol como estrategia para identificar el espacio muestral (artículo) | Khan Academy
		Contar los posibles resultados con diagramas de árbol (video) | Khan Academy
		Diagrama de árbol como estrategia para identificar el espacio muestral (practica) | Khan Academy

Nota. D: Dificultad

El listado completo de dificultades, errores asociados y acciones de mejora para la tarea diagnóstica se encuentra en el anexo 6.

3. Diario del estudiante

En el proceso de enseñanza aprendizaje, es importante que los estudiantes sean partícipes de su proceso de evaluación. Por esta razón, es necesario generar espacios en los que los estudiantes puedan evaluar su propio aprendizaje y den a conocer su percepción respecto a cada una de las tareas de aprendizaje.

Para las seis tareas de aprendizaje de los objetivos, elaboramos un instrumento para recoger información de tipo cognitivo y afectivo, que llamamos diario del estudiante. Este diario permite indagar la precepción que tienen los estudiantes en relación con las estrategias de solución que utilizó al resolver la tarea (cognitivo) y con los factores que influyeron en su motivación a lo largo de las sesiones de clase planeadas (afectivo). A continuación, mencionamos las características más importantes de los aspectos mencionados.

1. Aspecto cognitivo

Recoger las percepciones de tipo cognitivo nos permite generar en nuestros estudiantes un proceso de autoevaluación de las estrategias de solución usadas al desarrollar las tareas. Para este proceso de autoevaluación, usamos la estrategia del semáforo. Dicha estrategia consiste en presentar a los estudiantes el grafo de criterios de logro del objetivo y, en él, se resaltan las posibles estrategias de solución que pudo haber activado el estudiante al realizar la tarea. Enseguida, los estudiantes colorean de verde, amarillo o rojo los círculos que se dispusieron en los criterios de logro que se activaron para cada tarea. El color empleado por los estudiantes en cada criterio de logro muestra el grado de comprensión percibida así: con color verde, si el procedimiento lo desarrolló sin ninguna dificultad; con color amarillo, si presentó algunas dificultades, pero pudo avanzar; y, con color rojo, si no pudo emplear ese procedimiento.

2. Aspecto afectivo

Es de gran importancia para el profesor conocer la percepción del aspecto afectivo de los estudiantes en el aprendizaje. Por esta razón, usamos una estrategia denominada matematógrafo. Dicha estrategia brinda a los estudiantes la posibilidad de expresar el grado de acuerdo o desacuerdo con aspectos de tipo motivacional al responder preguntas tales como ¿la tarea me pareció un reto y me sentí motivada al resolverla? y ¿el tema de la tarea me pareció interesante y me generó curiosidad resolverla?

Adicionalmente, este instrumento nos permite indagar por las principales dificultades que los estudiantes tuvieron al abordar la tarea, por medio de preguntas abiertas tales como ¿qué fue lo que más se le dificultó en la tarea? o ¿cuál o cuáles fueron las preguntas de la tarea que le parecieron más difíciles de resolver?, ¿por qué?

3. Diligenciamiento del diario del estudiante

Al finalizar el desarrollo de cada tarea, repartimos los formatos del diario de los estudiantes (ver anexo 8) y por medio de una lectura en voz alta compartimos con ellos los criterios de logro a los que apunta la tarea. Les explicamos cómo se debe diligenciar tanto el matematógrafo como el semáforo de acuerdo con el nivel de comprensión (rojo, amarillo o verde) y nos cercioramos de que todos los estudiantes han llenado el diario. Finalizamos la sesión al recoger los diarios junto con el trabajo realizado en la clase.

4. TAREAS DE APRENDIZAJE DEL PRIMER OBJETIVO

A partir del análisis de contenido y el análisis cognitivo del tema de probabilidad simple, diseñamos tres tareas de aprendizaje que aportan al logro del primer objetivo de la unidad didáctica. A continuación, presentamos la descripción de las tres tareas de aprendizaje con el siguiente esquema. Primero, presentamos los elementos que debe tener claro el profesor para la implementación. Segundo, mencionamos los errores más frecuentes en los que pueden incurrir los estudiantes y el grafo de criterios de logro de la tarea. Tercero, realizamos sugerencias metodológicas y aclaración de las tareas. Y cuarto, sugerimos cómo evaluar el logro de las metas de la tarea por parte de los estudiantes.

En la primera parte del esquema utilizado, incluimos los requisitos de las tareas, los aportes de cada tarea a los objetivos de aprendizaje, la formulación de la tarea, los conceptos y procedimientos implicados en la tarea, los sistemas de representación que se activan, los contextos PISA en los que se sitúa la tarea, los materiales y recursos que se utilizarán, el agrupamiento de los estudiantes y la temporalidad de cada tarea. Estos elementos nos permiten analizar la pertinencia y la coherencia de cada tarea en relación con las expectativas antes de la implementación. La descripción más detallada de los elementos de las tareas se encuentra en el anexo 9 (fichas de las tareas).

1. TAREA 1.1 MONEDAS

Con esta tarea, buscamos que los estudiantes realicen un primer acercamiento al experimento aleatorio y calculen las frecuencias relativas asociadas al experimento de lanzar al aire una o dos monedas. Adicionalmente, con la intervención del profesor, pretendemos que los estudiantes identifiquen la relación entre las frecuencias relativas que calcularon y la regla de Laplace.

Por otro lado, la tarea 1.1 contribuye en gran medida a las capacidades matemáticas fundamentales de representación y utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico. Adicionalmente, contribuye a los procesos matemáticos de emplear y formular.

1.1. Descripción de la tarea

A continuación, presentamos la descripción de los nueve elementos de la tarea.

Requisitos de la tarea

La tarea T.1.1 requiere que los estudiantes manejen nociones básicas de conteo, algunos conceptos de probabilidad (eventos, sucesos), identifiquen la presencia del azar en situaciones problema de tipo aleatorio y cuenten con conocimientos previos asociados a la tabulación de datos, frecuencia absoluta, frecuencia relativa y relación de orden entre números racionales.

Metas de la tarea

Con la tarea, pretendemos contribuir a que los estudiantes reconozcan la regla de Laplace desde un primer acercamiento al tema de probabilidad, a partir de la razón entre el número de veces que sucede un evento (caer cara, por ejemplo) y el número total de resultados (repeticiones).

Formulación

Primera parte

1. Lance una moneda al aire 20 veces. Para cada lanzamiento, marque una X en la columna correspondiente de la siguiente figura, según obtenga cara o sello. Luego, totalice los resultados que obtuvo.

Experimento lanzamiento de una moneda		
Lanzamiento número	Cara (c)	Sello (s)
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		
Total		

a) ¿Cree que, antes de lanzar de nuevo la moneda, podría decir con seguridad cuál es el próximo resultado? Justifique su respuesta.

b) Suponga que A es el evento “obtener cara” y B es el evento “obtener sello”. Calcule la frecuencia relativa de cada evento.

c) Exprese la frecuencia relativa de los eventos A y B en forma decimal.

d) ¿Cuál evento tiene mayor frecuencia relativa?

2. Formen grupos de 5 estudiantes y comparen sus respuestas al punto anterior.

a) ¿Sus respuestas coinciden, son cercanas, o son totalmente diferentes?

b) Con la fila de los totales obtenida en la actividad anterior, completen la información de la siguiente tabla.

Datos obtenidos por 5 estudiantes		
Estudiante	Total caras	Total sellos
1		
2		
3		
4		
5		
Nuevo Total		

3. Con los nuevos resultados, calculen la frecuencia relativa del evento A, la frecuencia relativa del evento B y presenten esta información en la siguiente tabla.

Resultados del grupo	**Frecuencia**	**Frecuencia relativa**		**Porcentaje**
		Fracción	**Decimal**	
Total de lanzamientos	100	$\frac{100}{100}$	1	100%
Evento A (cara)				
Evento B (sello)				

a) Con base en la información tabulada, ¿es mayor la frecuencia relativa del evento A o del evento B?

4. Observen, en el televisor del salón de clase, los datos que el profesor presentará de un simulador web para el lanzamiento de la moneda (100, 500, 600, 1200 lanzamientos). A partir de esa información, ¿cuánto cambian las frecuencias relativas cuando se aumenta la cantidad de lanzamientos? ¿Cuál evento parece tener mayor frecuencia relativa?

Segunda parte

5. Ahora experimenten con dos monedas.

a) ¿Cuáles son las posibles combinaciones que puede obtener al lanzarlas (espacio muestral)? Representen dichas combinaciones.

b) Supongan que C es el evento "obtener al menos una cara". Calcule la probabilidad de ocurrencia del evento C.

c) Llamaremos A al evento "lanzar dos monedas y en ambas obtener cara" y B al evento "lanzar dos monedas y obtener caras distintas". Calcule la probabilidad de cada evento y determine cuál de los dos eventos tiene mayor probabilidad de ocurrencia.

Conceptos y procedimientos implicados en la tarea

En esta tarea, el estudiante hace un primer acercamiento a la fórmula de Laplace a partir del cálculo de frecuencias relativas. Entre los conocimientos previos que usará el estudiante para el desarrollo de esta tarea están el concepto de frecuencia relativa, espacio muestral y conversión de una expresión fraccionaria a número decimal y porcentaje. El estudiante realiza procedimientos como el uso de la regla de Laplace para hallar la probabilidad de un evento. Posteriormente, expresa la probabilidad en forma fraccionaria, decimal y en porcentaje.

Sistemas de representación que se activan con la tarea

Los sistemas de representación que los estudiantes pueden utilizar para desarrollar la tarea son, primero, tabular, al momento de registrar los lanzamientos de la moneda en las tablas propuestas en la tarea; segundo, numérico, al representar la frecuencia relativa y absoluta de los lanzamientos de la moneda, ya sea de forma fraccionaria, decimal o porcentual; tercero, pictórico, si el estudiante representa el espacio muestral a partir del diagrama de árbol; y cuarto, simbólico para expresar los eventos como un conjunto y expresar la probabilidad como P(A).

Contextos PISA en los que se sitúa la tarea

La tarea 1.1 Monedas se inserta en el contexto personal. En el desarrollo de esta tarea, los estudiantes encuentran preguntas que, en ocasiones, usan en su cotidianidad. Es el caso, por ejemplo, de juegos como el fútbol en el que los estudiantes juegan a cara o sello para saber quién escoge el arco para tapar.

Materiales y/o recursos que se utilizarán

El estudiante usará las tablas como material y aprenderá a diligenciarlas al iniciar la sesión de clase cuando el profesor realice la lectura de la actividad. El registro de los resultados del lanzamiento de la moneda en las tablas le permitirá al estudiante reconocer la Regla de Laplace como la razón entre la cantidad de resultados obtenidos y la cantidad de lanzamientos. Este reconocimiento, en un primer momento, se dará de forma individual. Pero, el diligenciamiento de las tablas nos permite generar interacción entre los estudiantes durante el segundo momento, y entre los estudiantes y el profesor durante todo el desarrollo de la actividad.

Agrupamiento e interacción

La tarea inicialmente se realizará de forma individual. En un segundo momento, se organizarán pequeños grupos de cinco estudiantes para completar las tablas con los datos obtenidos por cada integrante del grupo durante la primera parte de la tarea. Esta interacción permitirá que los estudiantes completen la tarea, compartan y discutan acerca de los aciertos de cada uno. Al completar las tablas, el profesor realizará la puesta en común con todos los estudiantes, recogerá ideas de los grupos para establecer entre todos la generalización de la regla de Laplace y relacionará los términos usados hasta ahora (frecuencia relativa, frecuencia absoluta y total de lanzamientos) con los términos de probabilidad, evento, resultados favorables y resultados totales (espacio muestral), respectivamente.

Después de la puesta en común, los estudiantes, en los mismos grupos, realizarán la segunda parte de la tarea. Para finalizar, el profesor compara los resultados obtenidos en el experimento, los resultados del simulador y los resultados obtenidos por los estudiantes al aplicar la regla de Laplace en uno de los eventos de la tabla.

Temporalidad de la tarea matemática escolar
La tarea 1.1 se desarrolla de acuerdo con lo que presentamos en la tabla 6.

Tabla 6
Temporalidad tarea 1.1 Monedas

Actividad	Tiempo (minutos)
Lectura y explicación del objetivo 1 y las metas de la tarea	5
Desarrollo de la tarea	25
Puesta en común dirigida por el profesor	5
Explicación y diligenciamiento del diario del estudiante	25
Recolección de tareas y diarios del estudiante	2

1.2. Errores, grafo de criterios de logro de la tarea y actuación del profesor
A continuación, presentamos los aspectos relacionados con los errores en los que pueden incurrir los estudiantes al desarrollar la tarea 1.1 y las respectivas ayudas que puede usar el profesor para lograr que los estudiantes los superen. Adicionalmente, mostramos el grafo de criterios de logro del objetivo 1 y señalamos entre recuadros las estrategias de solución que los estudiantes pueden activar al abordar esta tarea.

Errores en los que puede incurrir el estudiante y ayudas
Al desarrollar la tarea 1.1, los estudiantes pueden incurrir con mayor frecuencia en los siguientes errores: confundir las condiciones del problema cuando se pide analizar la probabilidad de ocurrencia de varios eventos en la misma pregunta; identificar más o menos resultados favorables en el espacio muestral; usar la fórmula de la Regla de Laplace pero con datos diferentes a los solicitados por la fórmula; realizar de forma incorrecta la división para convertir la fracción en decimal o una ubicación errónea de la coma al multiplicar el decimal por 100 para expresar en porcentaje; y representar el espacio muestral, aunque en menor incurrencia que los primeros errores mencionados, ya que, el espacio muestral forma parte de los conocimientos previos. En el anexo 3, presentamos el listado completo de dificultades y errores en los que pueden incurrir los estudiantes. En la tabla 7 mostramos las ayudas que sugerimos implementar en caso de que los estudiantes incurran en los errores mencionados.

Tabla 7

Descripción de las ayudas de la tarea 1.1 Monedas

Error	Ayuda
Confundir las condiciones en una situación problema cuando se tiene más de una variable.	Hacerles preguntas a los estudiantes que les permitan reconocer los eventos que se van a analizar. Por ejemplo ¿de qué se trata el experimento?, ¿qué van a observar de ese experimento?, y ¿qué esperan que suceda?
Utilizar los casos desfavorables respecto a los casos posibles para calcular la probabilidad de un evento.	Pedirles a los estudiantes que lean la regla de Laplace en voz alta e identifiquen si los datos usados corresponden a los pedidos en la regla Laplace.
Identificar más resultados favorables de los que son a partir del diagrama de árbol.	Pedirles a los estudiantes que lean nuevamente la(s) característica(s) del evento y revisen si todos los resultados que seleccionaron en el diagrama de árbol cumplen la(s) característica(s); por ejemplo, en el evento C "obtener al menos una cara", que los resultados seleccionados sí tengan al menos una cara.
Identificar menos resultados favorables de los que son a partir de tablas de espacios muestrales.	Pedirles a los estudiantes que lean nuevamente la(s) característica(s) del evento y revisen si alguno de los resultados que no seleccionaron en tabla de espacios muestrales cumple la(s) característica(s). Por ejemplo, en el evento C "obtener al menos una cara", que los resultados no seleccionados tengan al menos una cara.
Asignar un porcentaje que no es equivalente a una probabilidad expresada como fracción.	Por medio de un ejemplo, mostrar a los estudiantes cómo se asigna un porcentaje a una fracción.
Asignar una expresión decimal que no es equivalente a una probabilidad expresada como porcentaje y viceversa.	Recordarles a los estudiantes que para pasar de decimal a porcentaje se debe multiplicar por 100.
Asignar una expresión fraccionaria que no es equivalente a una probabilidad expresada como decimal y viceversa.	Recordarles a los estudiantes que para expresar una probabilidad escrita como fracción a una probabilidad como decimal deben dividir el numerador entre el denominador.

El listado completo de ayudas para todos los errores previstos se encuentra en el anexo 7.

Grafo de criterios de logro de la tarea

En la figura 7, presentamos el grafo de criterios de logro del primer objetivo de aprendizaje y destacamos las estrategias de solución que los estudiantes pueden activar al abordar la tarea. En el grafo, incluimos los errores en los que los estudiantes pueden incurrir en cada criterio de logro.

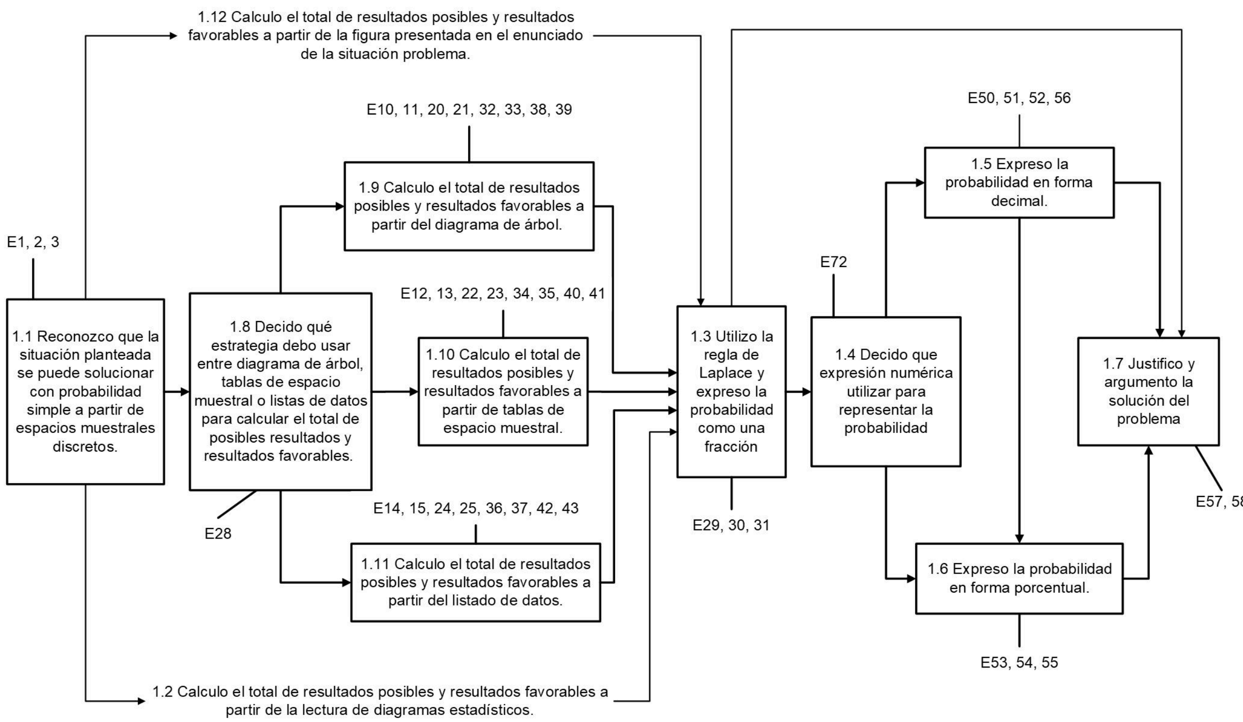


Figura 7. Grafo criterios de logro tarea 1.1 Monedas

Con el desarrollo de esta tarea, los estudiantes pueden activar varias estrategias de solución para representar el espacio muestral y para representar el resultado de la probabilidad. Primero, los estudiantes leen el enunciado del problema e identifican que es un problema asociado al azar y se puede solucionar con el cálculo de probabilidades. Enseguida, los estudiantes deciden qué estrategia usar para hallar el total de resultados posibles (espacio muestral) y de resultados favorables. Lo pueden hacer a partir del diagrama de árbol, la tabla de espacios muestrales o con un listado de datos. A continuación, usan la regla de Laplace para calcular la probabilidad de los eventos y escogen la escala cuantitativa que más se adapte para dar solución a la pregunta (fraccionaria, decimal y porcentual). Por último, interpretan los resultados y dan respuesta a la pregunta.

1.3. Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

Como esta tarea es el primer acercamiento que tienen los estudiantes al uso de la regla de Laplace, es importante que el profesor pase por cada uno de los grupos y escuche atentamente las discusiones que se dan entre los estudiantes. Si los estudiantes tienen alguna dificultad para desarrollar la tarea, el profesor puede apoyarse en el listado de ayudas que presentamos en el anexo 7.

En el diálogo que tenga el profesor con los grupos de estudiantes, es importante que el profesor muestre la relación entre los términos usados hasta ahora (frecuencia relativa, frecuencia absoluta y total de lanzamientos) con los términos de probabilidad, evento, resultados favorables y resultados totales (espacio muestral), respectivamente. Esta relación entre conceptos permitirá que, en la puesta en común, el profesor generalice la fórmula de la regla de Laplace con mayor facilidad.

1.4. Evaluación

Para la evaluación de la tarea, es importante que el profesor tenga en cuenta los criterios de evaluación que establecen el colegio en la que se va a aplicar la tarea. Estos criterios de evaluación deben ser claros para los estudiantes. Por lo tanto, se deben establecer antes de que los estudiantes desarrollen la tarea.

Por otro lado, el profesor, al pasar por cada grupo de estudiantes, debe observar qué grupos presentan más dificultades para contestar las preguntas y cuáles son los errores en los que incurren los estudiantes con mayor frecuencia. Esto puede ser el insumo para que el profesor finalice la sesión de clase con una explicación del tema. Adicionalmente, sugerimos la revisión del diario del estudiante como herramienta para evaluar y establecer en qué medida la tarea funcionó apropiadamente durante la implementación.

2. Tarea de aprendizaje 1.2 Cartas

La tarea 1.2 se diferencia de la tarea 1.1 en la forma como se presenta el espacio muestral. En esta tarea, los estudiantes deben hallar el total de resultados posibles y resultados favorables a partir de la figura presentada en la situación problema. Posteriormente, usan lo aprendido en la tarea anterior para calcular la probabilidad de ocurrencia de varios eventos de la baraja. Finalizan, al expresar la probabilidad en fracción, decimal o porcentaje.

La segunda tarea de aprendizaje contribuye a las capacidades matemáticas fundamentales de comunicación, representación y utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico. La capacidad de representación se activa cuando los estudiantes asocian la tarea con una situación que se resuelve mediante del azar. La capacidad matemática fundamental de representación se activa cuando los estudiantes identifican el espacio muestral y los resultados favorables a partir de la figura de la baraja española. Y la de utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico se activa cuando los estudiantes usan la regla de Laplace para hallar la probabilidad de los eventos y expresan la probabilidad de forma decimal.

2.1. Descripción de la tarea

A continuación, presentamos la descripción de los nueve elementos de la segunda tarea del primer objetivo.

Requisitos

La tarea 1.2 requiere que los estudiantes conozcan las figuras que componen la baraja española (razón por la cual se formuló una pregunta asociada a los jugos de azar en la tarea diagnóstica). Para el desarrollo correcto de la tarea, se requiere que los estudiantes tengan conocimientos previos de la relación de orden entre fracciones, decimales y porcentajes, y sepan convertir de fracción a decimal, de decimal a porcentaje y de fracción a porcentaje. Adicionalmente, se requieren los conocimientos adquiridos en la tarea 1.1 relacionados con la regla de Laplace.

Metas

Con la tarea 1.2 Cartas, pretendemos que los estudiantes tengan la necesidad de usar la regla de Laplace para hallar la probabilidad de eventos simples y expresen las probabilidades ya sea de forma fraccionaria, decimal o porcentual. Esperamos que los estudiantes argumenten y/o justifiquen las soluciones de situaciones problema que contengan probabilidad simple.

Formulación

En grupos de dos estudiantes, observen la siguiente figura.

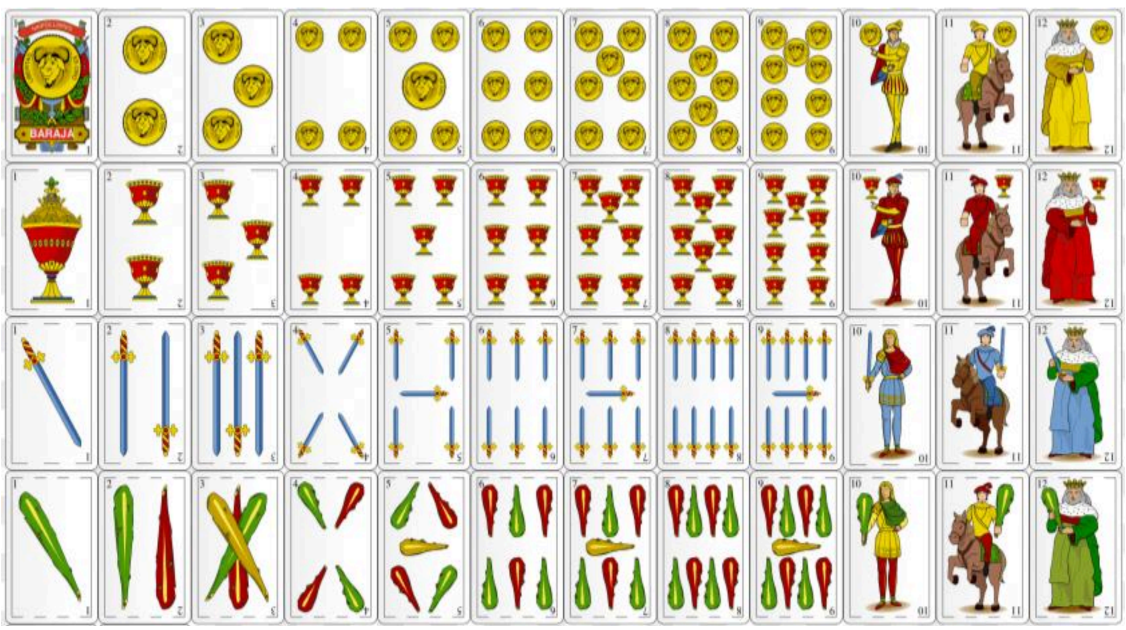


Figura tomada de: https://acortar.link/RqSmlu.

En la baraja española, se llaman (a) **pintas** a los grupos de cartas conformados por oros, bastos, espadas y copas; (b) **figuras** a las cartas numeradas como 10 que corresponde a la sota, 11 que llamaremos caballo y el 12 que denominaremos rey; y (c) **cartas numéricas** a las cartas del 1 al 9.

A partir de la figura anterior, respondan las siguientes preguntas.

1. ¿Cuántas cartas tiene la baraja española?, ¿cuántas pintas hay? y ¿cuántas cartas conforman cada pinta?

2. Llamemos A al evento "obtener un rey" y B al evento "obtener una carta numérica". ¿Cuál de los eventos tiene mayor probabilidad? Justifiquen la respuesta.

3. Considere los siguientes eventos: A: Obtener una sota, B: Obtener una carta mayor a 7. C: Obtener una carta menor a 3, D: Obtener una carta de la pinta de oros, E: obtener un número menor o igual a 12. Responda.

a) ¿Cuáles eventos tienen una probabilidad de ocurrencia mayor a $\frac{10}{40}$?

b) ¿Cuáles eventos tienen una probabilidad de ocurrencia menor a 0,3?

c) ¿Qué evento tiene una probabilidad del 100%?

Conceptos y procedimientos implicados en la tarea

Para el desarrollo de esta tarea, el estudiante usa los conocimientos previos asociados con (a) las relaciones de orden entre números enteros y entre números fraccionarios; (b) conversión de una expresión fraccionaria a número decimal y porcentaje; y (c) espacio muestral.

El estudiante realiza procedimientos como el uso de la regla de Laplace con su expresión fraccionaria, decimal y porcentual. Adicionalmente, compara las probabilidades para determinar qué evento tiene mayor probabilidad de ocurrencia que otro.

Sistemas de representación que se activan con la tarea

Los sistemas de representación que los estudiantes pueden utilizar para desarrollar la tarea son, primero, numérico, al representar la probabilidad de los eventos en forma fraccionaria, decimal o porcentual; y, segundo, simbólico, al expresar los eventos como un conjunto y expresar la probabilidad como P(A).

Contextos PISA en los que se sitúa la tarea

La tarea se inserta en el contexto personal, ya que se centra en actividades propias del individuo, su familia y su grupo de pares. En este caso particular, se usa un juego de azar que la mayoría de los estudiantes han jugado con sus familias o amigos del colegio.

Materiales y recursos

Para el desarrollo de la tarea, diseñamos un material que consta de una hoja con la imagen de la baraja española. Los estudiantes podrán rayar, colorear o marcar los resultados favorables para cada uno de los eventos que van a analizar. El material no tiene tiempo de preparación por parte de los estudiantes. El profesor es el encargado de hacer y multicopiar la guía.

Agrupamiento e interacción

Todo el desarrollo de la tarea se realizará en parejas. Inicialmente, la pareja de estudiantes reconocerá el juego de cartas y recordará las características del juego (vistas en la tarea diagnóstica). Luego, resolverán las preguntas formuladas en la tarea. Al completar las preguntas, el profesor realizará la puesta en común con todos los estudiantes, y tomará, como ejemplo, los cálculos que hicieron algunos grupos y cómo usaron la regla de Laplace.

En la puesta en común, el profesor buscará que los estudiantes reconozcan la importancia de usar las diferentes expresiones numéricas al hallar la probabilidad simple, para dar solución a las preguntas planteadas.

Temporalidad
La tarea 1.2 se desarrolla de acuerdo con la temporalidad que presentamos en la tabla 8.

Tabla 8
Temporalidad tarea 1.2 Cartas

Actividad	Tiempo (minutos)
Puesta en común de los resultados obtenidos en la anterior tarea	5
Lectura de las metas y explicación de la tarea	5
Desarrollo de la tarea	25
Puesta en común dirigida por el profesor	10
Lectura de los criterios de logro	5
Diligenciamiento del diario del estudiante	10
Recolección de tareas y diarios del estudiante	2

2.2. Errores, grafo de criterios de logro de la tarea y actuación del profesor
Presentamos a continuación los aspectos relacionados con los errores en los que pueden incurrir los estudiantes al desarrollar la tarea 1.2 y las respectivas ayudas que puede usar el profesor para promover su superación. Adicionalmente, mostramos el grafo de criterios de logro del objetivo 1 y señalamos las estrategias de solución que los estudiantes pueden activar al abordar esta tarea.

Errores en los que puede incurrir el estudiante y ayudas
Al desarrollar la tarea, los estudiantes pueden incurrir con mayor frecuencia en los siguientes errores: confundir las condiciones del problema cuando se pide analizar la probabilidad de ocurrencia de varios eventos en la misma pregunta; asignar un cardinal mayor o menor, respectivamente, a todos los resultados favorables a partir de la observación de la figura presentada en la situación problema; usar la fórmula de la Regla de Laplace pero con datos diferentes a los solicitados por la fórmula; y realizar de forma incorrecta la división para convertir la fracción en decimal o una ubicación errónea de la coma al multiplicar el decimal por 100 para expresar en porcentaje. El listado completo de dificultades y errores en que pueden incurrir los estudiantes se encuentra en el anexo 3. En la tabla 9, mostramos las ayudas que sugerimos implementar en caso de que los estudiantes incurran en los errores mencionados.

Tabla 9

Descripción de las ayudas de la tarea 1.2 Cartas

Error	Ayuda
Asignar un cardinal mayor a los resultados favorables en un experimento a partir de la observación de las figuras presentadas en una situación problema.	Con un marcador, marque con X el número de reyes dados en la figura y cuéntelos.
Asignar un cardinal menor a los resultados favorables en un experimento a partir de la observación de las figuras presentadas en una situación problema.	Marque con una X las cartas numéricas y cuéntelos.
Asociar la regla de Laplace como el total de resultados posibles sobre el total de resultados favorables.	Recuerden que dice la regla de Laplace. ¿Qué operación contiene?
Asignar una expresión decimal que no es equivalente a una probabilidad expresada como porcentaje y viceversa.	Recuerden que para pasar de decimal a porcentaje se debe multiplicar por 100.
Asignar una expresión decimal que no es equivalente a una probabilidad expresada como porcentaje y viceversa.	Recordar cómo se halla la equivalencia entre expresiones decimales y porcentuales por medio de ejemplos.

El listado completo de ayudas para todos los errores previstos se encuentra en el anexo 7.

Grafo de criterios de logro de la tarea

En la figura 8, presentamos el grafo de criterios de logro del primer objetivo de aprendizaje y destacamos las estrategias de solución que los estudiantes pueden activar al abordar la tarea. En el grafo, incluimos los errores en los que los estudiantes pueden incurrir en cada criterio de logro.

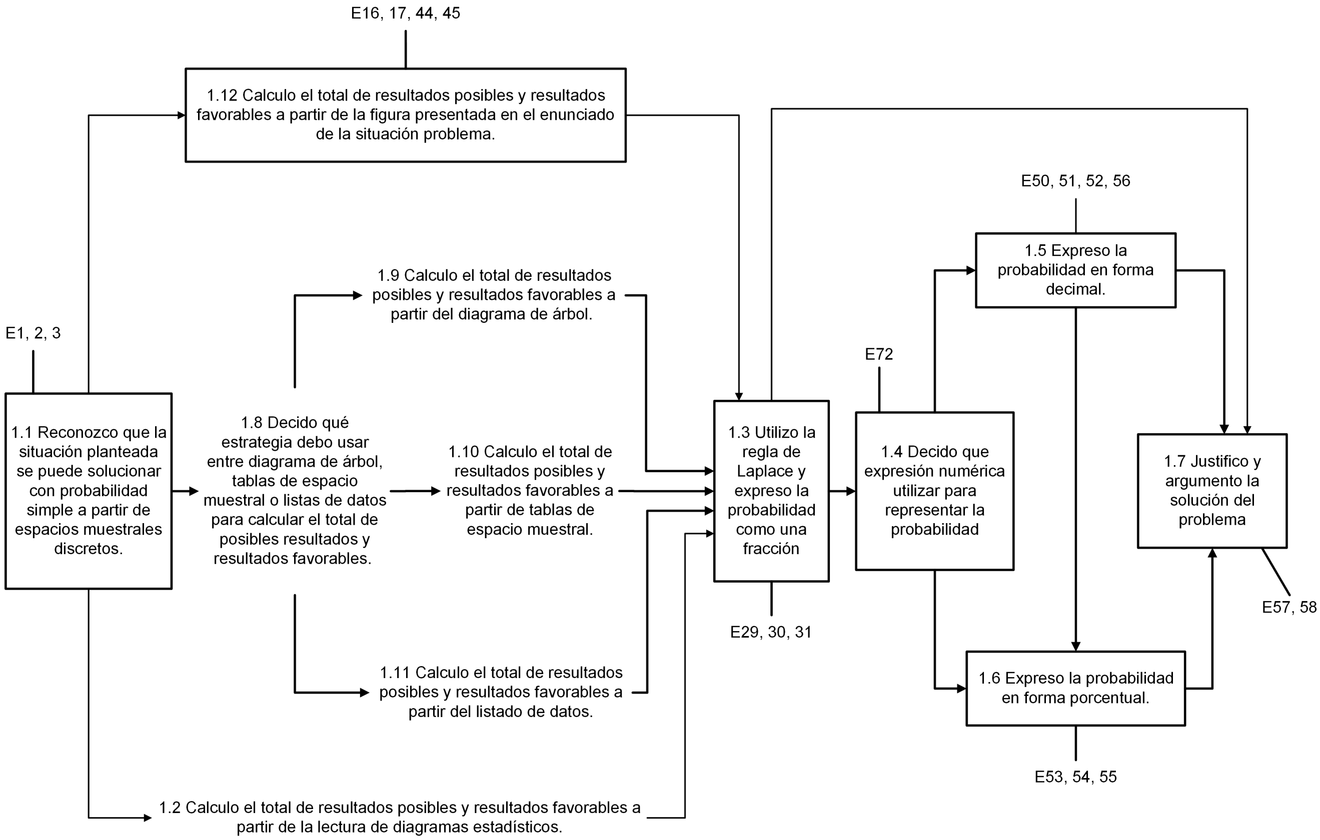


Figura 8. Grafo criterios de logro tarea 1.2 Cartas

Las estrategias de solución que los estudiantes pueden activar son identificar que en el experimento de escoger una carta de una baraja y predecir que el resultado depende exclusivamente del azar. Enseguida, los estudiantes deducen los resultados posibles (espacio muestral) y los resultados favorables. Con esta información, calculan las probabilidades solicitadas al usar la regla de Laplace y expresarla como fracción. A continuación, el estudiante debe escoger la representación numérica (fraccionaria, decimal o porcentual) que más se ajuste a la solución de cada pregunta. Para finalizar, interpreta los resultados obtenidos, responde las preguntas y argumenta.

2.3. Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

Para el desarrollo de la tarea 1.2, es importante que el profesor retome brevemente la explicación dada en la puesta en común de la tarea diagnóstica, acerca las características de la baraja española. La explicación mencionada tiene como objetivo que los estudiantes recuerden qué es una pinta, una sota, cuál es el rey o qué cartas van numeradas.

Al igual que con la primera tarea, le proponemos al profesor pasar por los diferentes grupos y estar atento a las discusiones de los estudiantes para poder prestar la ayuda en el momento adecuado. Adicionalmente, consideramos importante que el profesor les recuerde constantemente a los estudiantes los términos propios de probabilidad, tales como, evento, resultados favorables y resultados totales (espacio muestral), respectivamente. Al finalizar el desarrollo de las preguntas, es importante que el profesor realice la puesta en común, retome algunas de las soluciones encontradas por los estudiantes y reitere el uso correcto de la regla de Laplace y sus diferentes expresiones numéricas.

2.4. Evaluación

Para hacer la evaluación de la tarea, proponemos que el profesor recoja las producciones escritas de los estudiantes y le asigne una valoración numérica al trabajo realizado. Para asignar la valoración, el profesor debe identificar si se calculó correctamente la probabilidad de ocurrencia de los eventos, si se logró identificar con claridad qué eventos eran más probables que otros y, finalmente, si las representaciones numéricas usadas son correctas. Dicha valoración debe ser acorde con lo establecido en el sistema de evaluación de su institución. Al igual que en la primera tarea, sugerimos la revisión del diario del estudiante y usar este instrumento como herramienta para evaluar y establecer en qué medida la tarea funcionó apropiadamente durante la implementación.

3. Tarea de aprendizaje 1.3 Deportes

En la tercera y última tarea del objetivo 1, el estudiante debe hallar el espacio muestral a partir de un diagrama estadístico. Posteriormente, debe calcular la probabilidad de un evento y expresarla de forma fraccionaria, decimal o porcentual. Al igual que en la tarea 1.2, en esta última tarea, se refuerza la importancia de las tres representaciones numéricas de la probabilidad, a partir de preguntas formuladas al usar la representación decimal y porcentual.

3.1. Descripción de la tarea

A continuación, presentamos la descripción de los nueve elementos de la tercera tarea del primer objetivo.

Requisitos

La tarea Deportes requiere que los estudiantes manejen nociones básicas de conteo, identifiquen la presencia del azar en situaciones problema de tipo aleatorio y cuenten con conocimientos previos asociados a la interpretación de gráficos estadísticos (diagramas de barras), frecuencia absoluta, orden de fracciones, decimales y porcentajes.

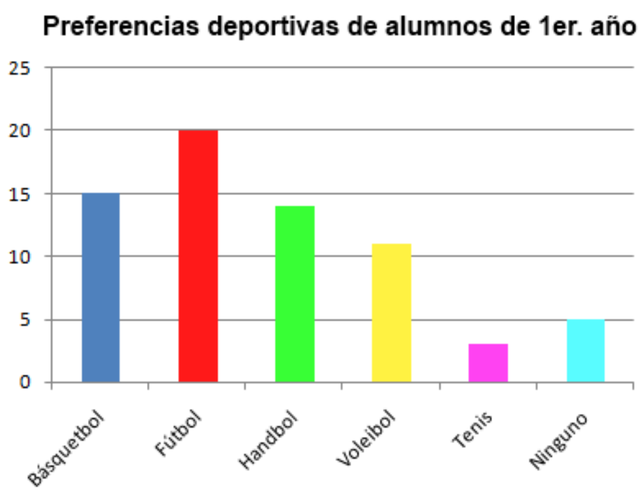
Metas

Con la tarea 1.3 Deportes, pretendemos contribuir a que los estudiantes utilicen la regla de Laplace en el cálculo de probabilidad en situaciones de la cotidianidad. Además, buscamos que los estudiantes representen las probabilidades en forma fraccionaria, decimal y porcentual y las comparen para saber cuándo un evento es más probable que otro.

Formulación

En grupos de dos estudiantes, lean, observen el diagrama de barras y respondan las preguntas.

Este año, el Colegio Antonio Van Uden será la sede para los Juegos Intercolegiados. El profesor de Educación Física desea saber cuál es la preferencia deportiva de los estudiantes para determinar qué campeonatos realizar. Para esto, realizó una encuesta entre algunos estudiantes del colegio. Los resultados obtenidos se muestran en el siguiente gráfico de barras.



La elección del deporte depende la votación de los estudiantes; entonces,

1. ¿Cuál es el campeonato con mayor probabilidad de realizarse? Justifiquen su respuesta.
2. ¿Qué campeonato tiene probabilidad de realizarse mayor a 0,25? ¿Cómo lo identificaron?
3. ¿Cuál o cuáles de los deportes tienen una probabilidad de realizarse menor al 15%?

Conceptos y procedimientos

Para el desarrollo de esta tarea, el estudiante usa los conocimientos previos asociados con (a) las relaciones de orden entre números enteros y entre números fraccionarios; (b) la conversión de una expresión fraccionaria a número decimal y porcentaje; (c) el espacio muestral; y (d) los resultados favorables y resultados totales. Adicionalmente, el estudiante realiza procedimientos como el uso de la regla de Laplace con su expresión fraccionaria, decimal y porcentual. Interpreta las probabilidades obtenidas y compara los resultados para dar su respuesta a las preguntas.

Sistemas de representación

Para resolver la tercera tarea, los estudiantes activan el sistema de representación simbólico, al usar la regla de Laplace para hallar la probabilidad o al usar P(A) para referirse a la probabilidad del evento. También, usan el sistema de representación numérico, al expresar la probabilidad en forma fraccionaria, decimal o porcentual.

Contextos PISA en los que se sitúa la tarea
La tarea está enmarcada en un contexto social, ya que la situación planteada se centra en la propia comunidad del estudiante, pues los datos de la situación problema están relacionados con información que se puede encontrar en el ámbito escolar.

Materiales y recursos
Para el desarrollo de la tarea Deportes, diseñamos un material que consta de una guía con la gráfica estadística de los resultados de la encuesta realizada por el profesor. Allí, los estudiantes identifican los resultados posibles y los resultados favorables desde lo interpretado en la gráfica. El material no tiene tiempo de preparación por parte de los estudiantes. El profesor es el encargado de hacer y multicopiar la guía.

Agrupamiento e interacción
Para el desarrollo de la tarea, se organizan grupos de dos estudiantes con el fin de que reconozcan el espacio muestral a partir de la figura y calculen la probabilidad de los numerales de la tarea. Al finalizar la tarea, se realizará la puesta en común en gran grupo para identificar estrategias usadas para llegar a la solución y posibles errores. Durante el desarrollo de la tarea, predomina la comunicación entre los estudiantes cuando hay intercambio de ideas y opiniones en la etapa de parejas. Al solucionar las preguntas, se brinda al profesor la oportunidad de guiar la tarea hacia el objetivo propuesto, al evidenciar posibles errores y promover la discusión sobre resultados.

Temporalidad
La tarea 1.3 se desarrolla de acuerdo con la temporalidad que presentamos en la tabla 10.

Tabla 10
Temporalidad tarea 1.3 Deportes

Actividad	Tiempo (minutos)
Puesta en común de los resultados obtenidos en la anterior tarea	10
Lectura de las metas y explicación de la tarea	5
Desarrollo de la tarea	20
Puesta en común dirigida por el profesor	10
Lectura de los criterios de logro	5
Diligenciamiento del diario del estudiante	10
Recolección de tareas y diarios del estudiante	2

3.2. Errores, grafo de criterios de logro de la tarea y actuación del profesor

Presentamos a continuación los aspectos relacionados con los errores en los que pueden incurrir los estudiantes al desarrollar la tarea 1.3 y las respectivas ayudas que puede usar el profesor para promover su superación. Adicionalmente, mostramos el grafo de criterios de logro del objetivo 1 y señalamos las estrategias de solución que los estudiantes pueden activar al abordar esta tarea.

Errores en los que puede incurrir el estudiante y ayudas

En el desarrollo de la tarea, los estudiantes pueden incurrir con mayor frecuencia en errores como asociar un cardinal mayor o menor al total de resultados posibles o al total de resultados favorables luego de la interpretación del gráfico estadístico. Aunque, es la tercera tarea del objetivo, aún pueden incurrir en errores asociados al uso de la fórmula de la regla de Laplace y a la conversión de la expresión fraccionaria de la probabilidad a la expresión decimal y porcentual. El listado completo de dificultades y errores en que pueden incurrir los estudiantes se encuentra en el anexo 3. En la tabla 11, mostramos las ayudas que sugerimos implementar en caso de que los estudiantes incurran en los errores frecuentes que mencionamos anteriormente.

Tabla 11
Descripción de las ayudas de la tarea 1.3 Deportes

Error	Descripción
Confundir las condiciones en una situación problema cuando se tiene más de una variable.	Hacerles preguntas que les permitan reconocer los eventos que se van a analizar; por ejemplo, ¿qué probabilidad existe que el campeonato sea de fútbol?
Asignar un cardinal menor a todos los resultados posibles a partir de la lectura de diagramas estadísticos presentados en una situación problema.	Preguntar a los estudiantes ¿qué cardinal es menor para cada deporte?
Utilizar los casos desfavorables respecto a los	Pedir a los estudiantes que lean la regla de

Tabla 11
Descripción de las ayudas de la tarea 1.3 Deportes

Error	Descripción
casos posibles para calcular la probabilidad de un evento.	Laplace en voz alta y reflexionen si los datos usados corresponden a los pedidos en la regla Laplace.
Utilizar los casos favorables respecto a los casos desfavorables para calcular la probabilidad de un evento.	¿Cuáles son los casos favorables y cuáles los desfavorables?
Asociar la regla de Laplace como el total de resultados posibles sobre el total de resultados favorables.	Pedir a los estudiantes que lean la regla de Laplace en voz alta, para que identifiquen por qué va en el numerador y quién en el denominador.
Iniciar con un número diferente de cero en el cociente cuando realiza la división entre el numerador y el denominador para hallar la probabilidad en forma decimal.	¿Qué hacemos en una división si el dividendo es menor que el divisor? Se da un ejemplo.
Realizar una operación diferente a la división para expresar la probabilidad como fracción en decimal en una situación problema.	Recuerden que para expresar una fracción como decimal se debe dividir el numerador entre el denominador.
Realizar una operación diferente a multiplicar por 100 la solución de una probabilidad expresada en decimal para representarla en forma de porcentaje.	¿Qué operación deben realizar para expresar un decimal cómo porcentaje?

El listado completo de ayudas para todos los errores previstos se encuentra en el anexo 7.

Grafo de criterios de logro de la tarea

En la figura 9, presentamos el grafo de criterios de logro del objetivo 1 de aprendizaje y destacamos las estrategias de solución que los estudiantes pueden activar al abordar la tarea. En el grafo, incluimos los errores en los que los estudiantes pueden incurrir en cada criterio de logro.

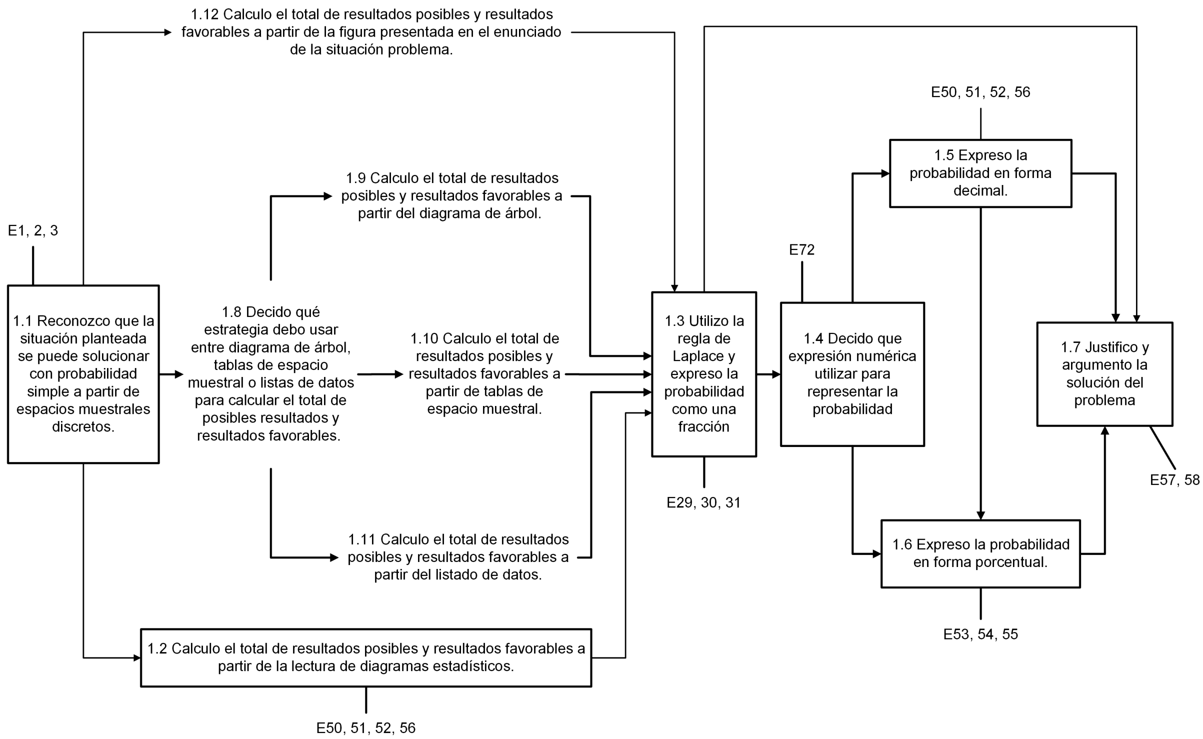


Figura 9. Grafo criterios de logro tarea 1.3 Deportes

Las estrategias de solución que los estudiantes pueden activar son, primero, identificar que la tarea está relacionada con el cálculo de probabilidades. Enseguida, el estudiante debe interpretar la información suministrada en el gráfico estadístico y deducir el espacio muestral y los resultados favorables. Luego, usa la regla de Laplace para hallar la probabilidad de los eventos planteados en la formulación de la tarea. A continuación, expresa la probabilidad en forma fraccionaria, decimal y porcentual. Finalmente, interpreta los resultados y los compara con los valores dados en las preguntas para dar respuesta a la tarea.

3.3. Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

Para el desarrollo de la última tarea del objetivo 1, es importante que el profesor retome brevemente las explicaciones dadas en las dos primeras tareas; por ejemplo, la diferencia entre los resultados favorable y los resultados totales y la importancia de las tres representaciones numéricas de la probabilidad.

Al igual que con las dos primeras tareas, le proponemos al profesor pasar por los diferentes grupos y estar atento a las discusiones de los estudiantes para poder prestar la ayuda en el momento adecuado. Al finalizar el desarrollo de las preguntas, es importante que el profesor realice la puesta en común, retome algunas de las soluciones encontradas por los estudiantes y presente ejemplos de los errores en los que incurrieron los estudiantes en esta tarea con su respectiva corrección.

3.4. Evaluación

Para hacer la evaluación de la tarea 1.3, proponemos que el profesor recoja las producciones escritas de los estudiantes. Con estas últimas producciones escritas, el profesor logra evidenciar los avances, dificultades y logro del objetivo 1. Además, es importante que se asigne una valoración numérica al trabajo realizado. Para asignar la valoración, el profesor debe identificar si se calculó correctamente la probabilidad de ocurrencia de los eventos, si las representaciones numéricas usadas son correctas y si se interpretaron los resultados obtenidos para responder de forma adecuada las preguntas. Dicha valoración debe ser acorde con lo establecido en el sistema de evaluación de su institución.

Para esta última tarea, es importante hacer la revisión del diario del estudiante al leer las ideas plasmadas en los diarios nos permite identificar la percepción (cognitiva y afectiva) de los estudiantes y determinar si la tarea funcionó apropiadamente durante la implementación.

5. TAREAS DE APRENDIZAJE DEL SEGUNDO OBJETIVO

Recordemos que, con las tareas del primer objetivo, buscamos que el estudiante calcule la probabilidad de ocurrencia de eventos simples usando la regla de Laplace y que pueda expresar la probabilidad en forma fraccionaria, decimal o porcentual. Entonces, con el segundo objetivo, queremos que el estudiante use lo aprendido con las tareas de aprendizaje del primer objetivo y pueda caracterizar la ocurrencia segura, probable e imposible de un evento en una situación problema.

Para lograr el objetivo 2, proponemos tres tareas. En las tareas, presentamos situaciones en las que los estudiantes usan material manipulativo (dados, fichas, la ruleta, etc.). Cada experiencia se debe repetir muchas veces en las mismas condiciones y luego se propone a los estudiantes que traten de adivinar algunos resultados, con el fin de que los estudiantes capten las propiedades inherentes a los fenómenos aleatorios. Enseguida, planteamos preguntas que le permitan al estudiante relacionar las escalas de probabilidad cuantitativa con la escala cualitativa de ciertos eventos. Por último, proponemos el uso de las diferentes expresiones numéricas (fraccionaria, decimal y porcentual) para relacionar el evento seguro con $P(A) = 1$, el evento imposible con $P(A) = 0$, y damos ejemplos de eventos poco probables y muy probables.

A continuación, presentamos las tres tareas del objetivo 2. En cada una, usamos el mismo esquema con el que presentamos las tareas del anterior objetivo. La descripción más detallada de los elementos de las tareas se encuentra en el anexo 9 (fichas de las tareas).

1. TAREA 2.1 DADOS

En esta tarea, presentamos una situación con un juego tradicional (lanzamiento de dados). En esta tarea, los estudiantes realizan predicciones luego de repetir varias veces el juego e interactuar con el material. Con las repeticiones de juego, los estudiantes pueden identificar eventos imposibles, poco probables, muy probables y seguros.

Luego de realizar el juego, pretendemos que el estudiante calcule la probabilidad de ocurrencia de algunos eventos del juego y relacione la escala de probabilidad cuantitativa con la escala de probabilidad cualitativa. La tarea 2.1 contribuye a las capacidades matemáticas fundamentales de diseño de estrategias, matematización, utilización de operaciones y un lenguaje simbólico y representación.

1.1. Descripción de la tarea

A continuación, presentamos la descripción de los nueve elementos de la tarea.

Requisitos de la tarea

Para el desarrollo de la tarea, se requiere que el estudiante tenga conocimientos previos como ordenar fracciones, decimales y porcentajes y convertir una fracción a decimal, decimal a porcentaje y fracción a porcentaje. En relación con los conocimientos adquiridos en el objetivo 1, el estudiante debe identificar la presencia del azar en situaciones problema de tipo aleatorio y usar la regla de Laplace para calcular la probabilidad de ocurrencia de un evento en un experimento aleatorio.

Metas de la tarea

Con la tarea, pretendemos contribuir a que el estudiante establezca la relación entre las escalas de probabilidad numéricas (fraccionaria, decimal y porcentual) y la escala de probabilidad cualitativa. En este primer acercamiento a la escala cualitativa, el estudiante identifica eventos imposibles, poco probables, muy probables y seguros en un juego de azar. Además, con lo aprendido en el primer objetivo, esperamos que el estudiante establezca que la probabilidad de un evento es un número comprendido entre 0 y 1 e identifique que la probabilidad del evento seguro es 1 y la probabilidad de un evento imposible es 0.

Formulación

Instrucciones del juego

> Cada uno de los estudiantes debe distribuir sus 3 fichas para parqués del mismo color sobre las casillas de la parte inferior del tablero, en los resultados de la suma de los puntos de las caras superiores de los dados que crea que van a salir más veces al lanzar los dos dados. No puede haber dos fichas en el mismo número. Si no se ponen de acuerdo, se lanza un dado y el estudiante que saque el número mayor se queda con el número que está en disputa.
>
> Por turnos, cada estudiante va a lanzar los dos dados y suma los puntos de las caras superiores obtenidas. La ficha que coincida con la suma obtenida avanza una casilla (aunque no sea la ficha del estudiante que ha lanzado los dados). Las demás fichas quedan en el mismo lugar.
>
> Gana el estudiante que lleve primero una de sus fichas hasta la fila de llegada.

LLEGADA												
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Cuestionario

Luego de jugar, analice los resultados obtenidos y responda las siguientes preguntas.

1. Represente el espacio muestral del juego.
2. ¿Cuáles eventos son poco probables de ganar el juego?
3. ¿Cuáles eventos son muy probables de ganar el juego?
4. Si tuvieran que escoger entre el 3 y el 13 para colocar la ficha, ¿qué número escogerían? Si tuvieran que escoger entre el 5 y el 9, ¿qué número escogerían? ¿Da igual los números que se escojan? ¿Todo es cuestión de suerte?
5. Se cambian las reglas del juego. Si al lanzar los dos dados, la suma de las caras superiores es menor o igual a 12, cada ficha avanza una casilla ¿Qué jugador tendría más probabilidad de ganar el juego?
6. Proponga un evento imposible, poco probable, muy probable y seguro, y justifique cada respuesta.

Conceptos y procedimientos implicados en la tarea
En el desarrollo de esta tarea, el estudiante ordena números racionales y realiza conversión entre fracciones, decimales y porcentajes para establecer la relación de orden entre probabilidades. Además, establece relaciones de orden para identificar cuándo un evento tiene mayor probabilidad de ocurrencia. Posteriormente, el estudiante usa los resultados obtenidos para relacionar la escala de probabilidad cuantitativa y la escala de probabilidad cualitativa.

Sistemas de representación que se activan con la tarea
Los sistemas de representación que el estudiante puede utilizar para representar el espacio muestral son pictórico, al usar diagrama de árbol; y tabular, al usar tablas. Al calcular la probabilidad de ocurrencia, puede usar los sistemas de representación numérico (forma fraccionaria, decimal o porcentual) y simbólico, al expresar los eventos como un conjunto y expresar la probabilidad como P(A).

Contextos PISA en los que se sitúa la tarea
La tarea Dados se inserta en el contexto personal. Los estudiantes usan estos juegos en el diario vivir ya sea en juegos virtuales como parchís o en juegos tradicionales como el parqués, tío Rico, escalera y monopolio, entre otros.

Materiales y/o recursos que se utilizarán
En esta primera tarea del objetivo 2, usamos recursos como los dados, fichas de parqués y un tablero de juego. El profesor debe imprimir y multicopiar el tablero para cada grupo de estudiantes. Se solicita a los estudiantes que cada uno tenga tres fichas para parqués del mismo color y dos dados.

Agrupamiento e interacción
Para el desarrollo de la tarea, planteamos organizar grupos de tres o cuatro estudiantes. Esta agrupación nos permite que haya un intercambio espontáneo de ideas entre los estudiantes y nos ayuda a mejorar la comprensión de la tarea gracias al primer acercamiento mediante el juego. Al finalizar el juego, formamos parejas de estudiantes para responder las preguntas formuladas, debatir las soluciones obtenidas, negociar significados y llegar a acuerdos. Al finalizar el desarrollo de la tarea, el profesor realizará la puesta en común a partir de los resultados obtenidos en cada grupo, y así entre todos establecer las relaciones entre la escala de probabilidad numérica (fracción, decimal y porcentaje) con la escala de probabilidad cualitativa (eventos imposibles, poco probables, muy probables y seguros).

Temporalidad de la tarea matemática escolar
La tarea 2.1 se desarrolla de acuerdo con la temporalidad que presentamos en la tabla 12.

Tabla 12
Temporalidad tarea 2.1 Dados

Actividad	Tiempo (minutos)
Puesta en común de lo alcanzado en el objetivo 1	10
Lectura y explicación del objetivo 2 y las metas de la tarea	5
Desarrollo de la tarea	25
Puesta en común dirigida por el profesor	5
Lectura de los criterios de logro	5
Diligenciamiento del diario del estudiante	8
Recolección de tareas y diarios del estudiante	2

1.2. Errores, grafo de criterios de logro de la tarea y actuación del profesor

Presentamos a continuación los aspectos relacionados con los errores en los que pueden incurrir los estudiantes al desarrollar la primera tarea del segundo objetivo. Además, presentamos las respectivas ayudas que puede usar el profesor para lograr que los estudiantes superen sus dificultades. Incluimos en este apartado el grafo de criterios de logro del objetivo 2 y señalamos entre recuadros las estrategias de solución que los estudiantes pueden activar al abordar esta tarea.

Errores en los que puede incurrir el estudiante y ayudas

Al desarrollar la tarea, los estudiantes pueden incurrir con mayor frecuencia en errores como confundir las condiciones del problema cuando se pide comparar la probabilidad de ocurrencia de varios eventos en la misma pregunta. En relación con el espacio muestral, un error muy frecuente es asignar un cardinal menor a los resultados favorables, ya sea con diagramas de árbol, tablas o listados. Por último, un error asociado a la escala cualitativa es relacionar un evento poco probable (subconjunto del espacio muestral) con un evento imposible. El listado completo de dificultades y errores en que pueden incurrir los estudiantes se encuentra en el anexo 3. En la tabla 13, mostramos las ayudas que sugerimos implementar en caso de que los estudiantes incurran en los errores mencionados.

Tabla 13
Descripción de las ayudas de la tarea

Error	Ayuda
Confundir las condiciones del problema cuando se pide comparar la probabilidad de ocurrencia de varios eventos en la misma pregunta	Vuelvan a leer el enunciado de la tarea. ¿Qué eventos creen que se van a analizar en la situación planteada?

Tabla 13
Descripción de las ayudas de la tarea

Error	Ayuda
Asignar un cardinal menor a los resultados favorables	Revisen si tuvieron en cuenta todos los posibles resultados que pueden obtener al lanzar dos dados y hacer la suma de sus caras superiores, porque les faltan parejas. A continuación, marquen con colores los resultados favorables del evento que están analizando y por último cuenten cuántos resultados favorables son.
Asociar un evento poco probable con un evento imposible	¿Cuál creen que es la probabilidad de un evento que nunca puede suceder? Por ejemplo, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de las caras superiores de los dos dados sea 16?

El listado completo de ayudas para todos los errores previstos se encuentra en el anexo 7.

Grafo de criterios de logro de la tarea

En la figura 10, presentamos el grafo de criterios de logro del segundo objetivo de aprendizaje y destacamos las estrategias de solución que los estudiantes pueden activar al abordar la tarea. En el grafo, incluimos los errores en los que los estudiantes pueden incurrir en cada criterio de logro.

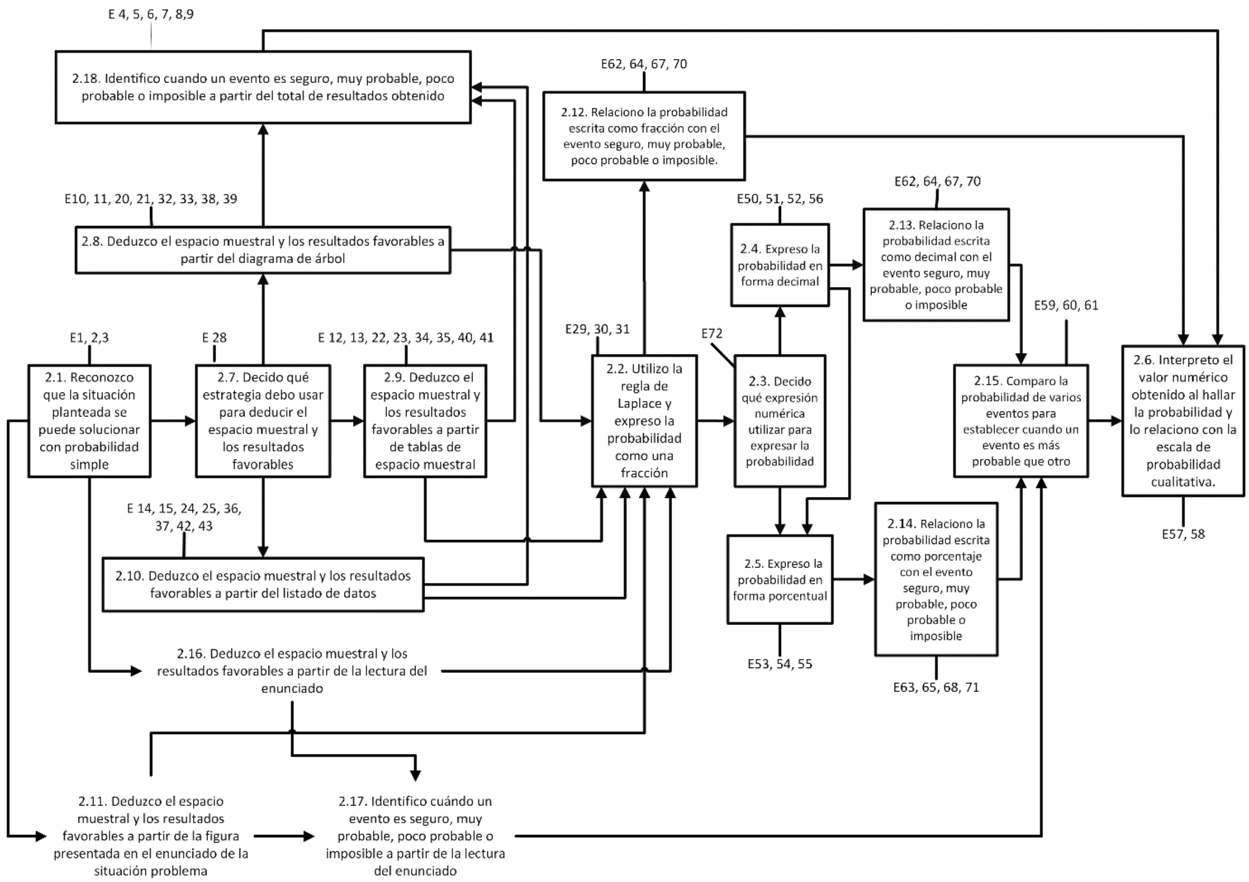


Figura 10. Grafo criterios de logro tarea 2.1 Dados

Con el desarrollo de esta tarea, los estudiantes pueden escoger varias estrategias de solución. Primero, deciden la estrategia para representar el espacio muestral. Segundo, usan la regla de Laplace para calcular la probabilidad de los eventos y escogen la escala cuantitativa que más se adapte para dar solución a la pregunta (fraccionaria, decimal y porcentual) y poder identificar qué eventos son imposibles, probables y seguros. Otra estrategia de solución es relacionar la escala cualitativa directamente con el espacio muestral; por ejemplo, asociar el evento que tiene el cardinal de resultados favorables mayor con el evento muy probable. Por último, interpretan los resultados y dan respuesta a la pregunta.

1.3. Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

Al iniciar la sesión de clase, el profesor debe realizar la lectura de la tarea y dejar claras las instrucciones del juego. El correcto uso del tablero permitirá a los estudiantes realizar el primer acercamiento a la relación entre los eventos y la escala cualitativa.

En el diálogo que tenga el profesor con los grupos, es importante que el profesor pida a los estudiantes que usen los términos aprendidos en el objetivo 1. Es el caso de términos como, por ejemplo, evento, resultados favorables, resultados totales y regla de Laplace.

Adicionalmente, durante el juego el profesor puede realizar preguntas como ¿por qué no se ha movido la ficha que está en la casilla 13? y ¿por qué una de las fichas va ganando el juego? Las respuestas que den los estudiantes ayudarán a que se identifiquen los eventos imposibles, probables y seguros en la puesta en común.

1.4. Evaluación

Para la evaluación de la tarea, es importante que el profesor tenga en cuenta los criterios de evaluación que establece el colegio en el que se va a implementar la tarea. Estos criterios de evaluación deben ser claros para los estudiantes. Por lo tanto, se deben establecer antes de que los estudiantes desarrollen la tarea.

Por otro lado, al pasar por cada grupo de estudiantes, el profesor debe observar qué grupos presentan más dificultades para contestar las preguntas y cuáles son los errores en los que incurren los estudiantes con mayor frecuencia. Esto puede ser el insumo para que el profesor finalice la sesión de clase con una explicación del tema. Adicionalmente, sugerimos la revisión del diario del estudiante como herramienta para evaluar y establecer en qué medida la tarea funcionó apropiadamente durante la implementación.

2. Tarea de aprendizaje 2.2 Bolas

La tarea 2.2 se diferencia de la tarea 2.1 en la forma como se presenta el espacio muestral. En esta tarea, los estudiantes deben hallar el total de resultados posibles y resultados favorables a partir del enunciado de la situación problema. Posteriormente, usan lo aprendido en la tarea anterior para calcular la probabilidad de ocurrencia de algunos eventos. Finalizan, al relacionar la probabilidad obtenida con la escala cualitativa. Con la segunda tarea, aportamos a las capacidades matemáticas fundamentales de diseño de estrategias, matematización, utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, y representación.

2.1. Descripción de la tarea

A continuación, presentamos la descripción de los nueve elementos de la segunda tarea del segundo objetivo.

Requisitos

Para el desarrollo de la tarea, se requiere que los estudiantes tengan conocimientos previos en la relación de orden entre fracciones, decimales y porcentajes y que sepan convertir de fracción a decimal, de decimal a porcentaje y de fracción a porcentaje. Adicionalmente, se requieren los conocimientos adquiridos en el objetivo 1 y la tarea 2.1, relacionados con el uso de la regla de Laplace y el primer acercamiento a la escala cualitativa, respectivamente.

Meta

Con la tarea 2.2 Bolas, buscamos que el estudiante establezca la relación entre las escalas de probabilidad numéricas (fraccionaria, decimal y porcentual) con la escala de probabilidad cualitativa. La relación puede generarse, en primer lugar, a partir del juego de azar presentado y posteriormente, al asociar los resultados matemáticos con el evento imposible, poco probable, muy probable y seguro.

Formulación

> En una bolsa hay 30 bolas numeradas del 11 al 40, idénticas, salvo en el color. Hay bolas rojas, bolas azules y bolas negras.
>
> 1. Sacamos, sin mirar, una bola. ¿Es más probable sacar un número par o un múltiplo de 3? Justifique su respuesta.
> 2. Se sabe que la probabilidad de sacar una bola roja es de 18/30 y de sacar una bola azul es de 9/30, ¿Cuántas bolas hay de color negro? ¿Cuál de las tres opciones de sacar una bola de la bolsa sin mirar es poco probable que suceda?
> 3. Plantee un evento para cada caso, en el que la probabilidad de extraer una bola sea muy probable, imposible y segura de suceder, a partir de la relación entre las escalas de probabilidad cuantitativas y la escala de probabilidad cualitativa.

Conceptos y procedimientos implicados en la tarea

Para el desarrollo de esta tarea, el estudiante usa los conceptos asociados con (a) las relaciones de orden entre números enteros y entre números fraccionarios; (b) representación fraccionaria, decimal y porcentual de un número; y (c) espacio muestral.

El estudiante realiza procedimientos como el uso de la regla de Laplace con su expresión fraccionaria, decimal y porcentual. Adicionalmente, compara los resultados obtenidos al calcular la probabilidad, para identificar eventos seguros, probables e imposibles.

Sistemas de representación que se activan con la tarea

Los sistemas de representación que los estudiantes pueden utilizar para desarrollar la tarea son dos. Uno es el numérico, al representar la probabilidad de los eventos en forma fraccionaria, decimal o porcentual; y otro es el simbólico, al expresar los eventos como un conjunto y expresar la probabilidad como P(A).

Contextos PISA en los que se sitúa la tarea

La tarea se encuentra en un contexto personal. En este caso particular, se usa un juego que los estudiantes pueden haber jugado con sus familias o amigos del colegio.

Materiales y recursos

Para el desarrollo de la tarea 2.2 Bolas, se entrega una hoja a los estudiantes con la formulación de la tarea. El profesor es el encargado de multicopiar la guía.

Agrupamiento e interacción

El desarrollo de la tarea 2.2 Bolas se realiza en parejas. Se busca que cada estudiante realice la tarea a partir de la interacción con uno de sus compañeros y la ayuda del profesor. Este tipo de agrupamiento se mantiene durante todo el desarrollo de la tarea.

En la puesta en común, el profesor buscará que los estudiantes reconozcan la importancia de usar las diferentes expresiones numéricas al hallar la probabilidad. Adicionalmente, mostrará la relación entre la escala de probabilidad numérica con la escala de probabilidad cualitativa.

Temporalidad
La tarea 2.2 se desarrolla de acuerdo con la temporalidad que presentamos en la tabla 14.

Tabla 14
Temporalidad tarea 2.2 Bolas

Actividad	Tiempo (minutos)
Puesta en común de los resultados obtenidos en la anterior tarea	5
Lectura de las metas y explicación de la tarea	3
Desarrollo de la tarea	25
Puesta en común dirigida por el profesor	5
Lectura de los criterios de logro	2
Diligenciamiento del diario del estudiante	8
Recolección de tareas y diarios del estudiante	2

2.2. Errores, grafo de criterios de logro de la tarea y actuación del profesor

A continuación, presentamos los aspectos relacionados con los errores en los que pueden incurrir los estudiantes al desarrollar la tarea 2.2 y las respectivas ayudas que puede usar el profesor para promover su superación. Adicionalmente, mostramos el grafo de criterios de logro del objetivo 2 y señalamos las estrategias de solución que los estudiantes pueden activar al abordar esta tarea.

Errores en los que puede incurrir el estudiante y ayudas
Al desarrollar la tarea, los estudiantes pueden incurrir con mayor frecuencia en dos errores. El primer error es evidente cuando los estudiantes asignan un cardinal mayor al espacio muestral luego de la lectura del enunciado. Segundo, pueden identificar más o menos resultados favorables. Este último error lleva a que los estudiantes presenten dificultad para comparar la probabilidad de un evento y decidir cuándo un evento es más probable que otro. El listado completo de dificultades y errores en que pueden incurrir los estudiantes se encuentra en el anexo 3.

En la tabla 15, mostramos las ayudas que sugerimos implementar en caso de que los estudiantes incurran en los errores mencionados.

Tabla 15
Descripción de las ayudas de la tarea 2.2 Bolas

Error	Ayuda
Asignar un cardinal mayor al espacio muestral.	Verifique si tiene en cuenta todos los posibles resultados de las bolas que se encuentran en la bolsa. Recuerde que las bolas son de diferentes colores y están numeradas desde el 11 hasta el 40.
Identificar más o menos resultados favorables.	Puede representar el espacio muestral dibujando las bolas con sus respectivos colores y verificar si los resultados favorables están completos.

El listado completo de ayudas para todos los errores previstos se encuentra en el anexo 7.

Grafo de criterios de logro de la tarea

En la figura 11, presentamos el grafo de criterios de logro del segundo objetivo de aprendizaje y destacamos las estrategias de solución que los estudiantes pueden activar al abordar la tarea. En el grafo, incluimos los errores en los que los estudiantes pueden incurrir en cada criterio de logro.

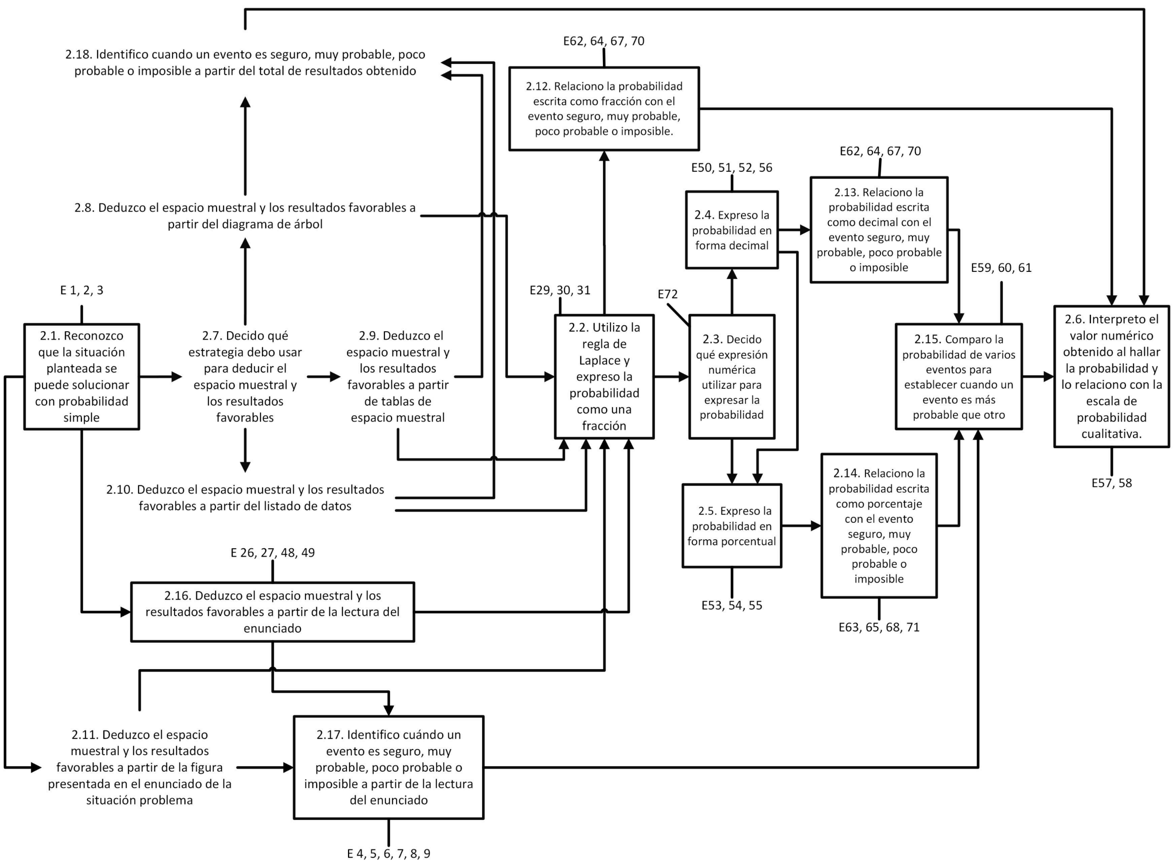


Figura 11. Grafo criterios de logro tarea 2.2 Bolas

Inicialmente, los estudiantes pueden identificar que el experimento de escoger una bola y predecir el número y el color depende exclusivamente del azar. Enseguida, los estudiantes deducen del enunciado el espacio muestral y los resultados favorables. Con la información obtenida hasta ahora, los estudiantes pueden activar dos estrategias de solución. Por un lado, puede que identifiquen los eventos seguros, posibles o imposibles. Y por otro, puede que usen la regla de Laplace para calcular la probabilidad, escojan la representación numérica (fraccionaria, decimal o porcentual) que más se ajuste a la solución de cada pregunta y, con esa información, identifiquen los eventos seguros, posibles o imposibles.

2.3. Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

Al igual que con la primera tarea, proponemos al profesor pasar por los diferentes grupos y estar atento a las discusiones de los estudiantes para poder prestar la ayuda en el momento adecuado. Adicionalmente, consideramos importante que el profesor les recuerde constantemente la relación entre la escala cuantitativa y la escala cualitativa.

Al finalizar el desarrollo de las preguntas, es importante que el profesor realice la puesta en común. En ella, debe retomar algunas de las soluciones encontradas por los estudiantes, reiterar el uso correcto de la regla de Laplace con sus diferentes expresiones numéricas y proponer ejemplos de eventos seguros, posibles o imposibles.

2.4. Evaluación

Para hacer la evaluación de la tarea, proponemos que el profesor recoja las producciones escritas de los estudiantes y le asigne una valoración numérica al trabajo realizado. Para asignar la valoración, el profesor debe identificar si se calculó correctamente la probabilidad de ocurrencia de los eventos, si se logró identificar con claridad qué eventos eran más probables que otros y, finalmente, si las representaciones numéricas usadas son correctas. Dicha valoración debe ser acorde con lo establecido en el sistema de evaluación de su institución.

Al igual que en la primera tarea, sugerimos la revisión del diario del estudiante y usar este instrumento como herramienta para evaluar y establecer en qué medida la tarea funcionó apropiadamente durante la implementación.

3. Tarea de aprendizaje 2.3 Ruleta

La tarea 2.3 Ruleta es la última tarea propuesta relacionada con el segundo objetivo. Es una tarea en la que los estudiantes deben usar los conceptos y procedimientos desarrollados con el primer objetivo (uso de la regla de Laplace y escalas de probabilidades numéricas). Inicialmente, los estudiantes deben leer y comprender el funcionamiento del juego de la ruleta francesa. Posteriormente, los estudiantes deben deducir el espacio muestral y el total de resultados posibles para hallar las probabilidades numéricas de las apuestas que pueden hacer en el juego. Con esto, el estudiante establece la relación de orden entre las probabilidades numéricas, para identificar qué apuestas tienen una probabilidad de ocurrencia mayor que otras.

La tarea 2.3 contribuye a las capacidades matemáticas fundamentales de diseño de estrategias, matematización, utilización de operaciones y un lenguaje simbólico y representación.

3.1. Descripción de la tarea

A continuación, presentamos la descripción de los nueve elementos de la tercera tarea del segundo objetivo.

Requisitos

La tarea requiere que los estudiantes determinen el espacio muestral a partir de la figura presentada en el enunciado y usen la regla de Laplace para hallar la probabilidad de eventos simples. Adicionalmente, los estudiantes deben saber que la probabilidad de ocurrencia de un evento no puede ser negativa, que la probabilidad es un número comprendido entre 0 y 1, que la probabilidad del evento seguro es 1 y que la probabilidad de un evento imposible es 0. Finalmente, deben saber establecer la relación entre las escalas de probabilidad cuantitativas y la escala de probabilidad cualitativa.

Metas

Con la tarea, buscamos que el estudiante analice e interprete la situación problema presentada como juego, y que, a partir de ese primer acercamiento, cree situaciones en las que la probabilidad de los eventos sea imposible, poco probable, muy probable y segura de ocurrir a partir de un contexto dado.

Formulación

En grupos de 6 estudiantes, lean qué es la ruleta francesa, las partes y cómo se juega.

El juego de la ruleta francesa

La ruleta francesa es un juego de azar cuya característica esencial reside en que los participantes juegan contra el casino. La posibilidad de acertar a los números o apuestas definidas en el paño se obtiene del último giro de una bola que se mueve dentro de una rueda horizontal giratoria, denominada ruleta.

Instrumentos de la ruleta

Ruleta

La ruleta francesa está formada por 37 números (0 al 36). Alrededor de la ruleta, los números se disponen alternando los números rojos con los negros. Si se divide la ruleta que se observa en la figura en dos partes iguales a partir del cero (0), se obtienen dos mitades compuestas por 18 números cada una.

Ruleta

Paño de apuestas

Las apuestas de la ruleta se hacen sobre el paño o tapete, en el que están situados todos los números de la ruleta con su mismo color, rojo o negro, y colocados en tres columnas de 12 números cada una.

Paño de apuestas

La información y las figuras son tomadas de https://www.casino.es/ruleta/ruleta-francesa/

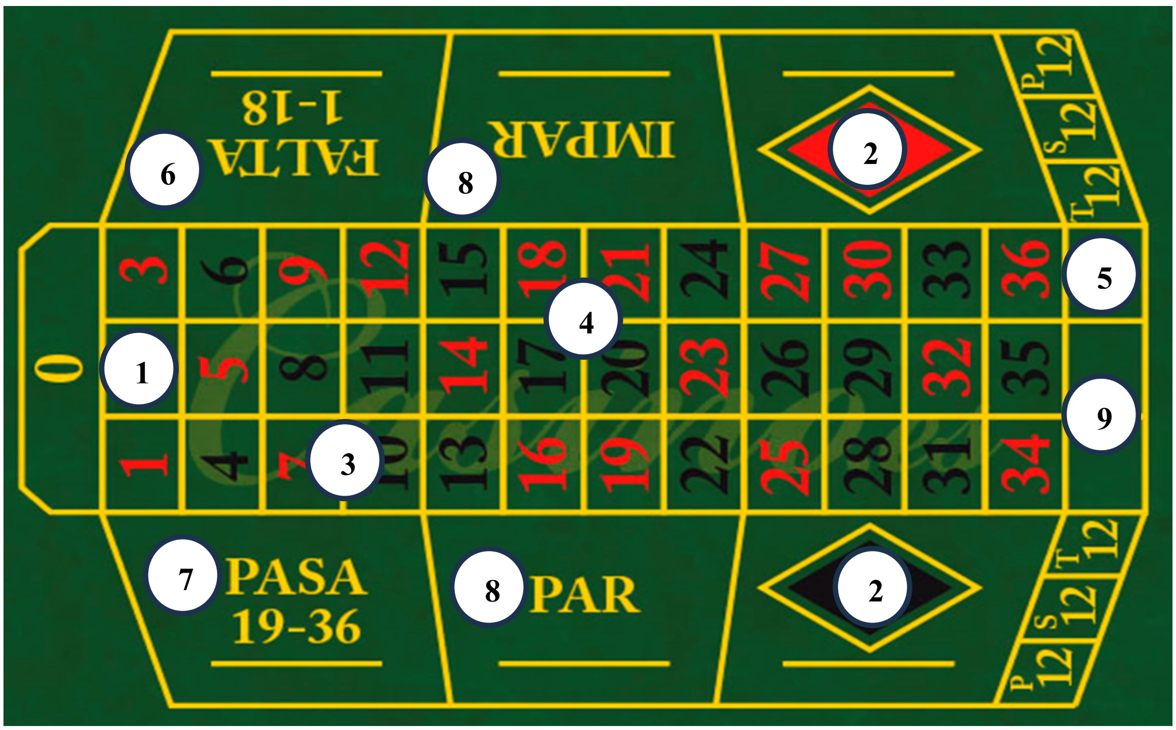
Tipos de apuestas

En la siguiente tabla encontrarán las descripciones de algunas de las apuestas que se pueden hacer en el juego de la ruleta francesa. En la primera columna, se relaciona el ejemplo que se presenta en la figura de abajo con la descripción de la apuesta a realizar.

Número de ejemplo en la figura	Nombre de la apuesta	Se juega a
1	Directa	Se apuesta a un solo número.
2	Rojo o Negro	Se apuesta al color del número ganador, si será rojo o negro.
3	Dividida	Se apuesta a dos números situados en casillas consecutivas.
4	Sencilla	Se apuesta a un bloque de cuatro números situados en casilla consecutivas; por ejemplo, apostar a los números 5, 6, 8 y 9. La ficha debe colocarse en el centro de los cuatro números.
5	Columna	Se trata de apostar en qué columna estará el número ganador.
6	Números bajos	Se apuesta a los números del 1 al 18.
7	Números altos	Se apuesta a los números del 19 al 36.
8	Números pares o	Se apuesta si el número donde cae la bola será par o impar.

Número de ejemplo en la figura	Nombre de la apuesta	Se juega a
	impares.	
9	Doble columna	Se trata de apostar con una sola apuesta a dos columnas. Esta apuesta solo se puede realizar para dos columnas contiguas.

En la siguiente figura encontraran los ejemplos de cómo se deben ubicar las fichas en el tablero de apuestas.



Tipos de apuestas

A jugar

En grupos de 6 estudiantes, jueguen a la ruleta francesa. Para ello, deben decidir quién será el jugador que maneje la ruleta y quiénes los apostadores. Posteriormente, se le reparte a cada apostador 20 fichas. Para iniciar con las apuestas, cada jugador debe escoger el tipo de apuesta que va a realizar y pondrá sobre el paño la ficha en el lugar indicado (ver tipos de apuestas). El jugador que maneja la ruleta hace girarla y el número en el que caiga la canica será el que define qué apostador gana el juego y se lleva todas las apuestas. Si no cae ningún número, el que maneja la ruleta se lleva todas las fichas.

Cuestionario

Después de jugar con tus compañeros a la ruleta francesa, resuelvan las siguientes preguntas.

En la siguiente tabla, se muestran los tipos de apuestas que se pueden hacer sobre el paño de apuestas. Para cada tipo de apuesta, calculen la probabilidad de ocurrencia (ver ejemplo con la apuesta directa).

Nombre de la apuesta	Probabilidad		
	Fracción	**Decimal**	**Porcentaje**
Directa	$\frac{1}{37}$	0,027	2,7%
Rojo o Negro	Rojo:		
	Negro:		
Dividida			
Sencilla			
Columna			
Números bajos			
Números altos			
Números pares o impares.	Pares:		
	Impares:		
Doble columna			

1. Entre la apuesta a una columna y la apuesta a los números pares, ¿cuál tiene menos probabilidad de ocurrir?
2. Se considera muy probable un evento que tenga una probabilidad de ocurrencia entre el 51% y el 99% ¿Cuál de los eventos mencionados es muy probable que ocurra?
3. Cuando se gana una apuesta clasificada como poco probable (se considera poco probable un evento que tenga una probabilidad de ocurrencia entre 0,01 y 0,49), el ganador recibe 20 fichas adicionales para jugar. ¿A cuál evento apostaría para obtener esas fichas?
4. ¿Qué evento es imposible que ocurra al jugar a la ruleta?
5. Planteen un tipo de apuesta en el que sea seguro ganar al jugar en la ruleta francesa.
6. Entre una apuesta directa, la apuesta dividida y la apuesta de los números rojos, ¿cuál tiene más probabilidad de ganar?

Conceptos y procedimientos
Para el desarrollo de esta tarea, el estudiante usa conceptos tales como la relación de orden entre números racionales, conversión entre fracciones, decimales y porcentajes, espacio muestral, uso de la regla de Laplace y la relación entre la escala de probabilidad numérica y la escala de probabilidad cualitativa.

Por otro lado, los procedimientos que debe realizar el estudiante para solucionar la tarea son usar la regla de Laplace para hallar la razón entre el total de resultados favorables y el total de resultados posibles de un evento, convertir una fracción a decimal, convertir un decimal a porcentaje, establecer la relación de orden entre las probabilidades para saber cuándo un evento tiene mayor probabilidad de ocurrencia que otro y plantear situaciones en las que sea imposible, probable o seguro de ocurrir.

Sistemas de representación
Para resolver la tercera tarea, los estudiantes pueden activar los sistemas de representación numérico y simbólico. El sistema de representación simbólico se activa al usar la regla de Laplace, al expresar los eventos como un conjunto $\{A, B, C...\}$ y al expresar la probabilidad como P(A). El sistema numérico se activa cuando los estudiantes expresan la probabilidad en forma fraccionaria, decimal o porcentual.

Contextos PISA en los que se sitúa la tarea
La tarea está enmarcada en un contexto social, ya que la situación planteada se centra en un juego de azar que los estudiantes pueden encontrar en su entorno.

Materiales y recursos
Para el desarrollo de la tarea 2.3 Ruleta, se usan tres recursos: una ruleta francesa, un tapete de apuestas y fichas para realizar las apuestas sobre el tapete. Los estudiantes en una tarea extraescolar construirán con cartón paja la ruleta, el tapete de apuestas y las fichas de apuestas.

Agrupamiento e interacción
Para el desarrollo de la tarea 2.3 Ruleta, organizamos grupos de seis estudiantes. Con este agrupamiento, buscamos que el estudiante tenga tiempo de jugar y de analizar los diferentes tipos de apuestas que pueden realizar y su probabilidad de acertar. Después, deben responder las diferentes preguntas propuestas sobre algunas probabilidades, y así, mediante la interacción entre los estudiantes de cada grupo y el profesor puedan llegar a relacionar la escala numérica con la escala cualitativa. Para finalizar, realizamos una puesta en común de las escalas cuantitativas y cualitativas realizadas por los estudiantes, con el fin de llegar a una generalización entre todo el gran grupo.

Temporalidad
La tercera y última tarea se desarrolla de acuerdo con la temporalidad que presentamos en la tabla 16.

Tabla 16

Temporalidad tarea 2.3 Ruleta

Actividad	Tiempo (minutos)
Puesta en común de los resultados obtenidos en la anterior tarea	5
Lectura de las metas de la tarea	5
Desarrollo de la tarea	40
Puesta en común dirigida por el profesor	10
Lectura de los criterios de logro	5
Diligenciamiento del diario del estudiante	5
Recolección de tareas y diarios del estudiante	2

3.2. **Errores, grafo de criterios de logro de la tarea y actuación del profesor**

A continuación, presentamos los aspectos relacionados con los errores en los que pueden incurrir los estudiantes al desarrollar la tarea 2.3, las respectivas ayudas que puede usar el profesor para promover su superación y el grafo de criterios de logro con las estrategias de solución que los estudiantes pueden activar al abordar esta tarea.

Errores en los que puede incurrir el estudiante y ayudas

En la tabla 17, relacionamos algunos de los errores en los que pueden incurrir los estudiantes al solucionar la tarea 2.3 Ruleta con sus ayudas. El listado completo de ayudas para todos los errores previstos se encuentra en el anexo 7.

Tabla 17

Descripción de las ayudas de la tarea 2.3 Ruleta

Error	Ayuda
Asignar un cardinal mayor a los resultados favorables en un experimento a partir de la observación de las figuras presentadas en una situación problema.	Recuerden que los resultados favorables son solo aquellos eventos elementales del espacio muestral que cumplen la condición del evento al cual le están hallando la probabilidad. Subrayen o realicen una lista de resultados favorables del evento que están analizando y luego, cuenten cuántos elementos hay. Por ejemplo, para la apuesta dividida solo pueden elegir dos números consecutivos cualquiera; es decir, que la cantidad de resultados favorables son dos.

Tabla 17

Descripción de las ayudas de la tarea 2.3 Ruleta

Error	Ayuda
Asignar un cardinal menor a los resultados favorables en un experimento a partir de la observación de las figuras presentadas en una situación problema.	Revisen que tienen en cuenta todos los resultados favorables en el tapete de apuestas que cumplen el evento que están analizando. Recuerden que los casos favorables son aquellos elementos del espacio muestral que cumplen las características del evento que están analizando. Por ejemplo, si el evento fuera obtener un número mayor a 30, los resultados favorables serían 31, 32, 33, 34, 35, 36.
Utilizar los casos desfavorables respecto a los casos posibles para calcular la probabilidad de un evento.	Revisen la regla de Laplace y recuerden que es diferente el total de casos posibles y los casos desfavorables. Los casos desfavorables son aquellos que no cumplen las condiciones del evento. Por ejemplo, para el evento de sacar un número mayor que 35, un caso desfavorable sería 30.
Asociar la regla de Laplace como el total de resultados posibles sobre el total de resultados favorables.	En la regla de Laplace se relaciona el total de casos favorables sobre el total de casos posibles.
Utilizar los casos favorables respecto a los casos desfavorables para calcular la probabilidad de un evento.	Recuerden que los resultados favorables son solo aquellos eventos elementales del espacio muestral que cumplen la condición del evento al cual le están hallando la probabilidad. Subrayen o realicen una lista de resultados favorables del evento que están analizando y luego cuenten cuántos elementos hay. Por ejemplo, para la apuesta dividida, solo puedo elegir dos números consecutivos cualquiera; es decir, que la cantidad de resultados favorables son dos.

Grafo de criterios de logro de la tarea

En la figura 12, presentamos el grafo de criterios de logro del segundo objetivo de aprendizaje y destacamos en recuadro las estrategias de solución que los estudiantes pueden activar al abordar la tarea.

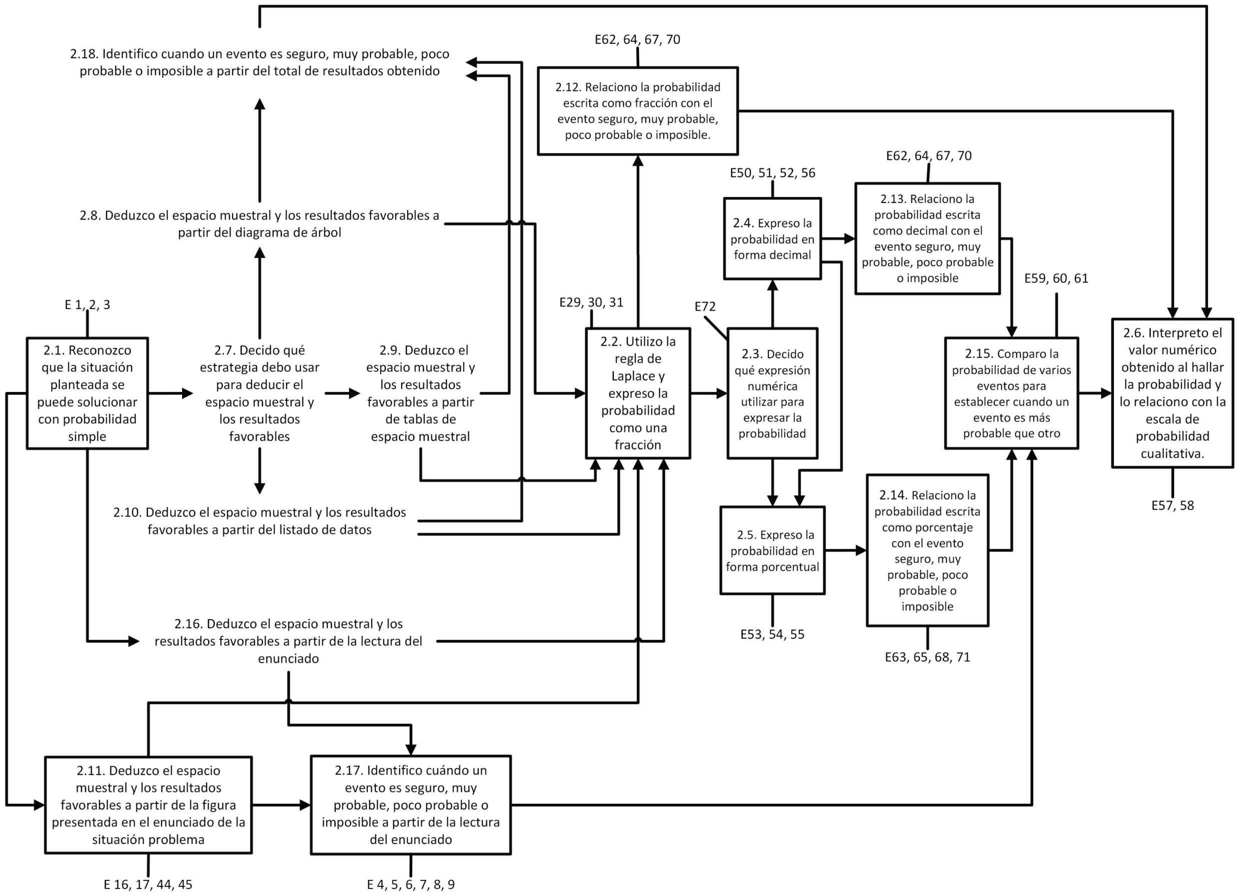


Figura 12. Grafo criterios de logro tarea 2.3 Ruleta

En la figura 12, presentamos las diferentes estrategias que pueden usar los estudiantes al desarrollar la tarea 2.3 Ruleta. Inicialmente, los estudiantes deben analizar las instrucciones y el funcionamiento del juego de la ruleta. Posteriormente, deben hallar el espacio muestral y el total de resultados favorables para hallar la probabilidad de los eventos. Después, hallan la probabilidad mediante la regla de Laplace, expresan la probabilidad en fracción, decimal y de forma porcentual. Finalmente, los estudiantes relacionan la escala de probabilidad cuantitativa con la escala cualitativa para comparar las probabilidades y saber qué apuesta es más probable para ganar en el juego de la ruleta francesa.

3.3. Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

Para el desarrollo de la última tarea del segundo objetivo, es importante que, antes de implementar la tarea, el profesor construya con los estudiantes la ruleta y el paño de apuestas en una clase extracurricular. Al iniciar el desarrollo de la tarea, el profesor debe tomarse un tiempo prudente para explicar los elementos de la ruleta francesa y cómo se juega. Al llegar a la explicación de los tipos de apuesta, el profesor lee cada una de las apuestas, muestra el ejemplo que está en el paño de apuesta de la formulación de la tarea y pide a los estudiantes que propongan otro ejemplo de esa apuesta. Con esta explicación, el profesor puede asegurarse de que todas las apuestas son claras para los estudiantes.

Durante el desarrollo de la tarea, recomendamos que el profesor retome brevemente la explicación de las tareas anteriores sobre la relación entre la escala de probabilidad numérica y la escala de probabilidad cualitativa. Al igual que con las dos primeras tareas, proponemos al profesor pasar por los diferentes grupos y estar atento a las discusiones de los estudiantes para poder prestar la ayuda en el momento adecuado.

3.4. **Evaluación**

Para hacer la evaluación de la tarea, proponemos que el profesor recoja las producciones escritas de los estudiantes. Con estas últimas producciones escritas, el profesor logra evidenciar los avances, dificultades y logro del segundo objetivo. Para asignar la valoración numérica, el profesor debe identificar si el estudiante calculó correctamente la probabilidad de los eventos, si realizó correctamente la conversión entre las expresiones numéricas (fraccionaria, decimal y porcentual) y si identificó cuándo un evento es imposible, probable o seguro de ocurrir. Dicha valoración debe ser acorde con lo establecido en el sistema de evaluación de su institución.

6. EXAMEN FINAL

Además de la tarea diagnóstica y las tareas de aprendizaje, realizamos el examen final, con el que pretendemos identificar el logro de los dos objetivos, identificar la incurrencia de errores y asignar una valoración a cada estudiante. Adicionalmente, el examen final atiende al logro de los tres procesos matemáticos (formular, interpretar y emplear) y de las capacidades matemáticas fundamentales propuestas para el desarrollo de la unidad didáctica.

El examen final está compuesto por tres tareas de evaluación. La primera tarea evalúa el alcance del primer objetivo. Allí, el estudiante construye el espacio muestral a partir de la información dada en el enunciado, calcula la probabilidad de los eventos y la expresa de forma fraccionaria, decimal y/o porcentual. Además, compara las probabilidades de los eventos para establecer qué eventos tienen mayor o menor probabilidad de ocurrencia. La segunda y tercera tarea de evaluación están relacionadas con el logro del segundo objetivo. En la segunda tarea, el estudiante halla el espacio muestral a partir del enunciado, y establece la relación de orden entre las probabilidades halladas. En la tercera tarea, el estudiante halla el espacio muestral a partir de la figura e identifica y compara si los eventos propuestos en los enunciados son probables, seguros o imposibles de ocurrir. A continuación, presentamos la formulación del examen final de nuestra unidad didáctica.

> Resuelva los siguientes problemas y realice cada uno los procedimientos adecuados para justificar los resultados.
>
> Tarea de evaluación 1
>
> Carmen y Daniel han inventado un juego de dados con las siguientes reglas.
>
> - Lanzan dos dados simultáneamente y calculan la diferencia de los puntos entre el mayor y el menor.
> - Si resulta una diferencia de 0, 1 o 2, entonces Carmen gana una ficha.
> - Si resulta una diferencia de 3, 4 o 5, es Daniel quien gana una ficha.
>
> Juguemos
>
> Lance los dos dados y complete la tabla. Luego marque con una x quien gana la ficha.

Lanzamiento	Números obtenidos en las caras superiores	Diferencia	Carmen	Daniel
1				
2				
3				
4				
5				

A partir de la información anterior, conteste las siguientes preguntas y justifique su respuesta.

1. Deduzca el espacio muestral y determine si los dos jugadores tienen la misma probabilidad de ganar. Justifique la respuesta.
2. Si tuviera que jugar, ¿cuál jugador preferiría ser? ¿Por qué?
3. Si tomamos en cuenta todos los posibles eventos (que la diferencia de los puntos de las caras superiores de los dos dados sea 0, 1, 2, 3, 4 o 5), ¿cuáles eventos tienen una probabilidad de ocurrencia mayor a $\frac{10}{36}$?

Cambiamos las reglas del juego

- Si resulta una diferencia de 1, 5 o 7, entonces Carmen gana una ficha.
- Si resulta una diferencia de 2, 4 o 5, es Daniel quien gana una ficha.

1. ¿Aumenta o disminuye la probabilidad que tiene Carmen de ganar? Justifique su respuesta.
2. ¿Cuál de los eventos presentados en el punto 3 tienen una probabilidad de ocurrencia menor a 0,12?

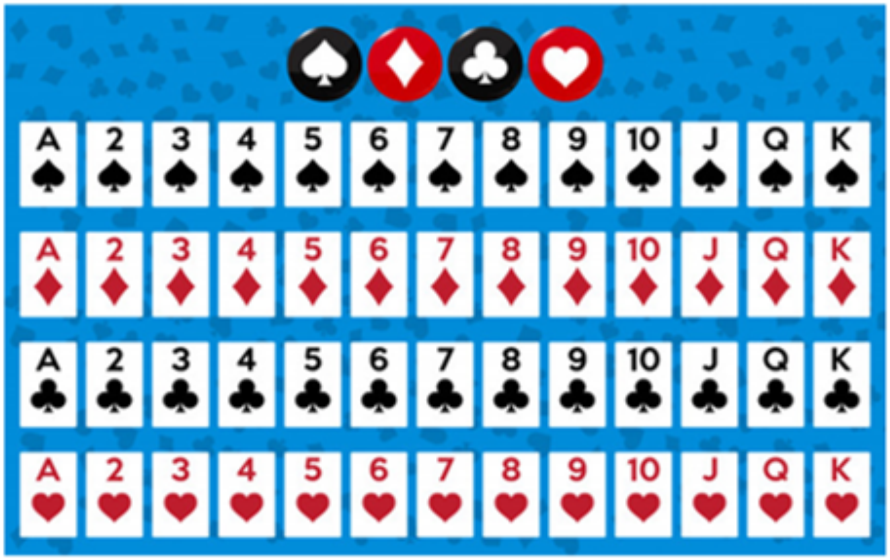
Tarea de evaluación 2

La madre de Roberto le deja coger un caramelo de una bolsa. Él no puede ver los caramelos. El número de caramelos que hay de cada color es el siguiente: 6 rojos, 5 naranjas, 3 amarillos, 2 azules, 3 verdes, 4 rosas, 1 violeta y 7 marrones.

1. ¿De qué color es más probable que Roberto escoja un caramelo? Justifique su respuesta.
2. Si adivinar el color del caramelo que se va a escoger le permitiera ganar un premio, ¿a qué colores (mencione dos) preferiría no apostarle? Justifique su respuesta.
3. ¿Qué colores de caramelo tienen la misma probabilidad de ser escogidos?

Tarea de evaluación 3

Observe el naipe que se muestra en la figura.



Juego de cartas naipe

Imagen tomada de https://www.freepik.com/premium-vector/full-deck-cards-playing-poker-casino_3916647.htm

1. A partir de la figura, complete las siguientes afirmaciones con el uso de “menos probable”, “igual de probable” o “más probable”.

    a. Obtener una “J” es _______________que un tres de trébol.

    b. Sacar una “K” es _________________ que una carta de picas.

    c. Sacar una carta de tréboles es ________________ que sacar una carta de corazones.

    d. Sacar un número inferior a siete es ________________ que un número impar.

2. A partir de la figura, complete las siguientes afirmaciones con el uso de “poco probable” “muy probable”, “seguro” o “imposible”.

    a. Es ________________ sacar una carta con un número superior a 13.

    b. Es ________________ sacar una carta con un número menor a 10.

    c. Es ________________ sacar una carta que sea de picas, de corazones, de tréboles o de diamantes.

1.1. Rúbrica de evaluación del examen final

Creamos dos rúbricas de evaluación que reflejan la medida en que un estudiante ha avanzado en el logro de los criterios señalados a lo largo del grafo de cada objetivo. La primera rúbrica permite evaluar el desempeño de los estudiantes en la primera tarea de evaluación. La segunda rúbrica permite evaluar el nivel de rendimiento en las tareas dos y tres. Cada una de las rúbricas de evaluación está conformada por cuatro niveles de desempeño, en los que se pueden clasificar los resultados de los estudiantes luego de la implementación del examen final. En esta valoración, consideramos los niveles de desempeño superior, alto, básico y bajo con su respectiva correspondencia numérica. Realizamos la escala de valoración numérica de acuerdo con la escala de la institución en la que aplicamos la unidad didáctica. Sin embargo, el profesor puede adaptarla a la escala de valoración de su institución. Realizamos la descripción de los niveles de desempeño a partir de los procedimientos y errores en los que pueden incurrir los estudiantes al desarrollar el examen final, de manera que proporcione información sobre el proceso de cada estudiante. En la tabla 18, presentamos como ejemplo la rúbrica de evaluación del primer objetivo (primera tarea de evaluación).

Tabla 18
Niveles de desempeño e indicadores del primer objetivo

Nivel de desempeño	Indicadores	Valoración numérica
Superior	El estudiante contesta todas las preguntas y activa todos los criterios de logro propuestos sin incurrir en errores. Es decir, el estudiante reconoce que la situación se resuelve con probabilidad simple. Calcula el espacio muestral y el total de resultados favorables. Usa la regla de Laplace para hallar la probabilidad de un evento. Expresa la probabilidad en forma fraccionaria, decimal y porcentual e interpreta los valores numéricos para dar respuesta a la situación planteada.	4,6 a 5,0
Alto	El estudiante reconoce que la situación planteada se resuelve con probabilidad simple. El estudiante deduce el espacio muestral y el total de resultados de la situación problema. El estudiante usa la regla de Laplace para expresar la probabilidad en fracción, pero se le dificulta expresarlo como decimal (E50, E51, E52, E56) o en forma porcentual (E53, E54, E55). El estudiante interpreta los valores numéricos obtenidos.	4,0 a 4,5

Tabla 18

Niveles de desempeño e indicadores del primer objetivo

Nivel de desempeño	Indicadores	Valoración numérica
Básico	El estudiante reconoce que la situación planteada se resuelve con probabilidad simple.	3,3 a 3,9
	El estudiante usa algunos sistemas de representación para deducir el espacio muestral y el total de resultados favorables a partir del diagrama de árbol, listados de datos, tablas de espacio muestral, pero incurre en los errores E10 al E15, al identificar más o menos elementos del espacio muestral.	
	Usa la regla de Laplace para expresar la probabilidad en fracción, pero se le dificulta expresarlo como decimal (E50, E51, E52, E56) o en forma porcentual (E53, E54, E55).	
	Se le dificulta interpretar los resultados numéricos obtenidos al incurrir en los errores E57 y E58.	
Bajo	El estudiante reconoce que la situación planteada se resuelve con probabilidad simple, pero, no sabe cómo hallar el espacio muestral al incurrir en el error de bloqueo E28. Esto no le permite continuar con el desarrollo de la tarea.	1,0 a 3,2
	El estudiante construye el espacio muestral, pero calcula más o menos elementos (E10 al E15, E22 a E27) e identifica más o menos resultados favorables (E32 al E43).	
	El estudiante se le dificulta usar adecuadamente la regla de Laplace, (E29, E30, E31) lo que le impide continuar con el desarrollo de la tarea.	
	El estudiante incurre en errores al expresar la probabilidad como decimal (E50, E51, E52, E56) o en forma porcentual (E53, E54, E55).	

Nota. E = error

En el anexo 10, presentamos el examen final y las dos rúbricas de evaluación. El listado completo de errores se muestra en el anexo 3. En el último anexo del documento llamado imprimibles, presentamos la formulación de todas las tareas. Con este anexo, buscamos que cualquier profesor que quiera desarrollar dichas tareas en sus clases las pueda imprimir.

7. CONCLUSIONES

La unidad didáctica que presentamos en este documento es un aporte para los profesores interesados por el estudio de la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad simple. El diseño e implementación de nuestra unidad didáctica nos permitió observar la importancia de identificar y trabajar múltiples variables que se presentan en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Analizamos inicialmente la normativa curricular colombiana en la que está enmarcada nuestra unidad didáctica. Para ello, tuvimos en cuenta los documentos curriculares de los Estándares Básicos de Competencias (Ministerio de Educación Nacional [MEN], 2006), los Derechos básicos de aprendizaje (MEN 2016), el marco conceptual PISA 2012 (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2013) y el plan de área del en el que implementamos nuestra unidad didáctica (IED Antonio Van Uden). Por otro lado, la revisión y documentación en torno a la historia de la probabilidad, la fenomenología y los sistemas de representación nos permitió identificar información clave para establecer el análisis de contenido. Con esta información establecimos que nuestra unidad didáctica estaría relacionada con el uso de la Regla de Laplace y la relación que existe entre las escalas de probabilidad numéricas y la escala de probabilidad cualitativa. A partir de esta información, definimos los dos objetivos de nuestra unidad didáctica. Para cada uno de los objetivos plantemos tres tareas de aprendizaje. Adicionalmente, diseñamos dos tareas de evaluación. Una es la tarea diagnóstica, que diseñamos a partir de los conocimientos previos que debían tener los estudiantes para poder desarrollar posteriormente las tareas de aprendizaje. A partir del diseño de la tarea diagnóstica, comprendimos que es fundamental que el profesor tenga en cuenta los conocimientos previos que deben tener los estudiantes antes de planear una sesión de clase o desarrollar un tema en específico, ya que de esto depende el éxito que pueda tener el implementar las tareas de aprendizaje a los estudiantes. La otra tarea de evaluación es el examen final, que nos permitió evaluar el nivel de rendimiento de los estudiantes en cada uno de los objetivos.

El nivel de detalle que tuvimos en el análisis cognitivo para la elaboración de nuestra unidad didáctica, se identifica en aspectos como (a) el listado de errores y dificultades para el tema de probabilidad simple; (b) el diseño de los grafos con las estrategias de aprendizaje para la solución de cada tarea; (c) el diseño de las tareas de aprendizaje con contextos cercanos al estudiante (juegos de azar); (d) el uso de diferentes materiales y recursos que enriquecieron y motivaron el proceso de enseñanza en los estudiantes; (d) el diseño de nuestra tarea diagnóstica a partir de los conocimientos previos de los estudiantes; (e) el listado de acciones de mejora relacionadas con la tarea diagnóstica; (f) las expectativas de nivel superior y medio, los procesos matemáticos y capacidades matemáticas propuestas en PISA 2012; y (g) el diseño del examen final.

En el análisis de actuación, cambiamos la percepción de la idea de evaluación. Es decir, no realizamos la evaluación de forma tradicional, basada en una valoración numérica que carece de un proceso de retroalimentación continuo, tanto para el profesor como para los estudiantes. Por el contrario, ahora percibimos la evaluación ahora como un proceso constante a partir de las estrategias que emplea cada estudiante al desarrollar las tareas propuestas. Consideramos que con nuestra unidad didáctica hacemos partícipes a los estudiantes en la evaluación de su progreso en el alcance de cada uno de los objetivos. Evidenciamos este aporte en la evaluación de los estudiantes a partir de la retroalimentación de las diferentes sesiones de clase y en los resultados de los diarios de los estudiantes (semáforos y matematógrafo). Así pues, la evaluación pasa de ser un proceso impersonal a ser una cuestión dialógica, en la que son responsables el profesor y el estudiante.

Finalmente, creemos que el trabajo de estos dos años en la maestría ha influido en nuestro desempeño laboral y ha contribuido en cambiar nuestras interacciones para mejorar nuestra labor en la enseñanza de las matemáticas. Ejemplo de ello es el trabajar en equipo. Ahora somos más receptivas con los compañeros de trabajo, ya que en nuestra profesión docente debemos hacer propuestas, comparar posiciones y llegar a acuerdos para presentar los resultados finales, ya sea para reestructurar los planes de área, y hacer evaluaciones finales y planeaciones de clase, entre otros. Por otro lado, ahora estamos más interesadas en identificar los errores en los que incurren los estudiantes, de modo que podamos establecer estrategias de ayuda para que los estudiantes comprendan de una mejor manera los temas de clase.

8. LISTADO DE ANEXOS

Presentamos, a continuación, el índice de los anexos, que complementan la información de la primera parte del informe final.

1.1. Anexo 1. Plan de área del Colegio Antonio Van Uden
Contiene la descripción de la malla curricular del área de matemáticas del Colegio Antonio Van Uden.

1.2. Anexo 2. Listado de conocimientos previos
Presentamos el listado de conocimientos. Este listado surge luego de realizar el análisis cognitivo y determinar un punto de partida para el desarrollo de la unidad didáctica.

1.3. Anexo 3. Listado de dificultades y errores
Presentamos el listado de dificultades y sus errores asociados.

1.4. Anexo 4. Listado de criterios de logro y grafo del objetivo 1
Presentamos la caracterización del objetivo, el listado completo de criterios de logro y el grafo del primero objetivo.

1.5. Anexo 5. Listado de criterios de logro y grafo del objetivo 2
Presentamos la caracterización del objetivo, el listado completo de criterios de logro y el grafo del segundo objetivo.

1.6. Anexo 6. Listado acciones de mejora
En este anexo, presentamos el listado de dificultades, errores y las acciones de mejora asociadas al desarrollo de la tarea diagnóstica.

1.7. Anexo 7. Listado de ayudas
En este anexo, presentamos el listado de ayudas que el profesor puede implementar para contribuir a que los estudiantes corrijan sus errores en el desarrollo de las tareas de aprendizaje.

1.8. Anexo 8. Diario del estudiante
En este anexo, presentamos el formato del diario del estudiante para cada una de las seis tareas de aprendizaje.

1.9. Anexo 9. Fichas de las tareas
En este anexo presentamos la caracterización de cada una de las tareas propuestas para el objetivo.

1.10. Anexo 10. Examen final y rúbrica de evaluación
En este anexo, presentamos el examen final y la rúbrica de evaluación de cada objetivo.

1.11. Anexo 11. Imprimibles
En este anexo, presentamos la formulación de las tareas para que cualquier profesor que quiera desarrollarlas en sus clases las pueda imprimir.

9. REFERENCIAS

Colegio Antonio Van Uden IED (2022). *Manual de convivencia y sistema integrado de evaluación (SIE). Documento no publicado*. Bogotá.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Granada (España): Departamento de didáctica de la matemática de la Universidad de Granada.

Gómez, P. (2014). *Apuntes de clases MAD 10*. Bogotá Universidad de los Andes.

González, M. J. y Gómez, P. (2018). *Análisis cognitivo. En P. Gómez (Ed). Formación de profesores y matemáticas y practica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 113 – 196). Bogotá: Universidad de los Andes.

Ministerio de Educación Cultura y Deporte. (2013). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012: matemáticas, lectura y ciencias*. Retrieved from http://www.mecd.gob.es/dctm/inee/internacional/pisa2012/marcopisa2012.pdf?documentId=0901e72b8177328d.

Ministerio de Educación Nacional (MEN) (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Bogotá: Autor.

Ministerio de Educación Nacional (MEN) (2016). *Derechos básicos de aprendizaje*. Bogotá: Autor.