

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

FUNCIÓN LINEAL

ANYELA CÁCERES, CARLOS CÁCERES Y ROLANDO MUÑOZ

BOGOTÁ, DICIEMBRE DE 2023

1. INTRODUCCIÓN

Presentamos el diseño de la unidad didáctica sobre funciones lineales, desarrollado por el grupo 2 de la décima cohorte del programa de Maestría en Educación Matemática de la Universidad de los Andes. Elegimos el tema de función lineal por su relevancia en el pensamiento variacional, ya que contribuye al proceso de generalización matemática. La unidad didáctica se centra en la comprensión de la función lineal como una relación entre variables, en la que se resaltan aspectos claves como la razón de cambio, pendiente, variación y proporcionalidad. Nuestra propuesta pedagógica se basa en el análisis de situaciones matemáticas y cotidianas, al emplear tareas que faciliten el aprendizaje de las funciones lineales, mediante diversos sistemas de representación, sin favorecer uno en particular.

Diseñamos esta unidad didáctica para su aplicación en instituciones educativas que incluyan el tema de función lineal en el plan de estudios de noveno grado, en modalidad presencial. El tema de función lineal presenta articulación con la normatividad curricular colombiana. En relación con los estándares básicos de competencias en matemáticas (Ministerio de Educación Nacional (MEN), 2006), encontramos que el tema se relaciona con cuatro estándares ubicados en el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, planteados en los estándares de los grados 8° y 9°. Estos estándares son, primero, “Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las expresiones algebraicas” (p. 87); segundo, “Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada” (p. 87); tercero, “Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas” (p. 87); y cuarto, “Analizo en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones” (p. 87).

En cuanto a los derechos básicos de aprendizaje (MEN, 2016), encontramos el tema de función lineal en el derecho básico número 2 de grado noveno, en una de las evidencias que plantea “... describir relaciones al comparar características de gráficas y expresiones algebraicas o funciones...” (p. 66). Adicionalmente, fundamentamos el contenido de la unidad didáctica en el marco conceptual de matemáticas del Programme for International Student Assessment (PISA por sus siglas en inglés). En PISA, encontramos el tema en las categorías de contenido de cambio y relaciones, debido a que al graficar las ecuaciones de primer grado se está realizando la modelación del cambio y las relaciones con funciones y ecuaciones de diversas situaciones. En cuanto a los procesos matemáticos, buscamos contribuir en mayor medida al proceso de emplear, ya que pretendemos que los estudiantes hagan uso de conceptos, procedimientos y datos para represen-

tar situaciones de la proporcionalidad directa mediante el empleo de la función lineal. En cuanto a las capacidades matemáticas fundamentales, esperamos que con el desarrollo de la unidad didáctica el estudiante active el diseño de estrategias para resolver problemas, la matematización, la comunicación, la representación, el razonamiento y argumentación y, la utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y teórico. Realizamos una primera implementación de la unidad didáctica con estudiantes de grado noveno del Colegio Antonio Villavicencio IED, ubicado en la localidad de Engativá, barrio Villa Gladys.

2. ARTICULACIÓN DE LOS CONTENIDOS

En este apartado, presentamos la descripción del análisis de contenido que realizamos para la unidad didáctica de función lineal. Describimos la estructura matemática, de la estructura conceptual, de los sistemas de representación y de los fenómenos que se encuentran articulados con el tema de función lineal.

1. ESTRUCTURA MATEMÁTICA DEL TEMA FUNCIÓN LINEAL

En la figura 1, presentamos el mapa conceptual de la estructura matemática en la que se ubica el tema de función lineal. Este mapa tiene como propósito exponer los conceptos y procedimientos relacionados con el tema de la unidad didáctica. Ubicamos el tema de función lineal como una función algebraica polinómica de grado uno. Una función polinómica es una función cuya expresión algebraica es un polinomio, como f las funciones algebraicas, racionales, radicales y a trozos. Las funciones polinómicas son continuas en el dominio, debido a que los límites de polinomios en cualquier punto del dominio son iguales al valor de la función en ese punto. Adicionalmente, la función lineal presenta una relación de correspondencia de variables (dependiente e independiente), en la que los elementos de un conjunto A se pueden corresponder con los elementos de un conjunto B. Esta relación de correspondencia define una relación funcional inyectiva y sobreyectiva, y por lo tanto define una relación funcional biyectiva. Esto se cumple para las funciones lineales excepto para la función constante. La función lineal se relaciona con la proporcionalidad directa mediante su pendiente, que se conoce como constante de proporcionalidad. Esta constante de proporcionalidad es la expresión de una razón entre dos cantidades.

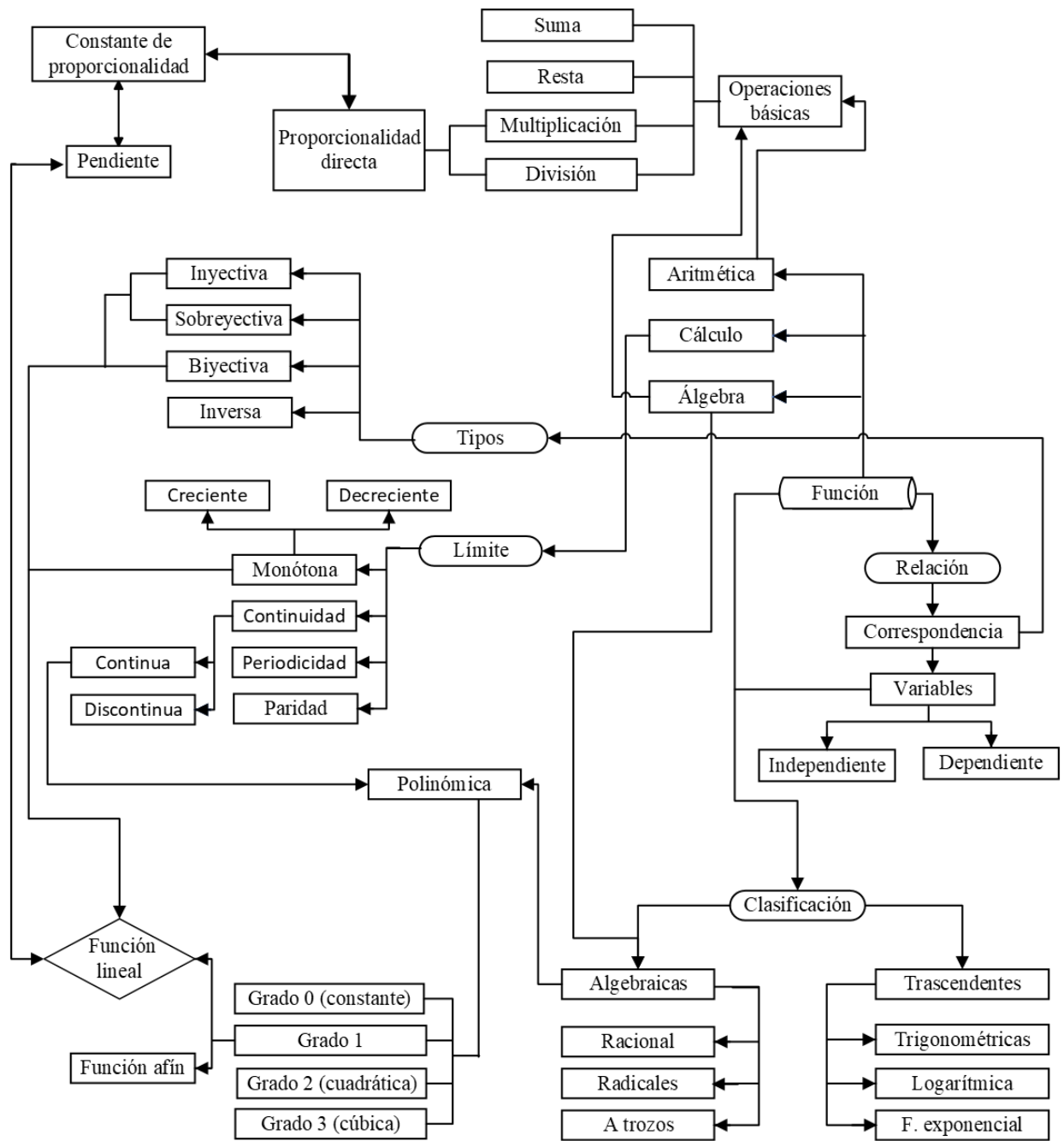


Figura 1. Estructura matemática de la función lineal

2. ESTRUCTURA CONCEPTUAL DE LA FUNCIÓN LINEAL

En la figura 2, presentamos el mapa de la estructura conceptual del tema de función lineal. Esta estructura corresponde a los conceptos y procedimientos que caracterizan el tema de la unidad didáctica, así como las relaciones que se pueden establecer entre ellos.

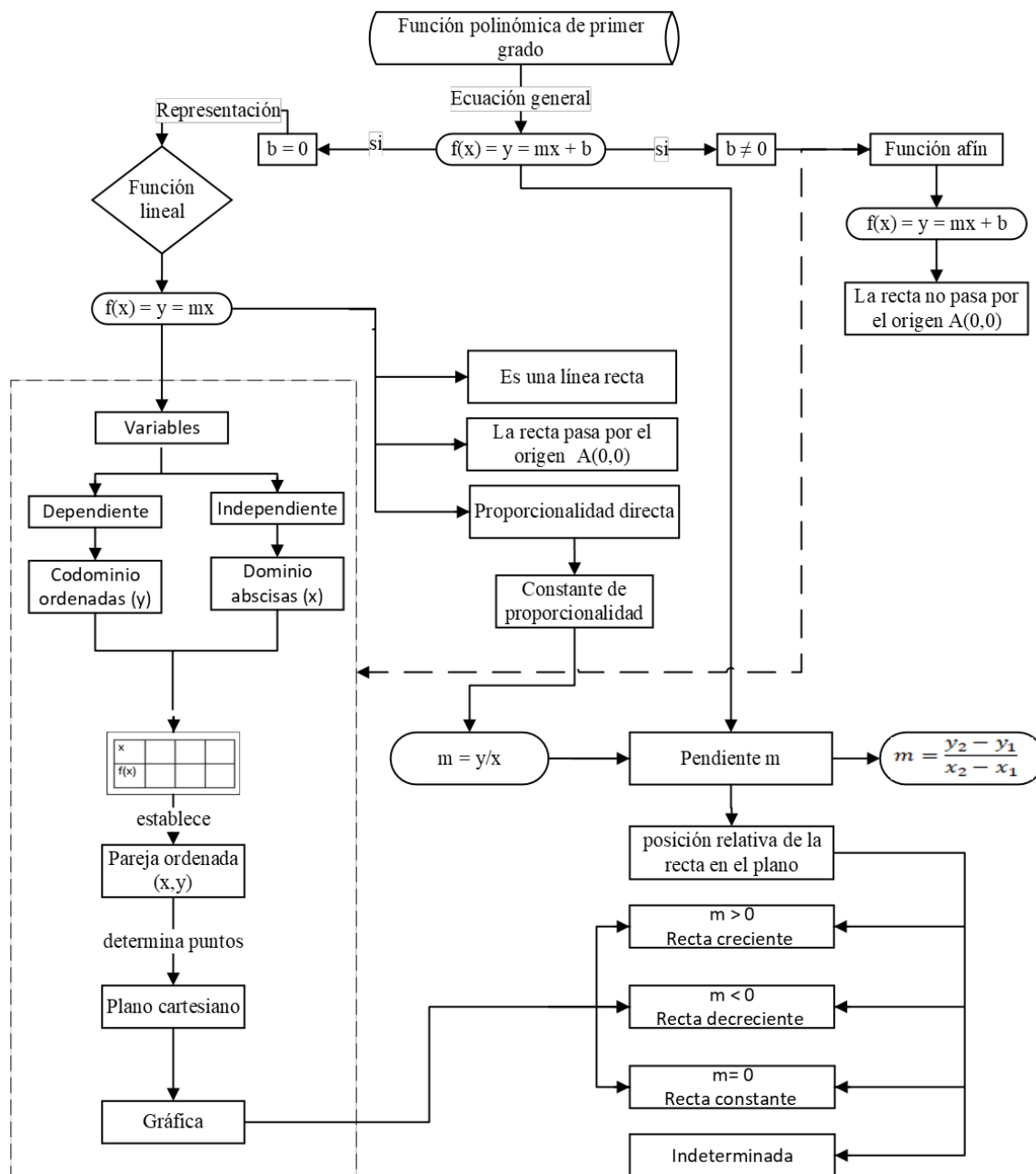


Figura 2. Estructura conceptual de la función lineal

En la figura 2, establecemos que la función lineal es una función polinómica de primer grado, cuya ecuación general es de la forma $f(x) = y = mx$, dado que está relacionada con la ecuación que representa la función afín $f(x) = y = mx + b$ pero donde $b=0$. Las características principales de la función lineal son tres. La primera característica es que la función lineal se representa con una línea recta. La segunda característica es que la recta pasa por el origen. La tercera característica es que la función lineal es la representación de una proporcionalidad directa. En la ecuación de la función lineal, se puede identificar la dependencia de variables, donde x es la variable independiente y pertenece al dominio de la función, y y es la variable dependiente y pertenece al codominio de la función. La relación que se establece entre estas variables se puede representar de diferentes formas, como, por ejemplo, las parejas ordenadas (x, y) , que se pueden ubicar en el plano cartesiano. Adicionalmente, la ecuación que representa la función lineal muestra la constante de proporcionalidad que se asocia con la pendiente (m) de la recta, que define su direccionalidad, es decir, si la recta es creciente o decreciente.

3. SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN DE LA FUNCIÓN LINEAL

Podemos representar la función lineal de diferentes maneras que se conocen como sistemas de representación. “Un sistema de representación es un sistema de signos que cumple unas características para la creación y manipulación de signos, y su relación de equivalencia” (Cañadas et. al, 2018). Para la función lineal, identificamos los siguientes sistemas de representación: numérico, tabular, simbólico, gráfico, pictórico y ejecutable. Para el diseño de la unidad didáctica de función lineal trabajamos los sistemas de representación simbólico, tabular, numérico y gráfico.

En la figura 3, presentamos el mapa conceptual con todos los sistemas de representación que encontramos. Así mismo, establecemos las relaciones que existen entre dichos sistemas desde las transformaciones sintácticas que se presentan. Una transformación sintáctica es una “... operación se refiere a la transformación de un signo en otro, dentro de un mismo sistema de representación, sin que el concepto o procedimiento matemático designado por esos signos cambie.” (González y Gómez, 2018, p.18). Así mismo, presentamos las traducciones que se pueden establecer entre los sistemas de representación. Una traducción es una operación que “se refiere al procedimiento en virtud del cual se establece la relación entre dos signos que designan un mismo objeto pero que, pertenecen a diferentes sistemas de representación” (González y Gómez, 2018, p.18-19).

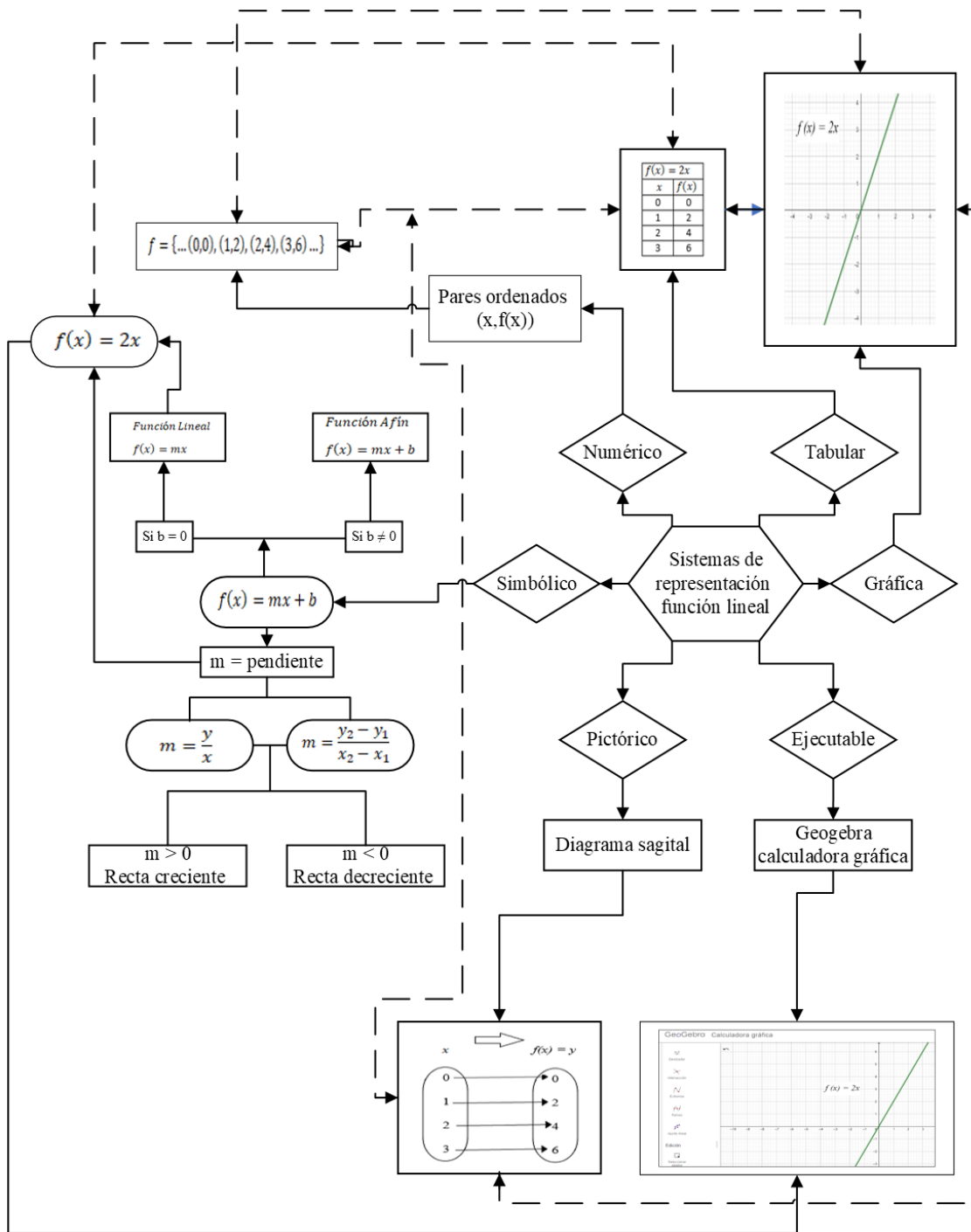


Figura 3. Mapa conceptual de los sistemas de representación de la función lineal

A continuación, describimos los sistemas de representación específicos del tema de función lineal.

3.1. Sistema de representación numérico

La función lineal se puede representar por medio de parejas ordenadas (x, y) que están conformadas por dos números reales que se relacionan entre sí por la constante de proporcionalidad. La coordenada x representa la variable independiente y la coordenada y representa la variable dependiente. Estas coordenadas se ubican en el plano cartesiano.

3.2. Sistema de representación tabular

La función lineal se puede representar mediante el uso de tablas verticales u horizontales, en las que ubicamos las coordenadas x y y que se relacionan por la constante de proporcionalidad. Si la tabla se encuentra de manera vertical, en la primera columna se ubican los elementos del dominio y en la segunda columna se ubican los elementos del rango. Si se encuentran de manera horizontal, en la primera fila se ubican los elementos del dominio y en la segunda fila se ubican los elementos del rango. La dirección que tenga la tabla no altera la información presente en ella. Este sistema de representación permite determinar pares ordenados que se ubican en el plano cartesiano, que conforman una línea recta. Adicionalmente, al tomar dos pares ordenados específicos en la tabla, se puede hallar el valor de la pendiente de la recta, al reemplazar las coordenadas en la fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, lo que permite saber la direccionalidad de la recta.

3.3. Sistema de representación gráfico

La función lineal se representa en el sistema de representación gráfico al trazar la recta que se establece al ubicar las parejas ordenadas en el plano cartesiano. En el eje x , se ubica la variable independiente (eje de las abscisas) y en el eje y , se ubica la variable dependiente (eje de las ordenadas), que se relacionan entre sí por la constante de proporcionalidad.

3.4. Sistema de representación simbólico

La función lineal se representa por medio de la expresión $y = mx$, en la que m es una cantidad fija (constante de proporcionalidad), x es la variable independiente y y es la variable dependiente. La fórmula $y = mx$ es la representación más común de la función lineal, debido a que es su representación simbólica. Adicionalmente, la fórmula representa un polinomio de primer grado que contiene números, letras y símbolos de las operaciones aritméticas. Esta fórmula permite encontrar los pares ordenados que se pueden organizar en tablas o en plano cartesiano.

Las formas de representar una función lineal permiten que exista una correspondencia entre ellas, y por lo tanto podemos realizar traducciones entre los distintos sistemas de representación que mostramos anteriormente. Por ejemplo, si queremos presentar una función que represente “el doble de un número”, lo podemos hacer por medio del sistema de representación numérico o por medio de las parejas ordenadas $(1, 2)$, $(2, 4)$, $(3, 6)$ y $(4, 8)$. Por otra parte, podemos realizar la transformación de la función dada al sistema de representación tabular, como lo mostramos en la figura 4.

$f(x) = 2x$	
x	$f(x)$
0	0
1	2
2	4
3	6

Figura 4. Representación tabular del doble de un número

Adicionalmente, podemos transformar la función presentada en la figura 4 con el sistema de representación simbólico, cuando empleamos la fórmula $y = 2x$ y por último podemos representar la función por medio del sistema de representación gráfico, como se muestra en la figura 5.

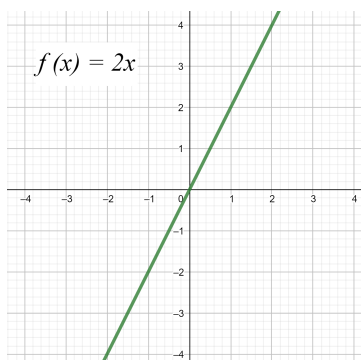


Figura 5. Representación gráfica de la función $y = 2x$

4. FENÓMENOS QUE DAN SENTIDO A LA FUNCIÓN LINEAL

El análisis fenomenológico hace referencia a describir la estructura matemática de un concepto, en la que se identifican las características matemáticas que tienen en común las situaciones que le dan sentido a un tema. El agrupamiento de estas situaciones con características similares se denomina contextos fenomenológicos. Adicionalmente, de la estructura conceptual se originan las subestructuras, que están conformadas por los conceptos y procedimientos matemáticos que contribuyen a resolver los problemas que se presentan en los contextos fenomenológicos. Con estas subestructuras y los contextos fenomenológicos, establecemos una relación biunívoca. Los contextos fenomenológicos se encuentran relacionados con los contextos descritos por PISA 2012 por medio de fenómenos. En la figura 6, presentamos el esquema del análisis fenomenológico de nuestra unidad didáctica de función lineal. Este esquema se compone de tres subestructuras y cuatro fenómenos que están relacionados. Primero, evidenciamos que la subestructura $y = mx$ está relacionada con el contexto fenomenológico de proporcionalidad directa y con los fenómenos social, personal y profesional planteados en PISA 2012, ya que podemos emplear esta subestructura en situaciones en contexto. Por ejemplo, para hallar la variación del costo total de producción de un producto cuando depende de las unidades que se fabriquen de este, o para ha-

llar la variación de un salario cuando se conoce el valor de una hora y se tiene un número de horas laboradas. Por otra parte, la subestructura $m > 0$ está relacionada con el contexto fenomenológico de la recta creciente y la subestructura $m < 0$ está relacionada con el contexto fenomenológico de la recta decreciente y las dos subestructuras están relacionadas con el contexto científico mencionado en PISA 2012, debido a que se centra en actividades matemáticas en el mundo natural y se emplean conceptos y procedimientos matemáticos.

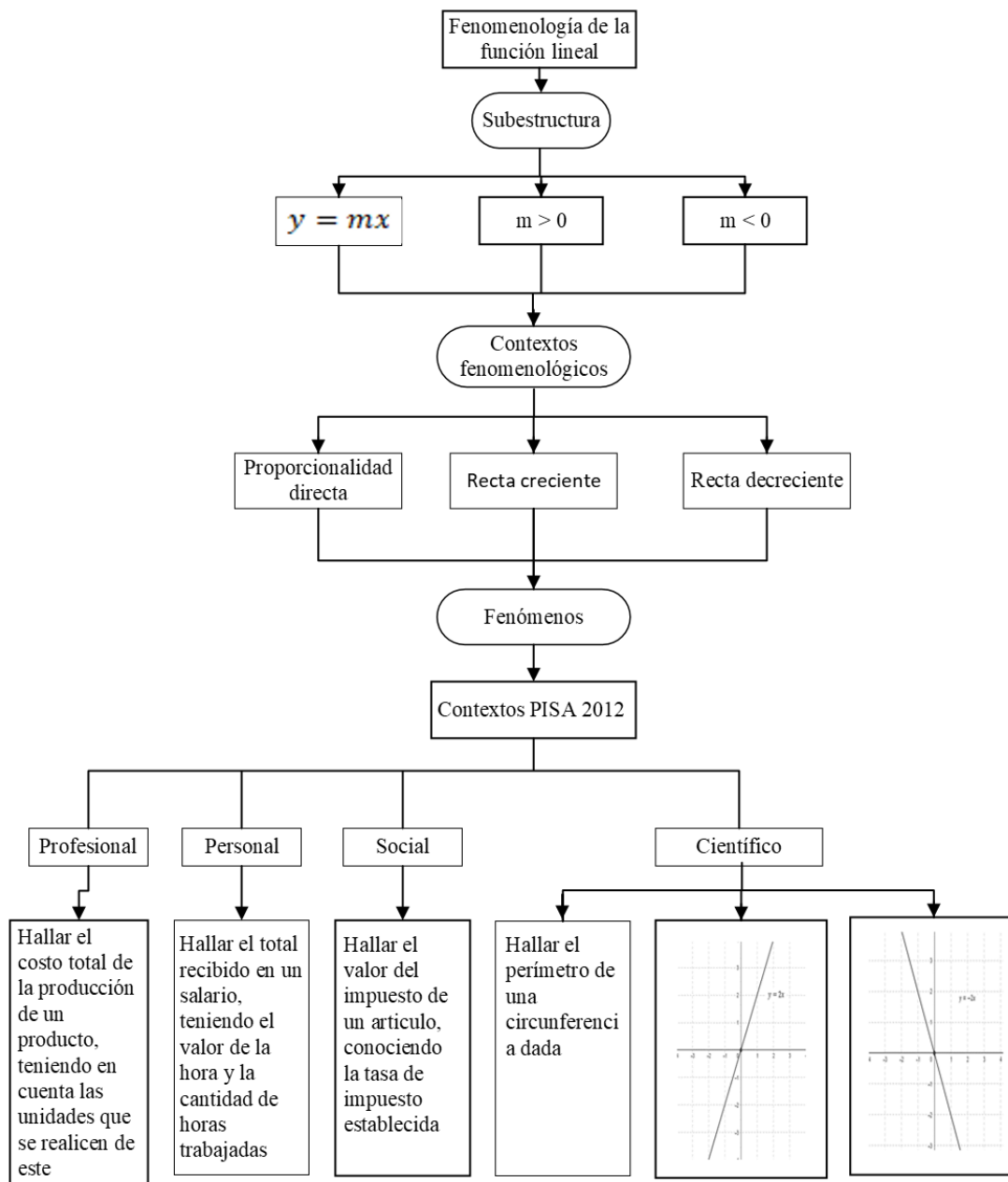


Figura 6. Estructura del análisis fenomenológico de la función lineal

3. ASPECTOS COGNITIVOS

En este apartado, presentamos los aspectos cognitivos que planteamos para nuestra unidad didáctica. Primero, describimos las expectativas de tipo cognitivo y la contribución de la unidad didáctica a las capacidades fundamentales planteadas en PISA 2012. Segundo, presentamos los objetivos de aprendizaje de la unidad didáctica, que guían y fundamentan las tareas de aprendizaje. Tercero, presentamos las expectativas de tipo afectivo, que hacen referencia a los aspectos emocionales que presentan los estudiantes al momento de abordar la unidad didáctica. Posteriormente, presentamos las limitaciones de aprendizaje que se basan en los errores y dificultades que pueden surgir en los estudiantes al desarrollar la unidad didáctica. Finalmente, presentamos los criterios de logro y los grafos de criterios de logro.

1. EXPECTATIVAS DE APRENDIZAJE

Los objetivos de nuestra unidad didáctica se fundamentan en el marco conceptual de PISA 2012 que define procesos matemáticos y capacidades matemáticas fundamentales. Según este marco, los procesos matemáticos incluyen formular, emplear e implementar al referirse a las acciones del estudiante para resolver un problema que vincula las matemáticas. Nuestra unidad didáctica busca contribuir especialmente al proceso de emplear, al fomentar que los estudiantes utilicen conceptos, datos y procedimientos matemáticos para resolver situaciones mediante la función lineal. En PISA 2012, las capacidades matemáticas fundamentales abarcan matematización, comunicación, representación, razonamiento y argumentación, diseño de estrategias para resolver problemas, utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico, así como herramientas matemáticas. Con nuestra unidad didáctica, aspiramos a fortalecer las seis primeras capacidades matemáticas fundamentales, ya que instamos a los estudiantes a aplicar sus conocimientos matemáticos para resolver situaciones planteadas.

1.1. Objetivos

Planteamos los objetivos de aprendizaje para la unidad didáctica desde las expectativas de nivel superior y los contextos fenomenológicos.

Objetivo 1. Reconocer una función lineal o de proporcionalidad directa desde distintas representaciones.

Objetivo 2. Determinar la pendiente de una función lineal y relacionarla con la direccionalidad de la recta.

1.2. Expectativas de tipo afectivo

Las expectativas de tipo afectivo están relacionadas con el vínculo de la motivación del estudiante con el contenido matemático. Planteamos estas expectativas con base en los enfoques de tipo afectivo (González y Gómez, 2018) y las capacidades matemáticas planteadas en PISA 2012. En la tabla 1, describimos las expectativas de tipo afectivo de la unidad didáctica de función lineal.

Tabla 1

Listado de expectativas afectivas del tema función lineal

EA	Descripción
1	Mostrar interés al modelar situaciones de proporcionalidad directa empleando la función lineal
2	Tener disposición favorable para traducir la función lineal en los distintos sistemas de representación
3	Desarrollar la curiosidad por relacionar la pendiente con los diversos sistemas de representación

Nota. EA: expectativa afectiva.

En la tabla 1, describimos las tres expectativas de tipo afectivo que incluyen componentes como las actitudes, creencias y emociones que presentan los estudiantes e influyen de forma importante en su rendimiento. Las primeras dos expectativas afectivas que planteamos se relacionan con el objetivo 1. Con estas dos expectativas, esperamos que vinculen el gusto y la disposición personal con el desarrollo de diversas situaciones que permitan mostrar su interés y seguridad. Por otro lado, las expectativas dos y tres se relacionan con el objetivo 2. Con estas expectativas, esperamos que los estudiantes continúen con la disposición y la confianza que se tenían desde el objetivo 1 y que implementen la curiosidad para resolver una situación contextualizada con la pendiente de una recta.

1.3. Limitaciones de aprendizaje

En el modelo de análisis didáctico, las limitaciones de aprendizaje están relacionadas con los errores y las dificultades en las que un estudiante puede incurrir al resolver una tarea matemática. Una dificultad es definida como “una circunstancia que impide o entorpece la consecución de los objetivos de aprendizaje” (González & Gómez, p. 140) y un error es definido como “la manifestación visible de una dificultad” (González & Gómez, p. 140). Para nuestra unidad didáctica, establecimos 48 errores que clasificamos en siete dificultades. Por ejemplo, en la tabla 2, el error 1 (Identificar las variables como independientes entre sí, en la información presentada verbal o matemática) está asociado a la Dificultad 1 “Dificultad para transcribir una situación del lenguaje

verbal al lenguaje algebraico”. El listado completo de dificultades y errores se encuentra en el anexo 1.

Tabla 2

Listado de dificultades y errores para el tema función lineal

E	Descripción
	D1. Dificultad para transcribir una situación del lenguaje verbal al lenguaje algebraico
1	Identificar las variables como independientes entre sí, en la información presentada verbal o matemática
3	Incluir datos inexistentes en la situación problema
4	Excluir datos existentes en la situación problema
40	Pensar en una ecuación lineal que representa una situación verbal o matemática sin tener en cuenta las regularidades existentes entre los datos dados
44	Plantear una expresión algebraica diferente a una ecuación
48	No plantear una expresión algebraica para representar la información dada

Las dificultades planteadas son claves para la consecución de los objetivos propuestos, ya que están relacionadas directamente con las diferentes representaciones de la función lineal y las operaciones entre números reales.

1.4. Criterios de logro y grafo de los criterios de logro de los objetivos de aprendizaje

Definimos los criterios de logro como las estrategias que un estudiante puede implementar al resolver una tarea (anexo 2). Definimos un grafo de criterios de logro como una representación gráfica en la que planteamos el orden en que el estudiante activa estas estrategias para resolver cada una de las tareas propuestas en la unidad didáctica. Los estudiantes pueden abordar una tarea de forma diferente. Los grafos que propusimos muestran las diferentes maneras en las que los estudiantes pueden hacerlo. En la figura 7, presentamos el grafo de criterios de logro para el primer objetivo de la unidad didáctica.

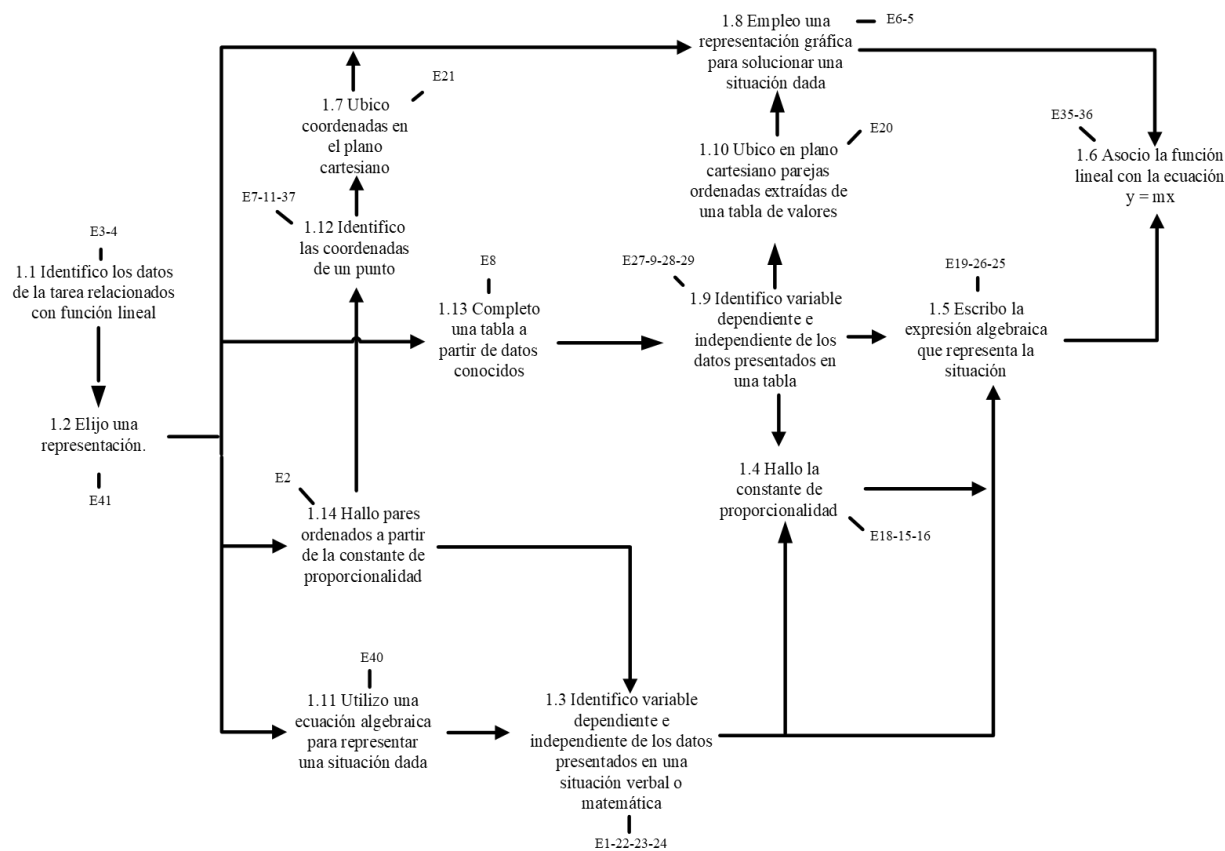


Figura 7. Grafo de criterios de logro del objetivo 1

En la figura 7, mostramos cinco caminos para el desarrollo de las tareas del primer objetivo. Primero, esperamos que los estudiantes inicialmente identifiquen los datos de la tarea. Posteriormente, los estudiantes eligen una representación que puede ser tabular, numérica (al hallar pares ordenados), simbólico (por medio de una expresión algebraica) o gráfico, para abordar el problema. Seguidamente, los estudiantes identifican las variables dependiente e independiente (o las coordenadas). Luego los estudiantes realizan los procedimientos definidos para cada sistema de representación, ubican puntos en el plano o hallan la constante de proporcionalidad. Posteriormente, los estudiantes escriben la expresión algebraica que representa la situación dada. Finalmente, los estudiantes asocian la función lineal con la ecuación $y = mx$. En la figura 8, presentamos el grafo de criterios de logro del segundo objetivo.

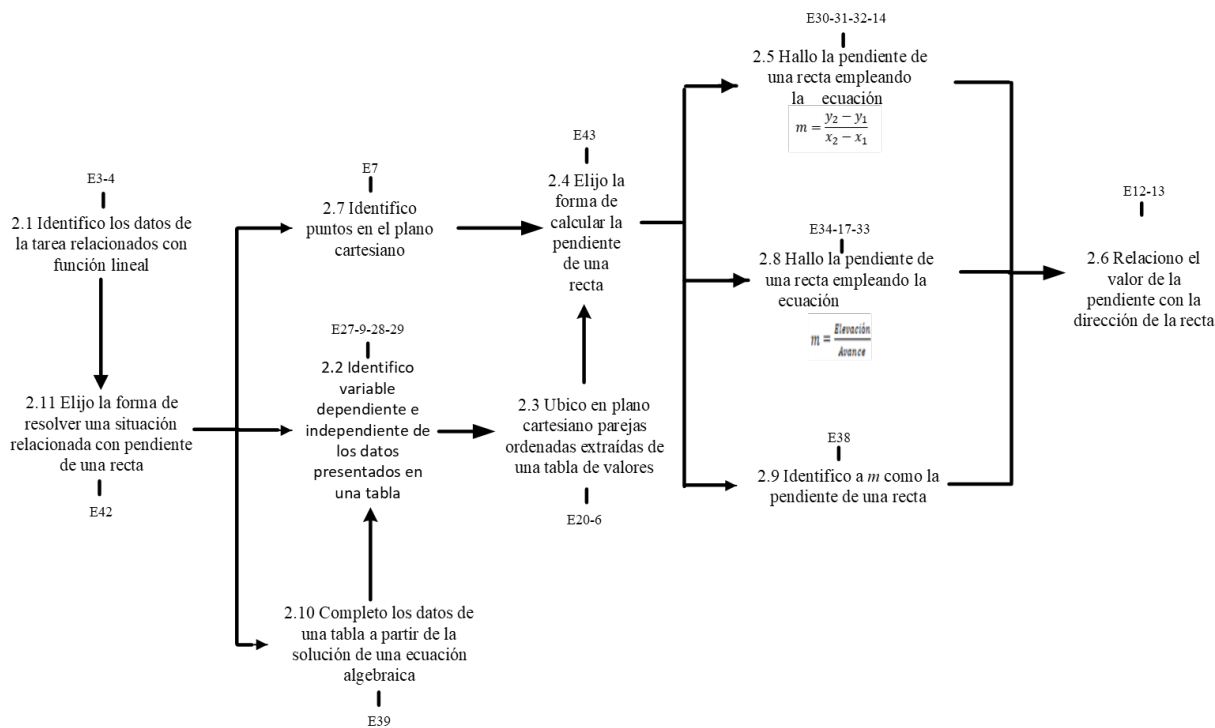


Figura 8. Grafo de criterios de logro del objetivo 2

En la figura 8, mostramos siete caminos de aprendizaje. Al igual que en el objetivo 1, para el objetivo 2, los estudiantes inician con la identificación de los datos de la tarea. Posteriormente, los estudiantes eligen la forma de resolver una situación relacionada con la pendiente de una recta, que puede ser identificar puntos en el plano cartesiano, identificar variables dependiente e independiente de los datos presentados en una tabla o completar los datos de una tabla a partir de una expresión algebraica dada y ubicarlas en el plano cartesiano. Luego, los estudiantes eligen la forma de calcular la pendiente de una recta, que puede ser al identificarla como el valor m (constante de proporcionalidad) de la expresión simbólica, o al desarrollar la ecuación $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, o al desarrollar la ecuación $m = \frac{\text{elevación}}{\text{avance}}$. Finalmente, el estudiante relaciona el valor de la pendiente con la direccionalidad de la recta.

4. ESQUEMA GENERAL DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

En este apartado, exponemos la estructura general de la unidad didáctica, que consta de 11 sesiones de 55 minutos cada una. La primera sesión se dedica a la implementación de la tarea diagnóstica, cuyo propósito es identificar los conocimientos de los estudiantes relacionados sobre el tema y detectar posibles debilidades y fortalezas. En la segunda sesión, se lleva a cabo una retroalimentación de la tarea diagnóstica, con la finalidad de que los estudiantes corrijan errores, superen dificultades y fortalezcan sus conceptos previos del tema. Las sesiones 3 a 6 se centran en la implementación las tres tareas correspondientes al objetivo 1, mientras que las sesiones 7 y 8, se destinan a la implementación de la tarea del objetivo 2. Es esencial seguir la secuencia establecida, ya que el logro del objetivo 2 depende del cumplimiento del objetivo 1. Las sesiones 9 y 10 se reservan para la tarea de evaluación. Concluimos con una sesión de cierre para evaluar la implementación de la unidad didáctica en aspectos cognitivos y afectivos con los estudiantes. La tabla 3 detalla la organización de las sesiones previstas para el desarrollo de la unidad didáctica.

Tabla 3
Globalización de actividades

Sesión	Duración / Minutos	Actividad	Descripción
1 y 2	110	Implementación de prueba diagnóstica	Presentación de la prueba diagnóstica y desarrollo de la prueba diagnóstica
3	55	Realimentación de la prueba diagnóstica	Puesta en común de resultados y retroalimentación de conocimientos previos
4	55	Tarea de aprendizaje T1.1 SOFA	Descripción de la tarea, presentación de la meta, desarrollo de la tarea SOFA y puesta en común

Tabla 3

Globalización de actividades

Sesión	Duración / Minutos	Actividad	Descripción
5	55	Tarea de aprendizaje T1.2 SOFA 2	Presentación de la meta, desarrollo de la tarea SOFA 2 y puesta en común
6	55	Tarea de aprendizaje T1.3 SOFA 3	Descripción de la tarea, presentación de la meta, desarrollo de la tarea SOFA 3 y puesta en común
7 y 8	110	Tarea de aprendizaje T2.1 Pendientes	Presentación del objetivo 2 y de la meta de la ta- rea de aprendizaje, desarrollo de la tarea Pendien- tes y puesta en común.
9 y 10	110	Evaluación final	Desarrollo de la evaluación final
11	55	Sesión final	Cierre de la unidad didáctica

5. TAREA DIAGNÓSTICA

En este apartado, presentamos la tarea diagnóstica de nuestra unidad didáctica. La tarea diagnóstica tiene como propósito que el profesor evalúe los conocimientos previos que poseen los estudiantes antes de comenzar a llevar a cabo la unidad didáctica. Para llevar a cabo la implementación de nuestra unidad didáctica, identificamos la necesidad de que los estudiantes cuenten con 21 conocimientos previos (anexo 3). Estos conocimientos previos están estrechamente relacionados con los conceptos que se abordan en la unidad didáctica. Una vez completada esta evaluación, el profesor deberá revisar los resultados y, si es necesario, proporcionar retroalimentación sobre los temas abordados en la tarea diagnóstica. Estos conocimientos previos están vinculados a una serie de conceptos fundamentales, que incluyen operaciones con números reales, la capacidad de traducir del lenguaje verbal al algebraico, la comprensión del plano cartesiano, la formulación e interpretación de tablas, el manejo de pares ordenados y gráficas, la identificación de variables dependientes e independientes, la comprensión de la proporcionalidad directa, la resolución de ecuaciones de primer grado, la comprensión de la noción de pendiente de una recta, y los conceptos de elevación, avance y distancia entre dos puntos.

La tarea diagnóstica que hemos diseñado consta de nueve actividades que se enfocan en evaluar uno de estos conocimientos previos específicos. En la tabla 4, establecemos la relación entre los 21 conocimientos previos y la actividad correspondiente que los evalúa.

Tabla 4

Relación de los conocimientos previos del tema con las actividades de la tarea diagnóstica

CP	Descripción	Actividad que evalúa el CP
CP1	Restar, multiplicar y dividir en el conjunto de los números reales	1, 2 y 5
CP2	Utilizar la ley de signos	1, 7 y 8
CP3	Traducir del lenguaje verbal al lenguaje algebraico	2 y 3
CP4	Construir un plano cartesiano	4
CP5	Identificar las coordenadas (abscisas y ordenadas) en plano	6

Tabla 4

Relación de los conocimientos previos del tema con las actividades de la tarea diagnóstica

CP	Descripción	Actividad que evalúa el CP
	cartesiano	
CP6	Ubicar coordenadas cartesianas en el plano	4 y 5
CP7	Establecer parejas ordenadas en el plano cartesiano	6, 7 y 8
CP8	Representar en el plano cartesiano los datos de una tabla	5
CP9	Encontrar la variable y dando valores a la variable x en la expresión algebraica $y = mx$	5
CP10	Escribir en una tabla los datos encontrados al resolver la expresión algebraica $y = mx$	9
CP11	Reconocer parejas ordenadas a partir de los datos suministrados en una tabla	5
CP12	Escribir las parejas ordenadas que se encuentran en una tabla de valores	5
CP13	Reconocer una función desde la noción de variable dependiente y variable independiente	3 y 5
CP14	Emplear la notación de funciones	2, 3, 5 y 9
CP15	Reconocer la constante de proporcionalidad al tener en cuenta la relación entre las variables dependiente e independiente	5 y 9
CP16	Identificar la constante de proporcionalidad en una expresión algebraica que representa una situación de proporcionalidad directa	5 y 9
CP17	Reconocer la noción del concepto de pendiente	7 y 8
CP18	Solución de ecuaciones de primer grado para hallar valores de la variable dependiente	2,3 y 9
CP19	Calcular la constante de proporcionalidad	5 y 9
CP20	Reconocer la noción de los conceptos de elevación y avance	7
CP21	Calcular la distancia entre dos puntos ubicados en el plano cartesiano empleando la fórmula $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$	8

Nota. CP = conocimientos previos

Como presentamos en la tabla 4, por ejemplo, el conocimiento previo 4 que se refiere a “construir un plano cartesiano” será evaluado en la actividad 4 de la tarea diagnóstica. A continuación, presentamos la formulación de la tarea diagnóstica.

1. Con base en el valor cada letra, resuelve las operaciones indicadas y muestra el proceso realizado en cada una de ellas.

$$A = -300 \quad B = 50 \quad C = -\frac{2}{3} \quad D = -4.200$$

a. $A \cdot B$

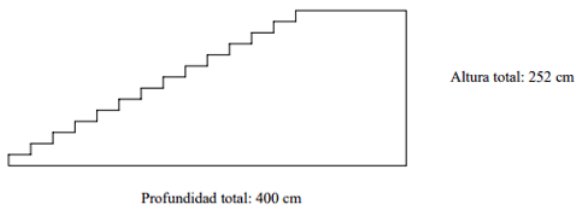
b. $D \div B$

c. $(D \div C) \cdot B$

d. $(A + B) \cdot D$

e. $D \div (A - B)$

2. En el siguiente diagrama, se ilustra una escalera con 14 escalones que tiene una altura total de 252 cm.



Con base en lo anterior, plantea una ecuación y resuélvela para saber cuánto mide cada escalón.

3. Plantea una ecuación que represente la siguiente situación y resuélvela.

Las edades de María, Juana y Ana suman 73 años. Si María tiene 25 años y Juana 36 años, ¿cuántos años tiene Ana?

4. Construye un plano cartesiano, ubica las siguientes coordenadas, únelas en el orden dado e indica qué figura se forma.

(1, -3), (5, -4), (4, -3), (9, 1), (7, 2), (8, 5), (5, 4), (5, 5), (3, 4), (4, 9), (2, 7), (0, 10), (-2, 7), (-4, 8), (-3, 3), (-5, 6), (-5, 4), (-8, 5), (-7, 2), (-9, 1), (-4, -3), (-5, -4), (0, -3), (2, -7), (2, -6), (1, -3)

5. La cantidad de gasolina que consume un automóvil en cierta distancia recorrida, se indica en la siguiente tabla.

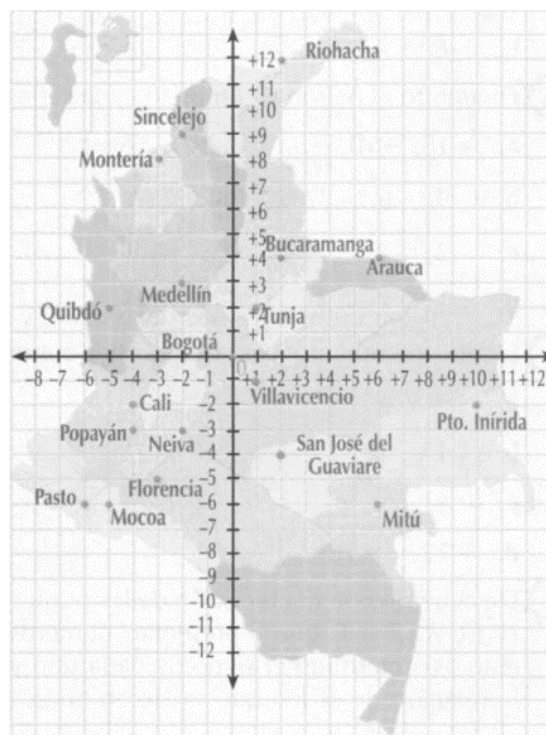
Galones de gasolina	5	15	25	35
Distancia recorrida (km)	9	28	47	66
	5	5	5	5

Resuelve los siguientes ítems.

- Elabora una gráfica que represente la relación entre las dos variables.
- ¿Cuál es la variable dependiente y cuál es la variable independiente?
- Calcula el cociente entre la distancia recorrida y el número de galones de gasolina empleados.
- ¿Hay una constante de proporcionalidad? De ser así, ¿qué valor sería?
- Escribe dos parejas ordenadas sacadas de la información de la tabla.
- Escribe la fórmula algebraica que represente la situación.

Responde las preguntas 6 al 8 con la siguiente información

Observa la siguiente gráfica.



- Determina las coordenadas de los puntos que se relacionan con las siguientes ciudades: Sincelejo, Pasto, Mitú, Arauca.
- Si la distancia vertical (elevación) entre dos puntos es igual a $x_2 - x_1$ y la distancia horizontal (avance) entre dos puntos es igual a $y_2 - y_1$, ¿cuál es la elevación y cuál es el avance que hay entre las siguientes ciudades?:
 - Mocoa y Popayán.
 - Montería y Sincelejo.
 - Tunja y Arauca.

8. Con las coordenadas de las ciudades del punto anterior y la fórmula $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, hallar la distancia entre las siguientes ciudades.

- a. Tunja y Bucaramanga.
- b. Quibdó y Cali.
- c. Neiva y Villavicencio.
- d. Popayán y Florencia.

9. Se tiene que la distancia recorrida (en metros) por un ciclista en determinado tiempo en minutos está dado por la expresión $d = 60t$. Con base en esta información, desarrolla los siguientes ítems:

- a. Completa la tabla.

Distancia (d)				
Tiempo en min (t)	3	10	45	120

- b. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?

Recomendamos al profesor realizar la tarea diagnóstica de forma individual durante una sesión de 110 minutos. Posteriormente, sugerimos asignar una sesión de 110 minutos para, junto con los estudiantes revisar los resultados y afianzar los conceptos en los que hayan incurrido en errores.

6. TAREAS DE APRENDIZAJE DEL OBJETIVO

1

Una tarea de aprendizaje es definida como una actividad propuesta por el profesor “con la intención de brindar oportunidades para que los estudiantes logren las expectativas de aprendizaje y afectivas que ha establecido, y superen las limitaciones que ha conjeturado que ellos tendrán” (Gómez et al., 2018, p. 2). En este apartado, presentamos tres tareas de aprendizaje propuestas para el alcance del objetivo 1 de la unidad didáctica de función lineal. Las tareas de aprendizaje del objetivo 1 están relacionadas con el contexto fenomenológico de proporcionalidad directa, específicamente con el fenómeno social. Primero, realizamos la caracterización de cada tarea de aprendizaje. Para esto, tenemos en cuenta los requisitos, los aportes al objetivo, la formulación, los conceptos y procedimientos implicados, los sistemas de representación involucrados, los contextos PISA, los materiales y/o recursos, el agrupamiento, la interacción y comunicación, y la temporalidad. Posteriormente, presentamos los errores en los que posiblemente los estudiantes pueden incurrir al desarrollar la tarea, así como las ayudas que pueden ser utilizadas para contribuir a corregirlos. En tercer lugar, presentamos los grafos de criterios de logro y planteamos algunas sugerencias metodológicas para el profesor. La descripción más detallada de los elementos de las tareas la presentamos en el anexo 4 (fichas de las tareas). Finalmente, presentamos una propuesta para evaluar las tareas.

1. TAREA DE APRENDIZAJE T1.1 SOFA

Con la primera tarea del objetivo 1, pretendemos que los estudiantes identifiquen la constante de proporcionalidad y la relación de dependencia entre las variables planteadas en una situación dada. Pretendemos aportar en mayor medida a la capacidad matemática fundamental de representación en el proceso de emplear, debido a que los estudiantes deben reconocer que la variación del precio total pagado depende del valor unitario y el número de personas que ingresan al evento. Adicionalmente, los estudiantes pueden emplear diferentes sistemas de representación (tablas, parejas ordenadas y gráficas) para representar la situación. Así mismo, pretendemos que los es-

tudiantes logren modelar una expresión algebraica que represente la situación de la forma $y = mx$ y la vinculen con la función lineal.

1.1. Requisitos

Para el desarrollo de esta tarea de aprendizaje, los estudiantes requieren tener conocimientos acerca de la noción de función lineal y de proporcionalidad directa, y reconocer la variable dependiente y la variable independiente. Así mismo, los estudiantes deben reconocer diferentes formas que se utilizan para representar funciones como tablas, plano cartesiano, expresiones algebraicas y las traducciones entre ellas.

1.2. Aportes de la tarea al objetivo de aprendizaje

Con el desarrollo de esta tarea, pretendemos contribuir a que los estudiantes identifiquen, a partir de una situación dada, la relación de dependencia entre las variables para completar los datos de una tabla, establecer parejas ordenadas o representar una situación de manera gráfica. Con estos datos, esperamos que ellos logren modelar una expresión que represente dicha situación en la forma $y = mx$ y la asocien con la función lineal.

1.3. Formulación

La entrada al salón del ocio y la fantasía (SOFA) tiene un valor de \$20.000 por persona. A este evento, asisten personas solas, otros van en pareja, algunos van en grupos de hasta 5 amigos e incluso asisten grados de colegios con grupos de hasta 30 personas. Tú formarás parte de la logística del evento y te encargarás de las finanzas.

Situación 1. Con la información anterior, diseña una manera de presentar la variación del valor del ingreso total con base en la variación del número de personas que ingresan al SOFA.

Situación 2. Debes proyectar la cantidad de dinero recolectada por entradas en el SOFA durante cualquier día según el número de personas que ingresen. Para eso, cuentas con un software al que solo debe ingresar una expresión matemática y el software la graficará. ¿Qué expresión ingresarías?

En el grupo de tres compañeros comparen sus respuestas a las situaciones anteriores. Con esa información respondan: ¿por qué razones la expresión de la situación 2 es o no es una función? ¿Qué tipo de función es? Al finalizar, uno de los integrantes del grupo presentará una cartelera con los argumentos ante la clase.

1.4. Conceptos y procedimientos implicados en la tarea

Los conceptos que esta tarea involucra son los de proporcionalidad directa, variable dependiente y variable independiente. Los procedimientos que los estudiantes pueden realizar son multiplicar el valor de una entrada por el número de asistentes al evento para obtener la variación del precio total pagado; es decir, los estudiantes deben identificar la expresión $y = mx$ y aplicarla.

1.5. Sistemas de representación que se activan

Para representar la solución de la tarea, los estudiantes tienen la opción de utilizar el sistema de representación tabular para organizar los datos indicados en la formulación de la tarea o datos nuevos que consideren relevantes. También, pueden usar el sistema de representación numérico

al encontrar parejas ordenadas que representen los datos indicados en la formulación de la tarea. Así mismo, pueden usar el sistema de representación gráfico al ubicar los datos de la tarea en el plano cartesiano. Por otra parte, los estudiantes pueden usar el sistema de representación simbólico mediante el empleo de expresiones algebraicas de la forma $y = mx$.

1.6. Contextos PISA en los que se sitúa la tarea

La tarea está enmarcada en los contextos personal y social del marco conceptual de PISA 2012, pues corresponde a la variación del total de un ingreso recibido por un evento al tener en cuenta el número de personas que ingresan al mismo. Esto lo puede realizar el propio individuo, su familia o un grupo de iguales.

1.7. Materiales y recursos

Sugerimos entregar a los estudiantes una hoja impresa en la que se presenta la situación a desarrollar. De igual manera, los estudiantes emplearán materiales de uso diario como hojas de papel, lápiz, borrador, tajalápiz, cartulina, la regla, el tablero, el marcador y el borrador del tablero.

1.8. Agrupamiento, comunicación e interacción

Para el desarrollo de esta tarea, esperamos que la interacción predominante sea entre estudiantes. Inicialmente, los estudiantes desarrollarán la tarea de manera individual. Posteriormente, los estudiantes se reunirán en grupos de tres estudiantes para compartir con sus compañeros las estrategias de solución implementadas y, verificar si realizaron un procedimiento igual o diferente y el resultado que obtuvieron. Luego, los estudiantes decidirán el resultado que presentarán a los compañeros del curso. Finalmente, se realizará una presentación grupal general para verificar las soluciones obtenidas por cada grupo y, de ser necesario, el profesor presentará aclaraciones del tema.

1.9. Temporalidad de las tareas

Para iniciar, el profesor presenta el objetivo 1 y la meta de la tarea SOFA. Luego, el profesor presentará la tarea. Posteriormente, los estudiantes resolverán la tarea de forma individual. Luego, los estudiantes conformarán grupos de tres integrantes y escribirán los procedimientos y solución en una cartelera que expondrán a todos los compañeros del curso para realizar la puesta en común. Finalmente, el docente realizará la retroalimentación al mostrar los errores en los que incurrieron los estudiantes y llegará a acuerdos para solucionar la situación dada con la función lineal. A continuación, presentamos la tabla 5 en la que relacionamos el tiempo estimado de cada actividad de la tarea de aprendizaje T1.1 SOFA.

Tabla 5

Temporalidad de implementación de la tarea de aprendizaje T1.1 SOFA

Actividad	Tiempo estimado (min)
1 Recordar el objetivo 1 y las metas de la tarea	5

Tabla 5

Temporalidad de implementación de la tarea de aprendizaje T1.1 SOFA

Actividad	Tiempo estimado (min)
2 Presentación de la tarea de aprendizaje T1.1 SOFA y entrega de hoja impresa	2
3 Solución de la tarea de forma individual	10
4 Conformación de los grupos 3 estudiantes	3
5 Puesta en común, discusión y elaboración de la cartelera	15
6 Puesta en común de resultados y retroalimentación	15
7 Recolección de las evidencias de la tarea	5

1.10. Errores y ayudas

Al tratar de resolver la tarea, los estudiantes pueden incurrir en el error de hacer una operación diferente a la multiplicación para encontrar la variable dependiente (E26). En este momento, el profesor pedirá al estudiante analizar si el valor a pagar es el mismo al entrar 1, 2, 6 o 50 personas y en qué cantidad es mayor o menor, para que el estudiante comprenda que debe multiplicar el valor de la entrada por el número de personas que ingresan. Otro error en el que los estudiantes pueden incurrir es “intercambiar la variable independiente con la variable dependiente en los datos presentados en una tabla” (E9). Para ayudar a que los estudiantes superen este error, el profesor recuerda la importancia de identificar la dependencia que existe entre las variables. También, preguntará si la dependencia establecida por los estudiantes es correcta. En el anexo 1, se encuentran los demás errores en los que los estudiantes pueden incurrir. Las ayudas que puede brindar el profesor se encuentran en el anexo 5.

1.11. Grafo de criterios de logro T1.1 SOFA

En la figura 9, presentamos el grafo de criterios de logro del objetivo 1. Los criterios de logro que bordeamos son los que los estudiantes pueden abordar al resolver la tarea de aprendizaje T1.1 SOFA.

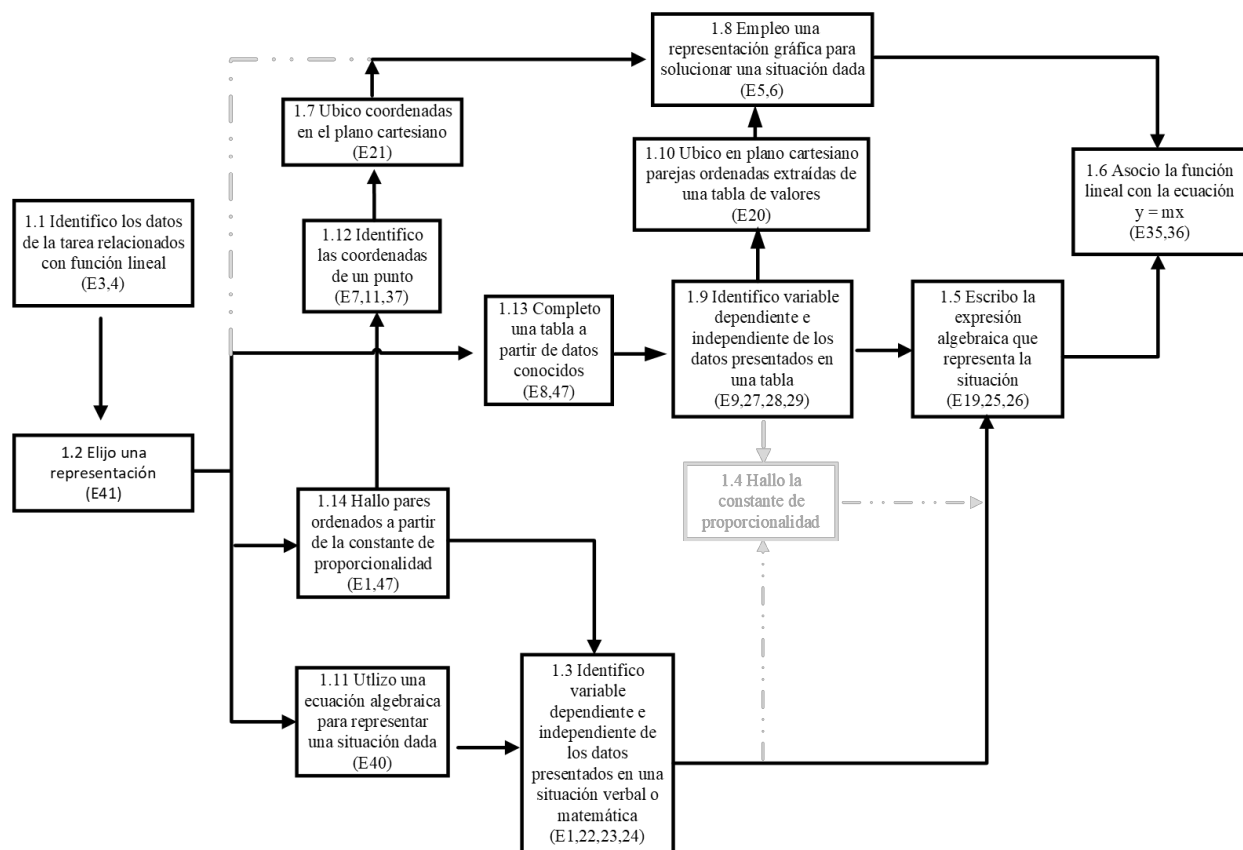


Figura 9. Grafo de criterios de logro tarea T1.1. SOFA

Para resolver la tarea, primero, los estudiantes identifican los datos de la tarea relacionados con función lineal. Luego, pueden elegir una de cuatro representaciones (parejas ordenadas, tablas, expresión algebraica o gráfica). Una vez elegida la representación, los estudiantes realizan los procedimientos para representar la situación según el sistema de representación que hayan elegido. Posteriormente, los estudiantes plantean la expresión algebraica que representa la situación dada. Finalmente, asocian la función lineal con la ecuación $y = mx$.

1.12. Actuación del profesor

El profesor debe asegurarse de que cada estudiante resuelva la tarea propuesta de manera individual para que pueda ser compartida con sus dos compañeros del grupo. Posteriormente, el profesor indicará que se reúnan en grupos de tres y compartan las soluciones. El profesor realizará un seguimiento al procedimiento realizado por los estudiantes para identificar si están incurriendo en algún error para brindar la ayuda respectiva. Luego, al realizar la puesta en común por grupos de tres integrantes y presentar las conclusiones por grupo, el profesor interviene con preguntas para indagar u orientar por los métodos de solución y la representación que emplearon los estudiantes, para luego llegar a una conclusión de las diferentes estrategias de solución.

1.13. Sugerencias metodológicas

Recomendamos al docente prestar atención a las discusiones de los grupos para apoyar el desarrollo de la tarea por medio de las ayudas presentadas en el anexo 5, para que los estudiantes logren superar los errores en los que puedan incurrir. El profesor será el moderador en el momento en el que se hace la puesta en común con el grupo total. Además, proporcionará ejemplos de preguntas que pueden hacer los estudiantes para promover la comunicación entre ellos. Por ejemplo, los estudiantes pueden preguntarse ¿qué datos identificó?, ¿cuál es la variación del costo total de ingreso al SOFA con relación al número de personas que asisten?, o ¿qué operación o procedimiento utilizó para encontrar el valor total a pagar por el ingreso al SOFA?

1.14. Evaluación de la tarea

El resultado de esta actividad se materializa en una hoja que recopila los procedimientos seguidos por los estudiantes individualmente y en las carteleras que han elaborado para mostrar la forma en las que la resolvieron de manera grupal. Por medio de la revisión de estos instrumentos, el docente puede identificar los errores más comunes en que los estudiantes incurrieron, los procedimientos acertados que emplearon y los sistemas de representación que utilizaron. Con esta información, el docente puede plantear una retroalimentación antes de implementar la siguiente tarea de aprendizaje.

2. TAREA DE APRENDIZAJE T1.2 SOFA 2

Con la segunda tarea de aprendizaje del objetivo 1, esperamos que los estudiantes hallen la constante de proporcionalidad y la relación de dependencia entre las variables planteadas en una situación dada. Pretendemos aportar en mayor medida a la capacidad matemática fundamental de representación y al proceso de emplear, debido a que los estudiantes deben hallar la constante de proporcionalidad y con ella reconocer que la variación del precio total pagado depende del valor unitario y el número de niños que ingresan al evento. Adicionalmente, esperamos que los estudiantes muestren interés al modelar situaciones de proporcionalidad directa que emplean la función lineal y tengan disposición favorable para traducir la función lineal en los distintos sistemas de representación (EA1 y EA2). Así mismo, pretendemos que los estudiantes logren modelar una expresión algebraica que represente la situación de la forma $y = mx$ y la vinculen con la función lineal.

2.1. Requisitos

Para el desarrollo de esta tarea de aprendizaje, requerimos que los estudiantes tengan conocimientos acerca de la constante de proporcionalidad, de la noción de función lineal y reconozcan la variable dependiente y la variable independiente. Así mismo, los estudiantes deben contar con habilidades para desarrollar operaciones básicas como la multiplicación y la división, así como habilidades para emplear los diferentes sistemas de representación que se utilizan para representar funciones lineales como tablas, plano cartesiano, expresiones algebraicas y las traducciones entre ellos.

2.2. Aportes de la tarea al objetivo de aprendizaje

Con el desarrollo de esta tarea, pretendemos contribuir a que los estudiantes hallen la constante de proporcionalidad a partir de una situación dada y la empleen junto con la relación de dependencia entre las variables para encontrar la variación de una cantidad de acuerdo con el número de personas que asisten a un evento y la representen con una tabla. Así mismo, buscamos que los estudiantes realicen la gráfica o escriban la expresión algebraica. Adicionalmente, esperamos que los estudiantes logren modelar una expresión que represente dicha situación en la forma $y = mx$ y la asocien con la función lineal.

2.3. Formulación

Los organizadores del SOFA decidieron dar un descuento en las entradas de los niños. A ti, como encargado de finanzas, te dijeron que el viernes ingresaron 100 niños y se recibieron \$1.800.000 en total por la entrada de ellos y el sábado ingresaron 70 niños y se recibieron \$1.260.000 en total por la entrada de ellos.

En cada uno de los días posteriores (domingo y lunes festivo), la cantidad de niños que ingresaron al SOFA fue diferente cada día. Por lo tanto, el dinero total que ingresó al evento por la entrada de los niños fue diferente cada uno de estos días. Diseñe una manera de representar la variación del ingreso total recibido por niños con base en la variación de la cantidad de niños que entraron al SOFA en los diferentes días.

¿Cuál es el valor de la entrada al SOFA de un niño?

¿Qué expresión ingresarías en el software que te permita tener la proyección de entradas de niños de los días sábado, domingo y lunes festivo?

Reúnete en el grupo con dos compañeros y respondan las preguntas anteriores.

Analicen y solucionen: ¿por qué razones la expresión que se ingresaría al software es o no es una función? Si la respuesta anterior es afirmativa, ¿qué tipo de función es?

2.4. Conceptos y procedimientos implicados en la tarea

Los conceptos que involucra esta tarea son los de constante de proporcionalidad, variable dependiente y variable independiente. Los procedimientos que pueden realizar los estudiantes son los de división de la variable dependiente en la variable independiente para hallar la constante de proporcionalidad y el de multiplicar el valor de la constante de proporcionalidad encontrada (valor de una entrada) por el número de niños asistentes al evento para obtener la variación del precio total pagado. Es decir, los estudiantes deben identificar la expresión $y = mx$ y aplicarla.

2.5. Sistemas de representación que se activan

Para representar la solución de la tarea, los estudiantes tienen la opción de utilizar el sistema de representación tabular para organizar los datos indicados en la formulación de la tarea o datos nuevos que consideren relevantes. Así mismo, pueden usar el sistema de representación gráfico al ubicar los datos de la tarea en el plano cartesiano. Por otra parte, los estudiantes pueden usar el sistema de representación simbólico mediante el empleo de expresiones algebraicas de la forma $y = mx$.

2.6. Contextos PISA en los que se sitúa la tarea

Podemos enmarcar esta tarea en los contextos personal y social del marco conceptual de PISA 2012, dado que el estudiante la puede realizar desde su experiencia personal.

2.7. Materiales y recursos

Para el desarrollo de esta tarea, sugerimos entregar a los estudiantes una hoja impresa por parejas en la que se presenta la formulación de la situación a desarrollar. Además, los estudiantes usarán su cuaderno, lápiz, borrador, regla, tablero y marcadores.

2.8. Agrupamiento, comunicación e interacción

Para el desarrollo de esta tarea, el docente propone que se realice en parejas. Cada pareja determinará el sistema de representación y los procedimientos que emplearán para dar solución a la situación. Durante el desarrollo de la tarea, el profesor estará atento a responder preguntas que surjan por parte de los estudiantes. Una vez que todas las parejas hayan terminado la tarea, el profesor iniciará la puesta en común. Algunas parejas (elegidas aleatoriamente) presentarán a sus compañeros la forma en la que resolvieron la situación planteada. Finalmente, se verificarán las soluciones presentadas por cada pareja y, de ser necesario, el profesor presentará aclaraciones del tema.

2.9. Temporalidad de la tarea

Para la realización de la tarea T1.2 SOFA 2, tenemos previsto una sesión de 55 minutos. En la primera parte, el profesor recuerda a todo grupo el objetivo de la tarea, presenta la meta de la tarea, su descripción, su formulación, y la forma de trabajo para su desarrollo. Seguidamente, el profesor da paso al desarrollo de la tarea en parejas. Posteriormente, se hace una puesta en común, en la que las parejas elegidas presentan la solución a la situación dada. Finalmente, el docente realizará la retroalimentación al mostrar los errores en los que incurrieron los estudiantes y llegará a acuerdos para solucionar la situación dada con la función lineal. En la tabla 6, presentamos la descripción de la temporalidad de la tarea T1.2 SOFA 2.

Tabla 6

Temporalidad de implementación de la tarea de aprendizaje T1.2 SOFA 2

	Actividad	Tiempo estimado (min)
1	Recordar el objetivo 1, la meta, la descripción, la formulación y la forma de trabajo de la tarea.	12
2	Conformación de las parejas de estudiantes	3
3	Desarrollo de la tarea por parejas	20
4	Puesta en común de resultados y retroalimentación	15
5	Recolección de las evidencias de la tarea	5

estudiantes plantean la expresión algebraica que representa la situación dada. Finalmente, asocian la función lineal con la ecuación $y = mx$.

2.12. Actuación del profesor

Al iniciar, el docente recordará el objetivo de la tarea y proporcionará las instrucciones necesarias sobre cómo se desarrollará la clase. Mientras los estudiantes trabajan en parejas, el profesor debe estar atento para abordar cualquier pregunta o inquietud que puedan surgir por parte de los estudiantes. Posteriormente, en la puesta en común, el docente facilitará un espacio en el que algunas parejas compartirán la solución de la tarea. Finalmente, el docente guiará la retroalimentación, al destacar los procedimientos correctos utilizados por cada pareja y los errores en los que hayan incurrido los estudiantes durante la realización de la tarea.

2.13. Sugerencias metodológicas

Sugerimos al docente proporcionar un tiempo inicial suficiente para que los estudiantes puedan comprender completamente la tarea planteada. Así mismo, sugerimos que el docente esté atento a identificar los posibles errores en los que los estudiantes pueden incurrir en el proceso de resolución de la tarea, de tal manera que pueda ofrecer la ayuda apropiada cuando sea necesario. También, proponemos que el docente plantee preguntas relacionadas con diversos aspectos, como el sistema de representación utilizado, el procedimiento seleccionado por cada pareja y la relación con el contexto en el que se enmarca la tarea. Por ejemplo, el docente podría plantear preguntas como las siguientes: ¿por qué consideran que un sistema de representación es más adecuado que otro? ¿Cuál es la razón para elegir este sistema de representación? ¿Qué opinan acerca de los procedimientos o representaciones utilizados por otras parejas? ¿Qué otras parejas emplearon el mismo procedimiento o sistema de representación?

2.14. Evaluación de la tarea

Para evaluar la tarea, proponemos que el profesor tenga en cuenta el proceso empleado por cada pareja para solucionarla, así como, la participación en la puesta en común por parte de cada uno de los estudiantes.

3. TAREA DE APRENDIZAJE T1.3 SOFA 3

Con la última tarea de aprendizaje del objetivo 1, esperamos que los estudiantes establezcan la constante de proporcionalidad, la variable dependiente y la variable independiente desde las gráficas dadas. Anticipamos que los estudiantes puedan identificar que existe una relación directamente proporcional entre el ingreso total recibido y la cantidad de personas que ingresaron al SOFA. Pretendemos aportar, en mayor medida, a la capacidad matemática fundamental de representar y al proceso matemático de emplear. Así mismo, esperamos que los estudiantes puedan plantear la información dada por medio de una expresión algebraica o una tabla. Adicionalmente, esperamos que los estudiantes muestren interés al modelar situaciones de proporcionalidad directa empleando la función lineal y tengan disposición favorable para traducir la función lineal en los distintos sistemas de representación (EA1 y EA2). Por otra parte, pretendemos que los estu-

diantes logren modelar una expresión algebraica que represente la situación de la forma $y = mx$ y la vinculen con la función lineal.

3.1. Requisitos

Para el desarrollo de esta tarea de aprendizaje, sugerimos que los estudiantes empleen el conocimiento formal que han adquirido con el desarrollo de las tareas anteriores sobre la proporcionalidad directa, la constante de proporcionalidad y la dependencia de variables para la representación de la función lineal.

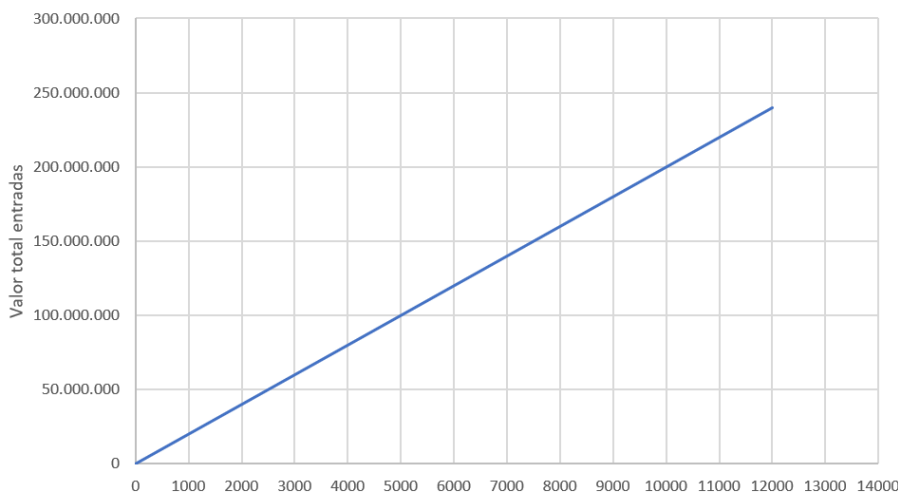
3.2. Aportes de la tarea al objetivo de aprendizaje

Con el desarrollo de esta tarea, pretendemos contribuir a que los estudiantes identifiquen la constante de proporcionalidad, la variable dependiente y la variable independiente a partir de la información presentada en una gráfica mediante el establecimiento de diferentes estrategias para reconocer las características y propiedades de la proporcionalidad directa. Con estos datos esperamos que los estudiantes logren modelar una expresión que represente la situación en la forma $y = mx$ y la asocien con la función lineal.

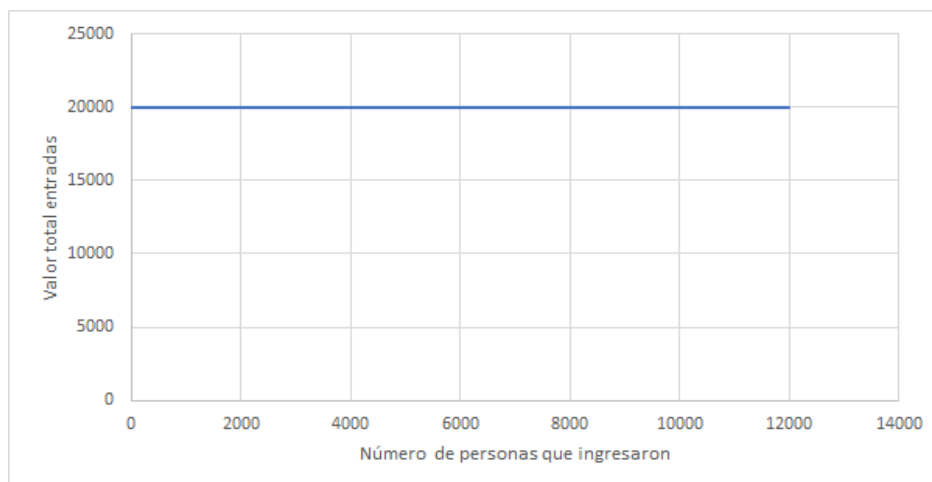
3.3. Formulación

Finalizado el SOFA, tú, como encargado de las finanzas, descargaste la imagen presentada por el software respecto al dinero recaudado por la entrada de adultos al evento, para realizar tu informe de ventas. Sin embargo, el software presenta un error y arrojó tres imágenes en las que se presentaba dicha situación. Las gráficas son las siguientes.

Gráfica 1

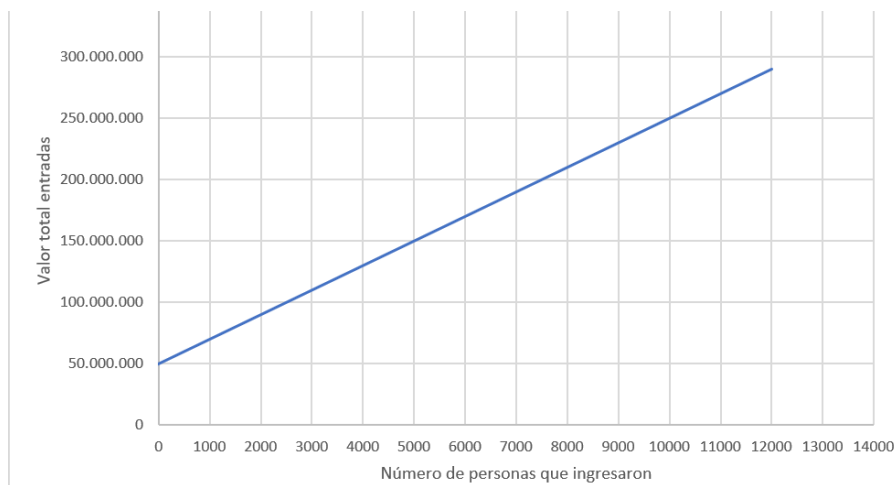


2



Gráfica

Gráfica 3



Como encargado de finanzas, ¿cuál sería el argumento que llevarías al ingeniero de sistemas para que él lograra ajustar el error y que el sistema presente una única gráfica correcta que modele la situación real del valor total recibido por entradas, al tener en cuenta el número de adultos que ingresaron cualquier día?

¿Cuál consideras que es la expresión correcta, para ingresar al software, que representa la situación del valor total recibido por las entradas de adultos?

¿Por qué razones la expresión del punto 2 es o no una función? Si la respuesta anterior es afirmativa, ¿qué tipo de función es?

Al finalizar, el profesor escogerá al azar cinco estudiantes para que presenten su respuesta al grupo en general para luego llegar a acuerdos.

3.4. Conceptos y procedimientos implicados en la tarea

En esta tarea, los estudiantes relacionan las cantidades dadas para hallar la constante de proporcionalidad, la variable dependiente y la variable independiente desde de la información presentada en la gráfica. Los procedimientos que pueden realizar los estudiantes son dividir el ingreso total recibido por las entradas entre en número de personas que ingresaron al evento para hallar la constante de proporcionalidad.

3.5. Sistemas de representación que se activan

En la tarea, los estudiantes pueden elegir representar la situación al emplear tablas que les permitan organizar la información presentada. Adicionalmente, los estudiantes pueden representar la situación por medio de una expresión algebraica de la forma $y = mx$.

3.6. Contextos PISA en los que se sitúa la tarea

La tarea corresponde a los contextos personal y social de acuerdo con el marco de evaluación PISA 2012 porque se relaciona con las actividades propias de los estudiantes, su familia y grupo de pares. Esta situación está enmarcada en un acontecimiento de la cotidianidad del estudiante.

3.7. Materiales y recursos

Para el desarrollo de la tarea, los estudiantes requieren una hoja con la formulación, cuaderno y lápiz. Así mismo, los estudiantes deberán emplear el tablero y marcadores para presentar la solución propuesta a sus compañeros.

3.8. Agrupamiento, comunicación e interacción

Para la solución de la tarea, el docente interactúa con todo el grupo para identificar los datos. Posteriormente, los estudiantes conformarán grupos de tres personas con el fin de seleccionar el sistema de representación y procedimiento a usar para dar solución a la situación planteada. Adicionalmente, el grupo de tres estudiantes escogerá un representante para exponer en la puesta en común a todo el grupo la estrategia empleada. En la puesta en común, se elegirán cinco estudiantes para que presenten la solución dada.

3.9. Temporalidad de las tareas

Para el desarrollo de esta tarea, estimamos una duración de una sesión de 55 minutos. El docente iniciará recordando el objetivo 1 y presentará la meta, la formulación y el agrupamiento que se tendrá para el desarrollo de la tarea. Luego, los estudiantes conformarán grupos de tres integrantes y escribirán los procedimientos y solución en sus cuadernos. Posteriormente, se elegirá el representante de cada grupo y se seleccionarán cinco representantes para exponer las soluciones planteadas en la puesta en común. Finalmente, el docente realizará la retroalimentación al mostrar los errores en los que incurrieron los estudiantes y llegará a acuerdos para solucionar la situación dada con la función lineal. A continuación, presentamos la tabla 7 en la que relacionamos el tiempo estimado de cada actividad de la tarea de aprendizaje T1.3 SOFA 3.

Tabla 7

Temporalidad de implementación de la tarea de aprendizaje T1.3 SOFA 3

	Actividad	Tiempo estimado (min)
1	Recordar el objetivo 1, presentar la meta, la formulación y el agrupamiento para desarrollar de la tarea	12
2	Conformación de los grupos 3 estudiantes	3
3	Desarrollo de la tarea en los grupos de tres estudiantes y elección de representante expositor	20
4	Puesta en común de resultados y retroalimentación	15
5	Recolección de las evidencias de la tarea	5

3.10. Errores y ayudas

En esta tarea, los estudiantes pueden incurrir en el error de intercambiar las variables dependiente e independiente al extraer la información de una gráfica (E7). Con motivo de esto, el docente puede indagar si los estudiantes relacionaron bien la información de los ejes del plano con las variables dependiente e independiente. El listado completo de errores y ayudas se encuentra en los anexos 1 y 4, respectivamente.

3.11. Grafo de criterios de logro T1.3 SOFA 3

En la figura 11, presentamos el grafo de criterios de logro del objetivo 1. Destacamos con un borde los criterios de logro que los estudiantes pueden abordar al resolver la tarea de aprendizaje T1.3 SOFA 3.

3.13. Sugerencias metodológicas

Recomendamos al docente prestar atención a las discusiones de los grupos para apoyar el desarrollo de la tarea por medio de las ayudas presentadas en el anexo 5, para que los estudiantes logren superar los errores en los que puedan incurrir. Adicionalmente, el docente puede proporcionar ejemplos de preguntas que pueden hacer que los estudiantes promuevan la comunicación entre ellos. Por ejemplo, el docente puede preguntar ¿cuál es la variación del costo total de ingreso al SOFA con relación al número de personas que asisten?, ¿qué operación o procedimiento utilizó para encontrar el valor total a pagar por el ingreso al SOFA?, o ¿qué indica la gráfica que no inicia en el punto $(0, 0)$?

3.14. Evaluación de la tarea

Para evaluar la tarea, proponemos que el profesor tenga en cuenta los procedimientos empleados por los estudiantes para la realización de la tarea, así como la explicación dada en la puesta en común.

7. TAREAS DE APRENDIZAJE DEL OBJETIVO

2

En este apartado, presentamos la tarea de aprendizaje propuesta para el segundo objetivo. La tarea pertenece a los contextos fenomenológicos de recta creciente y recta decreciente y corresponde al fenómeno científico. Detallamos la caracterización de la tarea de aprendizaje T2.1 Pendientes, al abordar aspectos como sus requisitos, aportes al objetivo, formulación, conceptos y procedimientos implicados, sistemas de representación empleados, contextos PISA, materiales y recursos, agrupamiento, interacción y comunicación, y su temporalidad. Adicionalmente, presentamos los errores en los que los estudiantes pueden incurrir al resolver la tarea y las respectivas ayudas que pueden emplear para superarlos. También, incluimos los grafos de criterios de logro, las sugerencias metodológicas y la evaluación de la tarea.

1. TAREA 2.1 PENDIENTES

Con la tarea propuesta para el segundo objetivo, buscamos que los estudiantes hallen la pendiente de una recta para relacionarla con su direccionalidad. Esperamos que los estudiantes vinculen los conocimientos adquiridos con el desarrollo del primer objetivo y los conocimientos previos relacionados con el reconocimiento de coordenadas de un punto, las operaciones con números reales, los conceptos de elevación y avance, y la distancia de puntos en el plano cartesiano. Con esta tarea, pretendemos aportar en mayor medida a la capacidad matemática fundamental de razonamiento y argumentación en el proceso matemático de emplear, porque los estudiantes deben relacionar la pendiente hallada con la recta creciente o con la recta decreciente. Así mismo, esperamos que los estudiantes presenten una disposición favorable para representar la función lineal al emplear cualquier sistema de representación (expectativa afectiva EA2) y desarrollen la curiosidad de relacionar la pendiente con la direccionalidad de la recta (EA3).

1.1. Requisitos

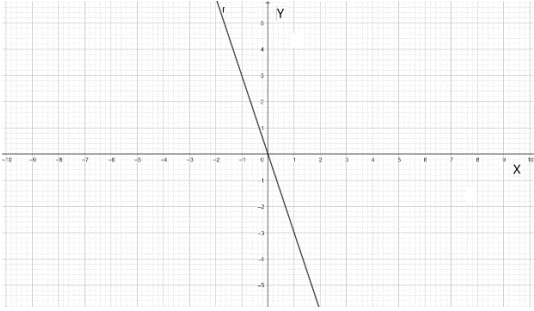
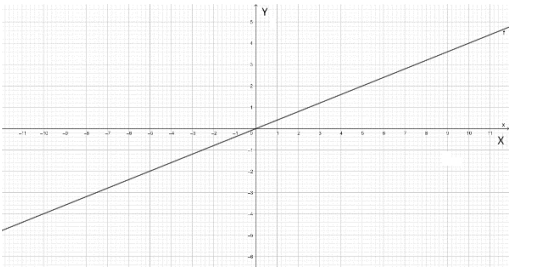
Para el desarrollo de esta actividad, es necesario que los estudiantes reconozcan la noción de pendiente de la recta, conozcan las ecuaciones que pueden emplear para hallar la pendiente de una recta y puedan identificar cuándo la gráfica de una recta crece o decrece.

1.2. Aportes de la tarea al objetivo de aprendizaje

Con el desarrollo de esta tarea, se pretende que los estudiantes logren caracterizar la direccionalidad de la recta con el valor positivo o negativo de la pendiente. Dicha pendiente se podrá determinar a partir de diferentes formas de representación, ya sea al identificarla como el coeficiente de la variable x o constante de proporcionalidad o al hallarla con alguna de las ecuaciones $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ o $m = \frac{\text{elevación}}{\text{avance}}$.

1.3. Formulación

Completa la tabla según la indicación de descrita a la derecha. Posteriormente responde la pregunta que está al final de la tabla.

	Halla la pendiente de la gráfica
	Halla la pendiente de la gráfica

$y = -5x$	<p>Grafica la expresión algebraica dada y halla la pendiente</p>										
$y = 10x$	<p>Grafica la expresión algebraica dada y halla la pendiente</p>										
<table border="1" data-bbox="305 1241 756 1591"> <thead> <tr> <th>X</th> <th>Y</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>5</td> <td>25</td> </tr> <tr> <td>10</td> <td>50</td> </tr> <tr> <td>-5</td> <td>-25</td> </tr> <tr> <td>-10</td> <td>-50</td> </tr> </tbody> </table>	X	Y	5	25	10	50	-5	-25	-10	-50	<p>Grafica la información dada en la tabla y halla la pendiente</p>
X	Y										
5	25										
10	50										
-5	-25										
-10	-50										

<table border="1"> <thead> <tr> <th>X</th> <th>Y</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>-500</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>-1.000</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>-1</td> <td>500</td> </tr> </tbody> </table>		X	Y	1	-500	2	-1.000	0	0	-1	500	<p>Grafica la información dada en la tabla y halla la pendiente</p>
X	Y											
1	-500											
2	-1.000											
0	0											
-1	500											

¿Qué puedes concluir de las rectas de cada situación y cómo se relacionan con el valor numérico de sus respectivas pendientes?

1.4. Conceptos y procedimientos implicados en la tarea

Los conceptos que esta tarea involucra son los de función lineal, constante de proporcionalidad, elevación, avance, coordenadas de puntos, plano cartesiano y variables. Adicionalmente, la tarea involucra los procedimientos que pueden realizar los estudiantes entre números reales.

1.5. Sistemas de representación que se activan

Para representar la solución de la tarea, los estudiantes tienen la opción de representar la función lineal mediante el uso del plano cartesiano, al traducirlo desde del sistema de representación tabular y el simbólico. Adicionalmente, los estudiantes vinculan la pendiente hallada (mediante el empleo de la ecuación $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, o la ecuación $m = \frac{\text{elevación}}{\text{avance}}$, o al identificarla como la constante que acompaña la variable x en la expresión algebraica) con la direccionalidad de la recta.

1.6. Contextos PISA en los que se sitúa la tarea

La tarea está enmarcada en el contexto científico del marco conceptual de PISA 2012, porque presenta situaciones matemáticas para que los estudiantes hallen la pendiente de una recta y la vinculen con su direccionalidad (recta creciente o recta decreciente).

1.7. Materiales y recursos

Para el desarrollo de la tarea, cada estudiante recibe una hoja que contiene seis situaciones, para que complete la tabla y analice el comportamiento de cada recta con la pendiente determinada o viceversa. Los recursos empleados son una hoja en la que se presenta la situación, un lápiz y una regla.

1.8. Agrupamiento, comunicación e interacción

Para el desarrollo de esta tarea, prevalecerá la interacción de los estudiantes. Inicialmente, los estudiantes desarrollarán la tarea de manera individual. Luego, se elegirán 5 estudiantes al azar para que presenten y justifiquen su solución frente a todo el grupo de estudiantes y el profesor corregirá (de ser necesario) los errores incurridos para posteriormente generalizar las conclusiones.

1.9. Temporalidad de las tareas

Para iniciar, el profesor presentará el objetivo 2 y la meta de la tarea Pendientes. Luego, el profesor realizará la descripción de la tarea y mostrará los criterios de logro planteados para esta tarea, vinculará el tema de pendientes con la gráfica de una línea recta, al tener en cuenta las sesiones anteriores de función lineal. Posteriormente, el profesor indicará que los estudiantes tienen 60 minutos para solucionar la tarea de manera individual. Por último, los estudiantes realizarán la puesta en común de la tarea con todo el grupo. En esta puesta en común, algunos estudiantes compartirán la estrategia de solución que emplearon, se compararán con la que otros estudiantes usaron y se observará si se incurrió en algún error en la solución presentada por alguno de ellos. En la tabla 8, presentamos la descripción de la temporalidad de la tarea.

Tabla 8

Temporalidad de implementación de la tarea de aprendizaje T2.1 Pendientes

	Actividad	Tiempo estimado (min)
1	Presentación el objetivo 2 y la meta de la tarea	5
2	Presentación de la tarea de aprendizaje T2.1 Pendientes y entrega de hoja impresa	5
3	Solución de la tarea de forma individual	60
4	Puesta en común, discusión y retroalimentación	35
5	Recolección de las evidencias de la tarea	5

1.10. Errores y ayudas

Al tratar de resolver la tarea, los estudiantes pueden incurrir en el error de omitir el signo de las coordenadas de un punto al resolver la ecuación $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ para hallar la pendiente (E14). En este momento, el profesor le pedirá al estudiante analizar si se tuvieron en cuenta los signos de las coordenadas al reemplazarlas en la ecuación (ayuda A48), para que el estudiante comprenda que el signo negativo de una coordenada puede variar el valor encontrado. En el anexo 1, se encuentran los demás errores en los que los estudiantes pueden incurrir. Las ayudas que puede brindar el profesor se encuentran en el anexo 5.

1.11. Grafo de criterios de logro T2.1 Pendientes

En la figura 12, presentamos el grafo de criterios de logro del objetivo 2. Los criterios de logro que proponemos son los que los estudiantes pueden abordar al resolver la tarea de aprendizaje T2.1 Pendientes.

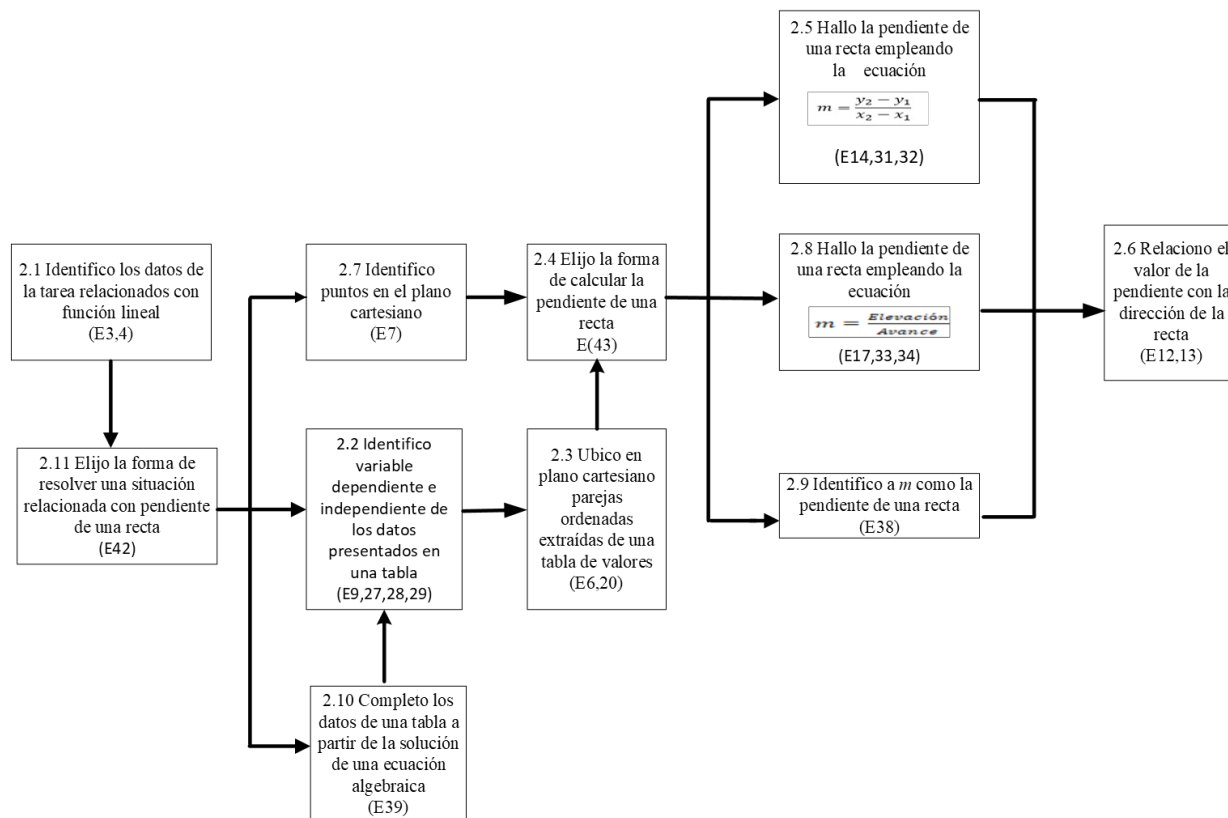


Figura 12. Grafo de criterios de logro tarea T2.1. Pendientes

Para resolver la tarea, primero, los estudiantes identifican los datos de la tarea relacionados con función lineal. Luego, pueden elegir una de tres representaciones (tablas, expresión algebraica o gráfica). Una vez elegida la representación, los estudiantes realizan los procedimientos para representar la situación según el sistema de representación y posteriormente representarla con una gráfica. Luego, los estudiantes eligen una forma y realizan los procedimientos para hallar la pendiente. Finalmente, vinculan la pendiente hallada con la direccionalidad de la recta (recta creciente o recta decreciente).

1.12. Actuación del profesor

El profesor debe asegurarse de que cada estudiante resuelva la tarea propuesta de manera individual. Posteriormente, el profesor elegirá al azar 5 estudiantes para que compartan las soluciones con el grupo general, realizará un seguimiento al procedimiento realizado por los estudiantes para identificar en qué errores incurren y brindará la ayuda respectiva para luego llegar a una conclusión de las diferentes estrategias de solución empleadas.

1.13. Sugerencias metodológicas

Recomendamos al profesor seguir de cerca el progreso de los estudiantes durante el desarrollo de la tarea y brindar apoyo cuando incurran en errores, según las ayudas proporcionadas en el anexo 5. El profesor será el moderador en el momento en el que se hace la puesta en común con el grupo total. Adicionalmente, el profesor guiará al grupo para lograr una conclusión general.

1.14. Evaluación de la tarea

El resultado de esta actividad se materializa en una hoja que recopila los procedimientos seguidos por los estudiantes individualmente y en la puesta en común. Mediante la revisión de estos instrumentos, el profesor puede identificar los errores más comunes en que los estudiantes incurrieron, los procedimientos acertados que emplearon y los sistemas de representación y procedimientos que utilizaron. Con esta información, el profesor puede corregir errores en que los estudiantes hayan incurrido.

8. EXAMEN FINAL

En este apartado, presentamos el examen final de nuestra unidad didáctica. Con este examen, buscamos evaluar los aspectos claves de los dos objetivos propuestos en la unidad didáctica. El examen final propuesto consta de seis tareas de evaluación. Las tareas de evaluación 1 a 3 pretenden establecer en qué medida los estudiantes alcanzaron el primer objetivo. Las tareas 4 a 6 determinan el alcance del segundo objetivo. Esperamos que, con estas tareas, el profesor pueda recoger la información relacionada con el aprendizaje de la función lineal. Los estudiantes deben desarrollar el examen final de forma individual en una sesión de 110 minutos.

1. TAREAS DE EVALUACIÓN

A continuación, presentamos la formulación de las actividades del examen final.

1. Marcos tienen un automóvil que consume un galón de gasolina por cada 50 km recorridos. Responde las siguientes preguntas.

Marcos desea hacer un viaje de Bogotá a Medellín, cuya distancia es 500 km, ¿cuántos galones de gasolina consume el automóvil para llegar a Medellín?

Escribe una expresión algebraica en la que relaciones la cantidad de galones de gasolina y la distancia recorrida. Deja evidencia del proceso que realices. ¿Qué tipo de función es esta expresión?

2. En el trayecto hacia Medellín, Marcos debió tanquear su automóvil en cuatro ocasiones diferentes. La siguiente tabla muestra la variación del costo total de la gasolina con base en el número de galones de gasolina comprados en la primera gasolinera.

Gasolinera 1	
Galones de gasolina	Costo total

5	51.000
10	102.000
15	153.000

Con la información anterior, responde las siguientes preguntas.





Grafica la situación anterior y escribe la expresión algebraica que la representa. ¿Qué puedes concluir de la gráfica y la expresión algebraica que representan la situación?

Si en la primera gasolinera Marcos compró 9 galones de gasolina, ¿cuánto pagó en total? Deja evidencia del proceso que realices.

3. En la cuarta gasolinera, Marcos encontró que el valor total de la gasolina a pagar estaba dado por la expresión $y = 9.500x$, donde y es el valor total para pagar y x es el número de galones de gasolina comprados. Responde:

Si Marcos compró 7 galones de gasolina. ¿Cuánto dinero pagó en total?

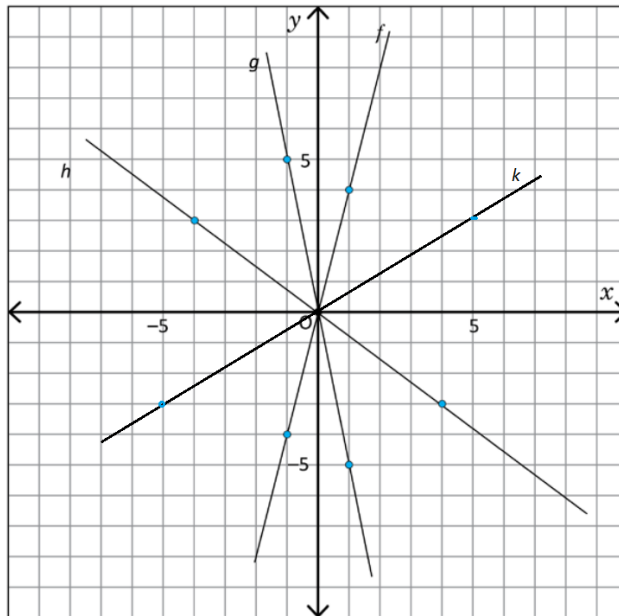
En la gasolinera, estaba la siguiente tabla, pero le cayó pintura en algunos valores. ¿Cómo la completarías?

Gasolinera 4	
Galones de gasolina	Costo total
5	47.500
10	
	142.500
	

c. Realiza la gráfica que representa la situación.

d. ¿Qué relación encuentras entre la ecuación dada y la gráfica realizada?

4. En cada caso, halla la pendiente de cada recta. ¿Qué puedes concluir de las pendientes encontradas y la direccionalidad de la recta que corresponde?



5. Para cada una de las tablas presentadas a continuación, grafica la información y halla la pendiente. ¿Qué puedes concluir de las pendientes encontradas respecto a la direccionalidad de las rectas que representan cada función?

a.

Número de horas	1	5	10	20
Litros de agua en el tanque	6	30	60	120

b.

Número de horas transcurridas	1	2	3	4
Temperatura en grados centígrados	-2	-4	-6	-8

6. Grafica cada una de las siguientes funciones.

$$y = 20x$$

$$y = -4x$$

Para cada una de las expresiones presentadas, identifica la pendiente. ¿Cómo es el comportamiento de las gráficas al tener en cuenta las pendientes halladas?

2. RÚBRICA DEL EXAMEN FINAL

En este apartado, presentamos la rúbrica del examen final, al tener en cuenta cada objetivo (anexo 6). La rúbrica tiene como propósito ayudar al profesor a la calificación cualitativa de los estudiantes según su nivel de desempeño al evaluar los diferentes criterios de logro. De esta manera, el profesor podrá asignar un valor numérico que determine el nivel de desempeño de cada estudiante. El sistema de evaluación que proponemos en esta rúbrica ha sido adaptado a la valoración propuesta por el Ministerio de Educación Nacional (Superior, Alto, Básico y Bajo). El nivel de desempeño bajo tendrá una calificación de 1,0 a 5,9; el nivel de desempeño básico tendrá una calificación de 6,0 a 7,9; el nivel de desempeño alto tendrá una calificación de 8,0 a 8,9; y el nivel de desempeño superior tendrá una calificación de 9,0 a 10,0. A continuación, presentamos, en la tabla 9, la rúbrica propuesta para la evaluación.

Tabla 9

Niveles de desempeño e indicadores de logro para los objetivos de la unidad didáctica de función lineal

Nivel de desempeño	Indicadores
	Objetivo 1
Superior	El estudiante reconoce desde diferentes sistemas de representación una función lineal, sin incurrir en errores.
Alto	El estudiante emplea los sistemas de representación gráfico, tabular, numérico y simbólico de la función lineal, pero la asocia con la función $y = mx + b$ o con la función $y = b$ (E35, E36).
Básico	El estudiante realiza la traducción entre los sistemas de representación tabular, numérico, simbólico y gráfico de la función lineal, pero incluye datos inexistentes en la situación (E4), confunde las variables independiente y dependiente, confunde las coordenadas x y y (E22, E23, E24, E9, E28 y E29), calcula de manera incorrecta la constante de proporcionalidad al invertir las variables o al hacer operaciones matemáticas incorrectas (E15, E16 y E18) o no tiene en cuenta las regularidades de una situación para completar la tabla o escribir una expresión algebraica (E8 y E11).

Tabla 9

Niveles de desempeño e indicadores de logro para los objetivos de la unidad didáctica de función lineal

Nivel de desempeño	Indicadores
Bajo	El estudiante tiene dificultades para emplear los sistemas de representación simbólico, tabular, numérico y gráfico de la función lineal para representar una situación dada, porque incluye datos inexistentes en una situación (E3), identifica las variables como independientes entre sí (E1 y E27), desconoce la constante de proporcionalidad, plantea una situación algebraica diferente a una ecuación (E44) o completa tablas con datos que no están en la situación (E46)
Objetivo 2	
Superior	El estudiante relaciona el valor de la pendiente hallada con la direccionalidad de la recta sin cometer errores.
Alto	El estudiante relaciona el valor de la pendiente hallada con la direccionalidad de la recta, pero realiza operaciones sin tener en cuenta el signo de las coordenadas de un punto (E32).
Básico	El estudiante relaciona el valor de la pendiente con la direccionalidad de la recta, pero realiza el cociente entre avance y elevación (E33) o intercambia el orden de las variables y_2, y_1, x_2, x_1 en solución de la ecuación $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (E14, E30 y E31).
Bajo	El estudiante presenta dificultades para hallar la pendiente de la recta y relacionarla con la direccionalidad de esta, porque incluye datos inexistentes en la situación problema (E3), identifica las variables en la situación como independientes entre sí (E27) o confunde la elevación y avance (E17 y E34).

9. CONCLUSIONES

La unidad didáctica que presentamos en este documento es el resultado de una propuesta para la enseñanza del tema de función lineal. Esta propuesta está basada en el análisis de los aspectos cognitivos y afectivos que pueden influir en el proceso de enseñanza y aprendizaje de este tema en estudiantes de noveno grado. Elegimos abordar este tema porque consideramos que es una herramienta matemática transversal que se puede aplicar a una amplia variedad de situaciones en la vida cotidiana y en diferentes campos de estudio, tales como la economía, la física o la estadística. Adicionalmente, el concepto de función lineal está asociado con otros conceptos matemáticos como proporcionalidad directa, razones, sistemas de ecuaciones lineales y límites, entre otros. Fundamentamos esta propuesta en documentos curriculares nacionales e internacionales, tales como, los Estándares Básicos en Competencias (MEN, 2006), los Derechos básicos de aprendizaje (MEN, 2016) y el marco conceptual PISA 2012 (Ministerio de Educación, cultura y deporte, 2013). Adicionalmente, nuestra propuesta está alineada con el plan de área del colegio Antonio Villavicencio para estudiantes de grado noveno.

Para empezar, realizamos el análisis de contenido para establecer la estructura conceptual, los fenómenos que lo rodean, los conceptos, los procedimientos y las representaciones que caracterizan el tema de función lineal. Luego, realizamos el análisis cognitivo, que nos permitió enfocarnos en el aprendizaje de los estudiantes. En este análisis, realizamos la redacción de dos objetivos (expectativas de aprendizaje), las expectativas de tipo afectivo y las limitaciones de aprendizaje para el tema de función lineal. Posteriormente y con base en la información anterior, realizamos el análisis de instrucción, en el que diseñamos las tareas de aprendizaje y las tareas de evaluación. En cuanto a las tareas de aprendizaje, propusimos tres tareas para abordar el primer objetivo y una tarea para abordar el segundo objetivo. En cuanto a las tareas de evaluación, diseñamos dos tareas. Diseñamos la primera tarea de evaluación para evidenciar los conocimientos y conceptos que deberían tener los estudiantes para abordar la unidad didáctica (tarea diagnóstica) y diseñamos la segunda tarea de evaluación con el fin de recoger información sobre los conocimientos y habilidades que adquirieron los estudiantes después de implementar la unidad didáctica.

Una vez realizamos las actividades y análisis descritos anteriormente, diseñamos la primera versión de la unidad didáctica de función lineal para grado noveno. Al implementar la unidad didáctica, evaluamos el logro de las expectativas de aprendizaje y afectivas de cada uno de los

estudiantes, al considerar su contribución a las capacidades matemáticas fundamentales y procesos matemáticos planteados en el marco conceptual PISA 2012. Adicionalmente, la implementación de la unidad didáctica nos aportó más elementos para el análisis de las limitaciones de aprendizaje que se presentaron en los estudiantes. Con base en estos resultados, revisamos y rediseñamos la unidad didáctica. Nos centramos en la formulación de las preguntas en las tareas de aprendizaje, ya que identificamos que a los estudiantes les generaban confusiones en la identificación de datos relevantes para la solución de estas.

El producto del proceso anteriormente descrito es la unidad didáctica de función lineal que presentamos. Con nuestra propuesta, contribuimos a que los estudiantes modelen situaciones de proporcionalidad directa mediante el uso de diferentes representaciones de la función lineal. Así mismo, esperamos que los estudiantes determinen la pendiente y la relacionen con la direccionalidad de la recta. Adicionalmente, buscamos aportar en mayor medida al proceso matemático de emplear, ya que los estudiantes deben utilizar datos, conceptos, procedimientos y herramientas matemáticas para dar solución a las tareas propuestas. En cuanto a las capacidades matemáticas fundamentales que esperamos fomentar con esta unidad didáctica, encontramos (a) el diseño de estrategias para resolver problemas; (b) la matematización, cuando el estudiante implementa reglas y expresiones matemáticas para representar de forma simbólica un problema de la vida real; (c) la comunicación, cuando el estudiante presenta los diferentes sistemas de representación y traducciones entre ellos; (d) la representación, cuando el estudiante hace uso de diferentes formas para representar la función lineal; (e) el razonamiento y argumentación para que los estudiantes realicen inferencias y justifiquen sus acciones en el desarrollo de las tareas; y (f) la utilización de operaciones y de lenguaje simbólico formal y técnico, cuando el estudiante utiliza las reglas y convenciones de diferentes sistemas de representación para la solución de las tareas.

Por otra parte, consideramos que las diferentes formas en que se agrupan los estudiantes favorecen la interacción, la comunicación y el análisis que ellos pueden realizar sobre el tema. Debido a que las diversas puestas en común muestran diferentes niveles de desempeño y percepciones de los estudiantes desde lo cognitivo y afectivo, porque deben realizar procedimientos y argumentos para representar situaciones por medio de la función lineal, favoreciendo el proceso matemático de emplear.

En el desarrollo de la unidad didáctica, reconocimos como limitante el encontrar fenómenos sociales, personales o profesionales para modelar situaciones relacionadas con la pendiente negativa que se asocia a la recta decreciente en una función lineal.

10. LISTADO DE ANEXOS

A continuación, presentamos el índice de los anexos que complementan la información de la segunda parte del informe final.

1.1. Anexo 1. Listado de dificultades y errores

En este documento presentamos las dificultades y errores en los que los estudiantes pueden incurrir en el desarrollo de las tareas de aprendizaje.

1.2. Anexo 2. Listado de criterios de logro

En este anexo, presentamos el listado completo de criterios de logro, que se relacionan con el grafo de criterios de logro del objetivo.

1.3. Anexo 3. Listado de conocimientos previos

En este documento, presentamos el listado de conocimientos previos que los estudiantes deberían tener para la realización de las tareas de aprendizaje propuestas en la unidad didáctica.

1.4. Anexo 4. Fichas de las tareas

En este anexo, presentamos la tarea diagnóstica, las tareas de aprendizaje y la tarea de evaluación propuestas para la unidad didáctica de función lineal.

1.5. Anexo 5. Listado de ayudas

En este anexo, presentamos el listado de ayudas que el profesor puede emplear para contribuir a que los estudiantes corrijan los errores en los que están incurriendo.

1.6. Anexo 6. Rúbricas de evaluación

En este documento, presentamos las rúbricas propuestas para la evaluación del examen final

1.7. Anexo 7. Tareas imprimibles

En este anexo, incluimos la formulación de la tarea diagnóstica, las tareas de aprendizaje y el examen final

11. LISTADO DE FIGURAS

En este apartado, presentamos el listado de figuras de este documento.

- Figura 1. Estructura matemática de la función lineal
- Figura 2. Estructura conceptual de la función lineal
- Figura 3. Mapa conceptual de los sistemas de representación de la función lineal
- Figura 4. Representación tabular del doble de un número
- Figura 5. Representación gráfica de la función $y = 2x$
- Figura 6. Estructura del análisis fenomenológico de la función lineal
- Figura 7. Grafo de criterios de logro del objetivo 1
- Figura 8. Grafo de criterios de logro del objetivo 2
- Figura 9. Grafo de criterios de logro tarea T1.1 SOFA
- Figura 10. Grafo de criterios de logro tarea T1.2 SOFA 2
- Figura 11. Grafo de criterios de logro tarea T1.3 SOFA 3
- Figura 12. Grafo de criterios de logro tarea T2.1 Pendientes

12. LISTADO DE TABLAS

En este apartado, presentamos el listado de tablas de este documento.

- Tabla 1. Listado de expectativas afectivas del tema función lineal
- Tabla 2. Listado de dificultades y errores para el tema función lineal
- Tabla 3. Globalización de actividades
- Tabla 4. Relación de los conocimientos previos del tema con las actividades de la tarea diagnóstica
- Tabla 5. Temporalidad de implementación de la tarea de aprendizaje T1.1 SOFA
- Tabla 6. Temporalidad de implementación de la tarea de aprendizaje T1.2 SOFA 2
- Tabla 7. Temporalidad de implementación de la tarea de aprendizaje T1.3 SOFA 3
- Tabla 8. Temporalidad de implementación de la tarea de aprendizaje T2.1 Pendientes
- Tabla 9. Niveles de desempeño e indicadores de logro para los objetivos de la unidad didáctica de función lineal

13. REFERENCIAS

- Cañadas, M.C., Gómez, P., Pinzón, A. (2018). Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares. Capítulo 3 Análisis de contenido. Bogotá: Universidad de los Andes
- González, M., & Gómez, P. (2018). Apuntes de modulo. Bogotá.
- MEN. (2006). Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas. Bogotá: Autor.
- Ministerio de Educación Cultura y Deporte. (2013). Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012: matemáticas, lectura y ciencias. Descargado el 30/1/2014, de <https://goo.gl/Xwmerl>