Universidad de los Andes
Facultad de Educación

Maestría en Educación Matemática

Usos del teorema de Pitágoras

Laura Ocampo, Andrés Monsalve, Manuel Porras y Cindy López

Bogotá, diciembre de 2023

1. INTRODUCCIÓN

En este documento, presentamos la unidad didáctica de los usos del teorema de Pitágoras. Esta unidad didáctica es el resultado de nuestro trabajo como grupo tres de la décima cohorte de la maestría en Educación Matemática de la Universidad de los Andes. La hemos diseñado para estudiantes de 12 a 14 años, de grado noveno de la educación básica secundaria. En su primera versión, implementamos la unidad didáctica de manera presencial en el colegio público Rodrigo Arenas Betancourt, para el grado 903 del año 2023 de la jornada tarde. La institución cuenta con una población socioeconómicamente diversa, que pertenece a los estratos 1, 2 y 3 principalmente, ubicada en una zona comercial e industrial. Aun así, consideramos que la unidad didáctica se puede implementar en cualquier institución educativa, independientemente de su contexto socioeconómico.

En cuanto a la normativa curricular colombiana, el tema de la unidad didáctica se relaciona con los derechos básicos de aprendizaje del grado octavo, en los que encontramos el derecho siete, que afirma: "Identifica regularidades y argumenta propiedades de figuras geométricas a partir de teoremas y las aplica en situaciones reales" (MEN, 2016, p.11). En particular, dentro de ese derecho básico de aprendizaje, la unidad didáctica contribuye a las siguientes dos evidencias de aprendizaje: "Aplica el teorema de Pitágoras para calcular la medida de cualquier lado de un triángulo rectángulo" y "Resuelve problemas utilizando teoremas básicos" (MEN, 2016, p.12).

En los estándares básicos de competencias, no encontramos uno que describa el tema específico de nuestra unidad didáctica. No obstante, el estándar número cuatro del pensamiento espacial de los grados octavo y noveno contribuye al tema. Este afirma: "Uso de representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas" (MEN, 2006, p. 86).

Con la unidad didáctica, pretendemos que los estudiantes utilicen el teorema de Pitágoras para resolver dos tipos de problemas. Primero, los estudiantes deben estar en capacidad de hallar longitudes que se pueden representar como cateto o hipotenusa de un triángulo rectángulo. En segundo lugar, los estudiantes podrán verificar si un triángulo es o no rectángulo, mediante el recíproco del teorema de Pitágoras.

Encontramos que los estudiantes aprendían la fórmula del teorema de Pitágoras, pero no sabían en qué situaciones usarla, ni lo asimilaban como un conocimiento útil en escenarios reales. En gran parte, esto se debe a que los profesores enseñamos el teorema de Pitágoras desde los conceptos y en un contexto puramente matemático. El teorema de Pitágoras es útil en diferentes contextos auténticos y profesionales. Además, este teorema sirve como base para cursos posteriores, ya que es el punto de partida de la trigonometría y la geometría analítica.

Para la elaboración de nuestra unidad didáctica, hemos tenido en cuenta tanto aspectos cognitivos, como afectivos. La unidad didáctica contribuye al aprendizaje del teorema de Pitágoras por medio de tareas de aprendizaje y evaluación, en diversidad de contextos. Por otra parte, pretendemos que las diferentes actividades constituyan experiencias significativas para los estudiantes.

2. ARTICULACIÓN DE LOS CONTENIDOS

Todos los conceptos y procedimientos relacionados con un tema en particular conforman lo que llamamos estructura conceptual. Presentamos la estructura conceptual del teorema de Pitágoras en un mapa conceptual. En otro mapa conceptual, presentamos las diferentes maneras de representar el teorema de Pitágoras. Finalmente, presentamos un último mapa conceptual, que contiene los contextos que dan sentido al teorema de Pitágoras y los procedimientos matemáticos específicos asociados a estos tipos de contextos.

1. ESTRUCTURA CONCEPTUAL DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

En el mapa conceptual de la figura 1, representamos la estructura conceptual de nuestra unidad didáctica. En la parte superior del mapa, encontramos los conceptos y conocimientos de las matemáticas en general, que sirven de apoyo al tema del teorema de Pitágoras. A la izquierda de la casilla principal, encontramos los conceptos y procedimientos básicos del teorema. Finalmente, al incluir el concepto "distancias", hacemos referencia a aquellas que podemos calcular mediante el uso del teorema de Pitágoras. Asociado a distancias, en la parte inferior, anotamos el módulo de vectores que utiliza la fórmula de la distancia entre dos puntos, que a su vez se basa en el teorema de Pitágoras. Y a la derecha, anotamos aquellas medidas de la geometría que también utilizan el teorema.

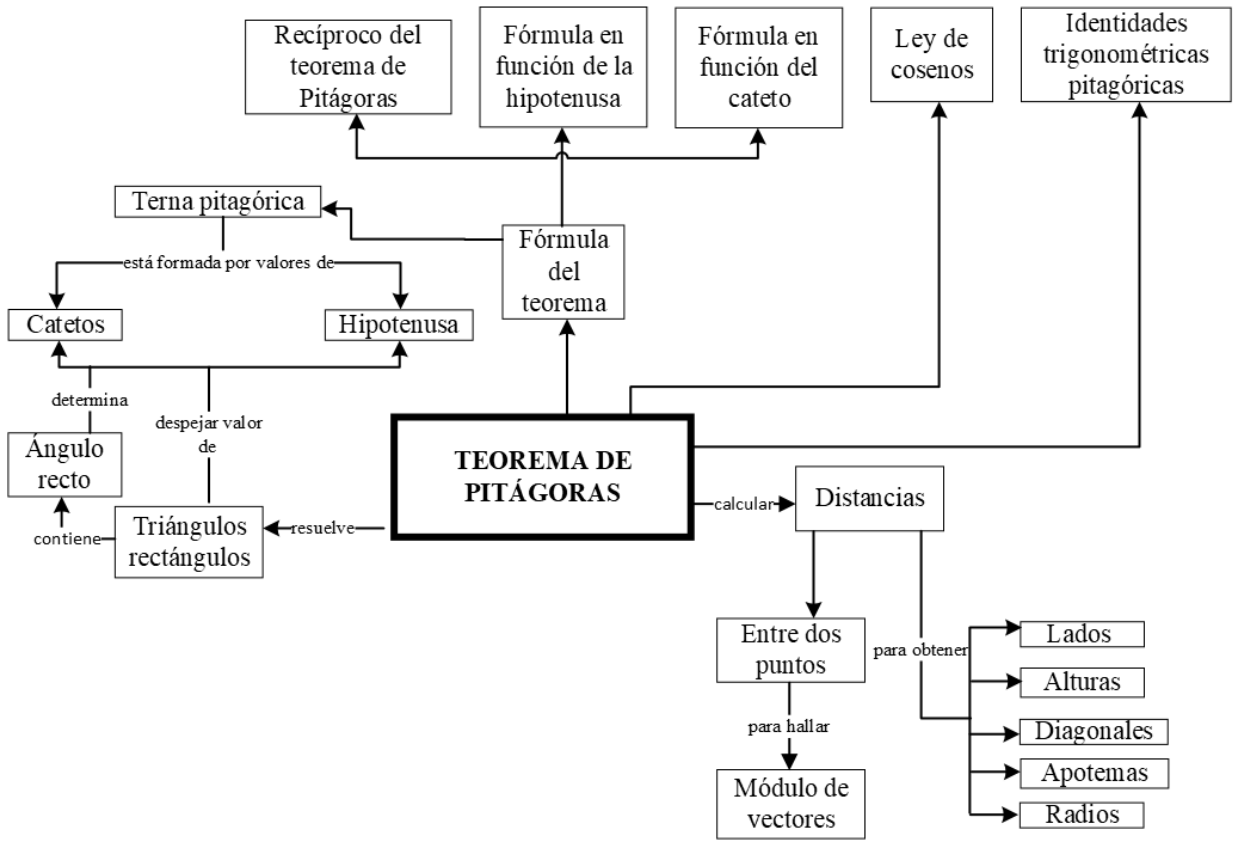

Figura 1. Estructura conceptual del teorema de Pitágoras

2. Sistemas de representación

Para representar un concepto o un contenido matemático, utilizamos los llamados sistemas de representación. Un sistema de representación debe cumplir tres reglas para considerarse como tal, que son las siguientes: "(i) identificar o crear signos, (ii) operar sobre y con ellos y (iii) determinar relaciones entre ellos" (Cañadas, Gómez, & Pinzón, 2018, pág. 17). La primera regla hace referencia a los elementos del sistema de representación. Llamamos transformación sintáctica a la segunda regla, que hace referencia a pasar de un signo a otro dentro del mismo sistema de representación. La regla tres hace referencia a las traducciones que se generan entre un sistema y otro.

Mostramos los sistemas de representación que encontramos para el teorema de Pitágoras en el mapa conceptual de la figura 2, encerrados en un rectángulo de mayor grosor. Estos son pictórico, manipulativo, ejecutable, simbólico, geométrico, gráfico, numérico y tabular.

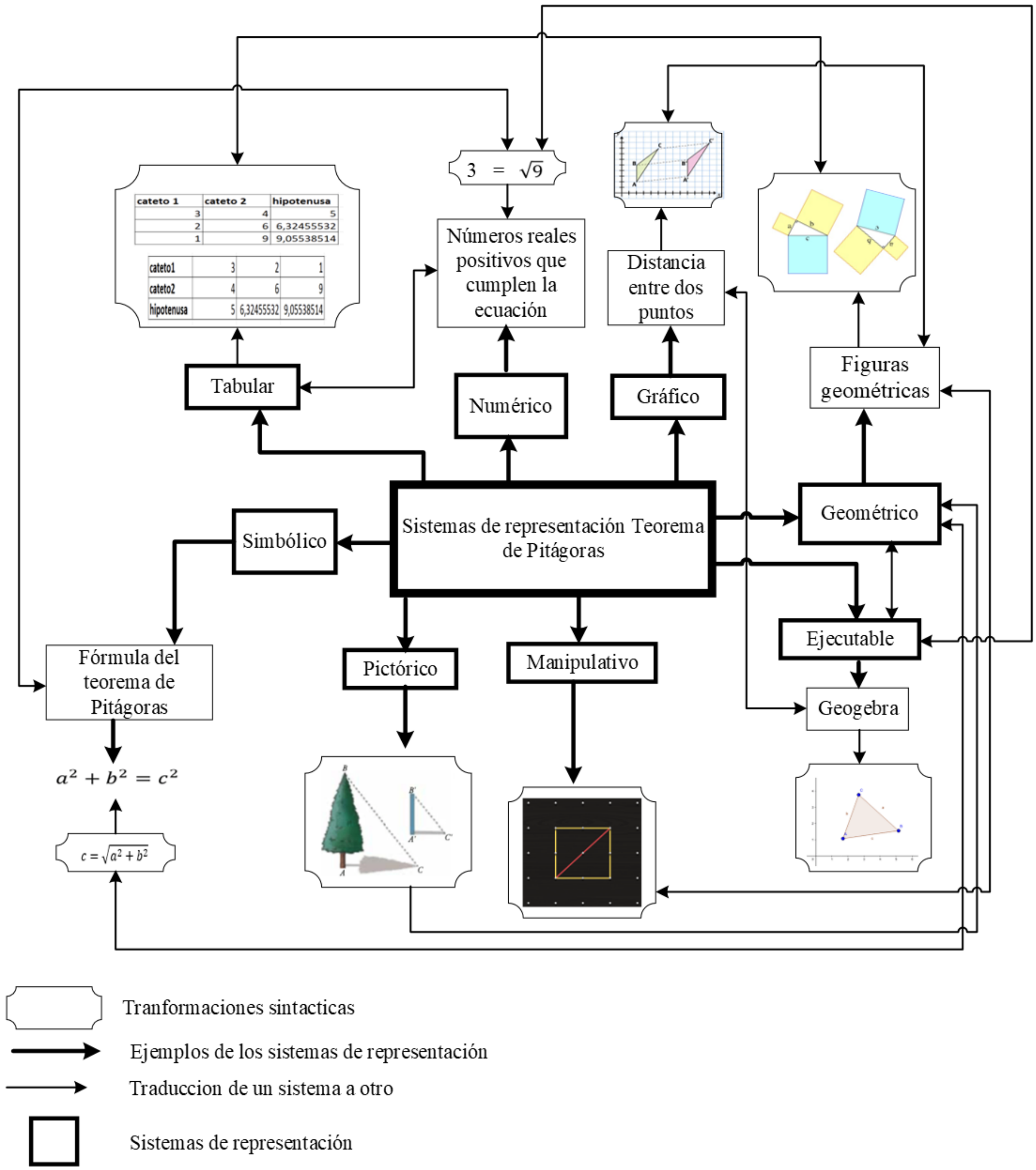

Figura 2. Sistemas de representación del teorema de Pitágoras

A continuación, describimos brevemente cada sistema de representación.

2.1. Sistema de representación pictórico

Utilizamos el sistema de representación pictórico del teorema de Pitágoras, al hacer un esbozo de una situación en la que sea útil este teorema. Una de estas situaciones puede ser la de calcular la altura de un árbol, en la que se realiza un esbozo de la situación que se presenta. Este sistema de representación tiene sus propios signos, que se utilizan para representar, por ejemplo, los árboles o cualquier elemento que haga parte de la situación. Las transformaciones sintácticas se dan en la medida en que se cambia el símbolo usado para estos objetos. Asimismo, se dan traducciones a otros sistemas, como al geométrico, al convertir las dimensiones de ciertos objetos en lados de triángulos rectángulos; o al numérico, al dar un valor a la altura del árbol.

2.2. Sistema de representación geométrico

Como el teorema de Pitágoras es un teorema propio de la geometría, el sistema de representación geométrico cobra especial importancia. No es posible entenderlo si no se dibuja o se crea la imagen del triángulo rectángulo y de los cuadrados construidos sobre cada uno de sus lados. Este sistema tiene sus signos propios que son las figuras. Podemos ver las transformaciones sintácticas, al hacer transformaciones geométricas como rotaciones y traslaciones, para comprender mejor un problema en un contexto dado. Además, este sistema de representación se puede expresar en el sistema ejecutable porque se pueden hacer figuras geométricas en GeoGebra.

2.3. Sistema de representación ejecutable

Expresamos el teorema de Pitágoras mediante sistemas de representación ejecutables como GeoGebra, Cabri o Excel. Estas aplicaciones tienen sus propios signos, como, por ejemplo, las herramientas para formar figuras geométricas que usan GeoGebra o Cabri. Podemos ver transformaciones sintácticas, en el caso de GeoGebra, al ubicar coordenadas en esta aplicación para formar un triángulo rectángulo. Por ejemplo (-1,1), (-1,-2) y (2,-2) son coordenadas de puntos en la gráfica y representan un signo dentro de GeoGebra. Ahora, podemos unir estos puntos y crear segmentos de recta (otro signo de GeoGebra) que forman un triángulo rectángulo para utilizar el teorema. A su vez, esta transformación refleja cómo GeoGebra se puede traducir en el sistema numérico, al usar los números de las coordenadas, y en el geométrico, al dibujar el triángulo.

2.4. Sistema de representación simbólico

Las fórmulas $a^2 + b^2 = c^2$ y $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ pertenecen al sistema de representación simbólico. Estas fórmulas tienen sus propios signos, como las variables, los exponentes, y los símbolos de suma, igual y el radical. Podemos evidenciar una representación sintáctica en la equivalencia entre ambas fórmulas, pues, a partir de $a^2 + b^2 = c^2$, llegamos a $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Por último, hacemos una traducción al sistema de representación geométrico, pues a^2, b^2 ó c^2, como expresiones matemáticas de las segundas potencias de tres variables, se transforman en la expresión geométrica de las áreas de los cuadrados construidos sobre cada uno de los lados de un triángulo rectángulo. También podemos traducir estas igualdades al sistema numérico, al dar valores numéricos a las variables que representan los lados del triángulo rectángulo.

2.5. Sistema de representación tabular

Podemos expresar los valores de los catetos y la hipotenusa mediante tablas. Estas tablas constituyen un sistema de representación, pues tienen sus signos propios como líneas verticales y horizontales y columnas y filas. Además, en una tabla se pueden tener transformaciones sintácticas si cambiamos las columnas por filas, como mostramos en la figura 3. Por último, podemos traducir estas tablas en el sistema de representación numérico, si extraemos los números que cumplen con la fórmula del teorema de Pitágoras mostrados en la tabla. Adicionalmente, estas tablas pueden ser expresadas en el sistema geométrico, si dibujamos el triángulo con las medidas que nos expresa la tabla de los catetos y la hipotenusa.

cateto 1	**cateto 2**	**hipotenusa**
3	4	5
2	6	6,32455532
1	9	9,05538514

cateto1	3	2	1
cateto2	4	6	9
hipotenusa	5	6,32455532	9,05538514

Figura 3. Ejemplo de transformación sintáctica del sistema de representación tabular

2.6. Sistema de representación gráfico

Utilizamos el sistema de representación gráfico en el teorema de Pitágoras, al hacer la gráfica de la distancia entre dos puntos. Los signos de este sistema son los ejes del plano cartesiano, sus valores y escalas, y las gráficas que se realizan sobre él, entre otros. En este sistema, se presentan transformaciones sintácticas, al realizar traslaciones, rotaciones o reflexiones de segmentos o figuras completas. Por último, el sistema gráfico tiene varias traducciones en distintos sistemas como, por ejemplo, en el sistema geométrico, pues graficar las rectas que forman un triángulo rectángulo se traduce en representar geométricamente esta figura.

2.7. Sistema de representación numérico

Cualquier conjunto de tres números reales positivos que cumplan con la fórmula para el teorema de Pitágoras es una representación numérica del teorema. Dentro de estos conjuntos, existen las denominadas ternas pitagóricas que son conjuntos de tres números naturales que cumplen con la fórmula del teorema de Pitágoras. Estas ternas tienen sus propios signos que son los números y tienen transformaciones sintácticas. Por ejemplo, podemos expresar la terna (3, 4, 5) como (9, 16, 25). Además, traducimos esta terna al sistema de representación simbólico, al expresar la igualdad $4^2 + 3^2 = 5^2$. Inclusive, podemos generar una traducción al sistema ejecutable si, en una aplicación, damos los valores de las longitudes conocidas del triángulo rectángulo para hallar la desconocida.

2.8. Sistema de representación manipulativo

Una representación manipulativa del teorema de Pitágoras es el geoplano, cuyos signos son puntillas y cuerdas. Una transformación sintáctica se presenta si construimos un rectángulo y trazamos su diagonal, para obtener dos triángulos rectángulos. Es decir, realizamos una operación con signos dentro del mismo sistema. Y podemos hacer una traducción al sistema de representación geométrico pues formamos figuras geométricas con esta herramienta.

3. Análisis fenomenológico

La fenomenología es todo el conjunto de situaciones o contextos que contienen problemas que le dan sentido a un tema en particular. De acuerdo con su similitud, estas situaciones se agrupan en los denominados contextos fenomenológicos. Como complemento a ellos, presentamos las denominadas subestructuras matemáticas, que son los conceptos o procedimientos matemáticos que contribuyen a solucionar los problemas que se presentan en los contextos fenomenológicos. En la figura 4, presentamos el cuadro conceptual que contiene la fenomenología del teorema de Pitágoras.

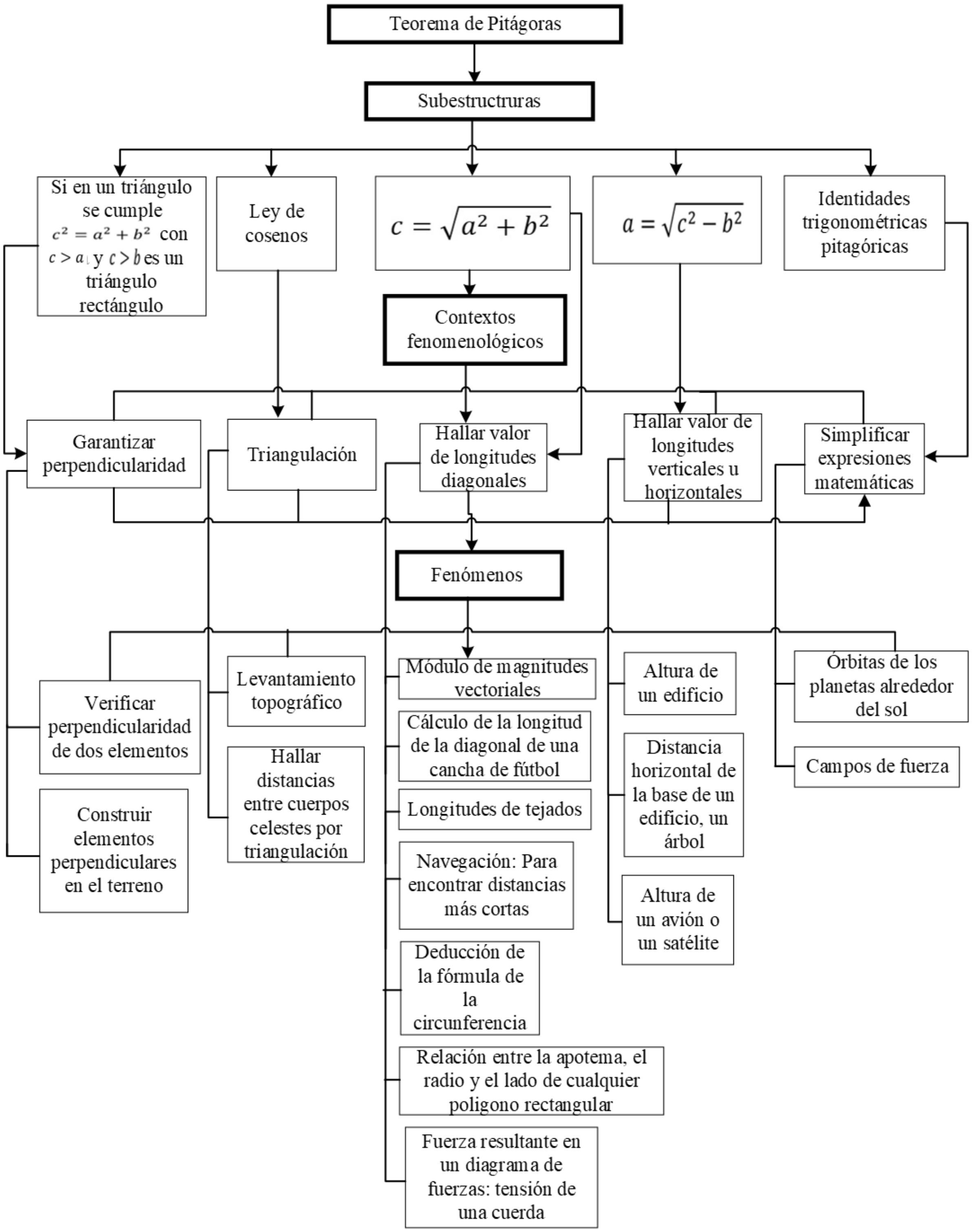

Figura 4. Fenomenología del teorema de Pitágoras

Existen dos fenómenos que tienen una característica en común: verificar la perpendicularidad de dos elementos dados y construir elementos perpendiculares en el terreno. En estos, utilizamos el enunciado del teorema como modelo para identificar triángulos rectángulos en la realidad o verificar que existen elementos perpendiculares entre sí. A partir de esta característica estructural en común, se evidencia que el contexto fenomenológico es garantizar perpendicularidad. Por lo tanto, la subestructura matemática que asociamos a estos fenómenos es “Si en un triángulo se cumple que $c^2 = a^2 + b^2$ donde $c > a$ y $c > b$, entonces es un triángulo rectángulo”. Con esto, verificamos también que los elementos identificados como a y b son perpendiculares entre sí.

Existen otros dos fenómenos que tienen en común la formación de triángulos en su desarrollo. En un levantamiento topográfico, como en un levantamiento de accidentes, se ubican tres puntos en un terreno que se convierten en los tres vértices de un triángulo. Esto se hace con el objetivo de realizar un plano descriptivo del terreno. El mismo método es utilizado para las distancias entre cuerpos celestes por triangulación, en el que los vértices del triángulo se ubican en la posición de cuerpos celestes. Vemos, por lo tanto, que estos fenómenos comparten esta característica estructural, que los enmarca dentro del contexto fenomenológico “triangulación”. La triangulación se convierte en un método práctico en el terreno pues, en cualquier triángulo, se usa la ley de cosenos para su solución. Por lo tanto, esta es la subestructura de este tipo de fenómenos.

Dentro de la subestructura $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, se encuentra el contexto fenomenológico “hallar valor de longitudes que se pueden representar como hipotenusa de un triángulo rectángulo”. Es decir, los fenómenos ligados a este contexto implican hallar la longitud del lado mayor del triángulo generado. De manera análoga, de la subestructura $a = \sqrt{c^2 - b^2}$, surgen fenómenos que se caracterizan porque el valor desconocido corresponde al de la longitud de uno de los lados adyacentes al ángulo recto.

Nuestra unidad didáctica se enfoca en los siguientes contextos fenomenológicos: (a) garantizar perpendicularidad y (b) hallar valores de longitudes diagonales, verticales y horizontales. Los sistemas de representación que abarca son numérico, pictórico, simbólico y ejecutable. De la estructura conceptual, solamente nos centraremos en la fórmula del teorema de Pitágoras, su recíproco, los elementos de un triángulo rectángulo y las ternas pitagóricas.

3. ASPECTOS COGNITIVOS

En este apartado, registramos cómo pretendemos contribuir a la formación de los estudiantes con nuestra unidad didáctica. Enunciamos sus diferentes expectativas de aprendizaje. Las expectativas de aprendizaje son las habilidades, conocimientos y competencias que esperamos que los estudiantes adquieran al estudiar un tema o área matemática particular. Estas expectativas de aprendizaje se agrupan en varios niveles. En primer lugar, analizamos cómo contribuimos a las capacidades matemáticas fundamentales del marco PISA 2012 y los procesos matemáticos asociados a ellas, que llamamos expectativas de aprendizaje de nivel superior. En segundo lugar, tenemos las expectativas de aprendizaje de nivel medio, que son los objetivos de aprendizaje de la unidad didáctica. Estos comprenden lo que pretendemos que los estudiantes aprendan y sirven de base para las tareas de aprendizaje. En tercer lugar, se encuentran las expectativas de aprendizaje de nivel inferior, dentro de las que incluimos los conocimientos que los estudiantes deben poseer antes de abordar un tema y los que deben desarrollar como parte de la unidad didáctica.

También incluimos las denominadas expectativas afectivas, que abarcan el aspecto afectivo y emocional de los estudiantes en su acercamiento al tema matemático. Añadimos las limitaciones de aprendizaje, que se refieren a las dificultades y errores en las que pueden incurrir los estudiantes al abordar un tema. Finalmente, consideramos los procedimientos que utilizan los estudiantes para resolver problemas matemáticos, que denominamos criterios de logro.

1. EXPECTATIVAS DE APRENDIZAJE

En este apartado, describimos las expectativas de aprendizaje. Agrupamos estas expectativas de aprendizaje en diferentes niveles: superior, medio e inferior. También, presentamos las expectativas de tipo afectivo.

1.1. Expectativas de aprendizaje de nivel superior

En nuestra unidad didáctica, nos basamos en los procesos y las capacidades matemáticas fundamentales propuestos en el marco conceptual de PISA (Programme for International Student Assessment) 2012. Los procesos matemáticos según PISA 2012 son formular, emplear e interpretar. Y las capacidades fundamentales son matematización, comunicación, representación, razonamiento y argumentación, diseño de estrategias para resolver problemas, utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico, y utilización de herramientas matemáticas. En el desarrollo de nuestra unidad didáctica, pretendemos contribuir a estos tres procesos matemáticos y a las siete capacidades fundamentales asociadas a ellos. Sin embargo, la unidad didáctica contribuye en mayor medida a las capacidades matemáticas fundamentales de matematización, comunicación y utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico. La unidad didáctica favorece a la matematización, pues el estudiante identifica estructuras matemáticas subyacentes al problema del mundo real, que en este caso son longitudes de un triángulo que puede observar y las puede asociar a estructuras matemáticas como ángulos o al teorema de Pitágoras. La unidad didáctica contribuye a la capacidad matemática fundamental de comunicación, en la medida en que el estudiante utiliza expresiones como cateto, hipotenusa o ángulo recto para interpretar enunciados, articular soluciones y justificarlas y argumentarlas en el contexto del problema. Finalmente, la utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico se ve fortalecida porque el estudiante usa variables para representar un problema del mundo real.

1.2. Expectativas de aprendizaje de nivel medio

Después del análisis realizado, resumimos en dos objetivos lo que pretendemos que los estudiantes alcancen por medio de esta unidad didáctica. Tuvimos en cuenta las subestructuras seleccionadas en la fenomenología para redactar los objetivos de la siguiente manera.

Objetivo 1. Resolver situaciones en las que sea necesario utilizar el teorema de Pitágoras para hallar longitudes desconocidas.

Objetivo 2. Comprobar si dos elementos son o no perpendiculares mediante el uso del recíproco del teorema de Pitágoras.

1.3. Expectativas de aprendizaje de nivel inferior

Dentro de las expectativas de nivel inferior, están los conocimientos previos. Para nuestra unidad didáctica, definimos 13 conocimientos previos. Algunos están relacionados con contenidos geométricos, como “identificar el concepto de ángulo” o “identificar triángulos rectángulos”. Otros están relacionados con operaciones como “calcular el cuadrado de un número”. El listado completo de conocimientos previos se encuentra en el anexo 1. Dentro de estas expectativas de nivel inferior, se encuentran también ciertos conjuntos de conocimientos y procedimientos específicos que denominaremos criterios de logro, de los que hablaremos más adelante.

1.4. Expectativas afectivas

Además de los aspectos cognitivos y conceptuales, pretendemos que nuestra unidad didáctica aporte a los aspectos afectivos de los estudiantes. Las expectativas afectivas buscan vincular los aspectos cognitivos con la motivación de los estudiantes. Si un estudiante desarrolla interés, confianza y predisposición positiva, podrá desarrollar con mayor destreza los procedimientos matemáticos. Es por esto que planteamos las expectativas afectivas que presentamos en la tabla 1.

Tabla 1
Listado de expectativas afectivas del tema teorema de Pitágoras

EA	Descripción
1	Desarrollar interés en el tema del teorema de Pitágoras y su recíproco, al mostrar cercanía entre los problemas y situaciones de la vida real

Tabla 1

Listado de expectativas afectivas del tema teorema de Pitágoras

EA	Descripción
2	Desarrollar predisposición positiva a trabajar tareas y problemas que involucren el teorema de Pitágoras y que refleje la apropiación del tema
3	Desarrollar confianza al solucionar problemas que involucren el teorema de Pitágoras y su recíproco

Nota. EA: expectativa afectiva

2. Limitaciones de aprendizaje

Las limitaciones de aprendizaje enmarcan los errores en que pueden incurrir los estudiantes en un tema matemático y las dificultades en las que se agrupan estos errores. Específicamente "Una dificultad de aprendizaje es una circunstancia que impide o entorpece la consecución de los objetivos de aprendizaje previstos." (González & Gómez, 2018, pág. 23). Por su parte, un error es "la manifestación visible de una dificultad. El error es observable directamente en las actuaciones de los escolares, en sus respuestas equivocadas a las cuestiones y tareas concretas que les demanda el profesor. Por ello, es el error el que más nos acerca al tema matemático que estemos analizando." (González & Gómez, 2018, pág. 24).

En el aprendizaje del teorema de Pitágoras dentro de nuestra unidad didáctica, consideramos siete dificultades: (a) dificultad para diferenciar ángulos y triángulos, (b) dificultad para diferenciar elementos del triángulo rectángulo, (c) dificultad para realizar las operaciones correspondientes en el proceso de solución, (d) dificultad al despejar variables en la ecuación del teorema de Pitágoras, (e) dificultad en la implementación de la fórmula del teorema de Pitágoras, (f) dificultad en la interpretación del contexto del problema y (g) dificultad en la elaboración y la manipulación de figuras y esbozos. Dentro de estas dificultades, encontramos múltiples errores que se encuentran en el anexo 2. Algunos errores en los que los estudiantes incurren con frecuencia son, por ejemplo, multiplicar por dos en vez de elevar al cuadrado, calcular un valor de la raíz diferente o dar una respuesta sin asociarla al contexto del problema.

3. Criterios de logro

Como dijimos anteriormente, los criterios de logro son todos los procesos que utilizan los estudiantes para resolver problemas matemáticos. Cabe resaltar que los estudiantes pueden tener diferentes estrategias de solución en las que se utilizan distintos criterios de logro. Así, en el anexo 3, hemos recopilado los criterios de logro para solucionar las tareas de aprendizaje de nuestra unidad didáctica. Algunos ejemplos de criterios de logro son los siguientes.

1. El criterio de logro CdL1.1 “Identifico un triángulo rectángulo y sus elementos” hace referencia al primer procedimiento que un estudiante sigue para desarrollar una tarea de aprendizaje correspondiente al objetivo uno.

2. El criterio de logro CdL1.15 “Calculo raíz cuadrada” es otro paso importante en la solución de las tareas de aprendizaje del objetivo uno.

3. Con el criterio de logro CdL2.5 “Identifico tres segmentos como los lados de un triángulo”, nos referimos al primer paso que sigue el estudiante para desarrollar una tarea de aprendizaje del segundo objetivo. En esta tarea, el triángulo puede o no ser rectángulo, pero el estudiante debe identificar que la solución del problema implica la existencia de un triángulo.

4. Grafos de criterios de logro de los objetivos de aprendizaje

Los grafos de criterios de logro ayudan a caracterizar los objetivos de aprendizaje. Los grafos representan todas las posibles maneras en que los estudiantes se acercan a solucionar las tareas en las diferentes situaciones de un contenido. Las bifurcaciones en los grafos muestran las distintas estrategias. En la figura 5, registramos el grafo de los criterios de logro para el primer objetivo.

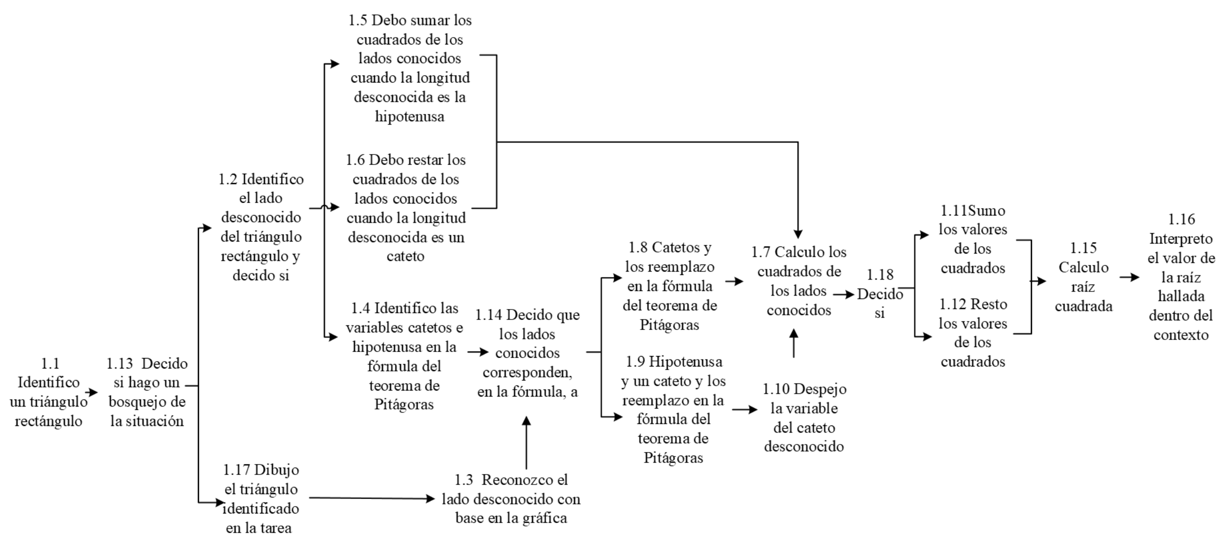

Figura 5. Grafo de criterios de logro del objetivo uno

El grafo de la figura 5 muestra cuatro caminos posibles de solución para las tareas del primer objetivo. Todas las soluciones inician con la identificación de un triángulo rectángulo en la situación del problema (CdL1.1). Después, el estudiante puede decidir si hace o no un bosquejo de la situación (CdL1.13). En caso de que no se haga un bosquejo hay tres posibles soluciones:

1. En el criterio de logro CdL1.5, el estudiante reconoce que la incógnita corresponde a una hipotenusa y, por lo tanto, señala que la operación que se debe hacer es sumar los cuadrados de los

lados conocidos. En este caso, no utiliza la fórmula, sino que simplemente se ejecutan las operaciones correspondientes, como un algoritmo.

2. En el criterio de logro CdL1.6, el estudiante reconoce que el segmento desconocido corresponde a uno de los catetos. Entonces, señala que la operación que debe hacer es una resta, luego de hallar los cuadrados de las longitudes dadas. Al igual que en el camino de solución uno, no se emplea la fórmula, sino que se realizan las operaciones en el orden identificado.

3. En el criterio de logro CdL1.4, el estudiante reemplaza los valores de los lados conocidos en la fórmula del teorema de Pitágoras. Identificamos la existencia de este camino por estudiantes que tienen un buen manejo del álgebra. En este caso, si el estudiante sigue el procedimiento dado por la fórmula, identifica fácilmente las operaciones que debe realizar y el orden en que debe hacerlas. En el caso de que el valor desconocido sea la hipotenusa solo se reemplazan los valores conocidos. Si el lado desconocido es un cateto, se reemplazan los valores conocidos y se debe hacer un despeje adicional.

Por otro lado, el estudiante puede decidir hacer un bosquejo (CdL1.17). Luego, reconoce el lado desconocido tras identificarlo en la gráfica, y después sigue los mismos pasos del tercer camino. Estos cuatro caminos se conectan en los criterios de logro relativos a calcular los cuadrados de los lados conocidos, sumarlos o restarlos según el caso, y hallar la raíz. Para ilustrar mejor la diferencia entre el camino tres y los caminos uno y dos, presentamos un ejemplo. Supongamos que la tarea da el valor de dos catetos conocidos que miden 5 y 6 unidades. Si un estudiante sigue el camino uno, haría los siguiente:

$$5^2 + 6^2$$
$$25 + 36$$
$$61$$
$$\sqrt{61} = 7{,}81\ unidades$$

Por su parte, si un estudiante sigue el camino tres, haría lo siguiente:

$$h^2 = 5^2 + 6^2$$
$$h^2 = 25 + 36$$
$$h^2 = 61$$
$$h = \sqrt{61}$$
$$h = 7{,}81\ unidades$$

Para el objetivo dos, también consideramos las diferentes maneras en que los estudiantes pueden abordar las tareas para solucionarlas. En la figura 6, presentamos el grafo de los criterios de logro para el objetivo dos.

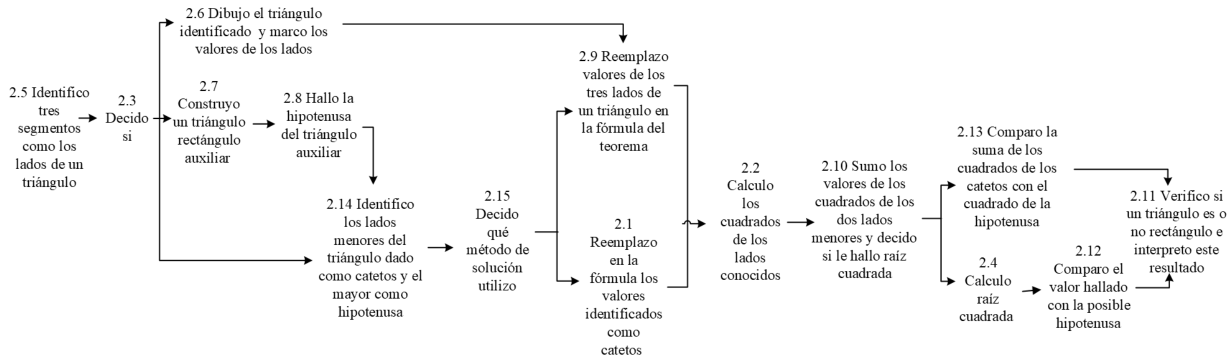

Figura 6. Grafo de criterios de logro del objetivo dos

En la figura 6, mostramos tres caminos de solución para las tareas del objetivo dos. Al inicio de la solución de las tareas de este objetivo, el estudiante identifica tres segmentos en la situación dada, como los lados de un triángulo (CdL2.5). Después, al igual que en el objetivo uno, el estudiante puede decidir si hace o no un bosquejo de la situación. Si no bosqueja la situación, tiene dos opciones:

1. En el criterio de logro CdL2.9, el estudiante reemplaza los tres valores dados en la fórmula del teorema de Pitágoras.

2. En el criterio de logro CdL2.1, el estudiante reemplaza los valores de los lados menores del triángulo, que son los posibles catetos, en la fórmula del teorema de Pitágoras.

En el grafo, podemos observar que, antes de tomar las dos opciones mencionadas anteriormente, encontramos los criterios de logro CdL2.7 y CdL2.8, que constituyen procedimientos adicionales que surgen en determinados contextos. Con estos procedimientos, el estudiante debe encontrar la hipotenusa de un triángulo rectángulo adicional (usar el objetivo uno). Esta hipotenusa constituye un lado en común con otro triángulo. Este valor ayudará al estudiante a determinar si este otro triángulo es o no rectángulo.

Por otro lado, si decide hacer el bosquejo, el estudiante realiza el dibujo y después hace los pasos del primer camino. Ambos caminos se conectan después, al calcular el cuadrado de los catetos y sumarlos. Posteriormente, en el caso del camino uno, el estudiante puede comparar cada lado de la ecuación y concluir si el triángulo es o no rectángulo, dados estos valores. En el caso del camino dos, el estudiante debe primero despejar el valor de la posible hipotenusa, por lo que debe sacar raíz a ambos lados. Una vez obtenido este valor, lo compara con el valor del lado más largo del triángulo y concluye si es o no rectángulo.

Nuevamente, daremos un ejemplo de los dos caminos anteriores. Supongamos que en la tarea se dan dos segmentos que miden 2 y 3 unidades, que forman un triángulo cuyo tercer lado mide 4 unidades. Si el estudiante decide solucionar la tarea por el camino uno, haría lo siguiente:

$$4^2 = 2^2 + 3^2$$
$$16 = 4 + 9$$
$$16 = 13$$

Al notar que la igualdad no se cumple, esperamos que el estudiante concluya que el triángulo no es rectángulo, porque no se cumple el teorema y que, por lo tanto, los lados dados no son perpendiculares entre sí. Si sigue el camino dos, haría lo siguiente:

$$h^2 = 2^2 + 3^2$$
$$h^2 = 4 + 9$$
$$h^2 = 13$$
$$h = \sqrt{13}$$
$$h = 3{,}6$$

Compara este 3,6 después con el valor más largo del triángulo que es 4. Como no coinciden, esperamos que el estudiante concluya que el triángulo no es rectángulo y que no existe perpendicularidad entre los segmentos dados.

4. Esquema general de la unidad didáctica

Proyectamos el desarrollo de la unidad didáctica en nueve sesiones. En la tabla 2, podemos observar cada una de estas sesiones de manera detallada. En la primera sesión, se desarrolla la prueba diagnóstica, que sirve para determinar si los estudiantes cuentan o no con los conocimientos previos que requieren para el desarrollo de la unidad didáctica. En la segunda sesión, se debe hacer una retroalimentación de esa prueba diagnóstica, después de que el profesor haya revisado los resultados. En esta sesión, los estudiantes deben reforzar todos los conocimientos previos que aún no están claros. En la sesión tres, el profesor presenta la unidad didáctica y los objetivos de aprendizaje y aclara las dudas que tengan los estudiantes al respecto. En las sesiones cuatro y cinco, los estudiantes desarrollan las tareas del primer objetivo. En las sesiones seis y siete, desarrollan las tareas del segundo objetivo. En la sesión ocho, se lleva a cabo el examen final, en el que el profesor evalúa los dos objetivos de la unidad didáctica. Y en la sesión final, el profesor hace una retroalimentación de la unidad didáctica, que incluye una revisión del examen final.

Tabla 2
Cronograma unidad didáctica

Sesión	Descripción	Tiempo (minutos)
1	Tarea diagnóstica	55
2	Retroalimentación de la tarea diagnóstica, refuerzo de conocimientos previos.	55
3	Presentación de la unidad didáctica y de los objetivos.	55
4	Recordar objetivo 1, tarea 1.1 rampa, presentar criterios de logro del objetivo 1	55

Tabla 2
Cronograma unidad didáctica

Sesión	Descripción	Tiempo (minutos)
5	Recordar objetivo 1, tarea 1.2 cuerda y pared, presentar criterios de logro del objetivo 1	55
6	Recordar objetivo 2, tarea 2.1 mapa, presentar criterios de logro del objetivo 2	55
7	Recordar objetivo 2, tarea 2.2 cuadrilátero, presentar criterios de logro del objetivo 2	55
8	Examen final	55
9	Retroalimentación de examen y cierre de la unidad didáctica	55

5. TAREA DIAGNÓSTICA

La tarea diagnóstica tiene como objeto verificar que el estudiante posee los conocimientos previos para abordar la unidad didáctica sobre el teorema de Pitágoras. Forma parte de las tareas de evaluación. “Las tareas de evaluación son aquellas que se utilizan para recoger información sobre la actuación de los estudiantes y establecer sus conocimientos y habilidades con el propósito ya sea de adaptar la enseñanza a esos conocimientos y habilidades, o de clasificar a los estudiantes para asignar una nota” (González & Gómez, 2018, pág. 27). Sin embargo, no es necesario que el profesor califique o asigne una nota para esta tarea. Es importante que el docente comunique la intención de la implementación de la tarea diagnóstica para que el estudiante conteste el cuestionario de manera auténtica y tranquila.

La tarea está compuesta de diez actividades. Las tres primeras actividades evalúan conocimientos de la geometría, al igual que las actividades siete, ocho y diez. La actividad cuatro indaga por el concepto de raíz cuadrada. La actividad cinco evalúa la capacidad de despejar una ecuación con una variable elevada al cuadrado. La actividad seis es una tarea sobre unidades de medida. Finalmente, la actividad nueve evalúa la doble implicación en lógica. A continuación, mostramos las primeras tres preguntas de la tarea como ejemplo. La primera pregunta contribuye a medir el nivel de apropiación del conocimiento previo “identificar ángulo recto”. La segunda pregunta permite hacer lo mismo con “Identifica triángulos rectángulos”. Por su parte, la tercera pregunta evalúa el conocimiento previo “Identificar catetos e hipotenusa en un triángulo rectángulo”. La tarea diagnóstica completa se encuentra en el anexo 4.

1. De los siguientes ángulos que forman las agujas del reloj, identifica cuál es un ángulo recto.

Figura 7. Pregunta ángulos que forman las agujas del reloj

2. ¿Cuál de los siguientes triángulos es triángulo rectángulo?

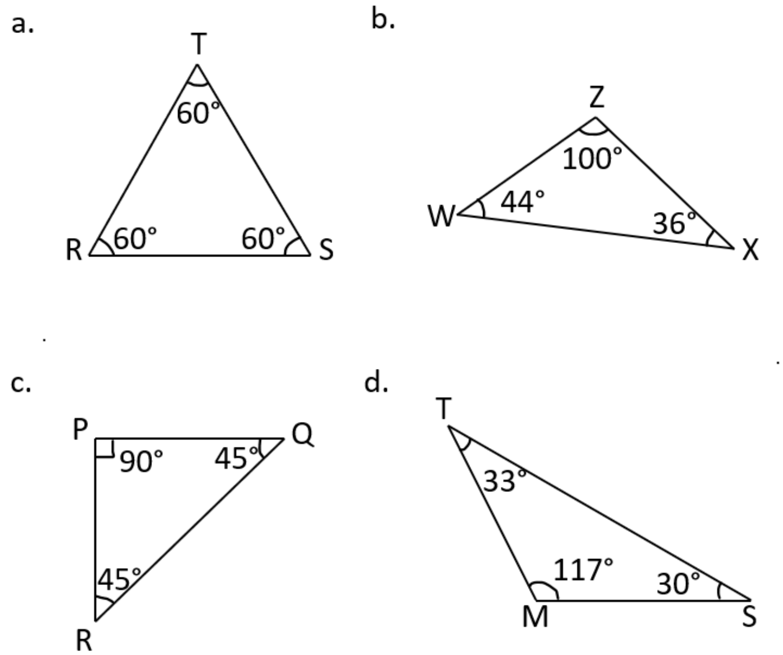

Figura 8. Pregunta de identificar el triángulo rectángulo

3. A los siguientes triángulos rectángulos escríbeles los nombres de los lados señalados.

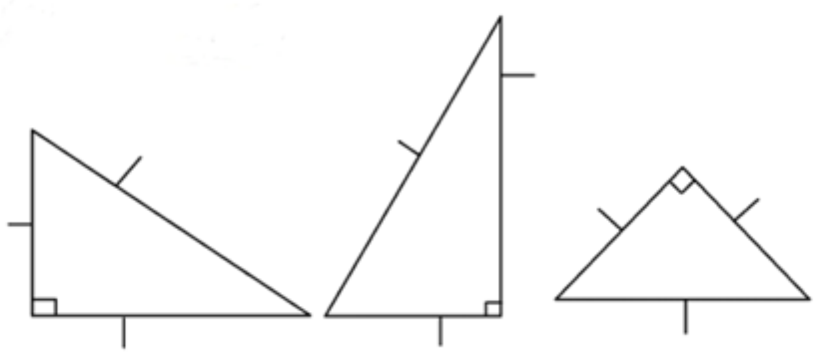

Figura 9. Pregunta escribir los lados del triángulo

6. Tareas de aprendizaje

"Las tareas de aprendizaje son aquellas tareas que el profesor propone a los estudiantes con el propósito de contribuir a que ellos logren las expectativas que ha establecido y superen sus limitaciones de aprendizaje." (González & Gómez, 2018, pág. 27). A continuación, presentamos las tareas de aprendizaje de la unidad didáctica. Diseñamos dos tareas para cada objetivo. Las dos primeras corresponden al primer objetivo. La primera se denomina Rampa y la segunda Cuerda y pared. Posteriormente, presentamos la descripción de las tareas de aprendizaje del segundo objetivo. La primera de ellas se denomina Mapa y la segunda Cuadrilátero. Si queremos utilizar estas tareas, en el anexo 5, llamado imprimibles, encontramos las formulaciones de las tareas de aprendizaje, la tarea diagnóstica, y el examen final del que hablamos más adelante, para facilitar su impresión e implementación.

1. Rampa

Esta tarea de aprendizaje pretende contribuir al primer objetivo de la unidad didáctica. Es decir, pretendemos que el estudiante avance en su apropiación del teorema de Pitágoras para hallar longitudes desconocidas. Con esta tarea, el estudiante aprenderá a hallar una longitud que se puede convertir en la hipotenusa de un triángulo rectángulo. El estudiante desarrollará esta tarea en un contexto auténtico como el patio del colegio. Aunque la tarea se aplicó en un espacio determinado, puede adaptarse a la realidad de la institución en la que se quiera implementar. Lo importante es que el profesor encuentre un espacio en el que se presenten condiciones similares a las del experimento realizado.

1.1. Requisitos

Para abordar la tarea, los estudiantes deben saber identificar triángulos rectángulos y sus elementos: el ángulo recto, los ángulos agudos, la hipotenusa y los catetos. También deben conocer la relación entre los catetos y la hipotenusa dada por el teorema de Pitágoras y saber hallar raíz cuadrada. Igualmente, deben ser capaces de hacer una medición en el terreno con instrumentos de medición como una regla o un metro y utilizar las unidades de medida de longitud apropiadas.

1.2. Aportes de la tarea al objetivo de aprendizaje

Con esta tarea, pretendemos que los estudiantes identifiquen situaciones en las que sea necesario hallar longitudes que se pueden representar como hipotenusas de triángulos rectángulos. Queremos que este procedimiento se convierta en un hábito para ellos. Pretendemos también que superen errores comunes como confundir catetos con hipotenusa o reemplazar una variable en la posición de otra en la fórmula.

1.3. Formulación de la tarea

En este apartado, presentamos la formulación de la tarea. En la primera parte de la tarea, presentamos el contexto en que se va a desarrollar la tarea. Posteriormente, proporcionamos las instrucciones para que los estudiantes hagan las mediciones en el terreno y solicitamos un requerimiento final para que realicen los cálculos pertinentes.

> El colegio necesita diseñar una rampa en el patio interior, similar a la ya existente en el costado sur del mismo patio. La nueva rampa estará ubicada en el costado opuesto.
>
> Diseña una nueva rampa que se adapte al costado donde se piensa construir. Ten en cuenta que su altura es la misma que la de la rampa existente, pero tú debes decidir su longitud horizontal. En equipos de 3 estudiantes, haz la medición de la altura y realiza los cálculos necesarios para determinar la longitud de la nueva rampa. Con tu grupo, redacta un informe para el colegio que indique la longitud de la nueva rampa.

1.4. Conceptos y procedimientos implicados en la tarea

Los conceptos implicados en la tarea son triángulo rectángulo, catetos, hipotenusa y fórmula del teorema de Pitágoras. Los procedimientos son sumar, elevar al cuadrado, hallar raíz, reemplazar una variable por un valor y hacer mediciones.

1.5. Sistemas de representación que se activan

Por medio de esta tarea, los estudiantes activan el sistema de representación pictórico, al hacer un esbozo de la rampa. También, activan el sistema de representación simbólico al utilizar la fórmula del teorema de Pitágoras con sus variables. De igual manera, activan el sistema de representación numérico al reemplazar estas variables por las medidas de la rampa.

1.6. Contextos PISA en los que se sitúa la tarea

Respecto a los contextos descritos por el marco conceptual de PISA, la tarea se sitúa en dos contextos, uno personal y uno profesional. En primer lugar, se ubica en un contexto personal, pues es una situación en la que hay que construir una rampa para las personas que no puedan hacer uso de escaleras. Es decir, es un problema que involucra a pares como parte de la comunidad educativa. También involucra un contexto profesional, pues propone el diseño de una rampa que puede formar parte de una construcción.

1.7. Materiales y/o recursos

Para esta tarea, los estudiantes solo necesitarán un instrumento de medición que puede ser una regla o un metro de costura.

1.8. Agrupamiento e interacción

Sugerimos grupos de tres estudiantes para hallar las medidas de la longitud y la altura que tendrá la rampa, tomar nota de los datos y hacer los cálculos pertinentes. La comunicación e interacción se da entre estudiante y profesor y entre estudiantes del mismo grupo. La primera se presenta cuando el profesor comunica la tarea, asesora y aclara dudas que surgen en medio de la actividad. La segunda se presenta cuando los estudiantes solucionan la tarea. Además, se genera interacción entre todos los estudiantes al finalizar la tarea, cuando los estudiantes comparten los resultados hallados.

1.9. Temporalidad

La tarea se desarrolla en cinco etapas. En la primera, el profesor presenta la tarea. En la segunda etapa, los estudiantes forman grupos y planean la estrategia para hacer los cálculos y mediciones pertinentes. En la tercera etapa, realizan las mediciones planeadas. En la cuarta etapa, hacen los cálculos. Finalmente, en la quinta etapa, llevan a cabo la puesta en común de los resultados y los análisis realizados.

1.10. Errores en los que puede incurrir el estudiante y ayudas

En la tabla 3, presentamos algunos ejemplos de los errores más frecuentes en los que pueden incurrir los estudiantes. Asociados a ellos, encontramos una serie de sugerencias que el profesor puede implementar, generalmente en forma de preguntas, que denominamos ayudas. En el momento en que el estudiante tenga una dificultad u obstáculo o incurra evidentemente en un error, el profesor podrá implementar estas ayudas. En el anexo 2, encontramos un listado completo de errores y, en el anexo 6, las ayudas asociadas a los errores.

Tabla 3
Ejemplos de errores y ayudas para la tarea Rampa

Error	Ayuda
Confundir una de las variables de los catetos con las variables de la hipotenusa	Preguntar al señalar una variable en la ecuación del teorema de Pitágoras ¿qué significa esta variable?
Reemplazar la hipotenusa y uno de los catetos en vez de los dos catetos en la fórmula del teorema	Preguntar al señalar una variable en la ecuación del teorema de Pitágoras ¿qué significa esta variable?
Multiplicar por 2 en vez de elevar al cuadrado	Preguntar ¿Qué significa el cuadrado de un número? ¿Qué significa elevar un número al cuadrado?
Tomar los valores de los lados conocidos dentro de la fórmula del teorema sin elevarlos al cuadrado	Preguntar ¿cuál es la relación que establece el teorema de Pitágoras entre los lados de un triángulo rectángulo?, ¿en la ecuación cómo aparecen las variables?

Tabla 3

Ejemplos de errores y ayudas para la tarea Rampa

Error	Ayuda
Escribir nuevamente el exponente o el radical en el resultado de la potencia o de la raíz	Señalar que ya se ha elevado al cuadrado y preguntar ¿se eleva nuevamente al cuadrado?
Dividir entre dos en vez de sacar raíz	Señalar que radicación y división son dos operaciones distintas y preguntar ¿cuál es el proceso correcto en este caso, radicar o dividir?
Dar una respuesta sin asociarla al contexto del problema	Remitir al contexto original del problema y preguntar ¿cuál es la pregunta del problema?

1.11. Grafo de criterios de logro de la tarea

En la figura 10, presentamos el grafo de criterios de logro de la tarea Rampa. El grafo completo representa todos los procedimientos posibles del objetivo uno. Los caminos que puede elegir un estudiante para esta tarea están en negro, mientras que las opciones que corresponden a otra tarea están en gris.

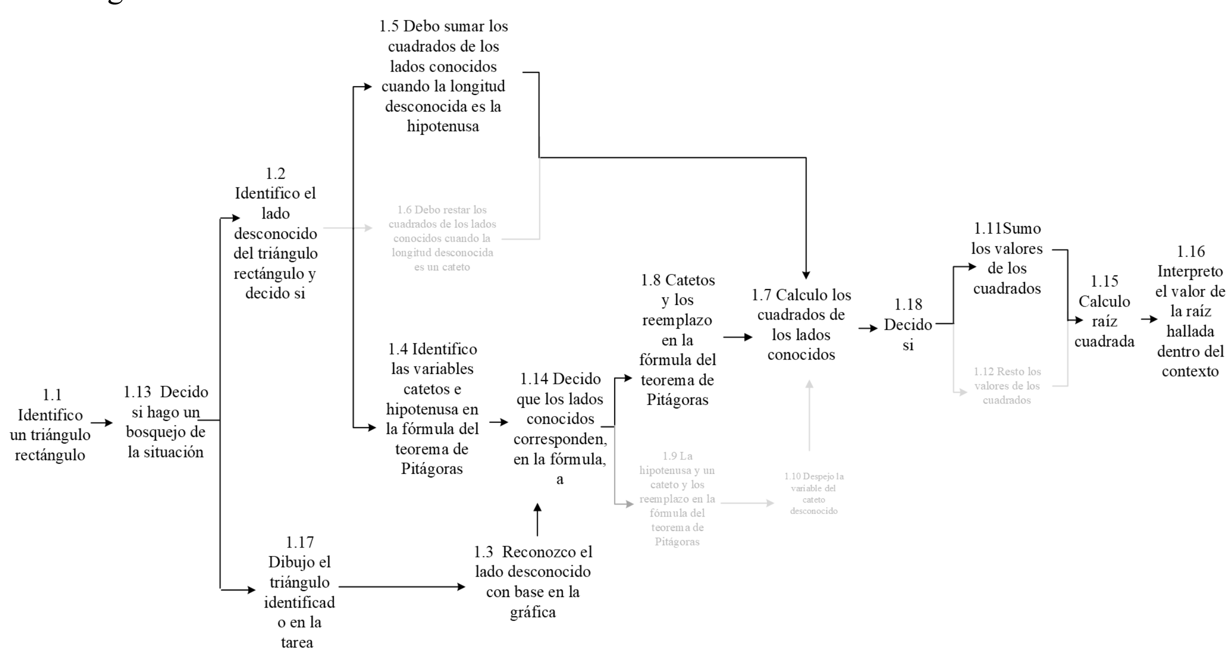

Figura 10. Grafo de criterios de logro de la tarea Rampa

1.12. Actuación del profesor

Durante la implementación de la tarea, el profesor debe hacer un recorrido por los diferentes grupos. De esta manera, el profesor podrá supervisar y percatarse del procedimiento que realiza cada grupo. También puede evidenciar la incurrencia de errores y sugerir las ayudas. Es importante que el docente permita y estimule la autonomía de los estudiantes y grupos. Ante las dificultades y obstáculos que los estudiantes encuentren, sugerimos permitir que ellos mismos encuentren soluciones. Las ayudas tienen ese sentido. El profesor las sugiere para que el estudiante encuentre el camino correcto.

1.13. Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

El colegio en el que implementamos la unidad didáctica posee una rampa como la que describimos en la formulación de la tarea y que podemos observar en la imagen de la figura 11. No obstante, es posible que otro colegio no cuente con una rampa así. Por lo tanto, es importante que el profesor busque un espacio donde se podría construir una rampa similar, como un andén o una grada en uno de los patios. Luego, indicará a los estudiantes que se construirá una rampa en ese lugar y que la altura debe ser la misma del andén o de la grada escogida. La longitud horizontal puede variar de grupo en grupo, por lo que este dato no debe ser suministrado. De esta manera, los grupos podrán tener resultados distintos, de acuerdo con la extensión que escojan de la rampa.

Al finalizar la implementación de la tarea, sugerimos generar un espacio para que los estudiantes puedan compartir sus resultados y procedimientos. El profesor moderará este espacio. Por razones de tiempo, posiblemente solo algunos de los grupos podrán compartir sus resultados.

Figura 11. Patio donde se proyecta hacer la nueva rampa

1.14. Evaluación

Es importante que el profesor proponga sus criterios de evaluación desde el inicio de la unidad didáctica, los discuta con los estudiantes, llegue a acuerdos con ellos en este aspecto y procure respetar esos acuerdos. Estos acuerdos pueden girar en torno al valor que se le da a cada tarea, pero también a los valores que se le dan a cada proceso y a cada criterio de logro dentro de la solución de cada tarea. En cada caso, sugerimos que el profesor exponga sus argumentos de, por ejemplo, por qué puede ser más importante la identificación del lado del triángulo que se debe despejar que el cálculo mismo de la raíz.

Como evidencia de aprendizaje en la implementación original de la tarea, recopilamos un informe por grupo. Sugerimos observar y dar valor a los diferentes procesos realizados por los estudiantes dentro del desarrollo de la tarea en el campo. Específicamente en esta tarea, sugerimos observar con mayor atención la identificación de la hipotenusa, el proceso de elevar al cuadrado los lados conocidos y de sumar estos valores, y, finalmente, de interpretar la raíz hallada como el valor de la longitud desconocida. Igualmente, aunque el informe es grupal, la evaluación puede ser individual. El profesor puede valorar de manera diferencial los aportes o los avances alcanzados por los diferentes integrantes del grupo.

2. Cuerda y pared

La tarea cuerda y pared es una tarea que diseñamos para introducir una situación en la que surja la necesidad de calcular una longitud que se expresa como el cateto de un triángulo rectángulo. Mediante esta tarea, completamos la contribución al primer objetivo.

2.1. Requisitos

La tarea requiere que los estudiantes identifiquen elementos de triángulos rectángulos, tales como ángulo recto, ángulos agudos, hipotenusa y catetos. Además, los estudiantes deben diferenciar nociones del álgebra como variables, incógnita, ecuación e igualdad y el despeje de ecuaciones. Adicionalmente, deben poseer nociones de la geometría como el concepto de perpendicularidad y conceptos de la aritmética como adición, sustracción, radicación y potenciación. De igual manera, es importante que conozcan, de antemano, la relación que existe entre los catetos y la hipotenusa dada por el teorema de Pitágoras. Por último, es pertinente que conozcan unidades de medida de longitud.

2.2. Aportes de la tarea al objetivo de aprendizaje

Pretendemos que el estudiante desarrolle el hábito de identificar y exponer situaciones en las que se puedan implementar el teorema de Pitágoras, particularmente, en las que se dificulte hallar una longitud directamente. Además, queremos que identifique plenamente que dicha longitud corresponde a un cateto del triángulo rectángulo que construye y, por lo tanto, que supere los errores asociados a este criterio de logro.

2.3. Formulación de la tarea

En este apartado, presentamos la formulación de la tarea. En primer lugar, presentamos la descripción de la situación. Posteriormente, incluimos las instrucciones de lo que los estudiantes deben hacer en el terreno y la pregunta a resolver. Es importante que el profesor verifique que los estudiantes comprendan que la longitud de la pared no se puede medir directamente. Es decir, debe quedar claro que hay una necesidad real de calcular la altura. La formulación es la siguiente.

> La distancia vertical sobre una pared, entre el borde superior de una ventana en el segundo piso y el patio en el primer piso, no se puede medir directamente debido a algunos obstáculos. No obstante, es posible medir una longitud horizontal desde la base de la pared hasta cualquier punto del patio. Igualmente, es posible extender una cuerda desde el borde superior de la ventana hasta cualquier punto del patio.
>
> En grupos de tres estudiantes, determinen una estrategia para hallar la altura de la pared por medio de otras longitudes que se puedan medir. Midan las distancias determinadas. Luego hallen la altura de la pared. No olviden dar la respuesta en las unidades de medidas correspondientes e interpretarla de acuerdo con el contexto del problema.

2.4. Conceptos y procedimientos implicados en la tarea

En esta tarea, los conceptos implicados son catetos, hipotenusa y fórmula del teorema de Pitágoras. Los procedimientos son restar, despejar una variable, elevar al cuadrado, hallar raíz, reemplazar una variable y hacer mediciones.

2.5. Sistemas de representación que se activan

En esta tarea, los estudiantes pueden activar los sistemas de representación pictórico, simbólico y numérico. El sistema de representación pictórico se activa si los estudiantes deciden realizar un esbozo de la pared y la cuerda. El simbólico se activa al utilizar la fórmula del teorema de Pitágoras y el numérico al reemplazar números en esta fórmula.

2.6. Contextos PISA en los que se sitúa la tarea

Esta tarea se sitúa en el contexto personal. Es interés de los estudiantes saber la altura de la pared.

2.7. Materiales y/o recursos

Los materiales que se utilizarán en la actividad serán la cuerda y un instrumento de medición que, para este caso, es el flexómetro. Es importante que los estudiantes identifiquen la cuerda como elemento para ayudar a medir longitudes un poco más largas que las que pueden trabajar en el aula. El flexómetro les servirá para complementar el uso de la cuerda.

2.8. Agrupamiento e interacción

Los grupos de tres estudiantes son óptimos para la realización de la tarea. El diseño mismo de la tarea implica una interacción entre el grupo de estudiantes en la medida en que cada uno de ellos tiene un rol definido en la medición. Pueden establecer roles adicionales como la toma de datos y la organización de los materiales. La interacción entre los estudiantes y el profesor se da en el momento en que el profesor comunica la tarea y cuando pregunta a cualquiera de los estudiantes por un paso especial del proceso. También se presenta interacción entre el grupo general de estudiantes y entre el grupo y el profesor, al final, al hacer una plenaria con todo el grupo.

2.9. Temporalidad

En un primer momento, el profesor expone la actividad en el aula. En el segundo momento, los estudiantes realizan la medición en el terreno y la toma de datos. En un tercer momento, los estudiantes realizan los procedimientos pertinentes para hallar el valor pedido. Y, en un cuarto momento, los estudiantes comparten sus conclusiones y reflexiones de la actividad, que pueden incluir la concienciación de situaciones reales en las cuales haya que hacer procesos similares.

2.10. Errores en los que puede incurrir el estudiante y ayudas

En la tabla 4, registramos algunos de los errores más frecuentes en los que pueden incurrir los estudiantes al resolver esta tarea, con sus ayudas asociadas. En el anexo 2, incluimos el listado completo de errores y, en el anexo 6, el listado completo de ayudas.

Tabla 4
Ejemplos de errores y ayudas para la tarea Cuerda y pared

Error	Ayuda
Restar el cuadrado del cateto conocido a un lado de la ecuación y sumarlo al otro lado	Recordar que se debe realizar la misma operación a ambos lados de una igualdad dentro del proceso de despeje
Considerar que se deben sumar los cuadrados hallados cuando la longitud desconocida es uno de los catetos	Preguntar ¿Qué se debe hacer con los cuadrados de los lados conocidos, cuando el lado desconocido es un cateto?
Confundir un lado correspondiente al cateto de la gráfica con el lado correspondiente a la hipotenusa	Pedir que explique a qué corresponde cada lado en el triángulo, preguntar si está seguro de cada identificación que haga de cada lado
Multiplicar por 2 en vez de elevar al cuadrado	Preguntar ¿Qué significa el cuadrado de un número? ¿Qué significa elevar un número al cuadrado?
Escribir nuevamente el exponente o el radical en el resultado de la potencia o de la raíz	Señalar que ya se ha elevado al cuadrado y preguntar ¿se eleva nuevamente al cuadrado?
Dividir entre dos en vez de sacar raíz	Señalar que radicación y división son dos operaciones distintas y preguntar ¿cuál es el proceso correcto en este caso, radicar o dividir?
Dar una respuesta sin asociarla al contexto del problema	Remitir al contexto original del problema y preguntar ¿cuál es la pregunta del problema?

2.11. Grafo de criterios de logro de la tarea

Presentamos el grafo de criterios de logro de la tarea en la figura 12. Resaltamos en negro los criterios de logro que puede elegir un estudiante para solucionar esta tarea.

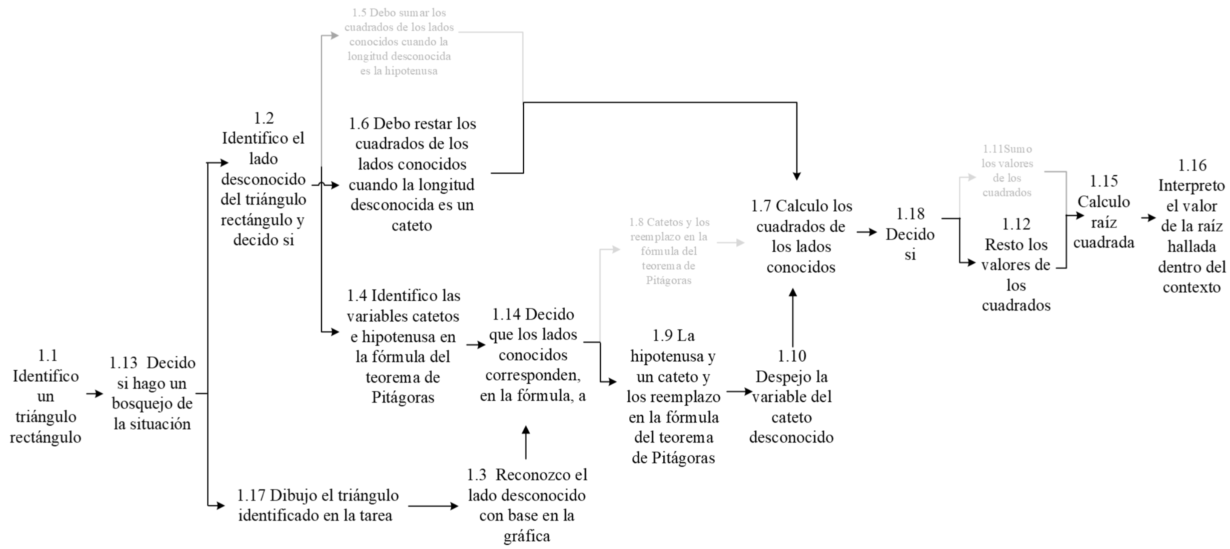

Figura 12. Grafo de criterios de logro de la tarea Cuerda y pared

2.12. Actuación del profesor

Es importante que el profesor supervise el proceso seguido por los grupos, para poder observar los procedimientos realizados por cada uno. También puede identificar posibles errores y proporcionar las ayudas necesarias para completar la tarea.

2.13. Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

Es posible que el colegio en el que se desea implementar esta unidad didáctica no cuente con una pared en particular como la describimos. La idea es que el profesor busque una superficie vertical u horizontal que cuente con obstáculos que impidan medirla directamente. En la figura 13, podemos ver la situación que planteamos para esta tarea. Las ventanas y el techo que tiene una de las ventanas son obstáculos. Los estudiantes se ven en la necesidad de buscar otra estrategia para obtener esta medida, distinta a medirla directamente. Evidentemente, la longitud horizontal se puede medir y se puede extender la cuerda diagonalmente. Sugerimos que el profesor busque una situación similar.

Al igual que en la tarea rampa, sugerimos generar un espacio de puesta en común, al final de la implementación de la tarea. En este espacio, los estudiantes podrán compartir sus resultados y procedimientos.

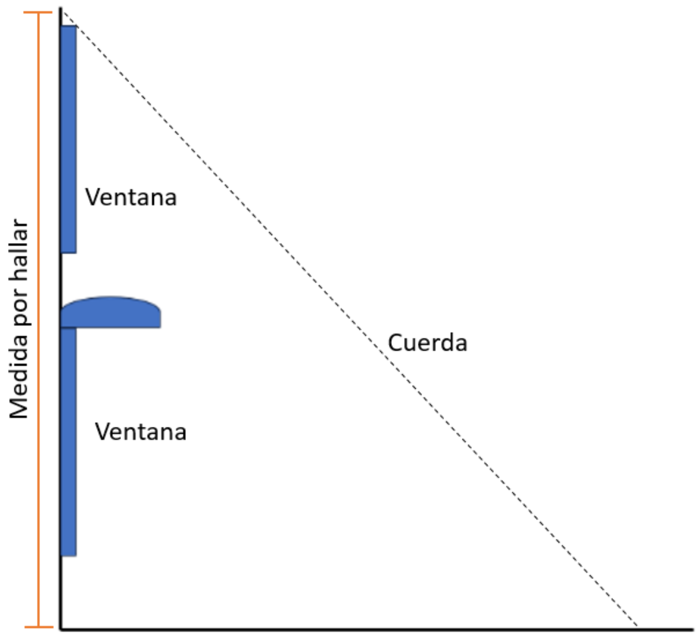

Figura 13. Representación de la tarea cuerda y pared

2.14. Evaluación

Al igual que en la tarea Rampa, podemos recopilar como evidencia del desarrollo de la tarea un informe por grupo y dar valor a los diferentes procesos realizados como parte de la tarea. Por ser esta una segunda tarea, el estudiante debe poseer una mayor agudeza en la identificación de las variables catetos e hipotenusa. Es clave que el estudiante identifique el cateto como variable desconocida, la resta como operación definitiva para hallar el cateto desconocido y la interpretación de la raíz dentro del contexto. También es importante que el profesor observe las diferentes estrategias de medición que propongan los estudiantes en el contexto de la tarea. Al igual que en la tarea anterior, el informe es grupal pero las valoraciones pueden ser individuales. En esta tarea específicamente, esperamos una mayor apropiación de la fórmula del teorema de Pitágoras o del proceso aritmético para hallar el segmento desconocido.

3. Mapa

Como primera tarea del objetivo dos, introdujimos la tarea Mapa. Se trata de una situación en la que un arquitecto debe comprobar si dos vías existentes son o no perpendiculares. Relacionamos esta situación con el teorema de Pitágoras pues esperamos que el estudiante identifique un triángulo, en el que las dos vías existentes forman los catetos. De esta manera, el estudiante asume el papel del arquitecto y utiliza el recíproco del teorema de Pitágoras para comprobar o no la perpendicularidad de las dos vías. Consideramos que esto configura un contexto auténtico para el estudiante.

3.1. Requisitos

Para el desarrollo de esta tarea, los estudiantes deben estar en capacidad de identificar triángulos rectángulos y sus elementos, como son el ángulo recto, los ángulos agudos, la hipotenusa y los catetos. Necesitan conocer la noción de variables, igualdad, ecuación y el concepto de perpendicularidad. Deben poseer los conceptos de potencias y raíces, en especial, raíz cuadrada, y conocer la fórmula del teorema de Pitágoras y la noción de bicondicionalidad. Por último, es importante que los estudiantes sepan manejar Google Maps y se familiaricen con la opción "medir distancias" dentro de esta aplicación.

3.2. Aportes de la tarea al objetivo de aprendizaje

Con la tarea, pretendemos que el estudiante desarrolle predisposición positiva a trabajar tareas y problemas que involucren situaciones propias del objetivo dos, en la vida real. Es decir, nos referimos a situaciones cuya solución implique utilizar el recíproco del teorema de Pitágoras y que refleje la apropiación del tema. También, esperamos que los estudiantes superen errores comunes, como suponer que un triángulo es rectángulo sin antes comprobarlo.

3.3. Formulación de la tarea

En este subapartado, presentamos la formulación de la tarea. En la primera parte de la tarea, presentamos el contexto. Después, indicamos el requerimiento de la tarea, en cuatro instrucciones concretas que deben seguir los estudiantes. Esta tarea está acompañada de una imagen que el profesor deberá presentar a los estudiantes para contextualizarlos.

> En las ciudades, suelen haber cruces de calles en forma perpendicular que se construyen de esta manera para facilitar la construcción urbana a su alrededor, tomar las medidas de los espacios más fácilmente y favorecer la intervención de redes de servicios públicos.
>
> Un arquitecto forma parte de un proyecto para renovar las redes de servicio público y desea verificar si dos vías de la ciudad de Bogotá son perpendiculares entre sí. Se trata de la calle 45 y la carrera 22 (ver figura).

Figura 14. Mapa en Google Maps

1. En Google Maps, ubica las siguientes vías: Calle 45, Carrera 22 y Diagonal 45D.

En grupos de dos:

2. Midan los tres lados del triángulo que forman estas 3 vías. Utilicen la herramienta “medir distancias”.

3. Verifiquen si el triángulo es rectángulo.

4. Redacten una conclusión para el informe del arquitecto.

3.4. Conceptos y procedimientos implicados en la tarea

Los conceptos implicados en la tarea son triángulo rectángulo, cateto, hipotenusa, recíproco del teorema de Pitágoras. Los procedimientos son sumar, elevar a la segunda potencia, radicar y comparar resultados.

3.5. Sistemas de representación que se activan

En esta tarea, los estudiantes activan los sistemas de representación simbólico, numérico y ejecutable. Activan el sistema de representación simbólico al utilizar la fórmula, el numérico al reemplazar números en esta fórmula, y el ejecutable al dibujar el triángulo en Google Maps.

3.6. Contextos PISA en los que se sitúa la tarea

La tarea se sitúa en un contexto profesional y social. Se sitúa en un contexto profesional porque el problema lo debe solucionar un arquitecto. Además, se sitúa en un contexto social porque el proyecto pretende renovar las redes de servicio público, lo que beneficia a la comunidad.

3.7. Materiales y/o recursos

Para esta tarea, los estudiantes necesitan un dispositivo electrónico con Google Maps que puede ser un computador de la sala de informática. Adicionalmente, requieren hoja y lápiz para hacer los cálculos y entregar sus resultados.

3.8. Agrupamiento e interacción

La tarea se realiza en grupos de dos estudiantes lo que promueve la interacción entre ellos. Permite también la interacción del profesor con ellos, porque él puede pasar por cada grupo a indagar sobre lo que están haciendo. Al final, los estudiantes realizan una puesta en común en la que interactúan con su profesor acerca de los resultados hallados.

3.9. Temporalidad

En una primera etapa, el profesor expone la actividad en el aula. Luego de leer el enunciado de la tarea, muestra el funcionamiento de la herramienta de Google Maps. En una segunda etapa, los estudiantes ubican las direcciones dadas en Google Maps. Como tercera etapa, realizan los procedimientos. En la cuarta etapa, comunican las conclusiones halladas en la actividad.

3.10. Errores en los que puede incurrir el estudiante y ayudas

En la tabla 5, podemos encontrar los errores más comunes en los que pueden incurrir los estudiantes al solucionar esta tarea. Junto a estos, encontramos la ayuda asociada. Para un listado completo de errores y de sus ayudas, podemos consultar los anexos 2 y 6 respectivamente.

Tabla 5
Ejemplos de errores y ayudas para la tarea Mapa

Error	Ayuda
Calcular un valor de la raíz diferente	Pedirle que multiplique por sí mismo el número que halló y verifique si obtiene la cantidad original
Concluir de manera correcta, pero con una justificación incorrecta	Preguntar ¿De dónde sacaste esa conclusión?
Concluir que un triángulo no es rectángulo cuando los cálculos han demostrado que sí lo es o viceversa	Pedir al estudiante que revise bien la comparación que está haciendo

3.11. Grafo de criterios de logro de la tarea

En la figura 15, presentamos el grafo de criterios de logro de la tarea. En negro, podemos ver los posibles caminos de aprendizaje que el estudiante puede tomar al solucionar esta tarea.

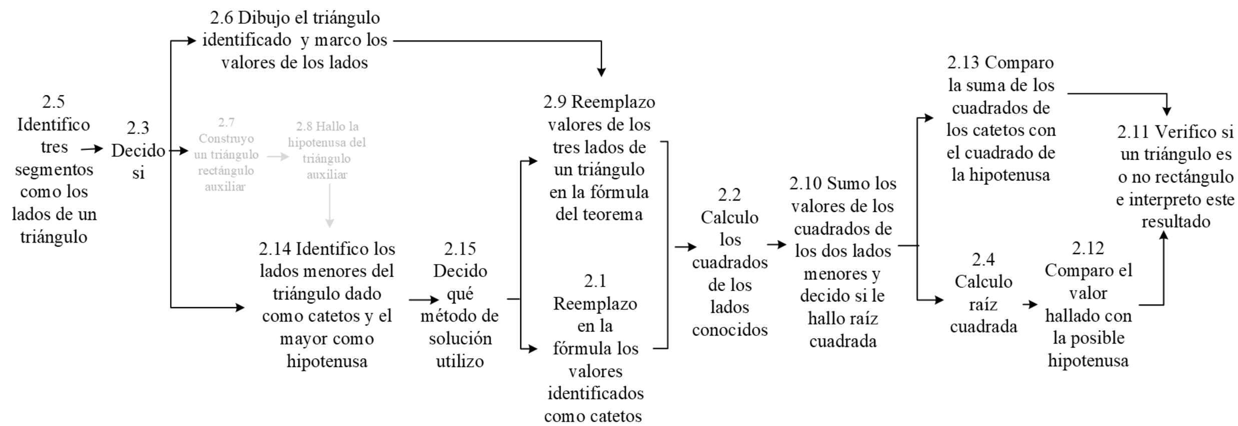

Figura 15. Grafo de criterios de logro de la tarea Mapa

3.12. Actuación del profesor

Para implementar la tarea, el profesor y los estudiantes deben ir a un aula donde se presten las condiciones necesarias para utilizar Google Maps. El profesor podrá supervisar y percatarse del procedimiento que realiza cada grupo. Además, deberá evidenciar cuáles son los principales errores en que incurren los estudiantes y sugerirles las ayudas correspondientes.

3.13. Sugerencias metodológicas y aclaración de la tarea

El colegio donde se implemente la tarea debe contar con una sala de informática o con dispositivos electrónicos con la aplicación Google Maps. Sugerimos generar un espacio, al final de la implementación, moderado por el profesor, para que los estudiantes puedan compartir sus resultados y procedimientos.

3.14. Evaluación

Los estudiantes deben entregar un informe escrito para que el profesor pueda percatarse del desarrollo de la tarea. Es importante que los estudiantes concluyan si las calles son o no perpendiculares y argumenten por qué, sin limitarse a entregar solo procedimientos numéricos. Esta parte es relevante a la hora de evaluarlos, porque da razón de si los estudiantes comprendieron o no lo que significa el recíproco del teorema de Pitágoras y su utilidad.

4. CUADRILÁTERO

En este subapartado, presentamos la tarea Cuadrilátero. En esta tarea, los estudiantes utilizarán de nuevo el recíproco del teorema de Pitágoras en un contexto matemático-geométrico y con un mayor nivel de complejidad. Esta tarea, al ser la última de nuestra unidad didáctica, tiene una particularidad y es que involucra también al primer objetivo. El estudiante debe hallar primero una hipotenusa de un triángulo rectángulo dado. Esa hipotenusa es, a su vez, un lado de otro triángulo, que no necesariamente es triángulo rectángulo. Precisamente, el objetivo principal de la tarea es comprobar si este segundo triángulo es o no rectángulo.

4.1. Requisitos
La tarea requiere que los estudiantes identifiquen los conceptos de segmentos, triángulos rectángulos, ángulos rectos y cuadriláteros. Deben tener la noción de la construcción de figuras geométricas con regla y compás, y saber medir ángulos con transportador. También deben conocer la relación entre los lados de un triángulo rectángulo dada por el teorema de Pitágoras y su recíproco.

4.2. Aportes de la tarea a los objetivos de aprendizaje
Con la tarea, queremos utilizar el teorema de Pitágoras y su recíproco para comprobar si un ángulo es o no recto mediante la construcción de triángulos que pueden ser o no rectángulos. Cuando hablamos de utilizar el recíproco del teorema de Pitágoras, nos referimos a entender que la relación entre la existencia de un triángulo rectángulo y la validez del teorema de Pitágoras es una relación bicondicional. Con esta tarea, el estudiante desarrolla una predisposición positiva a trabajar tareas y problemas que involucren el teorema de Pitágoras. Al reconocer cómo el recíproco del teorema de Pitágoras sirve para verificar la perpendicularidad en el terreno, el estudiante superará errores como suponer que un triángulo dado es rectángulo sin antes comprobarlo.

4.3. Formulación
En este subapartado, presentamos la formulación de la tarea. Primero, describimos las instrucciones que deben seguir los estudiantes para dibujar el cuadrilátero. Después, presentamos la demanda de la tarea.

> En parejas y con ayuda de la escuadra dibujen dos lados perpendiculares entre sí, cuyas medidas sean 6 y 7 cm. Luego, con ayuda de la regla y el compás, dibujen otros dos lados de medidas 8 y 5 cm y que completen un cuadrilátero. Determinen si el ángulo opuesto al ángulo recto existente es también recto. Primero, háganlo con ayuda de un transportador y luego por medio del teorema de Pitágoras. Comparen el resultado obtenido de las dos maneras en que lo hallaron. ¿El ángulo señalado, es también un ángulo recto? Expliquen por qué.

4.4. Conceptos y procedimientos implicados en la tarea
En esta tarea, están implicados los conceptos de triángulo rectángulo, cuadrilátero, cateto, hipotenusa y recíproco del teorema de Pitágoras. Los procedimientos implicados son calcular cuadrados, hallar raíz y desarrollar los dos lados de una ecuación de manera simultánea para luego compararlos.

4.5. Sistemas de representación
Al solucionar esta tarea, los estudiantes activan los sistemas de representación pictórico, numérico y simbólico. Activan el sistema de representación pictórico, al hacer un dibujo del cuadrilátero. Al utilizar la fórmula del teorema de Pitágoras, activan el sistema de representación simbólico. Finalmente, activan el sistema de representación numérico, al reemplazar los valores de los lados del triángulo en la fórmula.

4.6. Contextos PISA en los que se sitúa la tarea

La tarea se sitúa en el contexto científico de PISA porque es una tarea que se desarrolla en un contexto netamente matemático (Ministerio de Educación Cultura y Deporte, 2013, pág. 24).

4.7. Materiales y/o recursos

Los materiales que se requieren para esta tarea son compás, regla, escuadra y transportador. Además, los estudiantes necesitarán hoja y lápiz para registrar los procedimientos.

4.8. Agrupamiento e interacción

La tarea se realiza de manera óptima en parejas de estudiantes. La comunicación e interacción entre estudiantes de la misma pareja se da en el diálogo que se establezca, al manipular los materiales y al discutir los cálculos realizados y los resultados hallados. Se presenta interacción entre el profesor y los estudiantes, cuando el profesor resuelve posibles dudas que se puedan generar y en la puesta en común que se da al terminar la tarea.

4.9. Temporalidad de la tarea

La tarea se desarrolla en cuatro etapas. En la primera etapa, el profesor presenta la tarea. En la segunda, los estudiantes dibujan el cuadrilátero. En la tercera, miden los ángulos y hacen los cálculos pertinentes al usar el teorema de Pitágoras. En la cuarta etapa, sacan conclusiones.

4.10. Errores en los que puede incurrir el estudiante y ayudas

En la tabla 6, presentamos algunos ejemplos de los errores en los que más incurren los estudiantes al desarrollar la tarea, registrados en la primera columna. En la segunda columna, asociada a cada error, indicamos la ayuda que puede implementar el profesor cuando los estudiantes incurran en el error.

Tabla 6
Ejemplos de errores y ayudas para la tarea Cuadrilátero

Error	Ayuda
Suponer que un triángulo dado es o no rectángulo sin antes comprobarlo	Preguntar ¿De dónde sacaste esa conclusión?
Calcular un valor de la raíz diferente	Pedirle que multiplique por sí mismo el número que halló y verifique si obtiene la cantidad original
Concluir que un triángulo no es rectángulo cuando los cálculos han demostrado que sí lo es o viceversa	Pedir al estudiante que revise bien la comparación que está haciendo
Realizar los cálculos de los cuadrados con los valores de los lados de otro triángulo	Pedir que explique a qué corresponde cada lado en el triángulo. Preguntar si está seguro de cada identificación que haga de cada lado

4.11. Grafo de criterios de logro de la tarea

En la figura 16, presentamos el grafo de criterios de logro de la tarea. En negro, se encuentran los posibles caminos que pueden elegir los estudiantes para resolver la tarea.

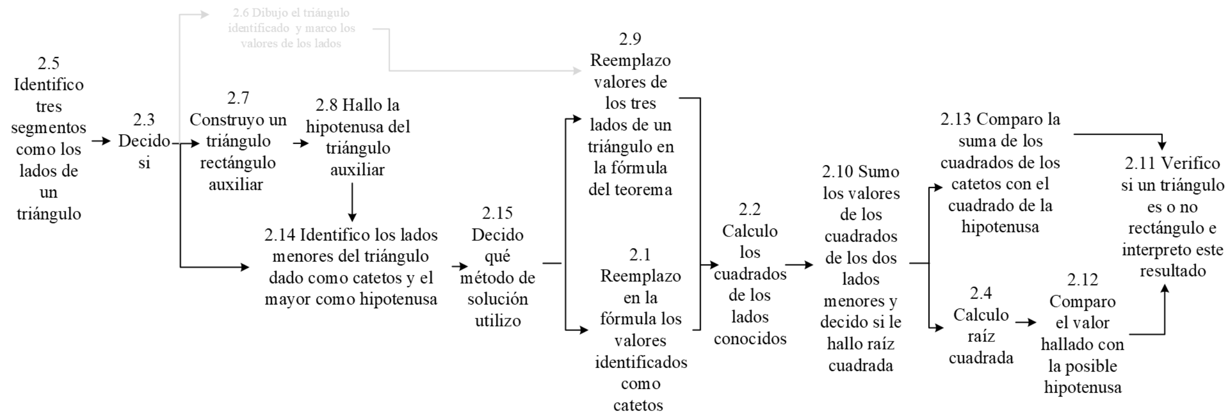

Figura 16. Grafo de criterios de logro de la tarea Cuadrilátero

4.12. Actuación del profesor

Durante la implementación de la tarea, el profesor deberá recorrer los grupos. Al hacerlo, podrá verificar los procedimientos que utilizan los estudiantes para solucionar la tarea. En caso de que exista ocurrencia de errores, sugerirá a los estudiantes las ayudas pertinentes.

4.13. Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

Sugerimos que el profesor revise que los estudiantes tengan claro para qué construir un triángulo rectángulo auxiliar. Adicionalmente, es importante que los estudiantes realicen una puesta en común al finalizar la tarea, para que algunos de ellos compartan sus resultados y procedimientos.

4.14. Evaluación

Debido a la complejidad de la tarea y a su carácter de síntesis de los dos objetivos, el profesor puede implementar unos criterios de evaluación específicos. Dentro de estos criterios, puede incluir los aspectos que considere importantes en cada parte de la solución de los requerimientos particulares. Por ejemplo, podría asignar una valoración al proceso de hallar la hipotenusa del primer triángulo con los respectivos pasos para hacerlo, y otra valoración al proceso de verificación del segundo triángulo.

7. EXAMEN FINAL

A continuación, presentamos la formulación del examen final. Este examen evalúa los aspectos más relevantes de cada objetivo de aprendizaje y consta de tres preguntas. Las dos primeras son para evaluar el primer objetivo, mientras que la tercera permite evaluar el segundo objetivo.

1. Se quiere instalar un cable desde un poste de electricidad de 10m de alto hasta una casa de 3m de alto que se encuentra a 7 m del poste, como se ilustra en la figura.

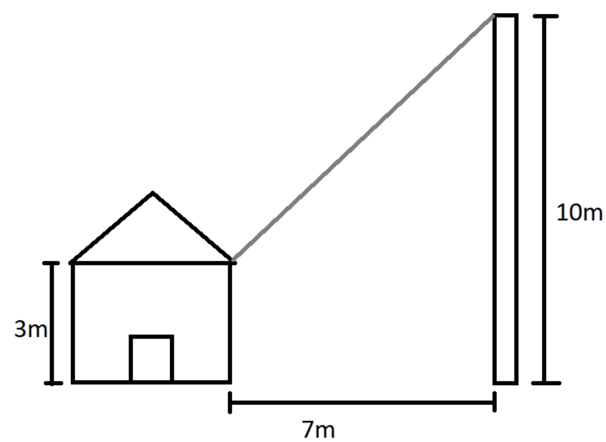

Figura 17. Representación del cable pregunta uno del examen

¿Cuál debe ser la longitud del cable?

2. A, B y C son tres ciudades. La ciudad A se encuentra a 65 km al oeste de la ciudad B. La ciudad C se encuentra al norte de B y a 97 km de distancia de A. ¿A cuánto se encuentra la ciudad C de la ciudad B?

3. Un carpintero necesita cortar una tabla de forma rectangular. Después de cortarla, mide dos de sus lados paralelos y resultan ser de 75 cm, y los otros dos miden 40 cm. Luego mide la diagonal y encuentra que su longitud es de 85 cm. ¿La tabla es realmente rectangular?

En la tabla 7, podemos observar la rúbrica del examen final para cada uno de los objetivos de aprendizaje. Esta tabla contiene cuatro niveles que permiten caracterizar el desempeño de los estudiantes para la valoración de cada objetivo. Estos se denominan superior, alto, básico y bajo. El nivel superior lo obtienen aquellos estudiantes que no incurren en ningún error y cumplen todo el objetivo a cabalidad. El nivel alto lo obtienen los estudiantes que activan todos los criterios de logro, pero que, durante el desarrollo del examen, incurren en errores poco relevantes como los que describimos en la tabla. Para que un estudiante alcance el nivel básico, consideramos como mínimo que halle los valores y realice correctamente los procedimientos, aunque se equivoque en algún cálculo o no interprete plenamente los resultados en el contexto dado. Asignamos un nivel bajo a los estudiantes que incurren en, al menos, un error en la mayoría de los criterios de logro.

Tabla 7
Indicadores de desempeño para los objetivos de aprendizaje

	Objetivo 1
Nivel de desempeño	Indicadores
Superior	El estudiante activa todos los criterios de logro y resuelve el problema sin incurrir en errores. Además de hallar los valores y hacer los procesos correctamente, el estudiante que alcanza el nivel superior es el que interpreta los resultados de acuerdo con el contexto y escribe una respuesta acorde a ello.
Alto	El estudiante activa todos los criterios de logro y resuelve el problema. El estudiante puede incurrir en errores menores como escribir los datos erróneamente en alguna de las representaciones (E36), pero hace los procedimientos de manera correcta e interpreta los resultados.
Básico	El estudiante identifica el tipo de problema, las variables y realiza las operaciones matemáticas (Cdl1.1, 1.2,1.4, 1.7, 1.8,1.11,1.14,1.15,1.16). Sin embargo, incurre en errores al realizar operaciones aritméticas como suma, resta, elevaciones al cuadrado o al proporcionar el valor equivocado de una raíz (E9,10,15,16,17,18,19,43).
Bajo	El estudiante reemplaza los valores de manera incorrecta. En el ejercicio de hallar la hipotenusa, reemplaza los valores en las variables de la hipotenusa y del cateto (E2-25-27-28). Y, en el ejercicio de hallar el cateto, reemplaza los valores en las variables de los catetos. (E26-27-28-52).
	Objetivo 2
Superior	El estudiante activa todos los criterios de logro y resuelve el problema sin incurrir en errores. Además de hallar los valores y hacer los procesos correctamente, el estudiante interpreta los resultados de acuerdo con el contexto y escribe una respuesta acorde con ello.
Alto	El estudiante activa todos los criterios de logro y resuelve el problema. El estudiante incurre en errores menores que no le impiden continuar con el cálculo ni llegar a un resultado correcto, como escribir los datos mal en la representación gráfica (E36), pero hace los procedimientos de manera correcta e interpretar los resultados.

Tabla 7

Indicadores de desempeño para los objetivos de aprendizaje

Básico	El estudiante reconoce la situación planteada (Cdl2.5), reemplaza los valores correctos en la fórmula (Cdl2.1), pero incurre en errores como sacar raíz cuadrada en vez de elevar al cuadrado o multiplicar por dos en vez de llevar al cuadrado o escribir nuevamente el exponente una vez hallada la potencia o multiplicar en vez de sumar (E9,15,16,18). El estudiante interpreta el resultado de manera correcta en términos de asociar la fórmula del teorema con la perpendicularidad (Cdl2.12).
Bajo	El estudiante incurre en al menos uno de los siguientes tres errores: no identifica los tres segmentos como lados de un triángulo dentro del contexto del problema (E61); no encuentra conexión lógica entre el cumplimiento de la fórmula y la perpendicularidad de los elementos que se quiere comprobar (E30); o no establece diferencias entre la hipotenusa y los catetos en el triángulo formado (E7).

8. Conclusiones

Diseñamos una unidad didáctica sobre diferentes usos del teorema de Pitágoras. Para ello, hicimos un análisis de los conceptos y procedimientos relacionados con este teorema en la presentación de la estructura conceptual. Luego, consideramos los diferentes sistemas de representación que pueden tener lugar al desarrollar los problemas relacionados con el tema. Hicimos también el análisis fenomenológico del teorema de Pitágoras. En este, identificamos de manera general tres tipos de problemas que se pueden presentar: hallar hipotenusa de un triángulo, hallar cateto y comprobar si un triángulo es o no rectángulo.

A partir de esta identificación, dividimos los usos del teorema de Pitágoras en dos grandes grupos. El primero de ellos es hallar longitudes desconocidas que se puedan convertir en cateto o en hipotenusa de un triángulo rectángulo. El segundo uso es comprobar perpendicularidad por medio del recíproco del teorema de Pitágoras. A partir de esta división, definimos los dos objetivos principales de la unidad didáctica, con dos tareas de aprendizaje para cada objetivo. Adicionalmente, diseñamos dos tareas de evaluación. La primera es la tarea diagnóstica que se implementará al inicio del desarrollo de la unidad didáctica para identificar si los estudiantes cuentan con los conocimientos previos. La segunda es el examen final para considerar el alcance de los objetivos de la unidad didáctica por parte de los estudiantes.

Las tareas de aprendizaje se desarrollan en contextos muy particulares. Las tareas del primer objetivo se desarrollan fuera del aula, en algún espacio que cumpla con las condiciones que sugerimos. Las tareas del segundo objetivo utilizan herramientas que no tienen un uso cotidiano en el aula como Google Maps o que tienen un uso diferente al cotidiano, como la escuadra y el compás, de la manera en que los estudiantes las utilizan en esta tarea.

Una de las principales virtudes de nuestra unidad didáctica es que las tareas diseñadas poseen el valor de que representan retos motivantes para los estudiantes. Esto aplica tanto para las tareas del primer objetivo como para las del segundo. Las del primero se hacen en un terreno poco usual para las tareas de matemáticas. Y, en las del segundo, la construcción de los triángulos, la medición y el cálculo se convierten en procesos que representan un desafío para los estudiantes y que estos desarrollan con entusiasmo e incluso competitividad.

El primer objetivo se puede ver limitado por la necesidad de encontrar unas condiciones para desarrollar la tarea, similares a las que proponemos. Aun así, creemos que es un obstáculo que se puede superar fácilmente. No consideramos que sea muy difícil encontrar elementos constructivos como una escalera o un desnivel que permita construir una rampa de manera hipotética. Tampoco creemos que el profesor requiera hacer una gran búsqueda para hallar una pared o un elemento que tenga obstáculos para su medición directa y que se pueda convertir en cateto de un triángulo rectángulo. Por su parte, la única limitación que tiene el segundo objetivo radica en la necesidad de acceder a un dispositivo con Google Maps. Sería relevante indagar por la disponibilidad de computadores con acceso a internet en los colegios para establecer la viabilidad de la implementación de esta tarea en ellos. No obstante, en el contexto actual, caracterizado por un mundo tecnológico en constante evolución, la accesibilidad a estos dispositivos se ha vuelto cada vez más sencilla. En este contexto, creemos que una accesibilidad creciente de internet permitirá una implementación cada vez más viable de esta tarea en particular.

El diseño y la implementación de esta unidad didáctica nos deja algunas lecciones en aspectos didácticos y pedagógicos. En primer lugar, nos permitió verificar cómo los estudiantes aprenden de una manera más efectiva por medio de la resolución autónoma de ejercicios y problemas. También, nos permitió visualizar la importancia de los errores en el aprendizaje. Cada vez que un estudiante incurre en un error, surge una oportunidad de aprendizaje que se concreta al superar el error. Por otra parte, creemos que los estudiantes y el profesor que implementen esta unidad didáctica asimilan el teorema de Pitágoras como algo más que un conocimiento matemático. Se convertirá en una vivencia particular, una experiencia significativa, en términos del modelo constructivista. Adicionalmente, fue importante delimitar el tema a desarrollar. No incluimos la demostración del teorema de Pitágoras, pues esto configura un tema lo suficientemente extenso como para el desarrollo de otra unidad didáctica.

9. LISTADO DE ANEXOS

En este apartado, presentamos el listado de anexos, que contribuyen a la información presentada de nuestra unidad didáctica.

Anexo 1: Listado de conocimientos previos

Anexo 2: Listado de dificultades y errores

Anexo 3: Listado de criterios de logro

Anexo 4. Tarea diagnóstica

Anexo 5. Imprimibles

Anexo 6. Listado de ayudas

10. Referencias

Cañadas, M., Gómez, P., & Pinzón, A. (2018). Análisis de contenido. 17. Bogotá: Universidad de los Andes.

González, M. J., & Gómez, P. (2018). Análisis cognitivo. Universidad de los Andes.

Ministerio de Educación Cultura y Deporte. (2013). Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012. España.