

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

DIVISIBILIDAD DE NÚMEROS NATURALES

ANDREA ABAUNZA, ADRIANA RODRIGUEZ, EDWIN TORRES Y JAVIER
ARANDIA

BOGOTÁ, DICIEMBRE DE 2023

Presentamos en este documento el diseño de la unidad didáctica divisibilidad de números naturales. Esta unidad didáctica es el resultado del trabajo realizado en el proceso de formación del grupo 4 de la décima cohorte de la maestría en Educación Matemática de la Universidad de los Andes.

La implementación de la unidad didáctica se llevó a cabo en la Institución Educativa Mayor de Mosquera, en la sede la Amistad ubicada en el municipio de Mosquera del departamento de Cundinamarca en el grado sexto. La población que atiende esta institución son familias en su mayoría disfuncionales de estratos 0 y 1 cuya principal actividad económica es el reciclaje. La institución cuenta con 2300 estudiantes aproximadamente bajo la modalidad presencial. El fin de esta unidad didáctica es servir como una herramienta en la enseñanza y aprendizaje de la divisibilidad de números naturales, pues consideramos que la mayoría de los profesores enfocan su enseñanza en la explicación del algoritmo de la división y no muestran todas las formas de saber si un número es divisible entre otro.

El contenido matemático de nuestra unidad didáctica se encuentra alineado con la normatividad curricular colombiana, que incluye los documentos de estándares básicos de competencias y derechos básicos de aprendizaje. Como referente internacional, incluimos el marco PISA 2012. Iniciamos con los estándares básicos de competencias en matemáticas (MEN, 2006). Encontramos que, aunque no hay un estándar asociado específicamente a la divisibilidad de números naturales, hay dos estándares relacionados con el tema en los grados 4° y 5°. Los estándares “Resuelvo y formulo problemas cuya estrategia de solución requiera de las relaciones y propiedades de los números naturales y sus operaciones” y “Uso diversas estrategias de cálculo y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas” (p.82) corresponden al pensamiento numérico y sistemas numéricos. También encontramos tres estándares en grado 6° y 7° ubicados en el mismo pensamiento: “Resuelvo y formulo problemas utilizando propiedades básicas de la teoría de números, como las de la igualdad, las de las distintas formas de la desigualdad y las de la adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación”, “Justifico procedimientos aritméticos utilizando las relaciones y propiedades de las operaciones” y “Formulo y resuelvo problemas en situaciones aditivas y multiplicativas, en diferentes contextos y dominios numéricos” (p.84).

En relación con los derechos básicos de aprendizaje (MEN, 2016) para el grado quinto, encontramos el derecho básico de aprendizaje “describe y desarrolla estrategias (algoritmos, propiedades de las operaciones básicas y sus relaciones) para hacer estimaciones y cálculos al solucionar problemas de potenciación” (p.37) y, para el grado sexto, el derecho básico de aprendizaje “utiliza las propiedades de los números enteros y racionales y las propiedades de sus operaciones para proponer estrategias y procedimientos de cálculo en la solución de problemas” (p.45). Según el marco conceptual PISA 2012 (Ministerio de Educación, 2013), vinculamos el tema de divisibilidad de números naturales con todos los contextos (personal, profesional, social y científico).

Elegimos la divisibilidad de números naturales para nuestra unidad didáctica porque es un concepto matemático fundamental en la aritmética. Comprender la divisibilidad es esencial para descomponer números en sus factores primos, calcular múltiplos y divisores, y resolver problemas prácticos en la vida cotidiana. Además, la divisibilidad sienta las bases para otros temas matemáticos como fracciones, proporciones y simplificación de expresiones algebraicas.

1. ARTICULACIÓN DE LOS CONTENIDOS

En este apartado, presentamos el análisis de contenido que realizamos de la divisibilidad de números naturales. Describimos la estructura matemática y conceptual del tema, los sistemas de representación y los fenómenos que le dan sentido (Cañadas, 2018).

1. ESTRUCTURA MATEMÁTICA Y CONCEPTUAL DE LA DIVISIBILIDAD DE NÚMEROS NATURALES

La estructura matemática es un concepto pedagógico que permite identificar la relación que existe entre los conceptos y procedimientos de un contenido matemático. De acuerdo con lo anterior, en la estructura matemática (figura 1) presentamos los conceptos y procedimientos relacionados con el tema divisibilidad de números naturales. La elipse en el mapa indica el concepto más general dentro de la estructura matemática.

Los números naturales tienen cuatro operaciones básicas: suma, resta, multiplicación y división. La división se relaciona bidireccionalmente con la divisibilidad que se resalta en el rectángulo sombreado como tema central. Establecemos que la divisibilidad es una propiedad que permite separar un total en partes iguales. Los números naturales en general se dividen en dos tipos: los números primos y los números compuestos. Estos números se relacionan con el teorema fundamental de la aritmética propuesto por Euclides, que dice que todo número natural mayor que 1 es primo o está compuesto por un único producto de primos; es decir, tiene una única descomposición en factores primos.

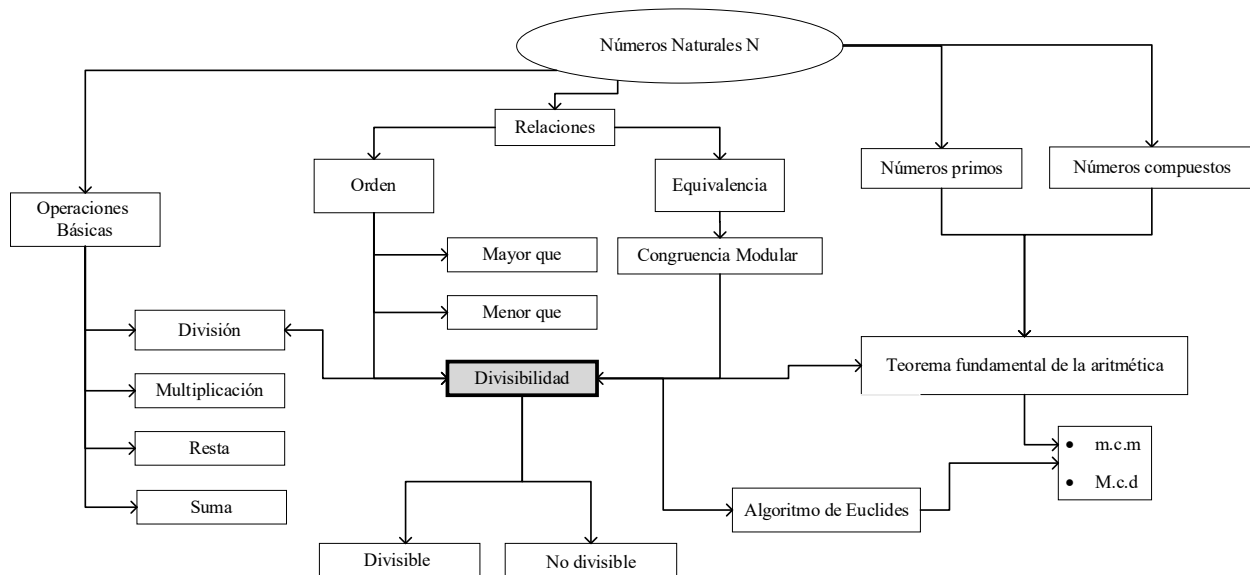


Figura 1. Estructura matemática de divisibilidad de números naturales

En la estructura conceptual (figura 2), mostramos los conceptos y procedimientos relacionados con nuestro tema. El mapa comienza en divisibilidad de números naturales, ubicado como tema inicial en una elipse. Los rectángulos sombreados representan las subestructuras matemáticas que hacen referencia a las distintas aplicaciones del tema. Los trapecios representan las operaciones y los rectángulos sin sombra son conceptos relacionados con el tema. De la divisibilidad de números naturales se desprende el algoritmo de la división. Del algoritmo de la división parten sus elementos: dividendo, divisor, cociente y residuo. El residuo tiene dos posibilidades, el residuo cero y el residuo diferente de cero. La congruencia modular también está relacionada con el concepto de residuo.

Del residuo cero, parte la división exacta. A partir de los elementos del algoritmo de la división, surgen los divisores y múltiplos. De estos, se desprenden los números primos y compuestos. De los números primos, se originan los criterios de divisibilidad. La multiplicación de números primos forma números compuestos que tienen descomposición en factores primos única, según el teorema fundamental de la aritmética.

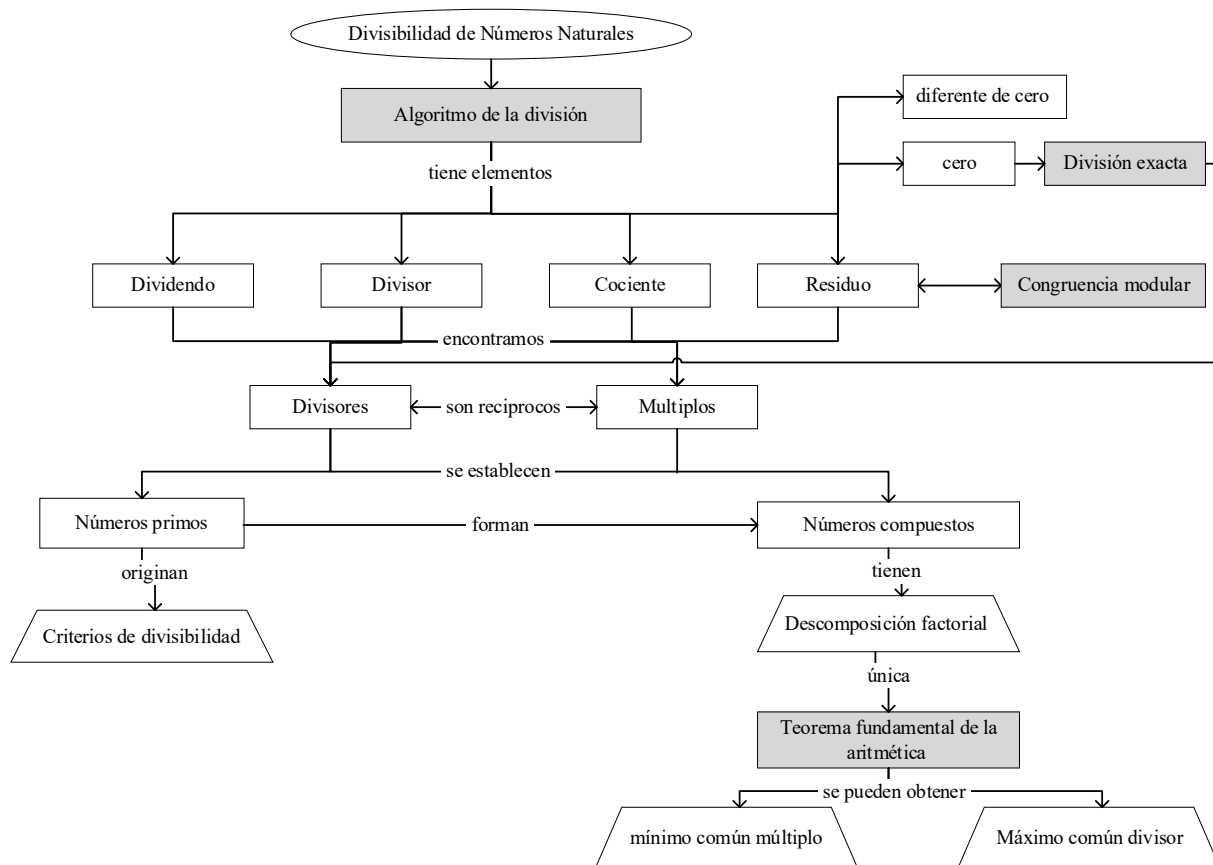


Figura 2. Estructura conceptual de divisibilidad de números naturales

2. SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

Un sistema de representación es un sistema de signos que cumple unas características para la creación y manipulación de signos, y su relación de equivalencia (Cañadas, 2018). Para nuestra unidad didáctica, identificamos los siguientes sistemas de representación: simbólico, pictórico, tabular, numérico, manipulativo, gráfico, ejecutable y geométrico. Los sistemas de representación más relevantes en el diseño de la unidad didáctica son los sistemas de representación simbólico, geométrico y pictórico. En el mapa conceptual de la figura 3, exponemos los sistemas de representación que identificamos.

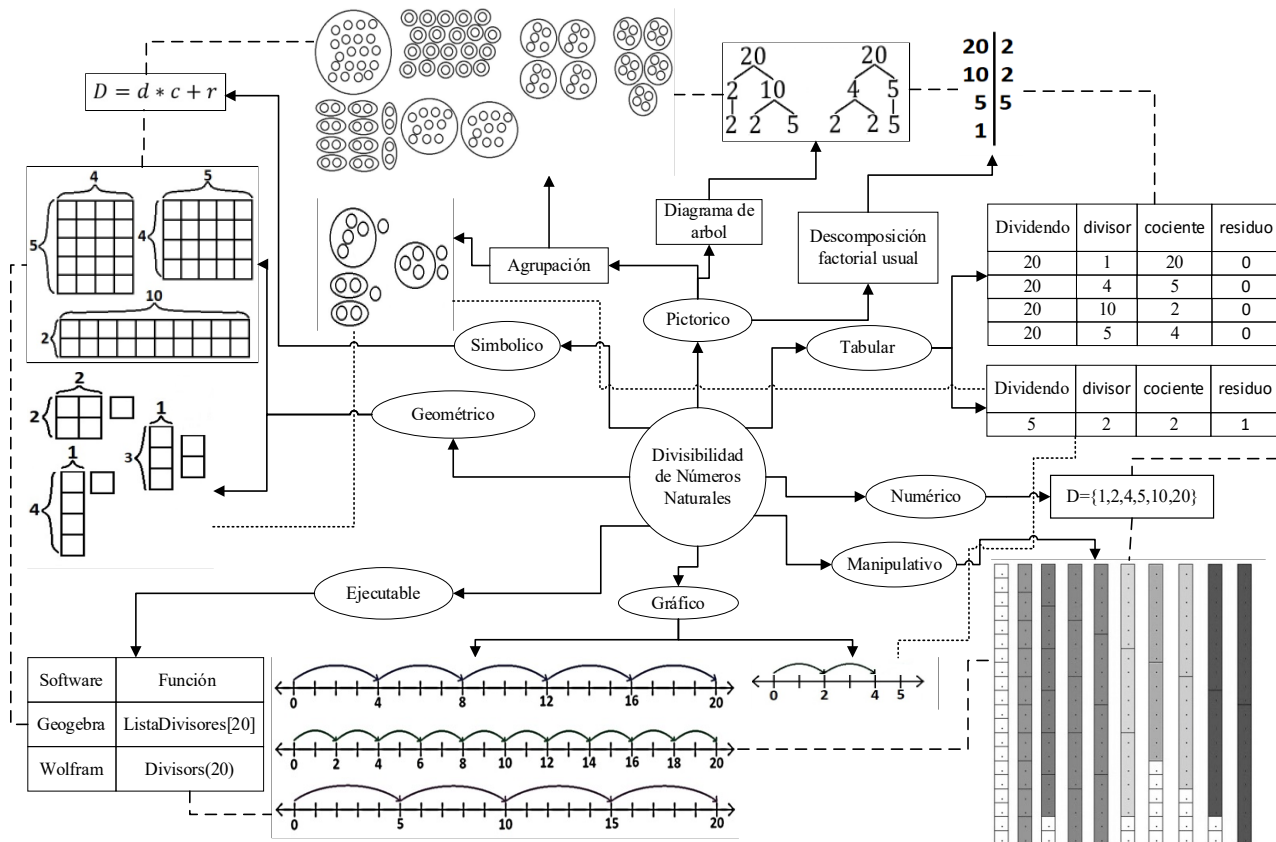


Figura 3. Mapa conceptual de los sistemas de representación

A continuación, explicamos las características de cada sistema de representación y su uso en nuestra unidad didáctica.

2.1. Sistema de representación simbólico

La divisibilidad de números naturales se puede representar usando el algoritmo de la división $D = d * c + r$, en el que el dividendo es igual a la suma del residuo y el producto del cociente por el divisor.

2.2. Sistema de representación pictórico

En el sistema de representación pictórico, presentamos tres de los diferentes tipos de representaciones pictóricas que existen. La primera es la agrupación, en la que el dividendo se reparte en conjuntos de igual cantidad de elementos. Las otras dos están relacionadas con la descomposición factorial que se puede hacer de forma vertical o por medio del diagrama de árbol.

2.3. Sistema de representación tabular

En el sistema de representación tabular, utilizamos una tabla para establecer la relación de un número tomado como dividendo y las demás partes correspondientes al algoritmo de la división (divisor, cociente y residuo).

2.4. Sistema de representación numérico

En la divisibilidad de números naturales, se puede encontrar el conjunto de los divisores de un número a partir de su descomposición factorial. Con el conjunto de los factores primos de un número (F) podemos formar el conjunto de sus divisores (D) al realizar diferentes combinaciones de multiplicaciones de los factores primos. Todo número natural es divisible por 1 y por sí mismo. Por ejemplo, al descomponer 20, encontramos que $F = \{2, 2, 5\}$. Al multiplicar estos factores primos encontramos que el conjunto de los divisores de 20 es $D = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$.

2.5. Sistema de representación manipulativo

En el sistema de presentación manipulativo, usamos fichas que pueden simbolizar cualquier número. El ancho de estas fichas es de 1 cm y el largo representa el número que vamos a dividir. Con las mismas reglas del sistema de representación podemos expresar números más pequeños. Para verificar que un número es divisible entre otro, se cubren los números mayores con las fichas de los números menores.

2.6. Sistema de representación gráfico

Para el sistema de representación gráfico, utilizamos la recta numérica. En la recta numérica, ubicamos el número divisor y, dando saltos de la misma longitud, verificamos la divisibilidad del número que dividimos.

2.7. Sistema de representación ejecutable

Otra forma de calcular los divisores y la descomposición factorial de un número es mediante el uso de aplicaciones o software matemático especializado. En el sistema de representación ejecutable, proponemos el uso de aplicaciones como WolframAlpha y GeoGebra.

2.8. Sistema de representación geométrico

Con el sistema de representación geométrico, expresamos un número natural por medio de rectángulos formados por cuadrados $1u^2$. Los lados del rectángulo son divisores del número dado.

3. ANÁLISIS FENOMENOLÓGICO

El análisis fenomenológico consiste en describir la estructura matemática del concepto, al identificar características matemáticas comunes entre las situaciones en las que tiene sentido el tema (Cañadas, 2018). En la figura 4, presentamos el análisis fenomenológico de nuestro tema. Iniciamos por cuatro subestructuras. De cada una, se desprende un conector en línea recta que representa las relaciones biunívocas correspondientes con los contextos fenomenológicos que se refieren a las situaciones que le son presentadas a los estudiantes en relación con su entorno. Seguidamente, otra elipse con texto vertical relaciona los fenómenos con los contextos de PISA 2012: (a) social, (b) profesional, (c) personal y (d) científico. En los rectángulos más grandes, están organizados algunos fenómenos relacionados con el tema de acuerdo con los contextos PISA 2012. En la parte sombreada, se ubica el título que identifica el contexto PISA 2012 y en la parte no sombreada con viñetas se ubican los fenómenos que relacionamos. Junto a cada fenómeno en paréntesis, están los contextos fenomenológicos correspondientes.

De las subestructuras que se originan de la estructura conceptual del tema, se desprenden problemas asociados a las posibles maneras de repartir. Las formas de repartir están relacionadas con los divisores de un número. Del teorema fundamental de la aritmética, se desprende la coincidencia de múltiplos. De la congruencia modular, se desprenden los problemas con residuo equivalente, que permiten mostrar a los estudiantes una aplicación de la divisibilidad en espacios más creativos, como la encriptación. Y finalmente, incluimos el algoritmo de la división que permite establecer la relación con todos los fenómenos propuestos.

Siglas

- * Posibles maneras de repartir (PMR)
- * Coincidencia de múltiplos (CM)
- * Residuo equivalente (RE)
- * Cuantos elementos no pertenecen a algún grupo (NPG)

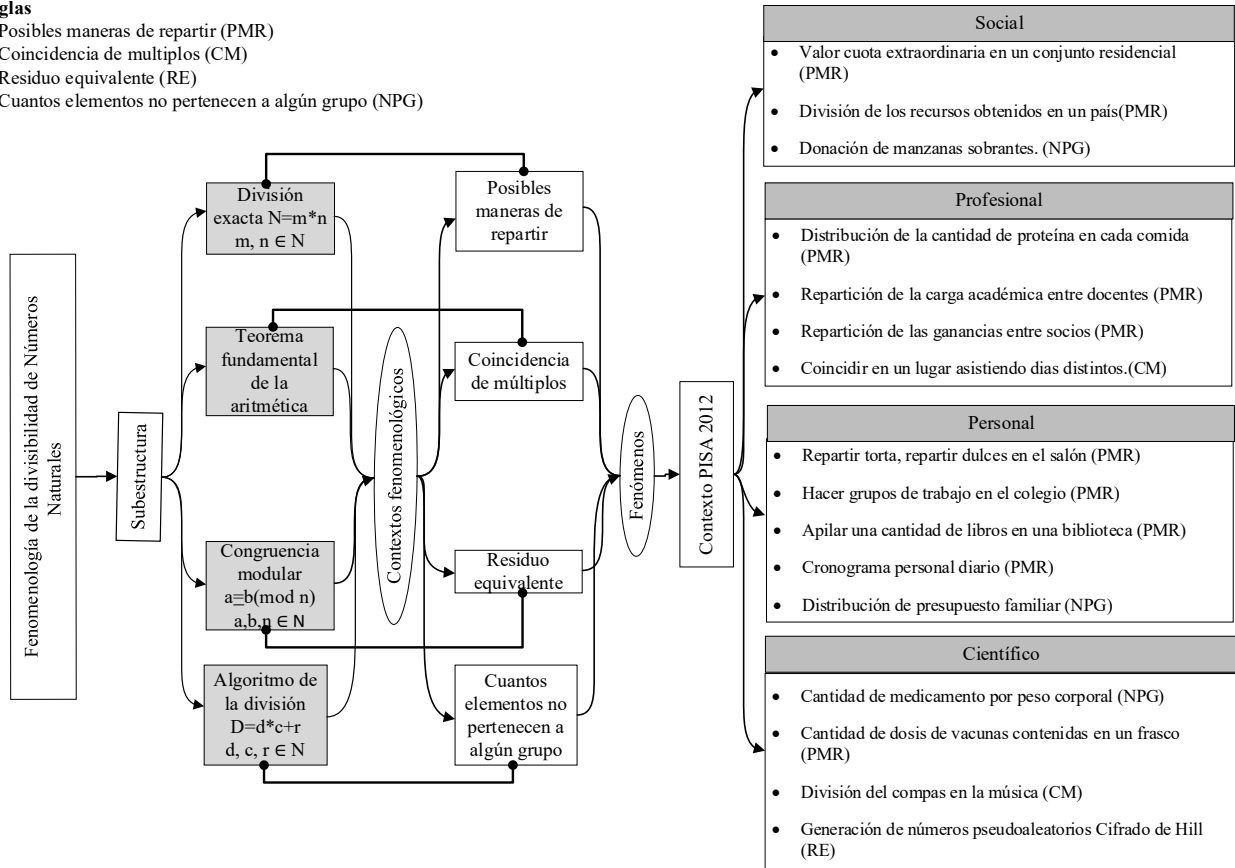


Figura 4. Análisis fenomenológico de divisibilidad de número naturales

2. ASPECTOS COGNITIVOS

En este apartado, presentamos los aspectos relacionados con el análisis cognitivo de nuestra unidad didáctica. Estos aspectos definen lo que esperamos que nuestros estudiantes aprendan y sirven como base para la creación de las tareas de aprendizaje destinadas a fortalecer el proceso de aprendizaje del tema. En primer lugar, exponemos las expectativas de aprendizaje, que representan lo que el profesor busca que los estudiantes alcancen durante la enseñanza de un tema matemático. Posteriormente, presentamos las expectativas de tipo afectivo que hacen referencia a la motivación del estudiante durante el aprendizaje, así como a la importancia de reconocer tanto sus éxitos, como sus desaciertos. También, exploramos las limitaciones de aprendizaje que se refieren a las dificultades y errores que los estudiantes pueden experimentar al solucionar una tarea de aprendizaje. Asimismo, detallamos los criterios de logro, que son los procedimientos que componen las estrategias que utilizan los estudiantes para resolver las tareas de aprendizaje. Presentamos los criterios de logro por medio de lo que llamamos grafos de criterios de logro. Por último, en el esquema general de la unidad didáctica, ofrecemos detalles acerca de la cantidad de tareas de aprendizaje asociadas a cada objetivo, así como la cantidad de sesiones de clase sugeridas, junto con sus respectivos tiempos.

1. EXPECTATIVAS DE NIVEL SUPERIOR

En el contexto del proceso educativo, resulta esencial comprender la importancia de establecer expectativas de aprendizaje. Estas expectativas representan los objetivos que el profesor busca que los estudiantes alcancen durante la enseñanza de un tema matemático específico, en este caso, la divisibilidad de números naturales. En este apartado, tratamos las expectativas de aprendizaje de nivel superior. Las expectativas del nivel superior se refieren a metas a largo plazo que se logran a lo largo de un periodo formativo extenso (González & Gómez, 2018). Estas metas están intrínsecamente relacionadas con el desarrollo de las capacidades matemáticas fundamentales y los procesos matemáticos propuestos en el marco conceptual PISA (2012). Este nivel busca promover una comprensión matemática profunda y duradera.

Según PISA (2012), existen los procesos matemáticos de formular, emplear e interpretar. Estos procesos matemáticos detallan cómo las personas enlazan el contexto de un problema con los conceptos matemáticos para resolverlo. La capacidad de un individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas hace referencia a su competencia en esta área (Ministerio de Educación, 2013). En el marco de PISA (2012), también se describen las capacidades matemáticas fundamentales. Estas son habilidades esenciales que sustentan la competencia matemática. En total,

hay siete capacidades matemáticas fundamentales: (a) comunicación, (b) matematización, (c) representación, (d) razonamiento y argumentación, (f) utilización de operaciones y lenguaje simbólico y (g) utilización de herramientas matemáticas (Ministerio de Educación, 2013).

El enfoque de nuestra unidad didáctica se orienta a fortalecer las siete capacidades matemáticas fundamentales, al atender los procesos matemáticos mencionados anteriormente. A continuación, en la tabla 1, establecemos la relación entre las capacidades matemáticas fundamentales y los procesos matemáticos. Proporcionamos una descripción específica de esta relación en el contexto de la divisibilidad de números naturales. En las filas, ubicamos las capacidades matemáticas fundamentales y, según la columna, el proceso matemático que se relaciona.

Tabla 1

Relación entre procesos matemáticos y capacidades matemáticas fundamentales de divisibilidad de números naturales

CMF	Procesos matemáticos		
	Formular	Emplear	Interpretar y evaluar
Comunicación	Identificar los datos relacionados con la divisibilidad de números naturales que estén en el enunciado de la tarea.	Mostrar los cálculos realizados en el proceso para encontrar la solución al problema propuesto en la tarea, ya sean divisiones, multiplicaciones o listas de factores.	Elaborar y presentar explicaciones argumentando a través de los conceptos y reglas establecidas en la divisibilidad de números naturales.
Matematización	Identificar las variables y formular supuestos relacionados con la división exacta, el teorema fundamental de la aritmética, la congruencia modular o el algoritmo de la división según el problema del mundo real.	Utilizar la comprensión del contexto para seleccionar el procedimiento más adecuado según la divisibilidad de números naturales.	Comprender el alcance y los límites de los modelos matemáticos aplicados en divisibilidad de números naturales para hallar una solución matemática al problema.

Tabla 1

Relación entre procesos matemáticos y capacidades matemáticas fundamentales de divisibilidad de números naturales

CMF	Procesos matemáticos		
	Formular	Emplear	Interpretar y evaluar
Representación	Crear una representación de información del mundo real de acuerdo con los sistemas de representación. Utilizados en divisibilidad de números naturales.	Interpretar, relacionar y utilizar distintas representaciones cuando se interactúa con un problema referente a divisibilidad de números naturales.	Interpretar, comparar o valorar dos o más representaciones de un problema que implica divisibilidad de números naturales.
Razonamiento y argumentación	Explicar, defender o facilitar una justificación de la representación seleccionada para tratar la divisibilidad de números naturales en una situación del mundo real.	Relacionar datos con el fin de llegar a una solución matemática en un problema de divisibilidad de números naturales. Implica realizar generalizaciones y desarrollar un argumento en múltiples pasos sobre este tema.	Reflexionar sobre las soluciones matemáticas, elaborar explicaciones y argumentos que respalden, refuten o proporcionen una solución matemática a un problema de divisibilidad de números naturales contextualizado.
Diseño de estrategias para resolver problemas	Seleccionar o diseñar un plan o estrategia para reformular, desde una perspectiva matemática, problemas de divisibilidad de números naturales contextualizados.	Activar mecanismos de control eficaces y sostenidos en un procedimiento con múltiples pasos de divisibilidad de números naturales, con el fin de llegar a una solución, conclusión o generalización matemática.	Diseñar e implementar una estrategia para interpretar, valorar y validar una solución matemática en un problema de divisibilidad de números naturales contextualizado.

Tabla 1

Relación entre procesos matemáticos y capacidades matemáticas fundamentales de divisibilidad de números naturales

CMF	Procesos matemáticos		
	Formular	Emplear	Interpretar y evaluar
Utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico	Emplear variables, símbolos, diagramas y modelos estándar apropiados para representar un problema del mundo real relacionado con la divisibilidad de números naturales utilizando un lenguaje simbólico y formal.	Comprender y utilizar constructos formales basados en definiciones, reglas y sistemas formales en la divisibilidad de números naturales, así como mediante el empleo de algoritmos.	Comprender la relación entre el contexto del problema y la representación de la solución matemática elegida entre las utilizadas en la divisibilidad de números naturales.
Utilización de herramientas matemáticas	Utilizar el algoritmo de la división y el teorema fundamental de la aritmética para describir relaciones matemáticas.	Conocer y ser capaz de utilizar adecuadamente las distintas herramientas para la divisibilidad de números naturales, así como implementar procesos y procedimientos para determinar soluciones matemáticas.	Utilizar las herramientas correspondientes a la divisibilidad de números naturales para determinar la razonabilidad de una solución matemática, así como sus límites y restricciones, dadas las circunstancias del problema.

Nota: CMF = Capacidades Matemáticas Fundamentales

2. EXPECTATIVAS DE NIVEL MEDIO

Las expectativas de nivel medio son los objetivos de aprendizaje de la unidad didáctica. Con ellos buscamos guiar el progreso de los estudiantes de manera coherente y adaptada a sus necesidades. Los dos objetivos de aprendizaje que hemos definido para la unidad didáctica sobre la divisibilidad de números naturales son los siguientes.

Objetivo 1. Comparar el residuo de divisiones para resolver problemas en diferentes contextos.

Objetivo 2. Utilizar divisores o la descomposición factorial en la resolución de problemas.

3. EXPECTATIVAS DE TIPO AFECTIVO

En el proceso educativo, consideramos de suma importancia enfocarnos en la motivación de los estudiantes, así como en el reconocimiento de sus logros y errores. También, es esencial cultivar su interés por aprender y estimular su curiosidad para aplicar los conocimientos matemáticos en su vida diaria. Por lo tanto, proponemos cuatro expectativas afectivas que permiten conectar los aspectos cognitivos con la motivación de los estudiantes durante el desarrollo de la unidad didáctica. Estas expectativas afectivas están relacionadas con las actitudes que esperamos que los estudiantes desarrollen durante la ejecución de la unidad didáctica sobre la divisibilidad de números naturales. En la tabla 2, presentamos cuatro expectativas de tipo afectivo. Las dos primeras se relacionan con el objetivo 1, mientras que la primera, tercera y cuarta se vinculan con el segundo objetivo.

Tabla 2

Listado de expectativas afectivas de la divisibilidad de números naturales

EA	Descripción
1	Incrementar el interés por representar un problema empleando algoritmo de la división.
2	Valorar la utilidad de los residuos obtenidos de divisiones para conocer y resolver un problema planteado.
3	Desarrollar una predisposición favorable al emplear la descomposición factorial para resolver problemas relacionados con números primos y compuestos.
4	Adquirir seguridad al proponer y llevar a cabo estrategias de resolución de problemas, utilizando, múltiplos y divisores.

Nota. EA: expectativa afectiva.

4. LIMITACIONES

Entendemos por limitaciones de aprendizaje aquellas dificultades y errores en los que los estudiantes pueden incurrir al momento de resolver una tarea (González & Gómez, 2018). Para la unidad didáctica, establecimos 40 errores que, a su vez, se encuentran clasificados en siete dificultades. Estas dificultades están asociadas con los conceptos propios de la divisibilidad de números naturales, los procedimientos relacionados con la divisibilidad, la utilización de los sistemas de representación con sus traducciones y la validación de la información para resolver una tarea.

Como ejemplo de las limitaciones de aprendizaje, encontramos el error 30: “No identificar la cantidad sobrante”. Este error se encuentra asociado con la dificultad para identificar los elementos del algoritmo de la división, que impide que el estudiante encuentre la solución del problema.

El error E7, “Considerar a todos los números impares como primos y los pares como compuestos”, pertenece a la dificultad para distinguir números primos y compuestos, que puede llevar al estudiante a realizar una descomposición factorial incorrecta. El error E20, “Calcular un resultado diferente al cociente entre datos que están asociados con la tarea”, forma parte de la dificultad

asociada con los sistemas de representación. El error E17, “Extraer de forma incompleta los datos relacionados con divisibilidad de números naturales”, conecta con la dificultad para identificar la información referente a divisibilidad de números naturales. En la tabla 3, mostramos la primera dificultad junto con los errores asociados. En el anexo 1, presentamos el listado completo de las limitaciones de aprendizaje.

Tabla 3

Listado de dificultades y errores para la divisibilidad de números naturales

E	Descripción
D1 Dificultad para identificar los elementos del algoritmo de la división	
1	Confundir el dividendo con otra parte de la división al identificarlo en una situación
2	Confundir el divisor con otra parte de la división al identificarlo en una situación
3	Confundir el cociente con otra parte de la división al identificarlo en una situación
4	Confundir el residuo con otra parte de la división al identificarlo en una situación
5	Utilizar la descomposición factorial cuando se debe usar el algoritmo de la división
33	Desvincular el cociente de la pregunta de la tarea
30	No determinar la cantidad sobrante
40	Establecer que un número es divisor cuando el residuo es diferente de cero

Nota. E: error, D: dificultad

5. CRITERIOS DE LOGRO

Para solucionar las tareas de aprendizaje, los estudiantes emplean diversas estrategias de resolución que constan de procedimientos específicos. A estos procedimientos les damos el nombre de “criterios de logro”. Para cada uno de los objetivos, establecemos criterios de logro distintos, ya que varían según los requisitos específicos de las tareas de aprendizaje (Romero & Gómez, 2014). En la tabla 4, presentamos los criterios de logro más relevantes para cada objetivo, y en el anexo 2, incluimos el listado completo de los criterios de logro para la unidad didáctica. Cada criterio se etiqueta de la forma n.m donde (n) indica el objetivo al que está vinculado el criterio de logro y (m) se utiliza para distinguir entre los diferentes criterios de logro asociados al objetivo.

Tabla 4
Ejemplos de criterios de logro

CdL	Descripción
Objetivo 1	
CdL 1.1	Leo el enunciado y extraigo los datos que me permitan resolver la situación planteada.
CdL 1.2	Elijo una estrategia para la solución de la situación planteada.
CdL 1.7	Comparo los residuos obtenidos de diferentes divisiones y determino si son iguales.
CdL 1.8	Utilizo el residuo para solucionar la situación planteada.
Objetivo 2	
CdL 2.1	Leo el enunciado y extraigo los datos que me ayudarán a resolver la situación planteada.
CdL 2.2	Elijo una estrategia para la solución de la situación planteada.
CdL 2.3	Realizo la división y determino el cociente para dar solución a la situación planteada.
CdL 2.4	Decido la forma en que voy a encontrar los divisores.
CdL 2.8	Decido la forma en que voy a encontrar múltiplos.
CdL 2.14	<u>Interpreto el divisor o la descomposición factorial para dar solución a la situación.</u>

Nota: CdL: criterio de logro; SdCs: secuencias de capacidades

6. GRAFOS DE CRITERIOS DE LOGRO

En este apartado, presentamos los grafos de criterios de logro correspondientes a los dos objetivos de la unidad didáctica sobre la divisibilidad de números naturales. Un grafo de criterios de logro es una representación visual que muestra una o más secuencias en la que un estudiante activa los criterios de logro para tratar de solucionar cada una de las tareas propuestas en la unidad didáctica (Romero & Gómez, 2014). En la figura 5, presentamos el grafo de criterios de logro para el primer objetivo de la unidad didáctica.

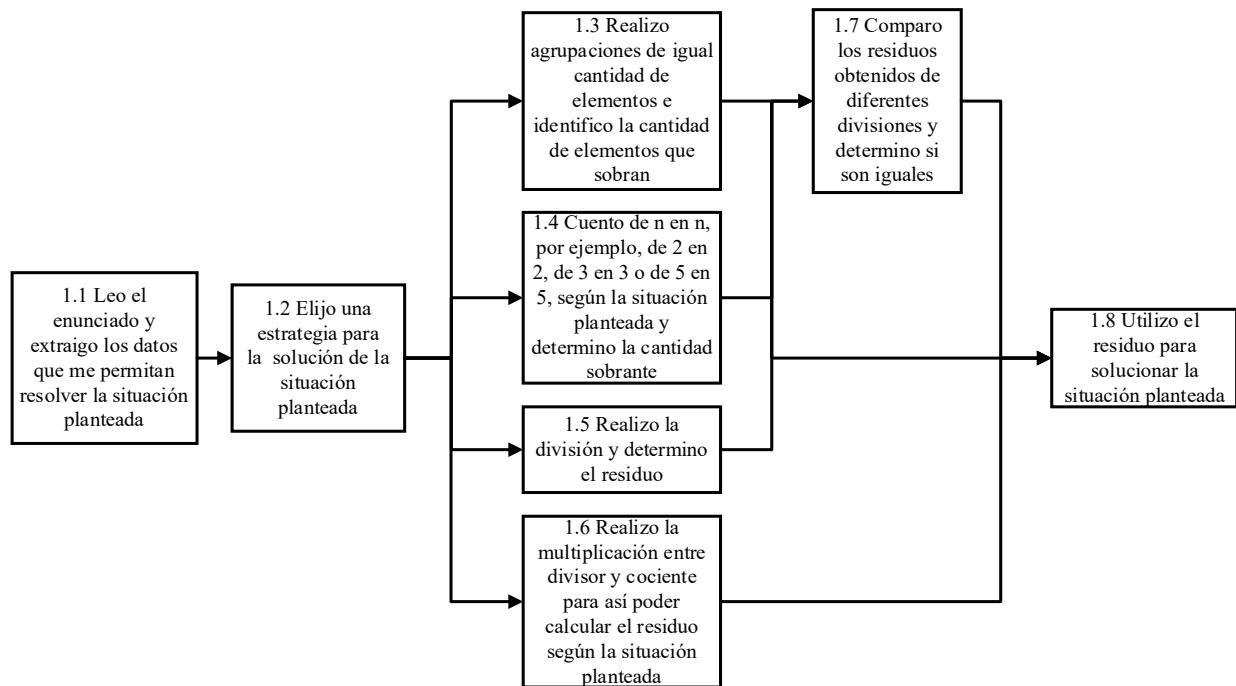


Figura 5. Grafo de criterio de logro del objetivo 1

Para lograr el primer objetivo de nuestra unidad didáctica, esperamos que los estudiantes desarrollen una serie de habilidades específicas. Inicialmente, deben leer el enunciado de la tarea e identificar los datos que consideren importantes para solucionarla (criterio de logro 1.1). Posteriormente, los estudiantes deben elegir una estrategia adecuada para abordar el problema (criterio de logro 1.2). A continuación, seleccionan una de las diferentes formas de afrontar la tarea, como realizar agrupaciones de igual cantidad de elementos e identificar el sobrante (criterio de logro 1.3), contar de n en n para determinar si sobran elementos (criterio de logro 1.4), realizar la división y calcular el residuo (criterio de logro 1.5), o multiplicar dos factores para encontrar el residuo (criterio de logro 1.6). Por último, utilizan el residuo calculado para encontrar la solución a la situación planteada (criterio de logro 1.8).

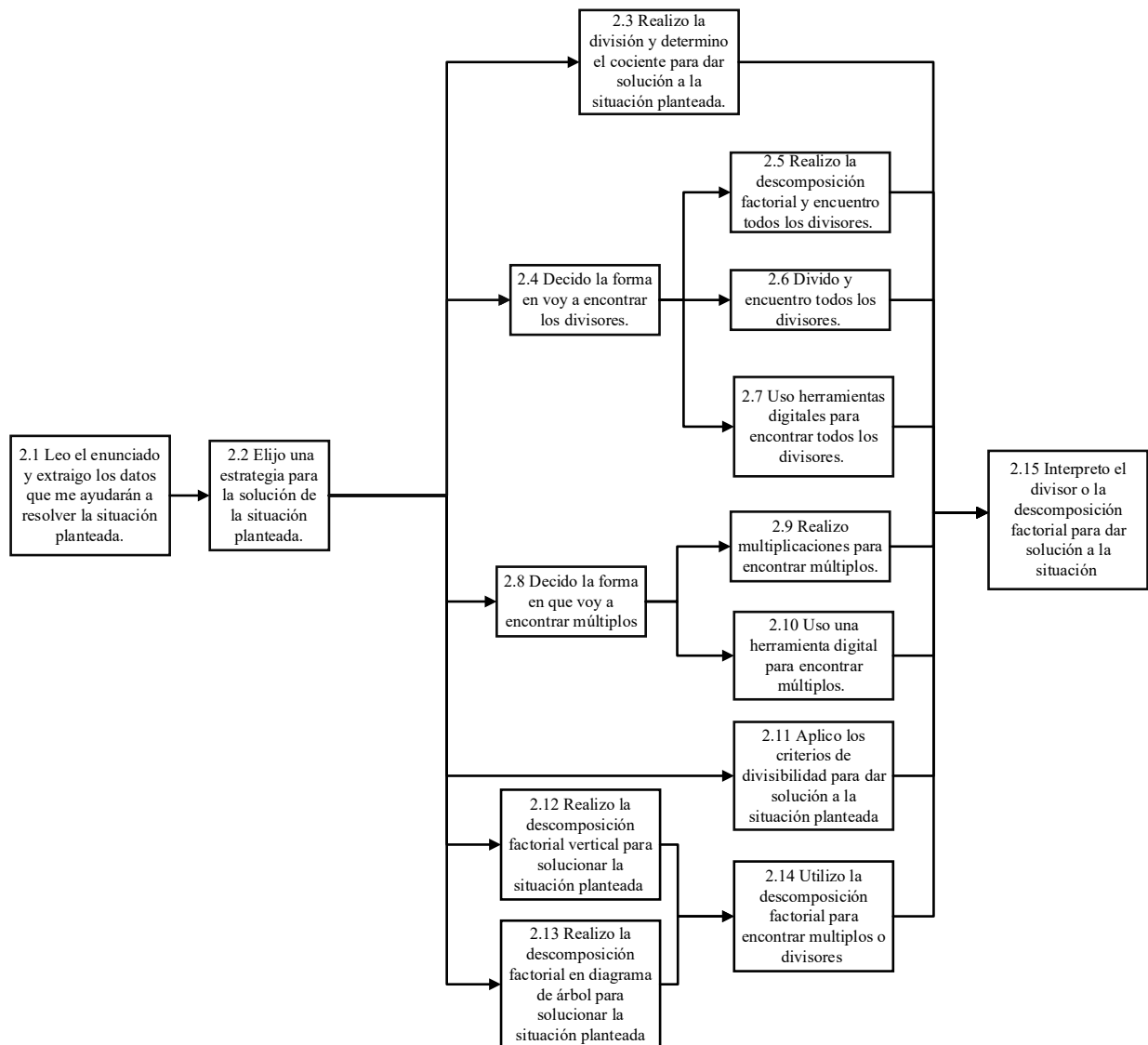


Figura 6. Grafo de criterio de logro del objetivo 2

Para alcanzar el segundo objetivo de nuestra unidad didáctica, esperamos que los estudiantes demuestren habilidades específicas de acuerdo con los criterios de logro presentados en la figura 6. En primer lugar, al enfrentar una situación planteada, esperamos que los estudiantes comiencen por leer el enunciado con atención y extraigan los datos relevantes (criterio de logro 2.1). Luego, deberán seleccionar una estrategia adecuada para resolver la situación (criterio de logro 2.2). A medida que avanzan en la resolución, deberán realizar divisiones, determinar los cocientes necesarios (criterio de logro 2.3) y decidir cómo encontrar los divisores requeridos (criterios de logro 2.4, 2.5, 2.6, 2.7).

Además, los estudiantes pueden enfrentar la situación desde la búsqueda de múltiplos y tomar decisiones sobre cómo encontrarlos (criterios de logro 2.8, 2.9) y, en caso necesario, utilizar herramientas digitales para estas tareas (criterio de logro 2.10). También esperamos que apliquen criterios de divisibilidad para llegar a la solución (criterio de logro 2.11) y realicen la descomposición factorial vertical o en diagrama de árbol cuando sea necesario (criterios de logro 2.12, 2.13). Para encontrar múltiplos o divisores, los estudiantes utilizan la descomposición factorial (criterio de logro 2.14). Finalmente, los estudiantes deben ser capaces de interpretar el divisor o la descomposición factorial para llegar a la solución final (Criterio de logro 2.15).

7. ESQUEMA GENERAL

En este apartado, presentamos el esquema general de la unidad didáctica de divisibilidad de números naturales. Proponemos 16 sesiones divididas en 11 sesiones de 100 minutos y cinco sesiones de 60 minutos. En la primera sesión, proponemos una evaluación diagnóstica que permite realizar un sondeo de los conocimientos previos que deben tener los estudiantes y así definir los conceptos que se van a repasar. Después se presenta el tema y se comunican los objetivos que se desean alcanzar con la aplicación de la unidad didáctica. En la puesta en común de los posibles errores, se muestra a los estudiantes de manera global los errores en los que más incurrieron y las causas que los pudieron llevar a ellos. Y, por último, después de aplicar la unidad didáctica, los exámenes finales miden el aprendizaje y logro de los objetivos de los estudiantes. En las sesiones de 100 minutos, se encuentran las tareas de aprendizaje. Estas tareas de aprendizaje son las actividades planeadas para estudiar nuestro tema. En la tabla 5, presentamos la organización de las sesiones previstas para el desarrollo de la unidad didáctica.

Tabla 5
Esquema general de la divisibilidad de números naturales

Número de sesión	Actividad	Tiempo
1	Evaluación diagnóstica.	60 minutos
2	Retroalimentación de la evaluación diagnóstica.	100 minutos
3	Explicación de los criterios de divisibilidad.	100 minutos
4	Explicación del concepto de ángulo, ángulo coterminal, su representación, clasificación y medición con el transportador.	100 minutos
5	Explicación de la utilidad de cada elemento de la división.	100 minutos
6	Explicación del proceso de encontrar divisores y múltiplos.	100 minutos
7	Presentación del tema, presentación de los objetivos de logro 1 y 2, entrega de los criterios de logro del objetivo 1.	60 minutos

Tabla 5
Esquema general de la divisibilidad de números naturales

Número de sesión	Actividad	Tiempo
8	Implementación Tarea 1.1 Bingo y diligenciamiento del diario del estudiante correspondiente a la tarea.	100 minutos
9	Implementación Tarea 1.2 Ángulos y diligenciamiento del diario del estudiante correspondiente a la tarea.	100 minutos
10	Puesta en común de los posibles errores y acciones de mejora (taller).	60 minutos
11	Examen final primera parte.	60 minutos.
12	Implementación Tarea 2.1 Dulces y diligenciamiento del diario del estudiante correspondiente a la tarea.	100 minutos
13	Implementación Tarea 2.2 Mayorista y diligenciamiento del diario del estudiante correspondiente a la tarea.	100 minutos
14	Retroalimentación y reflexión sobre la unidad didáctica, preparación del examen final.	100 minutos
15	Examen final segunda parte.	60 minutos
16	Sesión de cierre.	100 minutos

3. TAREAS DE APRENDIZAJE Y DE EVALUACIÓN

En este apartado, presentamos las tareas de la unidad didáctica. Iniciamos con la tarea diagnóstica; luego, presentamos las tareas de aprendizaje del objetivo 1 y del objetivo 2; y, por último, presentamos el examen final.

1. TAREA DIAGNÓSTICA

Una tarea diagnóstica es una tarea de evaluación que permite medir los conocimientos previos de los estudiantes y aquellos conocimientos necesarios para el desarrollo de la unidad didáctica. Consideramos que, para la implementación de la unidad didáctica, los estudiantes requieren los conocimientos previos que presentamos en la tabla 6.

Tabla 6

Listado de conocimientos previos de la divisibilidad de números naturales

CP	Descripción
1	Identificar los números pares.
2	Identificar los números impares.
3	Realizar multiplicaciones de números naturales.
4	Realizar divisiones de números naturales.
5	Distinguir los elementos de la división (dividendo, divisor, cociente y residuo).
6	Contar de n en n .
7	Calcular los múltiplos de un número.
8	Asociar el lenguaje usado en situaciones reales con las operaciones efectuadas para resolver un problema.
9	Reconocer los factores primos de un número.
10	Utilizar los criterios de divisibilidad del 2, 3, 4, 5, 6, 9 y 10.
11	Calcular los divisores de un número.

Tabla 6

Listado de conocimientos previos de la divisibilidad de números naturales

CP	Descripción
12	Conocer el concepto de ángulo.
13	Medir un ángulo usando el transportador.
14	Conocer el concepto de ángulo coterminal.

Nota. CP=conocimientos previos.

Estos conocimientos previos están relacionados con los conceptos de paridad y ángulos, en especial los coterminales. También, están relacionados con los procedimientos de multiplicación, división, cálculo de múltiplos y divisores. La tarea diagnóstica consta de 11 preguntas relacionadas con los conocimientos previos y se encuentran en el anexo 4. Por ejemplo, el conocimiento previo cinco, “distingue los elementos de la división (dividendo, divisor, cociente y residuo)”, está relacionada con la pregunta ocho.

8. En las siguientes divisiones, relaciona el número con un elemento de la división según corresponda.

The diagram shows a division problem: $54 \overline{) 150}$ and $9 \overline{) 150}$. An arrow points to a list of numbers: 3, 15, 9, and 54. To the right of these numbers are four boxes labeled 'Dividendo', 'Cociente', 'Divisor', and 'Residuo'.

Figura 7. Imagen de la pregunta 8 prueba diagnóstica

2. TAREAS DE APRENDIZAJE DEL OBJETIVO 1

Las tareas de aprendizaje son aquellas tareas que el profesor propone a los estudiantes con el propósito de contribuir al logro de las expectativas establecidas y la superación de sus limitaciones de aprendizaje (Gómez, Velasco & Mora, 2018). En este apartado, presentamos dos tareas de aprendizaje del primer objetivo de nuestra unidad didáctica divisibilidad de números naturales. En primer lugar, ofrecemos una descripción detallada de cada tarea. Posteriormente, enumeramos los errores en los que los estudiantes podrían incurrir, presentamos el grafo de los criterios de logro asociados al objetivo 1 y describimos la actuación del profesor durante la implementación de cada tarea de aprendizaje. Luego, proporcionamos sugerencias metodológicas con instrucciones que

podrían brindar mayor claridad al profesor sobre lo que sugerimos que debería hacer. Finalmente, detallamos la evaluación, al indicar aspectos clave en la resolución de las tareas que podrían observarse para establecer en qué medida cada tarea funcionó apropiadamente durante la implementación.

2.1. Tarea T1.1 Bingo

Con la tarea T1.1 Bingo, pretendemos que los estudiantes encuentren los residuos de algunas divisiones e identifiquen y diferencien estos residuos de tal manera que los comparen para encontrar los que sean iguales. Al finalizar la tarea, los estudiantes deben reconocer cuales de los números tienen igual residuo al dividirlos por un mismo número.

Requisitos

Para el desarrollo de la tarea T1.1 Bingo, los estudiantes requieren tener conocimiento de divisiones y multiplicaciones con números naturales, conocer las partes de la división, identificar el residuo en la división y contar de n en n .

Aportes de la tarea al objetivo 1

Los estudiantes deben identificar los residuos de divisiones y compararlos para identificar cuáles son iguales. Pretendemos que al culminar la tarea T1.1 Bingo, los estudiantes diferencien las divisiones de residuo cero (división exacta) de las divisiones con otros residuos (división inexacta). Por lo tanto, los estudiantes pueden identificar si estos números son divisores o no. Esperamos que los estudiantes puedan valorar la utilidad de los residuos obtenidos de varias divisiones para conocer y resolver un problema planteado. Asimismo, pretendemos incrementar el interés por representar un problema al emplear el algoritmo de la división.

Conceptos y procedimientos

La tarea T1.1 Bingo involucra la realización de divisiones por medio de diferentes tipos de representaciones. En el desarrollo de esta tarea, también se involucra la comparación de los residuos de diferentes divisiones. Los procedimientos que pueden realizar los estudiantes son dibujar la cantidad que van a dividir y realizar grupos de la cantidad que indica el divisor del número, para encontrar el residuo. También se puede contar de n en n para encontrar el residuo. Los estudiantes pueden utilizar el algoritmo de la división para calcular el residuo.

Sistemas de representación

Para representar la solución de la tarea T1.1 Bingo, los estudiantes pueden optar por el sistema de representación pictórico, pues pueden hacer agrupamientos para encontrar los residuos. Otro sistema de representación que pueden usar es el numérico, pues se puede realizar un conjunto al contar de n en n para encontrar el residuo. El último sistema de representación que se puede utilizar es el simbólico al utilizar el algoritmo de la división para realizar la división y encontrar el residuo.

Contexto PISA en los que se sitúa la tarea

La tarea T1.1 Bingo está enmarcada en el contexto personal del marco conceptual de PISA 2012, pues al ser en forma de juego se practica generalmente de manera individual. Personalmente, se define si se quiere jugar o no, de tal manera que es algo personal.

Materiales y recursos

Los materiales y recursos para realizar la tarea T1.1 Bingo son los siguientes: hoja en blanco para las operaciones, balotas numeradas del 1 al 30, un recipiente para depositar las balotas, 16 fichas para cubrir los números de cada cartón, cartones de bingo con 16 números, premios que quedan a consideración del profesor y la lista de las afirmaciones.

Formulación

Para realizar la tarea deben reunirse en parejas. Es importante que, en una hoja marcada con los nombres de los dos, tomen nota del paso a paso que realicen durante toda la actividad. El profesor les entregará un cartón de bingo con 16 números y 16 círculos con los deben cubrir los números que cumplen con las condiciones mencionadas por el profesor al sacar cada balota. Las instrucciones del concurso son las siguientes.

1. El profesor sacará una balota y leerá una afirmación. El grupo debe realizar los procedimientos necesarios para saber qué números deben tapar en su cartón.
2. Se repetirá la instrucción anterior hasta cubrir todos los números del cartón. Si alguna pareja logra cubrir todo el cartón antes que las demás parejas, debe decir ¡Bingo!

Por ejemplo, el profesor saca la balota 4 y lee la afirmación correspondiente a este número que es: “Cubre los números que no sean divisibles por 3y que al dividirse por 3 su residuo sea 1”. Cada grupo revisa los números que tiene y encuentra para cuáles, al ser divididos entre tres, el residuo es 1.

Agrupación e interacción

Esta actividad se realizará en equipos de 2 estudiantes. La interacción se presenta entre el profesor y los estudiantes, cuando el profesor expone la tarea y resuelve dudas al ofrecer las ayudas correspondientes. También hay interacción entre dos estudiantes cuando realizan los procedimientos necesarios para saber qué números cubrir. Otra interacción que se presenta es entre los estudiantes y el profesor cuando los estudiantes pregunten al profesor sobre sus inquietudes o proponen diferentes alternativas de solución. Esto puede suceder durante todo el desarrollo de la tarea.

Temporalidad

La realización de la tarea T1.1 Bingo será por etapas. En la primera etapa, el profesor entrega los cartones a cada estudiante y explica las reglas del juego (10 minutos). En la segunda etapa, el profesor comienza el juego y los estudiantes deben cubrir el cartón según los pasos indicados en la formulación (60 minutos). Al completar el bingo, los estudiantes deben decir al profesor (en voz baja) los números que tiene su cartón para comprobar que están bien, y si es así, reciben un premio.

Errores y ayudas

Cuando los estudiantes se enfrentan al desarrollo de la tarea T1.1 Bingo, es posible que incurran en errores que les impidan realizar algún procedimiento de manera adecuada o incluso que no le permita encontrar una solución a la tarea de aprendizaje. El profesor puede intervenir en el momento en que se implementa la tarea para brindar ayudas a los estudiantes y así puedan superar sus errores. En el desarrollo de esta tarea, identificamos que los estudiantes pueden incurrir en errores como no obtener correctamente la cantidad sobrante o no establecer que existen números distintos que poseen la misma cantidad sobrante al dividirse en otro número. El profesor puede brindar una ayuda, indicándole a los estudiantes que pueden recordar explorar la tabla del número por el cual se desea hacer la división. Presentamos las ayudas para esta tarea en la tabla 2 del anexo 3.

Grafo de criterios de logro de la tarea

En la figura 8, presentamos el grafo de criterios de logro del objetivo 1. Los criterios de logro que aparecen resaltados muestran las estrategias o caminos de solución que los estudiantes pueden tomar para resolver la tarea T1.1 Bingo.

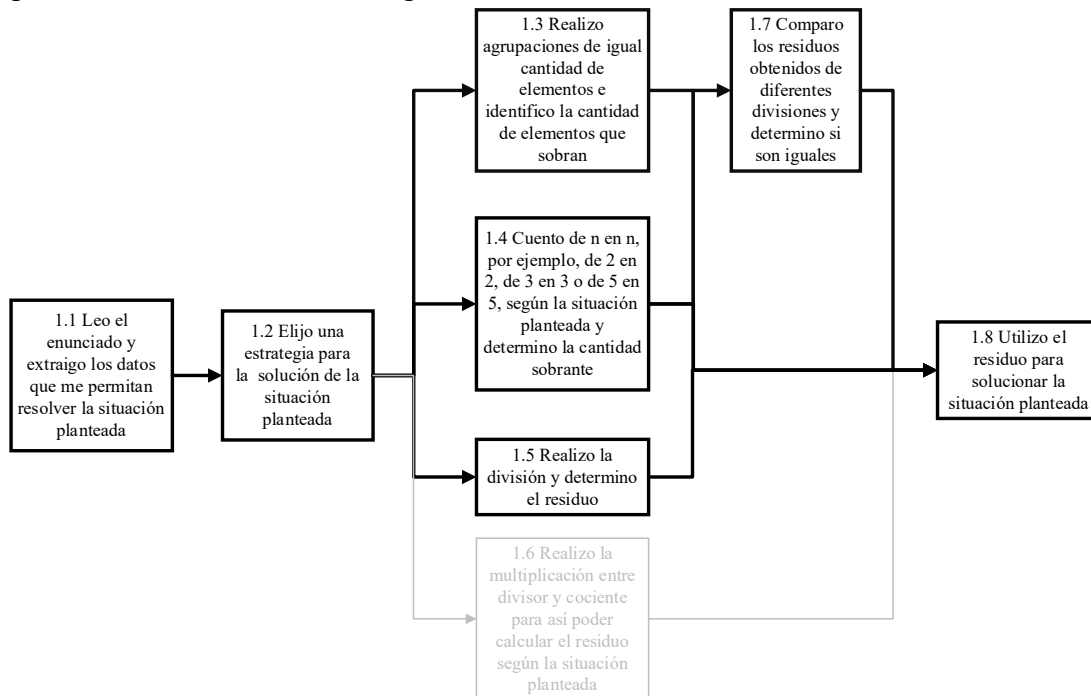


Figura 8. Grafo de criterios de logro de la tarea T1.1 Bingo

Para resolver la tarea, los estudiantes leen el enunciado e identifican los datos que les permitan resolver la situación. Luego pueden elegir entre realizar agrupaciones, contar de n en n y realizar la división. Después de seleccionar el procedimiento y establecer la cantidad sobrante, los estudiantes comparan los residuos obtenidos. Finalmente, establecen si la respuesta obtenida da solución a la situación planteada.

Actuación del profesor

Sugerimos que el profesor presente a los estudiantes el cartón de bingo como la herramienta a utilizar y la forma en que se va a ejecutar el cubrimiento de cada número, para así procurar que esta se haga correctamente. Además, se sugiere hacer un seguimiento a los diferentes procedimientos para identificar los errores en los que los estudiantes incurren y así poder brindar la ayuda adecuada. Luego de encontrar la solución a alguna afirmación indicada en el juego, es importante que se realice una puesta en común para que cada grupo de estudiantes pueda valorar e identificar diferentes opciones de solución de la siguiente afirmación que surja de la balota extraída.

Sugerencia metodológica

Durante la aplicación de la tarea T1.1 Bingo, el profesor debe estar al tanto de cada paso que realicen los grupos de estudiantes, con el fin de establecer si comprendieron adecuadamente las instrucciones de la tarea. El profesor debe verificar que la forma de encontrar la cantidad sobrante es la correcta. El profesor también debe estar al tanto del registro de la producción escrita de cada grupo, algo que es solicitado en el planteamiento de la tarea, ya que este es el recurso para valorar más adelante el logro del objetivo. Por último, sugerimos que el profesor realice una puesta en común sobre la manera en que cada grupo llevó a cabo el desarrollo de la tarea, con el fin de identificar el tipo de soluciones obtenidas por los grupos; por ejemplo, qué grupo emplea el algoritmo de la división, cuál cuenta de n en n y cuál simplemente verifica la tabla del divisor para determinar la cantidad sobrante (residuo).

Evaluación de la tarea

Los productos de la tarea T1.1 Bingo son el cartón cubierto en su totalidad y la hoja con los procedimientos realizados por los estudiantes. A partir de lo expuesto en estas hojas, el profesor puede identificar los errores más frecuentes en los que incurrieron los estudiantes e incluso determinar si estos errores explican que no pudieron terminar con éxito la tarea. De igual manera, el profesor puede asignar una valoración cuantitativa.

2.2. Tarea T1.2 Ángulos

El objetivo de la tarea T1.2 Ángulos es que los estudiantes desarrollen la capacidad de identificar el residuo en una operación y relacionarlo con el contexto de la tarea. Queremos que puedan determinar cuántas vueltas completas (360°) contiene un ángulo específico y establecer una correlación con el cociente resultante. Además, pretendemos que reconozcan la importancia de calcular el residuo para encontrar el ángulo coterminal deseado; es decir, que comprendan que el residuo calculado en la división es el ángulo coterminal correspondiente al ángulo dado. Esta tarea les permitirá comparar residuos de divisiones y aplicar esta habilidad de manera efectiva en el contexto de los ángulos coterminales.

Requisitos

Para llevar a cabo la tarea T1.2 Ángulos, los estudiantes deben emplear sus conocimientos previos sobre la multiplicación y la división de números naturales. De igual manera, necesitan identificar los elementos de la división, en particular, el residuo. Además, deben poseer la habilidad de contar

de n en n y relacionar el lenguaje cotidiano con las operaciones matemáticas. Requieren comprender cómo se miden los ángulos al utilizar el transportador y entender el concepto de ángulo coterminal.

Aportes de la tarea al objetivo 1

Con esta tarea, esperamos que los estudiantes identifiquen los elementos de la división (divisor, dividendo, cociente, residuo) en una situación en contexto. De esta manera, esperamos que evalúen la utilidad de los residuos resultantes de divisiones como una herramienta para comprender y resolver un problema planteado.

Formulación

Para realizar la tarea, deben reunirse en parejas. Uno de los dos integrantes será el líder del equipo. Es importante que, en una hoja marcada con los nombres de los dos, vayan tomando nota del paso a paso que realicen durante toda la actividad. El profesor les entregará cinco círculos en cartulina. Deben usar uno para cada ejercicio propuesto. Las instrucciones del concurso son las siguientes.

1. Para el ángulo que escriba el profesor en el tablero, encuentren el ángulo coterminal menor de 360° . Con ayuda del transportador dibújenlo en uno de los círculos de cartulina que les entregó el profesor e indiquen cuántas veces completaron la circunferencia para encontrar el ángulo coterminal.
2. El profesor recibirá los resultados obtenidos por los diez primeros equipos que entreguen en cada ejercicio. Si el resultado es correcto el equipo recibirá veinte puntos.
3. Al finalizar la actividad, el profesor recogerá los círculos de todos los equipos y, por cada ejercicio solucionado correctamente, otorgará una puntuación de diez, si no recibió puntos en el concurso.
4. El profesor realizará retroalimentación para cada punto en el tablero.

Tabla 7

Listado de ángulos a aplicar en la tarea T1.2 Ángulos

1.	1470
2.	750
3.	1520
4.	390
5.	2910

Conceptos y procedimientos

En el desarrollo de la tarea T1.2 Ángulos, se involucran conceptos como los elementos de la división y se relaciona el residuo de divisiones con el concepto de ángulo coterminal. Esta tarea implica

procedimientos que permiten calcular el residuo de una división. Este procedimiento puede ser llevado a cabo con los diferentes sistemas de representación que describiremos a continuación.

Sistemas de representación

Para solucionar la tarea T1.2 Ángulos, los estudiantes pueden utilizar uno de cuatro sistemas de representación. El sistema de representación simbólico se emplea cuando los estudiantes aplican el algoritmo de la división ($D = d * c + r$) ($r = D - d * c$) para calcular el residuo, al restar el producto del divisor y el cociente al dividendo. En este caso, el dividendo representa el ángulo indicado por el profesor, el divisor es de 360° y el residuo es el ángulo cotermino. El sistema de representación numérico se aplica cuando los estudiantes cuentan de n en n ; en este caso, cuentan de 360° en 360° . El sistema de representación gráfico se utiliza cuando los estudiantes dibujan una espiral que indica las vueltas completas que dan hasta encontrar el ángulo cotermino. El sistema de representación ejecutable se aplica cuando los estudiantes utilizan la herramienta digital de su preferencia, como WolframAlpha o GeoGebra, para encontrar el residuo (ángulo cotermino).

Contextos PISA en los que se sitúa la tarea

La tarea T1.2 Ángulos está en marcada en el contexto científico según el marco conceptual PISA 2012: “Los contextos concretos podrían incluir (pero no limitarse a) áreas como la meteorología o el clima, la ecología, la medicina, las ciencias espaciales, la genética, las mediciones y el propio mundo de las matemáticas.” (Ministerio de Educación, 2013, pág. 24). La tarea T1.2 implica el cálculo del ángulo cotermino a partir de un ángulo dado. Los estudiantes deben determinar el residuo al dividir el ángulo proporcionado por el profesor entre 360° , que representa una vuelta completa. El residuo obtenido en la división realizada corresponde al ángulo cotermino buscado.

Materiales y recursos

Los materiales requeridos por los estudiantes para el desarrollo de la tarea T1.2 Ángulos son cinco círculos en cartulina con un plano cartesiano dibujado, transportador, calculadora o aplicación matemática y una hoja para operaciones.

Agrupamiento e interacciones

Inicialmente, el profesor interactúa con los estudiantes para indicar que deben agruparse en parejas. El profesor presentará a los estudiantes cada ángulo que deben realizar en los círculos. El profesor revisa cada ejercicio de la tarea y asigna los puntos a los estudiantes. Los estudiantes interactúan en parejas cuando hacen los cálculos necesarios para determinar el residuo (ángulo cotermino). Los estudiantes interactúan en gran grupo cuando comparten con todos los demás grupos las soluciones obtenidas.

Temporalidad de la tarea

Inicialmente, se agrupan los estudiantes (5 minutos), el profesor presenta la tarea y explica la forma de trabajo (10 minutos). Después, los estudiantes resuelven cada ángulo presentado por el profesor (10 minutos por ejercicio). Finalmente, el profesor realiza una retroalimentación del proceso de obtención de los ángulos coterminales (15 minutos).

Errores y ayudas

En el desarrollo de la tarea T1.2 Ángulos, es probable que los grupos de estudiantes incurran en alguno de los errores previstos. Por ejemplo, es posible que los estudiantes dividan la cantidad dada en grupos de diferente cardinal al utilizar sistema de representación pictórico. Para esto, el profesor puede solicitar a los estudiantes que muestren, en el círculo, si las vueltas que hicieron están completas y son del mismo tamaño; es decir, de 360° . De esta manera, el profesor puede brindar las ayudas correspondientes para que los estudiantes superen las dificultades que se presenten en esta tarea. En la tabla 4 del anexo 3, presentamos las ayudas completas para esta tarea.

Grafo de criterios de logro de la tarea

En la figura 9, presentamos el grafo de criterios de logro del objetivo 1. Los criterios de logro que aparecen resaltados muestran las estrategias o caminos de solución que los estudiantes pueden tomar para resolver la tarea T1.2 Ángulos.

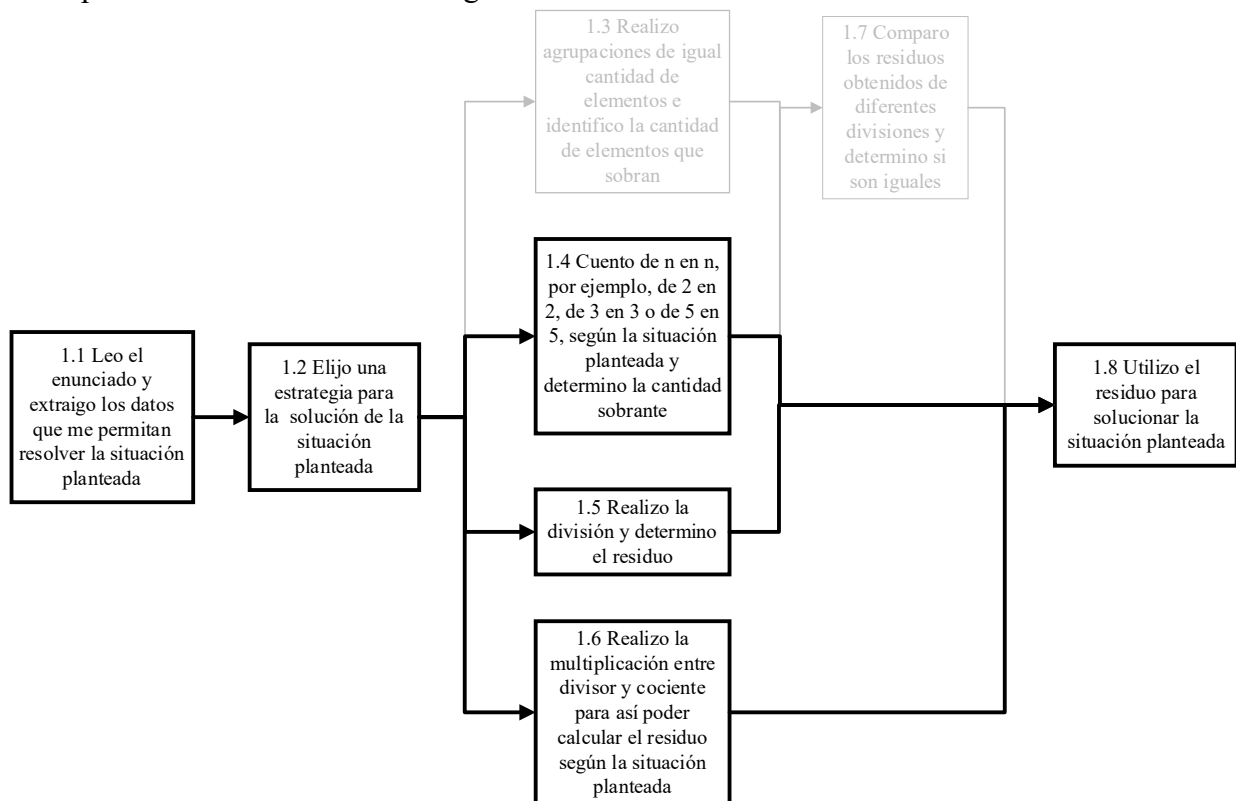


Figura 9. Grafo de criterios de logro tarea T1.2 Ángulos

Para resolver la tarea, los estudiantes leen el enunciado e identifican los datos que les permitan resolver la situación. Luego pueden elegir entre la multiplicación entre divisor y cociente; es decir, pueden multiplicar el ángulo 360° por diferentes números naturales hasta aproximarse al ángulo dado y luego determinar el ángulo que falta para llegar al cotermino. También, pueden realizar la división del ángulo dado entre 360° y así encontrar el residuo que representa el ángulo cotermino. Finalmente, pueden decidir contar de n en n , al marcar las vueltas completas que se le da al círculo

(360°), para luego establecer el ángulo faltante para llegar al cotermino. Después de seleccionar el procedimiento y establecer la cantidad sobrante, los estudiantes analizan el residuo obtenido. Finalmente, establecen si la respuesta obtenida da solución a situación planteada.

Actuación del profesor

Para esta tarea el profesor debe procurar que cada estudiante tenga claro en qué consiste la obtención de un ángulo cotermino, la manera en que se agruparán los estudiantes, y los materiales y recursos que se utilizarán. También, sugerimos hacer una ronda de prueba y así terminar de mostrar con exactitud la finalidad de la tarea. El profesor tendrá que verificar que todos los integrantes del grupo trabajen y se apoyen en la solución, para que así pueda brindar las ayudas respectivas cuando identifique que han incurrido en algún error. Al finalizar cada ronda, es importante que se realice una puesta en común para que cada grupo de estudiantes pueda tener varias opciones de solución del siguiente ángulo a representar.

Sugerencias metodológicas

Sugerimos que, para el desarrollo de esta tarea, el profesor preste mucha atención a la obtención del ángulo cotermino y en especial al procedimiento que realicen los grupos de estudiantes, con el fin de establecer si comprendieron adecuadamente las instrucciones de la tarea. El profesor debe verificar que la forma de encontrar la cantidad sobrante es la correcta. También, el profesor debe estar al tanto del registro de la producción escrita de cada grupo, solicitado en el planteamiento de la tarea y la representación de la solución, ya que este es el recurso para valorar más adelante el logro del objetivo. Por último, sugerimos que el profesor realice una puesta en común sobre la manera en que cada grupo llevó a cabo el desarrollo de la tarea, es decir, la forma que empleó para determinar el sobrante (ángulo cotermino).

Evaluación de la tarea

Para que el profesor pueda reconocer si los estudiantes alcanzaron el objetivo de la tarea puede analizar los productos de esta tarea: los diferentes círculos con la representación del ángulo cotermino y la hoja con los procedimientos realizados por los estudiantes. A partir de lo expuesto en estas hojas, el profesor puede identificar los errores más frecuentes en los que incurrieron los estudiantes e incluso determinar si, debido a estos errores, no pudieron terminar con éxito la tarea. Además de otorgar una calificación cualitativa por la participación y desarrollo de la tarea, el profesor puede evaluar cuantitativamente el alcance de la tarea frente al logro del objetivo, al establecer si los procedimientos que los grupos de estudiantes registraron son correctos.

3. TAREAS APRENDIZAJE DEL OBJETIVO 2

En este apartado, presentamos el diseño de las tareas de aprendizaje del objetivo 2 y la lista de anexos necesarios para estas tareas.

3.1. Tarea T2.1 Dulces

Con la tarea T2.1 Dulces, pretendemos que los estudiantes establezcan la divisibilidad con el concepto de divisor al reconocer que el residuo es cero.

Requisitos

Para el desarrollo de la tarea T2.1 Dulces, los estudiantes necesitan los siguientes conocimientos previos: deben contar de n en n , distinguir entre números primos y compuestos, identificar números pares e impares, llevar a cabo operaciones de multiplicación y división con números naturales, comprender los elementos de la división, calcular múltiplos de un número y sus divisores, relacionar el lenguaje cotidiano con las operaciones matemáticas, realizar agrupaciones de igual cantidad de elementos, reconocer los factores primos de un número y aplicar criterios de divisibilidad.

Aportes de la tarea al objetivo 2

Al culminar la tarea T2.1 Dulces, pretendemos que el estudiante diferencie las divisiones de residuo cero (división exacta) de las divisiones con otros residuos (división inexacta). Por lo tanto, los estudiantes pueden identificar si estos números, que hacen referencia a las agrupaciones de cantidades, son divisores o no de las cantidades de números suministradas. Nuestra intención es que, mediante el agrupamiento de cantidades, los estudiantes sean capaces de establecer la relación de ser divisor entre números naturales. Además, deseamos que los estudiantes adquieran un aprendizaje significativo sobre divisores y su aplicación en diferentes contextos. Asimismo, esperamos que los estudiantes adquieran seguridad al proponer y llevar a cabo estrategias de resolución de problemas, así como al utilizar múltiplos y divisores.

Conceptos y procedimientos

El concepto que involucra la tarea T2.1 Dulces es la realización de divisiones por medio de diferentes tipos de representaciones. De igual manera, involucra el análisis del residuo al establecer que este sea igual a cero. Así mismo, los estudiantes determinan los divisores de los números, representados para esta tarea en particular con la cantidad de dulces para distribuir en las sorpresas.

Sistemas de representación

Para representar la solución de la tarea, los estudiantes pueden optar por varios sistemas de representación. En particular, el sistema de representación ejecutable GeoGebra permite, con el comando ListaDivisores, encontrar todos los divisores que tiene un número. Otro sistema de representación que se asocia muy bien al desarrollo de la tarea es el manipulativo, pues los dulces se presentan como un material concreto muy motivador para el estudiante.

Contextos Pisa en los que se sitúa la tarea

La tarea T2.1 Dulce está enmarcada en el contexto personal, pues la situación que se plantea es construir unas sorpresas para una fiesta de disfraces. Del mismo modo, la tarea se enmarca en el contexto social, debido a que se centra en su comunidad y eventos que cotidianamente desarrollan.

Materiales y recursos

Los materiales y recursos para realizar la tarea T2.1 Dulces son los siguientes: tres bolsas de dulces, una caja con 60 bolsas para que los estudiantes tomen las que necesiten, lápiz, cuaderno y un dispositivo móvil (Celular o Tablet).

Formulación

Para desarrollar la tarea, los estudiantes deben organizarse en grupos de cuatro personas. Es importante que, en una hoja marcada con los nombres de los integrantes del grupo, registren el procedimiento empleado para la solución de la tarea.

Se va a realizar la fiesta de Halloween y se deben formar sorpresas para los invitados. Para ello, se entregan tres bolsas de diferentes tipos de dulces con distintas cantidades: Trululu aros por 30 unidades, Frunas por 20 unidades y Masmelos por 10 unidades. Con su grupo, están encargados de elaborar las sorpresas de la fiesta con los dulces entregados y distribuirlos de forma equitativa y sin que sobren dulces de ningún tipo. Para armar las sorpresas, deben tomar la cantidad de bolsas para sorpresas que consideren necesarias. Estas están ubicadas en la mesa central del salón. Ustedes deben pensar en al menos tres cantidades diferentes de invitados para la fiesta. Estas tres cantidades deben ser divisores de 30, 20 y 10, respectivamente. A partir de esto, deben determinar la cantidad de bolsas que deben tomar de la mesa. Luego, deben responder, en la hoja, la siguiente pregunta: ¿qué cantidad de dulces de cada tipo ponen en cada sorpresa? Posteriormente, deben elegir a un representante del grupo para que comunique a los demás compañeros cómo lograron saber cuántas sorpresas elaborar y cuántos dulces poner en cada una.

Agrupación e interacción

El desarrollo de la tarea se realizará en grupos de cuatro estudiantes. La interacción se presenta entre el profesor y los estudiantes, cuando el profesor expone la tarea y resuelve dudas. También hay interacción entre los estudiantes cuando realizan los procedimientos necesarios para saber la cantidad de sorpresas que deben crear. Otra interacción que se presenta es entre los estudiantes y el profesor cuando los estudiantes preguntan al profesor sobre sus inquietudes. Esta interacción se puede dar durante todo el desarrollo de la tarea.

Temporalidad

Para el desarrollo de la tarea, se deben tener presente los siguientes momentos y los tiempos asignados a cada uno de ellos. En 5 minutos, el profesor solicita a los estudiantes organizar grupos de cuatro personas. En 5 minutos, el profesor comparte con los estudiantes la formulación de la tarea. En 30 minutos, los estudiantes realizan la repartición como ellos la consideran adecuada y escriben los resultados o comentarios a medida que realizan la actividad. En 30 minutos, se hace la interacción en gran grupo: el representante designado de cada grupo hace una puesta en común sobre los resultados y los procedimientos que los estudiantes usaron para llegar a acuerdos. Finalmente, en 30 minutos, el profesor hace la retroalimentación a los estudiantes y cierra la actividad.

Errores y ayudas

En el desarrollo de la tarea T2.1 Dulces, identificamos que los estudiantes pueden incurrir en errores como desconocer la relación de divisor o descomposición factorial en situaciones relacionadas con divisibilidad de números naturales. El profesor puede brindar una ayuda al decirles a los estudiantes que usen la tabla de multiplicar del número por el cual se desea hacer la división. Presentamos las ayudas para esta tarea en la tabla 8.

Tabla 8

Descripción de las ayudas de la tarea T2.1 Dulces

E	A	Descripción
16	16	¿Esos datos son los necesarios para resolver el problema?
17	17	¿Consideras que tienes todos los datos necesarios para solucionar el problema?
18	18	¿El resultado que encontraste da respuesta a lo que solicita la tarea?
20	19	Explicame en cómo obtuviste estos resultados
25	25	Verifica tu lista de divisores.
26	26	¿Seguro que usaste todos los factores de la descomposición?
27	27	Verifica tu lista de múltiplos en el rango dado.
28	27	Verifica tu lista de múltiplos en el rango dado.
32	32	Vuelve a realizar la lectura del enunciado. ¿Qué información te está solicitando la tarea?
33	33	¿Qué te está solicitando el enunciado?
40	40	Realiza la verificación del algoritmo de la división
39	39	Verifica cuál función estas usando en el programa para calcular los divisores.

Nota. E = error; A = ayuda.

Grafo de criterios de logro

En la figura 10, presentamos el grafo de criterios de logro del objetivo 2. Los criterios de logro que aparecen resaltados muestran las estrategias o caminos de solución que los estudiantes pueden tomar para resolver la tarea T2.1 Dulces.

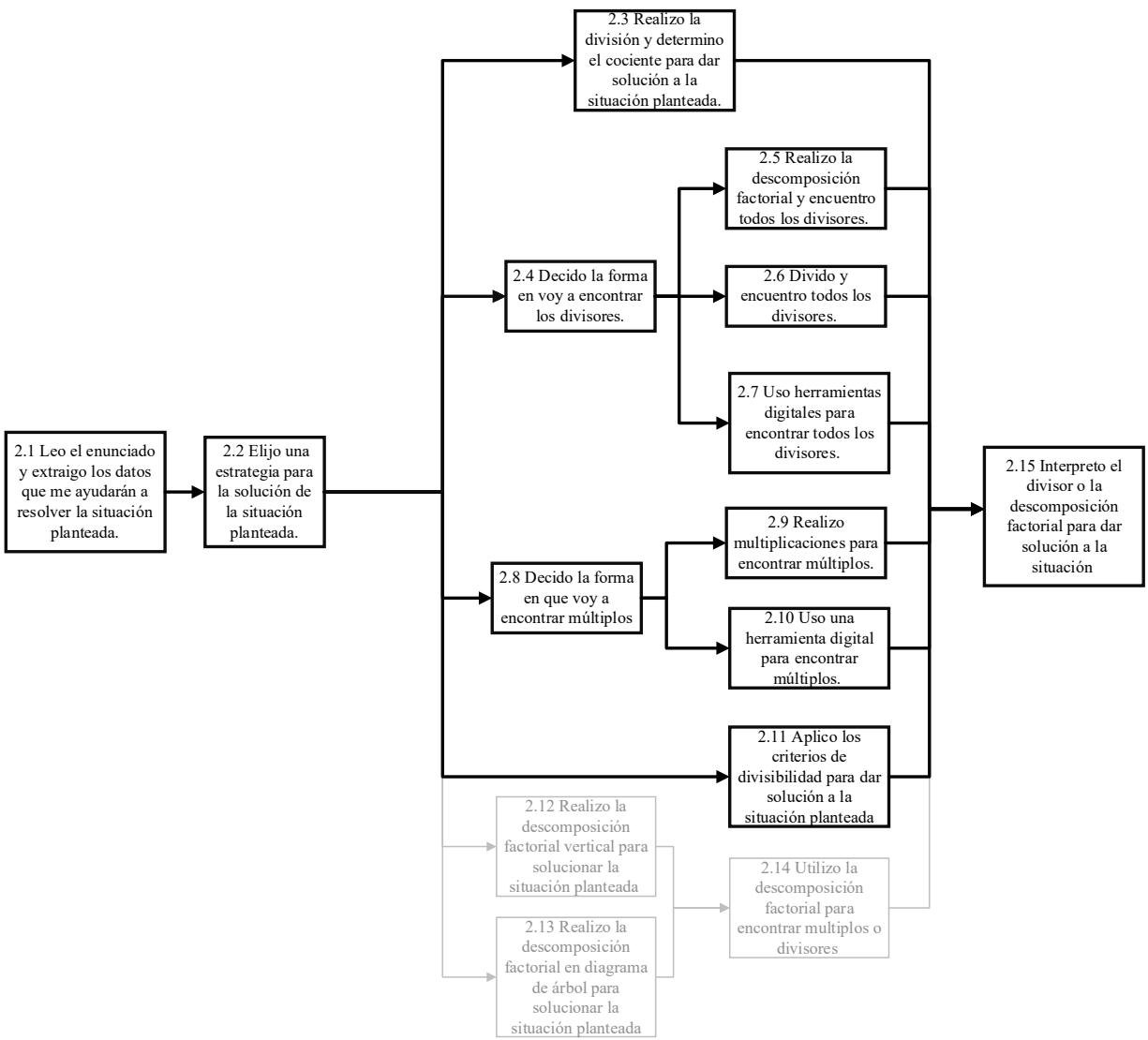


Figura 10. Grafo de criterios de logro de la tarea 2.1 Dulces

Para resolver la tarea, los estudiantes leen el enunciado e identifican los datos que les permitan resolver la situación. Luego, deben elegir la forma en que desean encontrar los divisores: usar la descomposición factorial (Criterio de logro 2.7), realizar la división (criterio de logro 2.8) o emplear una herramienta tecnológica (criterio de logro 2.9). Lo mismo sucede al encontrar los múltiplos, pero las formas de estos son realizar multiplicaciones (criterio de logro 2.11), uso de una herramienta tecnológica (criterio de logro 2.12) o al aplicar criterios de divisibilidad (criterio de logro 2.13). Finalmente, establecen si la respuesta obtenida da la solución a la situación planteada.

Actuación del profesor

Sugerimos que el profesor presente a los estudiantes la situación como un reto que los involucra. Los dulces funcionan como material concreto y las sorpresas deben cumplir con las condiciones

de no sobrar ningún dulce y que sean dulces de todos los tipos. Además, sugerimos hacer un seguimiento a los diferentes procedimientos para identificar los errores en los que los estudiantes incurren y así poder brindar la ayuda adecuada. Luego de encontrar una forma de creación de las sorpresas, es importante que se realice una puesta en común en la que el representante de cada grupo expone la solución que lo llevó a determinar la cantidad de sorpresas y la cantidad de dulces en cada una de ellas.

Sugerencias metodológicas

Durante la implementación de la tarea T2.1 Dulces, el profesor debe estar al tanto de cada paso que realicen los grupos de estudiantes, con el fin de establecer si comprendieron adecuadamente las instrucciones de la tarea. El profesor debe verificar la forma en que determinaron la cantidad de sorpresas. También, el profesor debe estar al tanto del registro de la producción escrita de cada grupo y de la forma en que realizaron el planteamiento de la tarea. Particularmente, el grupo expone la manera en la que encontraron los divisores, ya que este es el recurso para valorar más adelante el logro del objetivo. Por último, sugerimos que el profesor realice una puesta en común sobre la manera en que cada grupo llevó a cabo el desarrollo de la tarea, con el fin de conocer la manera en que se estableció la cantidad de sorpresas.

Evaluación de la tarea

El producto de esta tarea de aprendizaje es la totalidad de las sorpresas y la hoja con los procedimientos realizados por los estudiantes. A partir de lo expuesto en estas hojas, el profesor puede identificar los errores más frecuentes en los que incurrieron los estudiantes e incluso determinar, si debido a estos errores, no pudieron terminar con éxito la tarea. De igual manera, el profesor puede determinar cuáles de los procedimientos están correctos; es decir, si la forma de encontrar los divisores en realidad permitió la solución de la tarea, si se cumplió con todas las especificaciones frente a la cantidad de dulces y si la agrupación de estos en una sorpresa contiene la variedad requerida. A partir de estos procedimientos, el profesor puede asignar una valoración cualitativa y establecer cuáles fueron los sistemas de representación usados por los estudiantes.

3.2. Tarea T2.2 Mayorista

El objetivo de la tarea de aprendizaje T2.2 Mayorista es que los estudiantes calculen los divisores de un número mediante diversas técnicas, incluida la descomposición factorial. Esperamos que los estudiantes establezcan conexiones entre los divisores de un número y la resolución de problemas. Deseamos que los estudiantes puedan determinar de cuántas maneras diferentes pueden cortar tres rollos de tela al utilizar los divisores de la longitud de los rollos y que establezcan cuál es la mayor cantidad de trozos que se pueden obtener del mismo color. Asimismo, pretendemos que adquieran confianza al proponer y llevar a cabo estrategias para la solución de problemas en los que utilicen divisores.

Requisitos

Para poder desarrollar la tarea T2.2 Mayorista, los estudiantes deben relacionar conceptos previos, como identificar números pares o impares; realizar multiplicación y división de números naturales; conocer los elementos de la división; contar de n en n ; calcular los múltiplos de un número; calcular

los divisores de un número; asociar el lenguaje cotidiano con la operación; reconocer los factores primos de un número; y medir longitudes con una regla.

Aportes de la tarea al objetivo 2

Con la tarea T2.2 Mayorista, esperamos que los estudiantes utilicen diferentes técnicas para encontrar los divisores de un número natural. Dentro de estas técnicas, esperamos que utilicen la descomposición factorial. Finalmente, que relacionen los divisores encontrados con la solución al problema planteado.

Conceptos y procedimientos

En el desarrollo de la tarea T2.2 Mayorista se involucran conceptos como divisor, factores primos y descomposición factorial. En esta tarea, se pueden utilizar procedimientos que permiten calcular los divisores de un número natural por medio de los diferentes sistemas de representación que describimos a continuación.

Sistemas de representación

Para solucionar la tarea T2.2 Mayorista, los estudiantes pueden usar diferentes sistemas de representación. El sistema de representación simbólico se emplea cuando los estudiantes aplican el algoritmo de la división ($D = d * c + r$). Cuando el residuo es cero ($c = \frac{D}{d}$), dividen el dividendo entre el divisor para calcular el cociente. El sistema de representación pictórico se utiliza cuando los estudiantes realizan la descomposición factorial vertical o en diagrama de árbol para encontrar los divisores. El sistema de representación ejecutable se utiliza cuando los estudiantes encuentran los divisores de un número con ayuda de una herramienta digital.

Contexto PISA en los que sitúa la tarea

La tarea de aprendizaje T2.2 Mayorista se ubica en un contexto personal, pues la cuestión que plantea es de qué maneras se pueden cortar las telas para cumplir los requerimientos del comprador interesado. Según el marco conceptual PISA 2012, “Los tipos de contexto que pueden considerarse personales incluyen (pero no se limitan a) aquellos que implican la preparación de los alimentos, las compras, los juegos, la salud personal, el transporte personal, los deportes, los viajes, la planificación personal y las propias finanzas” (Ministerio de Educación, 2013).

Materiales y recursos

Para esta tarea, se requiere diez cuerdas de cada color (verde 36 cm, roja 23cm y amarilla 15 cm), regla, tijeras punta roma, lápiz o esfero, cuaderno y un dispositivo móvil (Celular o Tablet).

Formulación

Para realizar la tarea, deben reunirse en equipos de 4 estudiantes. Es importante que, en una hoja marcada con los nombres de los integrantes, tomen nota del paso a paso que realicen durante toda la actividad.

Un almacén de telas tiene tres rollos de tela que hace mucho no salen para la venta. Estos tres rollos son de color verde, rojo y amarillo. Los rollos tienen largo de 36m, 23m y 15m, respectivamente. Un cliente mayorista va a comprar toda la tela de esos tres rollos con las siguientes condiciones:

- ◆ El cliente requiere que la tela sea cortada.
- ◆ Los trozos de cada color deben ser del mismo largo, pero los trozos de diferente color pueden ser de diferente largo.
- ◆ Los trozos de cada color deben ser la mayor cantidad posible.
- ◆ La longitud en metros de los trozos resultantes deben ser un número natural mayor que 1.
- ◆ El dueño del almacén accede, pero no sabe de qué largo deben ser los trozos de tela resultantes.

Junto con tu equipo de trabajo, ayuden al dueño del almacén a vender la tela. Para simular el proceso de cortado de las telas, utilicen los trozos de cuerda, la regla y las tijeras que fueron entregadas por el profesor a cada grupo, y así responder las siguientes preguntas.

- ◆ ¿De qué maneras se puede cortar la tela de color verde?
- ◆ ¿De qué maneras se puede cortar la tela de color rojo?
- ◆ ¿De qué maneras se puede cortar la tela de color amarillo?
- ◆ ¿De qué color son la mayor cantidad de trozos y por qué?

Agrupación e interacción

Los estudiantes se organizarán en equipos de cuatro personas. Cada equipo designa a un escritor responsable de tomar apuntes. En conjunto, cada equipo consensuará los datos relevantes que irán en la hoja de trabajo. Al concluir la actividad, un representante de cada equipo compartirá los resultados y los procedimientos empleados. Bajo la guía del profesor, se registrarán en el tablero las similitudes y diferencias entre los métodos utilizados por los equipos, para llegar a acuerdos y generalizaciones. Posteriormente, con la colaboración de los estudiantes, el profesor formalizará los acuerdos sobre las diferentes formas de encontrar los divisores de un número.

Temporalidad

Los estudiantes inicialmente se ubican en los equipos de trabajo (5 minutos). El profesor presenta la tarea y explica la forma de trabajo (10 minutos). Los estudiantes resuelven la tarea (35 minutos). Un estudiante por grupo comunica los pasos que los llevaron a la solución de la tarea (15 minutos). Finalmente, el profesor y los estudiantes construyen los acuerdos sobre las diferentes formas de encontrar los divisores (10 minutos).

Errores y ayudas

Al tratar de resolver la tarea T2.2 Mayorista, los estudiantes podrían incurrir en diferentes errores. Por ejemplo, podrían equivocarse al calcular el cociente deseado al seleccionar datos inadecuados de la información proporcionada en la tarea. En ese caso, el profesor pedirá al estudiante que haya

incurrido en ese error que explique por qué eligió esos datos para realizar la división, para ayudarlo a identificar su error. Otro error en el que los estudiantes pueden incurrir es la omisión de algún divisor del número al que le buscan los divisores. En este caso, el profesor solicitará al estudiante revisar la lista de divisores encontrados. El propósito de estas ayudas es que los estudiantes puedan darse cuenta de sus errores y corregirlos por sí mismos. El listado de errores y dificultades se encuentra en el anexo 3.

Grafo de criterios de logro

En la figura 2, mostramos el grafo de criterios de logro del objetivo 2. Dentro de este grafo, destacamos los criterios de logro que el estudiante puede activar al resolver la tarea de aprendizaje T2.2 Mayorista. En primer lugar, los estudiantes deben identificar los datos que consideran relevantes para resolver la tarea. A continuación, los estudiantes deben decidir si encontrarán los divisores del número mediante la descomposición factorial u otro método. En el caso de optar por la descomposición factorial, pueden realizarla por medio de la descomposición vertical o mediante un diagrama de árbol. Si eligen encontrar los divisores por otros métodos, pueden recurrir al algoritmo de la división o incluso utilizar una herramienta digital. También pueden identificar divisores con los criterios de divisibilidad. Finalmente, los estudiantes deben relacionar los resultados encontrados con la solución de la situación planteada.

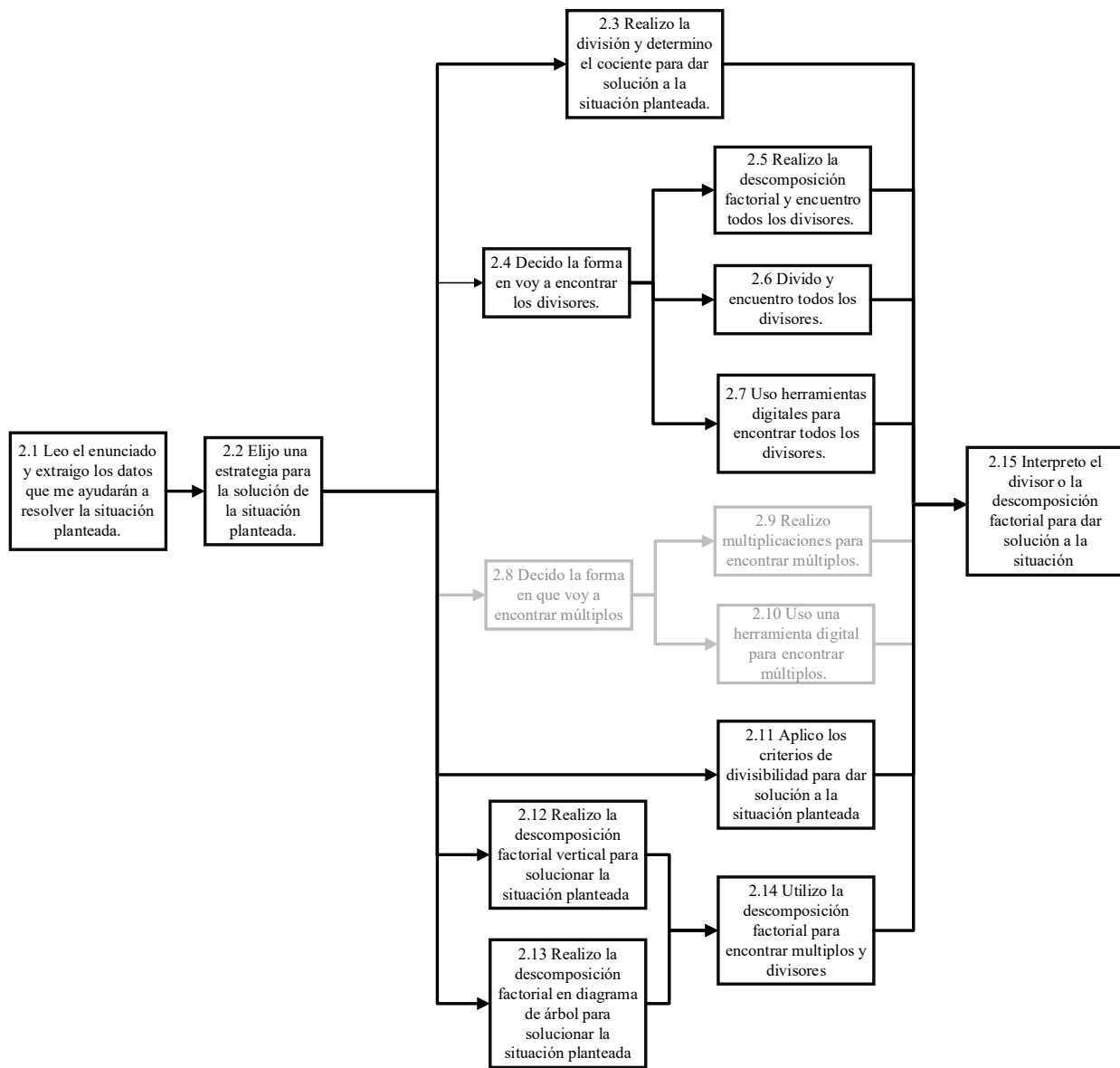


Figura 11. Grafos de criterios de logro de la tarea 2.2 Mayorista

Actuación del profesor

En la implementación de la tarea de aprendizaje T2.2 Mayorista, el profesor debe incentivar a los estudiantes para que cada grupo trabaje en equipo. Una forma de motivarlos es preguntar individualmente cómo creen que deberían resolver la tarea y qué procedimientos pueden usar. El profesor debe alentar a los estudiantes a expresar sus ideas y escuchar las de los demás para que puedan llegar a acuerdos que les ayuden a resolver la tarea. Es imperativo que el profesor celebre los logros de los equipos que resuelvan correctamente cada ejercicio en el tiempo establecido. Los estudiantes se percatarán de que el rollo de tela de 23m solo puede ser cortado en trozos de 1m o en un solo

trozo de 23m. Es muy posible que realicen preguntas sobre ese trozo de tela en particular. Entonces, el profesor les puede decir que verifiquen la descomposición factorial de las longitudes de los rollos de tela. El profesor supervisa los procedimientos de los equipos, identifica errores, brinda asistencia, revisa los resultados y ayuda a consolidar distintas formas de encontrar divisores después de las presentaciones de los equipos.

Sugerencias metodológicas

Recomendamos que el profesor desempeñe un papel de moderador para el buen trabajo de los equipos. Proponemos que el profesor indique a los estudiantes que, antes de cortar las telas (tiras de cuerda), midan con precisión con la regla y verifiquen las condiciones. Asimismo, si incurren en errores al cortar, les puede indicar que lo intenten nuevamente, ya que, en el material entregado, hay suficiente material de sobra. Es importante que el profesor verifique que los cortes que vayan a realizar los estudiantes sean decididos por procedimientos matemáticos que hayan realizado y que estos procedimientos estén evidenciados en la hoja correspondiente. Si los estudiantes realizan cortes erróneos, el profesor les puede ayudar a superar sus errores procedimentales haciendo uso de las herramientas de ayuda disponibles en el anexo 3, para garantizar así la comprensión del uso y cálculo de los divisores. Por último, después de que todos los equipos hayan terminado y entregado, el profesor deberá orientar a los estudiantes en la concreción de la solución de la tarea y en las posibles formas de resolverla a partir de los procedimientos que utilizaron los grupos.

Evaluación de la tarea

El producto final de la tarea de aprendizaje T2.2 Mayorista son las tiras de colores que se recortan de acuerdo con los divisores de la longitud de cada tela, así como los procedimientos registrados en las hojas de tarea. A partir de los segmentos de cuerda y los procedimientos registrados por los equipos, es necesario identificar los procedimientos más frecuentemente utilizados, los errores más comunes y los procedimientos que se llevaron a cabo correctamente. El profesor verificará que los estudiantes hayan cortado la tela a partir de los divisores, al asegurarse de que cada color de tela representado con la cuerda esté cortado de acuerdo con todas las posibilidades. El profesor comprobará que los cortes realizados por los estudiantes coincidan con lo registrado en las hojas de procedimientos. Esta información será utilizada para evaluar la tarea. Una vez completada esta fase y la concreción de la parte final de la tarea, se planeará una retroalimentación por parte del profesor.

4. EXAMEN FINAL

En este apartado, presentamos el examen final de la unidad didáctica (ver anexo 5). El examen final está dividido en dos partes. Cada parte evalúa un objetivo. Proponemos en el examen final ocho actividades. Las primeras tres actividades evalúan el primer objetivo y las cinco últimas el segundo objetivo. Los estudiantes deben desarrollar el examen final de manera individual en una sesión de 60 minutos. A continuación, presentamos el diseño del examen final para la unidad didáctica de divisibilidad de números naturales.

4.1. Actividades primera parte

En este apartado, presentamos la primera parte del examen final. Con estas actividades, evaluamos el primer objetivo de aprendizaje.

Actividad 1

Llena la tabla con la información solicitada.

Número	Residuo al dividir 2
25	
16	
23	
47	
64	

De acuerdo con la tabla anterior, escribe los números que tiene el mismo residuo al dividir por 2.

Número	Residuo al dividir 3
25	
16	
23	
47	
64	

De acuerdo con la tabla anterior, escribe los números que tiene el mismo residuo al dividir por 3.

Número	Residuo al dividir 3
25	
16	
23	
47	
64	

De acuerdo con la tabla anterior, escribe los números que tiene el mismo residuo al dividir por 3.

Número	Residuo al dividir 5
25	
16	
23	
47	
64	

De acuerdo con la tabla anterior relaciona los números que tienen el mismo residuo al dividir por 5.

Actividad 2

Con base en la siguiente imagen responde las preguntas.



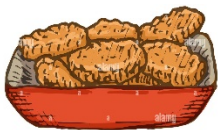
Realiza grupos de 7 naranjas ¿Cuántos grupos encontraste? ¿cuántas naranjas sobran?

Realiza grupos de 5 naranjas ¿Cuántos grupos encontraste? ¿cuántas naranjas sobran?

Realiza grupos de 3 naranjas ¿Cuántos grupos encontraste? ¿cuántas naranjas sobran?

Actividad 3

Rafa ha hecho 40 Nuggets para él y sus amigos.



- Si llegan 7 amigos y no se desean cortar los Nuggets, ¿puede repartirlos en cantidades iguales entre las 8 personas sin que sobre alguno? ¿Cuántos le corresponden a cada persona?
- Si llegan 8 amigos, ¿puede repartirlos en cantidades iguales entre las 9 personas sin que sobre alguno? Recuerda que no se pueden cortar los Nuggets. ¿Cuántos le corresponden a cada persona?

4.2. Actividad segunda parte

En este apartado, presentamos la segunda parte del examen final. Con estas actividades, evaluamos el segundo objetivo de aprendizaje.

Actividad 1

De los siguientes números, indica cuáles son compuestos y cuáles primos.

111	205
200	301
603	552

Actividad 2

Encuentra los divisores de los siguientes números 7, 23, 29 y 31. Compara los divisores, ¿qué puedes concluir?

Actividad 3

En la siguiente tabla, están escritos los números del 2 al 50. Sigue estos pasos.

- Encierra en un círculo el número 2 y, desde él, cuenta de 2 en 2 y tacha los múltiplos de 2.
- Encierra en un círculo el número 3 y desde él, cuenta de 3 en 3 y tacha los múltiplos de 3 que no hayan sido tachados en el paso anterior.
- Realiza el mismo procedimiento con los siguientes números que no han sido tachados. Al finalizar lista los números que quedaron encerrados y escribe cuantos divisores tienen estos números.

2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43
44	45	46	47	48	49	50

Actividad 4

Julián tiene 52 soldados de juguete ¿De cuántas formas diferentes puedes organizar en filas y columnas a todos los soldados? Ten en cuenta que todas las filas deben tener la misma cantidad de soldados.



Pregunta 5:

Pedro tiene 48 chocolates y quiere repartirlas en bolsitas que tengan el mismo número, pero no quiere hacer 48 bolsitas con un chocolate ni una bolsa con 48 chocolates ¿Cuáles opciones tiene?

4.3. Rúbrica del examen

Proponemos una rúbrica del examen final. Este instrumento tiene como propósito ayudar al profesor en la clasificación cualitativa de los estudiantes según su nivel de desempeño. En la tabla 9, mostramos la rúbrica de cada parte del examen. En la primera columna, tenemos los niveles de desempeño (Superior, Alto, Básico, Regular y Bajo) que son los niveles que la institución educativa contempla en el sistema de evaluación. En la segunda columna, ubicamos los indicadores y en la tercera columna los puntos que tendría cada nivel de desempeño.

Tabla 9

Niveles de desempeño e indicadores para el objetivo 1

Nivel de desempeño		
Objetivo 1		
Superior	El estudiante lee el enunciado y extrae los datos que necesita. Elige una estrategia y calcula el residuo para relacionarlo con la situación planteada. No incurre en errores que le impiden llegar hasta el final.	13,5 – 15
Alto	El estudiante lee el enunciado y elige una estrategia: realiza agrupaciones de igual cantidad de elementos; cuenta de n en n; realiza la división de forma aritmética; y realiza la multiplicación entre divisor y cociente. Con alguna de esas estrategias, calcula el residuo. Sin embargo, no relaciona el residuo con la solución de la situación planteada (E15).	12 - 13,4

Tabla 9

Niveles de desempeño e indicadores para el objetivo 1

Básico	El estudiante lee el enunciado y extrae los datos que necesita para solucionar la situación planteada. Sin embargo, al realizar la operación de la estrategia seleccionada, el resultado es incorrecto. (E13, E14, E35, E36, E37, E20, E5, E19).	9 - 11,9
Regular	El estudiante realiza la lectura del enunciado. Extrae solo algunos de los datos que necesita para solucionar la tarea y relaciona estos datos con el contexto de la tarea. (E17 y E32). El estudiante lee el enunciado y extrae los datos que necesita para solucionar la situación planteada. Sin embargo, confunde las partes de la división. (p. ej., confunde el cociente con el residuo) (E1, E2, E3 y E4).	6 - 8,9
Bajo	El estudiante extrae solo algunos de los datos que necesita para solucionar la tarea. No relaciona los datos extraídos con el contexto de la tarea, y esto no le permite elegir una estrategia para abordar la situación problema (E16, E17 y E32).	3 - 5,9
Objetivo 2		
Superior	El estudiante lee el enunciado y extrae los datos que necesita. Elige una de las siguientes estrategias de solución: halla divisores; halla múltiplos; y descompone en factores primos. Realiza los cálculos de la estrategia seleccionada sin incurrir en errores de cálculo. Interpreta el resultado y soluciona la situación planteada. Puede incurrir en errores que no le impiden llegar al final.	31,5 – 35
Alto	El estudiante lee el enunciado y extrae los datos que necesita. Elige una de las siguientes estrategias de solución: halla divisores, halla múltiplos y descompone en factores primos. Realiza los cálculos de la estrategia seleccionada sin incurrir en errores de cálculo. Sin embargo, no relaciona el resultado con la solución de la tarea (E18).	28 - 31,4
Básico	El estudiante lee el enunciado y extrae los datos. Elige una de las siguientes estrategias de solución: halla divisores, halla múltiplos y descompone en factores primos. Pero, al realizar la operación de la estrategia seleccionada, el resultado es incorrecto (E21, E1, E2, E3, E33, E26, E25, E40, E43, E28, E27, E48, E11, E9, E23, E24, E6, E7, E8, E31 o E22).	21 - 27,9

Tabla 9

Niveles de desempeño e indicadores para el objetivo 1

Regular	<p>El estudiante realiza la lectura del enunciado. Extrae los datos que necesita para solucionar la tarea de manera incompleta y relaciona estos datos con el contexto de la tarea. (E17 y E32).</p> <p>El estudiante lee el enunciado y extrae los datos que necesita para solucionar la situación planteada. Calcular un resultado diferente al cociente e incluir más o menos divisores en la descomposición factorial (E12, E19, E20, E29, E30).</p>	14 - 20,9
Bajo	<p>El estudiante extrae solo algunos de los datos que necesita para solucionar la tarea. No relaciona con el contexto estos datos. No puede elegir una estrategia para abordar la situación problema (E16, E17 y E32).</p>	7 - 13,9

4. CONCLUSIONES

La información presentada en esta unidad didáctica es el resultado del análisis de todos los aspectos que consideramos que pueden influir en el proceso de enseñanza y aprendizaje del tema de divisibilidad de números naturales.

Elegimos este tema por su aplicación en la solución de múltiples situaciones de la vida cotidiana y en los diferentes campos de la matemática; por ejemplo, la geometría, el álgebra y la aritmética. Además, el concepto de divisibilidad está vinculado con las operaciones de números naturales. Esta propuesta está fundamentada en los documentos curriculares nacionales como los estándares básicos en competencias de matemáticas (MEN, 2006) y los derechos básicos de aprendizaje (MEN, 2016), e internacionales como el marco conceptual PISA 2012 (Ministerio de Educación, 2013). La propuesta está alineada con el plan de área de la institución educativa Mayor de Mosquera.

Comenzamos por realizar el análisis de contenido del tema. Este análisis consistió en establecer la estructura conceptual del tema, los fenómenos que lo rodean y delimitar los conceptos y procedimientos relacionados con la divisibilidad de números naturales que se tratarían en la unidad didáctica. Posteriormente, realizamos el análisis cognitivo, que consistió en redactar los objetivos, las expectativas afectivas y las limitaciones de aprendizaje del tema. Con toda esta información recolectada, diseñamos cuatro tareas de aprendizaje con las que esperábamos que los estudiantes alcanzaran los objetivos de la unidad didáctica. A la hora de diseñar las tareas de aprendizaje, procuramos brindar un contexto cotidiano para el estudiante. Luego, con el ánimo de establecer en qué medida un estudiante alcanzaba los objetivos de la unidad didáctica, diseñamos dos tareas de evaluación, una para cada objetivo.

Con la unidad didáctica de divisibilidad de números naturales, esperamos contribuir con una perspectiva del aprendizaje de las matemáticas. De esta manera, pretendemos mostrar que la implementación de algoritmos y procedimientos puede promover la interpretación y conceptualización de las relaciones entre las operaciones de números de naturales y la divisibilidad. En este sentido, consideramos que esta unidad didáctica permite a los estudiantes reconocer y utilizar diferentes sistemas de representación para conceptualizar la divisibilidad. También, consideramos que la unidad didáctica provee diferentes situaciones y contextos en los que los estudiantes pueden desarrollar el aprendizaje significativo al aplicar el concepto de ser o no divisible, de acuerdo con el contexto presentado.

5. LISTADO DE ANEXOS

En este apartado, presentamos el listado de anexos relacionados a lo largo del documento, que serán útiles al aplicar la unidad didáctica divisibilidad de números naturales.

- ◆ Anexo 1. Listado completo de errores en los que podrían incurrir los estudiantes durante la aplicación de cada una de las tareas de aprendizajes. Los errores se encuentran agrupados en siete dificultades.
- ◆ Anexo 2. Listados de criterios de logro de los objetivos de aprendizaje de la unidad didáctica.
- ◆ Anexo 3. Fichas de tareas de aprendizaje. En este anexo se incluyen los requerimientos de las tareas de aprendizaje y sus tablas de ayudas
- ◆ Anexo 4. Tarea diagnóstica. En este anexo se encuentran las preguntas sobre los conocimientos previos.
- ◆ Anexo 5. Examen final. En este anexo se encuentran las actividades de evaluación de la unidad didáctica.
- ◆ Anexo 6. Imprimibles de las tareas de aprendizaje y evaluación. En este anexo, se incluyen la formulación de la tarea diagnóstica, tarea de aprendizaje y el examen final.

6. LISTADO DE FIGURAS

En este apartado presentamos el listado de figuras de este documento.

- ◆ Figura 1. Estructura matemática de divisibilidad de números naturales
- ◆ Figura 2. Estructura conceptual de divisibilidad de números naturales
- ◆ Figura 3. Mapa conceptual de los sistemas de representación
- ◆ Figura 4. Análisis fenomenológico de divisibilidad de número naturales
- ◆ Figura 5. Grafo de criterio de logro del objetivo 1
- ◆ Figura 6. Grafo de criterio de logro del objetivo 2
- ◆ Figura 7. Imagen de la pregunta 8 prueba diagnóstica
- ◆ Figura 8. Grafo de criterios de logro de la tarea T1.1 Bingo
- ◆ Figura 9. Grafo de criterios de logro tarea T1.2 Ángulos
- ◆ Figura 10. Grafo de criterios de logro de la tarea 2.1 Dulces
- ◆ Figura 11. Grafos de criterios de logro de la tarea 2.2 Mayorista

7. LISTADO DE TABLAS

En este apartado presentamos el listado de tablas de este documento.

- ◆ Tabla 1. Relación entre procesos matemáticos y capacidades matemáticas fundamentales de divisibilidad de números naturales
- ◆ Tabla 2. Listado de expectativas afectivas de la divisibilidad de números naturales
- ◆ Tabla 3. Listado de dificultades y errores para la divisibilidad de números naturales
- ◆ Tabla 4. Ejemplos de criterios de logro
- ◆ Tabla 5. Esquema general de divisibilidad de números naturales
- ◆ Tabla 6. Listado de conocimientos previos de la divisibilidad de números naturales
- ◆ Tabla 7. Listado de ángulos a aplicar en la tarea T1.2 Ángulos
- ◆ Tabla 8. Descripción de las ayudas de la tarea T2.1 Dulces
- ◆ Tabla 9. Niveles de desempeño e indicadores para el objetivo 1

8. REFERENCIAS

- MEN. (2006). Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas. Bogotá.
- Cañadas, M. C. (2018). *Análisis de contenido*. Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes.: Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares (pp. 53-112).
- Romero, I., & Gómez, P. (2014). *Capítulo 6. Análisis de actuación*. Bogotá: Universidad de los Andes.
- González, M., & Gómez, P. (2018). *Apuntes de modulo: Capítulo 4 Análisis Cognitivo*. Bogotá. Ministerio de Educación, C. y. (2013). Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012: Matemáticas, lectura y ciencias. Madrid.
- Gómez, P., Velasco, C., & Mora, M. F. (2018). Capítulo 5. Análisis de instrucción. En P. Gómez, *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (págs. 197-268). Bogotá: Universidad de los Andes.
- MEN. (2016). Derechos Básicos de Aprendizaje. Bogotá: Autor.