

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

# ÁREA SUPERFICIAL DE PRISMAS RECTOS

FREDERIC ESCOBAR, FERNANDO CORTÉS, KAREN FARFÁN Y PATRICIA  
CIFUENTES

BOGOTÁ, MAYO DE 2024

# 1. INTRODUCCIÓN

En este documento, presentamos nuestra unidad didáctica titulada área superficial de prismas rectos, diseñada por el Grupo 1 de la undécima cohorte de la Maestría en Educación Matemática de la Universidad de los Andes. Esta unidad didáctica forma parte del trabajo final de la maestría.

Esta unidad didáctica se implementó en grado octavo con estudiantes entre los 12 y 14 años del colegio Colsubsidio Norte, ubicado en Bogotá. Esta institución es de carácter privado y sus estudiantes provienen en su mayoría de los estratos socioeconómicos 3 y 4.

La motivación detrás del desarrollo de esta unidad didáctica surge de nuestra experiencia como profesores. Observamos que la relación entre el área de los prismas y sus aristas se da por sentado con frecuencia, lo que dificulta el aprendizaje de los estudiantes. Además, notamos que el componente geométrico se aborda de manera superficial en la mayoría de las instituciones educativas, tanto públicas como privadas. Esta falta de profundidad se ve reflejada en los resultados insatisfactorios de las pruebas internas y externas. Por ejemplo, al tratar el tema del área de prismas en el aula, los profesores suelen presentar a los estudiantes un conjunto de fórmulas sin explicar su significado, lo que aumenta la confusión en lugar de aclarar conceptos. Para abordar esta problemática y contribuir al aprendizaje efectivo del área superficial de prismas en instituciones de educación básica secundaria, hemos desarrollado esta unidad didáctica.

Diseñamos esta unidad didáctica para implementarla en instituciones educativas que incluyan el tema de áreas de figuras tridimensionales en el plan de estudios del grado octavo, en un entorno de enseñanza presencial. Nuestra unidad didáctica está alineada con la normativa curricular de Colombia.

En cuanto a los estándares básicos de competencias en matemáticas establecidos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) en 2006, encontramos dos estándares relevantes en el conjunto de grados 8° y 9°. El primero de ellos, ubicado en el pensamiento métrico y sistemas de medidas, establece lo siguiente: “generalizo procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y el volumen de sólidos” (MEN, 2006, pág. 87). El segundo estándar, ubicado en el pensamiento espacial y sistemas geométricos, establece lo siguiente: “uso de representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas” (MEN, 2006, pág. 86).

En cuanto a los derechos básicos de aprendizaje, encontramos que nuestra unidad didáctica se relaciona con el cuarto derecho de grado octavo, que se define como “describe atributos medi-

bles de diferentes sólidos y explica relaciones entre ellos por medio del lenguaje algebraico” (MEN, 2015, pág. 55).

Al diseñar, implementar y evaluar nuestra unidad didáctica, nos enfocamos en que los estudiantes comprendan la relación numérica entre las fórmulas del área y los elementos del prisma. Buscamos que, (a) al modificar las medidas de las aristas, (b) calcular y (c) verificar dichos elementos, los estudiantes comprendan la relación entre los elementos del prisma y su área superficial. Además, la unidad didáctica permite que los estudiantes relacionen el resultado de la fórmula del área superficial mediante el uso de diversas representaciones.

Para lograr lo anterior, integramos elementos tecnológicos, como el software GeoGebra, que permite a los estudiantes visualizar las caras del prisma. Asimismo, utilizamos recursos manipulativos para la construcción de un robot a escala humana y su decoración con recubrimientos mediante *post-it*. Esto permite a los estudiantes manipular las construcciones de los prismas y comprender así el concepto de área superficial. Ambos aspectos fomentan la participación en el aula, lo que motiva y desafía a los estudiantes a completar las tareas de aprendizaje propuestas.

## 2. ANTES DE IMPLEMENTAR

A continuación, abordamos los aspectos previos al diseño de las tareas de aprendizaje de la unidad didáctica, dado que estos elementos son fundamentales para comprender tanto el diseño como la evaluación de las tareas. En este proceso, hemos seguido las directrices de Cañadas, Gómez y Pinzón (2016) para el análisis de contenido, así como las contribuciones de González y Gómez (2017) para el análisis cognitivo. Además, presentamos la estructura general de la unidad didáctica.

### 1. ARTICULACIÓN DE LOS CONTENIDOS

En este apartado, presentamos la descripción de los contenidos de la unidad didáctica. Inicialmente, exponemos los conceptos y procedimientos matemáticos relacionados específicamente con el área de prismas. Posteriormente, seleccionamos los conceptos y procedimientos relevantes que se trabajarán en la unidad didáctica. Luego, detallamos las diversas formas en las que se puede presentar el tema. Por último, exponemos algunas situaciones en las que se hace presente el tema área superficial de prismas rectos.

#### **1.1. Estructura matemática del tema área superficial de prismas rectos**

Al analizar los contenidos y procedimientos vinculados al cálculo del área superficial de prismas rectos, hemos decidido partir del concepto de cuerpos geométricos que incluye a los poliedros. Dentro de este grupo, podemos llevar a cabo procesos relacionados con las caras de los poliedros, especialmente en la determinación de sus áreas. La clasificación de estos poliedros nos permite centrarnos en una categoría específica: los prismas. En la figura 1, mostramos la estructura conceptual junto con las subestructuras mencionadas.

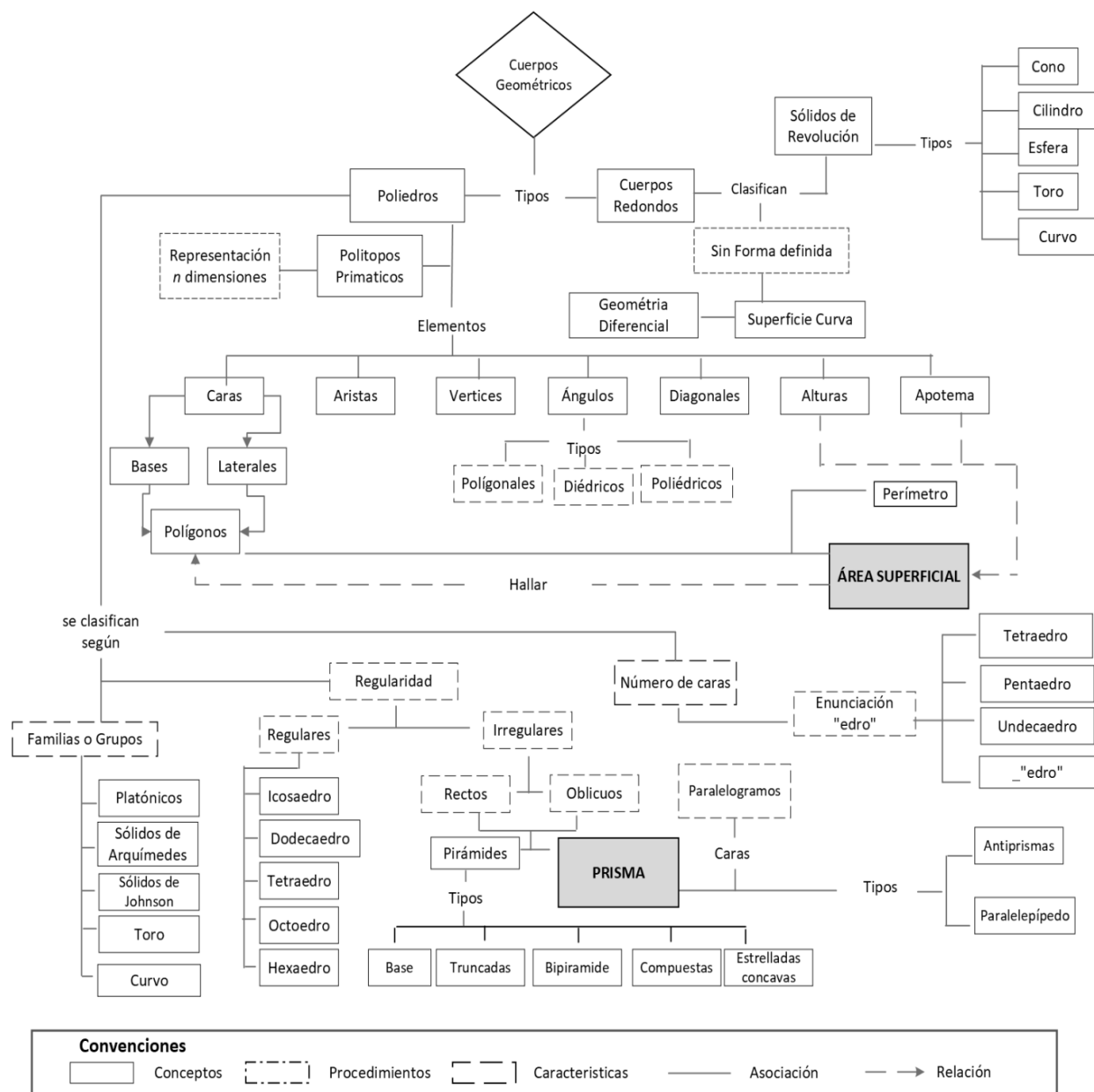


Figura 1. Esquema estructura matemática del área superficial de prismas rectos

En la parte superior de la figura 1, encontramos los cuerpos geométricos que se bifurcan en dos caminos: uno centrado en los cuerpos redondos y otro dirigido hacia los cuerpos planos. Los cuerpos redondos se subdividen en dos grupos: aquellos sin una forma definida y los sólidos de revolución.

El segundo camino nos conduce a explorar los poliedros a partir de las caras poligonales y los elementos, tales como aristas, vértices, diagonales, ángulos, alturas, apotemas y caras. Según sus ángulos, los poliedros se clasifican en poligonales, diédricos y poliédricos. De la misma ma-

nera, las caras se pueden clasificar como bases o laterales, que forman polígonos en los que se pueden hallar perímetros o áreas. Estas últimas están relacionadas con la altura y la apotema. Además, los poliedros se agrupan en familias como los sólidos de Platón, de Arquímedes, de Johnson y de Kepler-Poinsot.

Los poliedros regulares presentan caras poligonales regulares, como el icosaedro, dodecaedro, tetraedro, octaedro y cubo, asociados a los sólidos platónicos. En contraste, los poliedros irregulares no cumplen con esta condición y se subdividen en rectos u oblicuos, como pirámides y prismas. Profundizamos en la categoría de los poliedros porque revela una conexión directa entre los elementos de los poliedros y el concepto del área superficial. Al analizar su clasificación, notamos que nuestra unidad didáctica se enfoca en los poliedros irregulares, especialmente aquellos que son rectos y de base cuadrangular, como el prisma. En la siguiente sección, presentamos los conceptos y procedimientos relacionados con los prismas que caracterizan nuestra unidad didáctica.

## **1.2. Estructura conceptual del tema área superficial de prismas rectos**

En la figura 2, presentamos la estructura conceptual del tema área de prismas rectos, en la que mostramos los conceptos y procedimientos que caracterizan el tema área de prismas, así como las relaciones que pueden establecerse entre ellos.

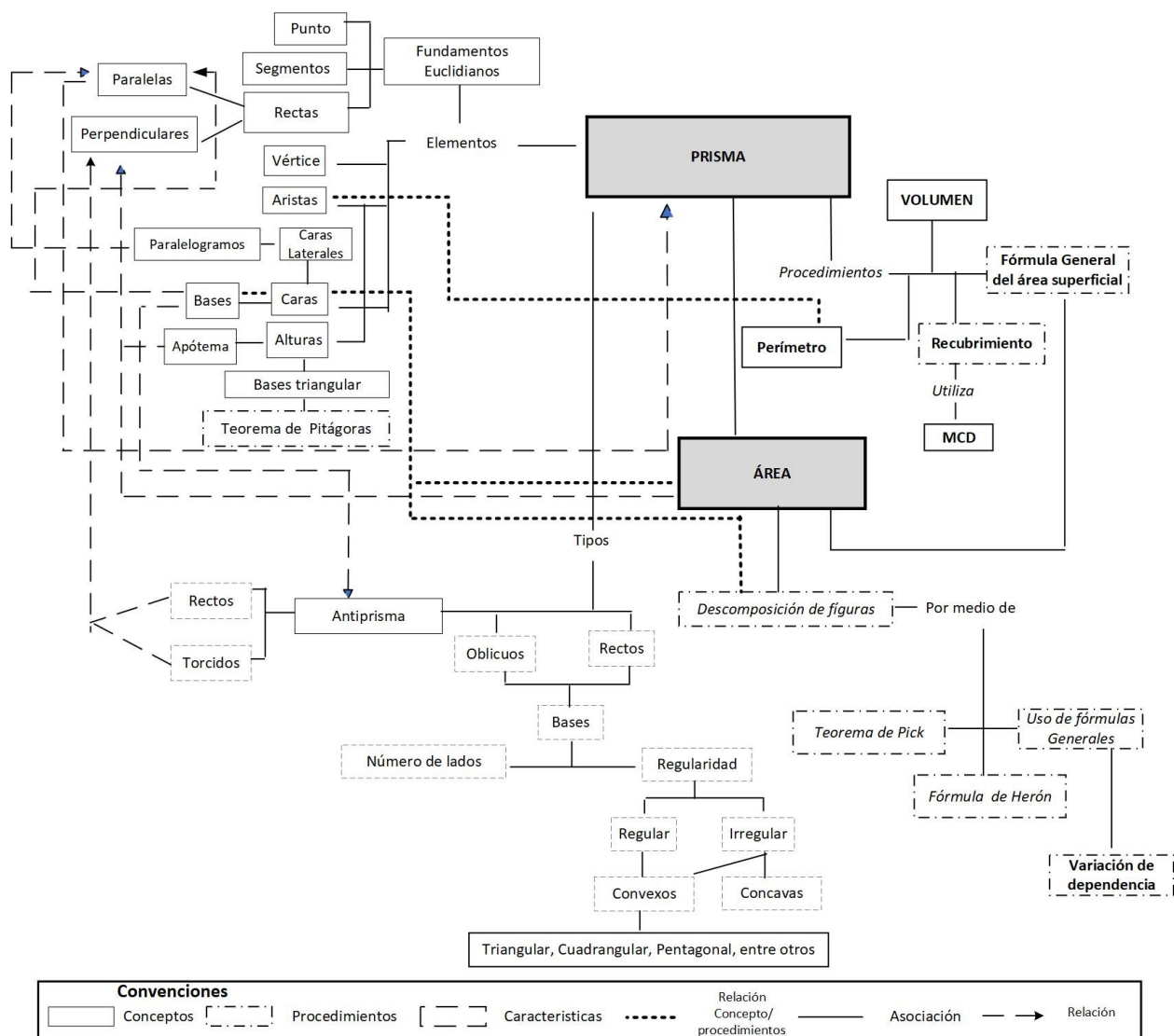


Figura 2. Esquema conceptual del tema área superficial de prismas rectos

Al indagar por los conceptos y procedimientos del tema área de prismas, encontramos algunos fundamentos y elementos euclidianos. Observamos que las rectas, según su condición de paralelismo o perpendicularidad, están relacionadas con algunos elementos de los prismas. Del mismo modo, las caras laterales, las bases y las aristas están relacionadas con el concepto de área y los procedimientos para descomponer el prisma. También identificamos otros procedimientos relevantes como el cálculo del perímetro, el volumen, la aplicación de la fórmula general del área superficial y recubrimientos. Estos dos últimos están relacionados con el cálculo del área. Por último, en la parte inferior del esquema, observamos los tipos de prismas que se pueden clasificar según sus bases, tales como los prismas cuadrangulares, rectangulares y triangulares.

### **1.3. Sistemas de representación del tema área superficial de prismas rectos**

Los sistemas de representación, definidos como un conjunto de signos sujetos a reglas específicas para su creación, manipulación y cambio (Cañadas, Gómez y Pinzón, 2018), posibilitan la presentación de un concepto matemático desde diversas perspectivas.

Estos sistemas pueden abarcar distintas representaciones, como pictogramas, gráficos, ecuaciones, tablas, entre otros. La diversidad de formas para representar un concepto matemático puede facilitar su comprensión y aplicación en diferentes situaciones. En la figura 3, presentamos los sistemas de representación relacionados con el tema.



Ejemplo	Área superficial (Fórmula) $A = p \cdot h + 2B$	Área superficial (descomposición)
<b>Prisma con dimensiones:</b> Ancho: 5, Largo: 7, Alto: 9	$A = 24 \cdot 9 + 2(35)$ $A = 286$	Área bases: 2(35) Áreas laterales: 2(45)+2(63) Suma áreas: 286
<b>Prisma base triangular (Triángulo:</b> a: 5, b: 7, c: 9), altura: 9	$A = 21 \cdot 9 + 2(17,49)$ $A = 223,98$	Área bases= 34,98 Áreas laterales: 81+63+45 Suma áreas: 223,98

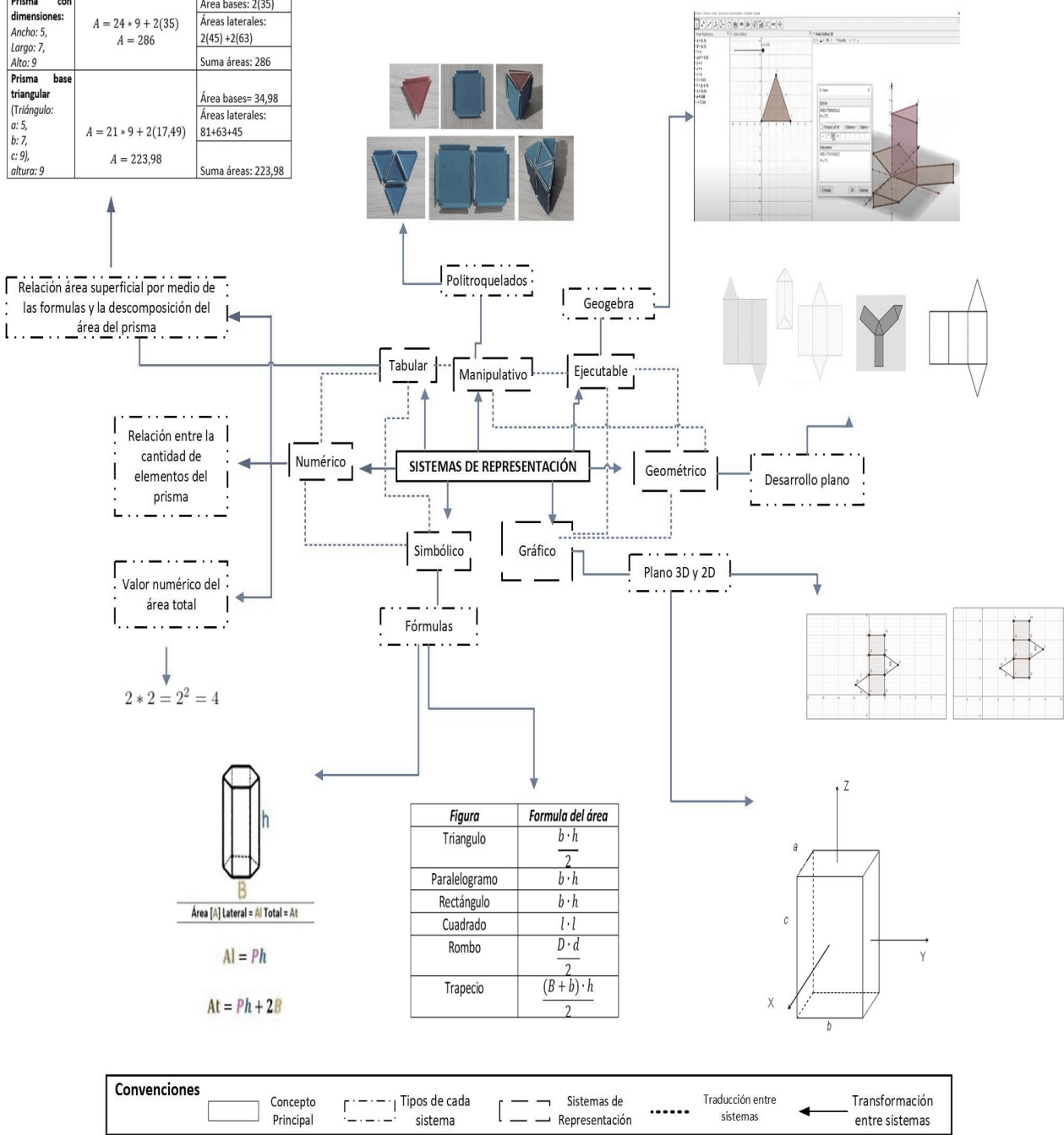


Figura 3. Mapa de los sistemas de representación del área superficial de prismas rectos

En la figura 3, presentamos los sistemas de representación que consideramos para nuestro tema, entre los que se incluyen (a) el numérico, en el que se pueden establecer relaciones entre la can-

tividad de elementos del prisma y su área superficial; (b) el tabular, en el que se pueden organizar los elementos del prisma y mostrar la relación entre la variación de sus elementos y el área superficial; (c) el manipulativo, con el que se puede construir prismas; (d) el ejecutable, que permite manipular, operar y visualizar los prismas; y (e) el geométrico, que permite desarrollar desarrollos planos para el área superficial.

En nuestra unidad didáctica, hemos optado por emplear diversos sistemas de representación: geométrico, numérico, manipulativo, simbólico y ejecutable. Utilizamos el sistema geométrico al trabajar con desarrollos planos para ensamblar los prismas. Recurrimos al sistema numérico para realizar el conteo de recubrimientos y así hallar el área superficial. El sistema manipulativo se emplea para la construcción física de prismas. Asimismo, nos apoyamos en el sistema simbólico para aplicar la fórmula del área superficial de prismas de base cuadrangular. Finalmente, empleamos el sistema ejecutable por medio de GeoGebra, que permite a los estudiantes visualizar y construir prismas en relación con el área que ocupan.

#### **1.4. Análisis fenomenológico del tema área superficial de prismas rectos**

El análisis fenomenológico del área superficial de prismas rectos nos permite responder a las siguientes preguntas: ¿cuál es la utilidad de este tema?, ¿qué problemas abordamos con el tema?, ¿cómo se relacionan estos problemas con la estructura conceptual del tema? y ¿en qué contextos se aplica este tema?

Este enfoque nos permite delimitar el tema al identificar las situaciones en las que se manifiesta y cómo su aplicación puede resolver diversas problemáticas. A continuación, presentamos, en la figura 4, el análisis fenomenológico del tema del área superficial de prismas rectos.

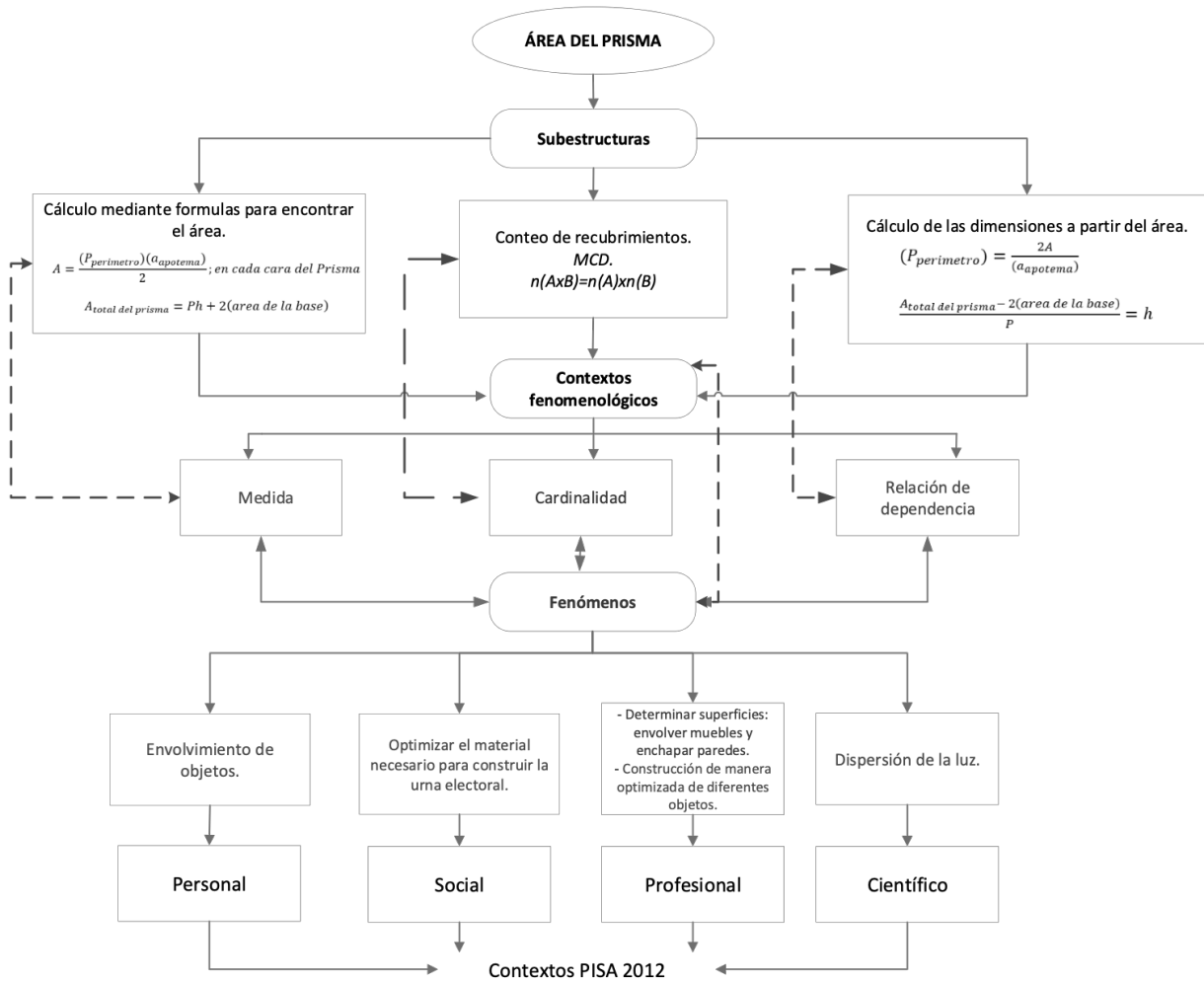


Figura 4. Mapa del análisis fenomenológico del área superficial de prisma rectos

En la figura 4, hemos determinado que el área superficial del prisma recto se puede establecer a partir del cálculo mediante fórmulas, el conteo de recubrimientos y cálculo de una dimensión a partir del área.

Con lo anterior, hacemos referencia a las subestructuras que se establecen en función del concepto matemático al que pertenecen. Estas subestructuras mantienen una relación biunívoca con cada contexto fenomenológico, los fenómenos se agrupan en contextos fenomenológicos porque comparten las mismas características estructurales (Cañadas, 2018, pág. 47). Lo anterior nos permite agrupar los fenómenos según el problema que abordan. De esta manera, los fenómenos como la determinación de la cantidad de material para envolver objetos, la optimización del material en un prisma con una medida desconocida, el recuento de recubrimientos en una pared y la dispersión de la luz, comparten características similares y pueden clasificarse en medida, cardinalidad y relación de dependencia según su contexto fenomenológico.

Los contextos fenomenológicos son agrupaciones de fenómenos según el problema que abordan. Estos, a su vez, mantienen una relación biunívoca con las subestructuras.

Por otro lado, cada fenómeno está relacionado con los contextos PISA 2012. El involucramiento de objetos se ubica en el contexto personal, la optimización del material necesario para construir la urna electoral se sitúa en el contexto social, la determinación de superficies y el involucramiento de muebles se encuentran en el contexto laboral, mientras que la dispersión de la luz pertenece al contexto científico.

## 2. ASPECTOS COGNITIVOS

En esta sección, abordamos los aspectos relativos al análisis cognitivo de la unidad didáctica, según las pautas descritas por González y Gómez (2018). Comenzamos por establecer las expectativas de aprendizaje de nivel superior que, junto con los aspectos abordados en el análisis de contenido, nos facilitaron la construcción y caracterización de los objetivos de aprendizaje. Posteriormente, consideramos las expectativas de tipo afectivo para tener en cuenta los aspectos emocionales y motivacionales que influyen en el proceso de aprendizaje. Además, elaboramos un listado de capacidades que luego organizamos en secuencias según los procedimientos que describen; estas secuencias, a su vez, se transformaron en criterios de logro. Para cada capacidad, identificamos una serie de errores agrupados en dificultades a las que los estudiantes se pueden enfrentar durante el desarrollo de las tareas de aprendizaje. Por último, presentamos los grafos de criterios de logro que incluyen las estrategias de solución propuestas para cada objetivo.

### 2.1. Expectativas de aprendizaje de tipo cognitivo

A continuación, presentamos las expectativas de aprendizaje de nivel superior que la unidad didáctica aborda. Estas expectativas se basan en las capacidades matemáticas fundamentales y procesos matemáticos definidos por el marco conceptual PISA 2012 (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte de España, 2013). Nuestra intención es contribuir a las expectativas relacionadas con diseñar estrategias para resolver problemas, comunicación, razonamiento y argumentación, representación, así como la utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico. Además, nuestra unidad didáctica aporta principalmente los procesos de formular e interpretar y, en menor medida, el proceso de emplear. En la tabla 1, describimos la relación entre las capacidades fundamentales y los procesos matemáticos en relación con nuestra unidad didáctica.

Tabla 1

*Relación entre capacidades fundamentales y procesos matemáticos*

CMF	Formular	Emplear	Interpretar
Diseñar estrategias para resolver problemas	Seleccionar una estrategia para determinar o representar el área	Usar procedimientos para determinar o representar el área	Implementar la estrategia para dar validez a lo diseñado
Comunicación	Leer enunciados para crear un modelo de	Presentar un modelo para articular la	Elaborar y justificar los resultados en el

Tabla 1

*Relación entre capacidades fundamentales y procesos matemáticos*

	la situación	solución de la situación	contexto del problema
Razonamiento y argumentación	Justificar la representación elaborada para dar solución al problema	Explicar y relacionar los procedimientos para determinar o representar el área	Reflexionar y dar argumentos sobre las soluciones de acuerdo con el modelo realizado
Representación	Crear una representación del área superficial	Interpretar, relacionar y utilizar distintas representaciones del área superficial	Interpretar los resultados obtenidos al comparar distintas representaciones
Utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico	Utilizar variables, símbolos y modelos apropiados para representar el área superficial	Comprender las reglas y fórmulas basándose en el concepto del área	Comprender la relación entre el contexto del problema y la representación del área superficial

*Nota.* CMF: capacidad matemática fundamental

Las relaciones de la tabla 1, junto con los conceptos y procedimientos vinculados al área superficial del prisma, la fenomenología y sus diferentes representaciones, favorecen la caracterización y síntesis de los objetivos de aprendizaje de la unidad didáctica. A continuación, presentamos dichos objetivos.

*Objetivo 1.* Usar las dimensiones de prismas rectos para crear representaciones de su área superficial en situaciones que requieran recubrimiento o construcción.

*Objetivo 2.* Justificar los resultados obtenidos al resolver problemas relacionados con la optimización del área superficial de prismas rectos mediante la aplicación de diferentes estrategias.

## 2.2. Expectativas de aprendizaje de tipo afectivo

Además de las expectativas de aprendizaje, también desarrollamos expectativas afectivas que fomentan la motivación hacia el estudio de las matemáticas. Creemos que, cuando un estudiante persevera en la resolución de problemas matemáticos, fortalece su confianza y disposición para enfrentar situaciones relacionadas con el cálculo del área superficial de prismas. Presentamos en la tabla 2 las expectativas de tipo afectivo de la unidad didáctica.

Tabla 2

*Expectativas afectivas del tema área superficial de prismas rectos*

EA	Descripción
1	Ser perseverante en el planteamiento y ejecución de estrategias que favorezcan la solución de problemas de área de prismas
2	Desarrollar una predisposición favorable al emplear distintas representaciones del área superficial de prismas
3	Adquirir seguridad al interpretar y resolver problemas que involucren el área superficial a través de los elementos de un prisma recto

*Nota.* EA: expectativa afectiva

### 2.3. Limitaciones de aprendizaje

Las limitaciones de aprendizaje son aquellas cuestiones que impactan o dificultan el logro de los objetivos. Consideramos los errores como acciones incorrectas que el estudiante realiza al resolver una tarea. Estas acciones están vinculadas a dificultades específicas, lo que nos ha permitido categorizar los errores según la dificultad asociada.

Para definir las dificultades relacionadas con el área de prismas, consideramos, en primer lugar, la dificultad planteada por González y Gómez (2018) de traducir del lenguaje geométrico a la representación gráfica. Esta dificultad puede surgir al momento de realizar representaciones asociadas con las construcciones o representaciones del prisma hecho por el estudiante.

Además, consideramos como segunda dificultad los errores en el uso incorrecto de letras al construir expresiones algebraicas e igualdades, lo cual está alineado con el planteamiento de Cerdán (2010). Finalmente, como tercera dificultad identificamos los errores en los que los estudiantes pueden incurrir al interpretar un problema de acuerdo con el contexto dado.

En la tabla 3, presentamos el listado de dificultades y errores más frecuentes y significativos en los que pueden incurrir los estudiantes. El listado completo está en el anexo 1.

Tabla 3

*Listado de dificultades y errores para el tema área superficial de prismas rectos*

E	Descripción
	D1. Dificultad para realizar representaciones asociadas al área de prismas
2	Descomponer dos caras continuas tomándolas como una sola
11	Confundir la altura del prisma con la altura de la base de un prisma
15	Considerar solo algunas aristas del prisma
50	Confundir el valor del área con una de las aristas del prisma
59	Construir la cara lateral del prisma sin tener en cuenta que coincida con el lado de la base

Tabla 3

*Listado de dificultades y errores para el tema área superficial de prismas rectos*

E	Descripción
76	Comparar diseños diferentes que no permiten realizar recubrimientos
88	Crear el polígono que no corresponde al de la base
98	Confundir la clasificación de lados con la clasificación de ángulos
D2. Dificultad para realizar procedimientos relacionados con el área de prismas	
6	Intercambiar las longitudes de las aristas dadas en el prisma
13	Hallar el área superficial del prisma sin considerar algunas caras
29	Determinar las dimensiones del prisma sin considerar la apotema de la cara de la base
30	Utilizar la fórmula del área que no corresponde al polígono requerido
37	Determinar el área de las caras laterales del prisma como la suma entre el área superficial y el área de las bases
D3. Dificultad para expresar conclusiones en el contexto de problemas relacionados con el área de prismas	
16	Obtener un resultado, pero no interpretarlo de acuerdo con el contexto del problema
91	Organizar de forma aleatoria las áreas superficiales de los prismas
93	Verificar los resultados obtenidos al comparar el área encontrada y una de las aristas del prisma, al omitir el área original del prisma
105	Comparar resultados obtenidos que no corresponden a las áreas superficiales

*Nota.* E: error, D: dificultad

#### **2.4. Criterios de logro**

Según Gómez y Romero (2017, p.10), los criterios de logro son los procedimientos ejecutados por el estudiante al enfrentar una tarea. Para cada objetivo de la unidad didáctica, establecemos un conjunto de criterios de logro (CdL).

Consideramos que, para alcanzar el objetivo 1, el estudiante debe realizar las siguientes acciones concretas: realiza recubrimientos (CdL1.4) o construye prismas rectos (CdL1.10), luego reflexiona sobre el recubrimiento óptimo de la superficie (CdL1.7) o verifica que, con el prisma construido, se cumple con la condición del problema (CdL1.14). Para alcanzar el objetivo 2, el estudiante debe realizar estas acciones concretas: comprender que la medida que pretende hallar se relaciona con el área superficial del prisma (CdL2.3) o determinar el área según los datos proporcionados (CdL2.10). Posteriormente, deberá verificar si la respuesta obtenida es coherente con los procedimientos establecidos (CdL2.9). Se recomienda al lector consultar el anexo 2 para acceder al listado completo de los criterios de logro correspondientes a ambos objetivos.

## 2.5. Grafo de criterios de logro de los objetivos de aprendizaje

Diseñamos un grafo de criterios de logro para cada objetivo de aprendizaje con el fin de proporcionar a los estudiantes una estructura que les facilite establecer el orden y la interrelación entre los procedimientos. Cada esquema está conformado por las diferentes estrategias de solución que los estudiantes pueden emplear para abordar las tareas asociadas a cada objetivo.

Además, en cada grafo de criterios de logro se identifican los posibles errores en los que los estudiantes podrían incurrir al ejecutar estas tareas. Estos errores están vinculados a criterios de logro específicos. Los criterios de logro que no relacionan errores están vinculados a procedimientos de toma de decisiones. Presentamos en la figura 5 el grafo de criterios de logro del primer objetivo. Cada cuadro contiene un criterio de logro enumerado según el listado del anexo 2.

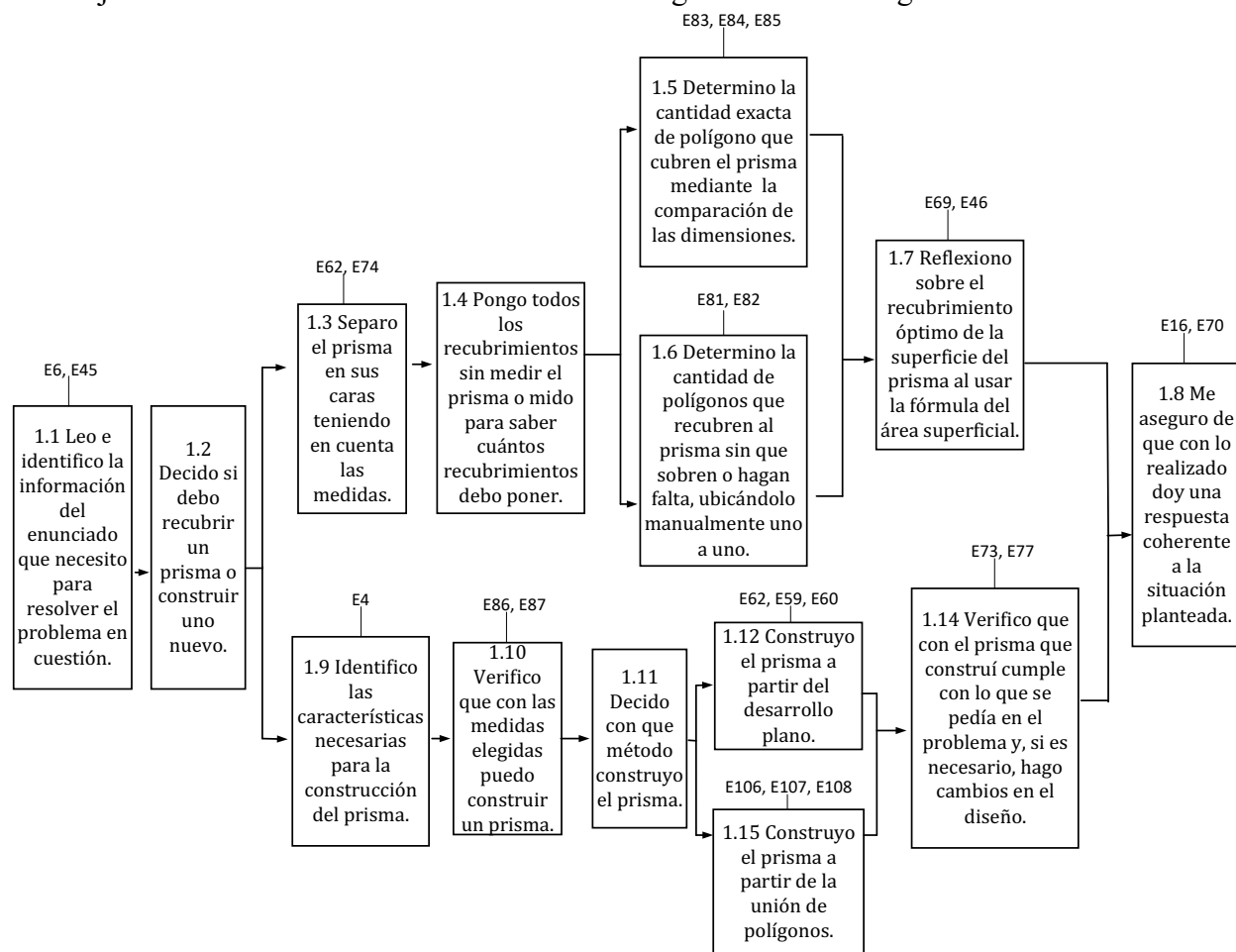


Figura 5. Grafo de criterios del logro del primer objetivo.

En el grafo de criterios del primer objetivo, los primeros criterios se centran en la capacidad del estudiante para identificar la información relevante en el enunciado y tomar la decisión de recubrir o construir un prisma. Luego, el grafo detalla en la parte superior cómo un estudiante puede determinar la cantidad de recubrimientos utilizados en el prisma, ya sea al colocarlos uno a uno sobre las caras del prisma o al calcular la cantidad de recubrimiento mediante las medidas de las



aristas del prisma. Tras tomar la decisión, se espera que el estudiante compare los recubrimientos realizados con el resultado obtenido mediante el cálculo del área superficial y, finalmente, de una respuesta coherente a la situación planteada.

Por otro lado, el grafo muestra los caminos de aprendizaje relacionados con la construcción de prismas, que puede ser construido mediante el desarrollo plano o a partir de la unión de polígonos. Al finalizar el proceso, se espera que el estudiante verifique sus resultados y realice ajustes si es necesario para ofrecer una respuesta coherente al problema planteado.

En la figura 6, presentamos el grafo de criterios de logro del segundo objetivo.

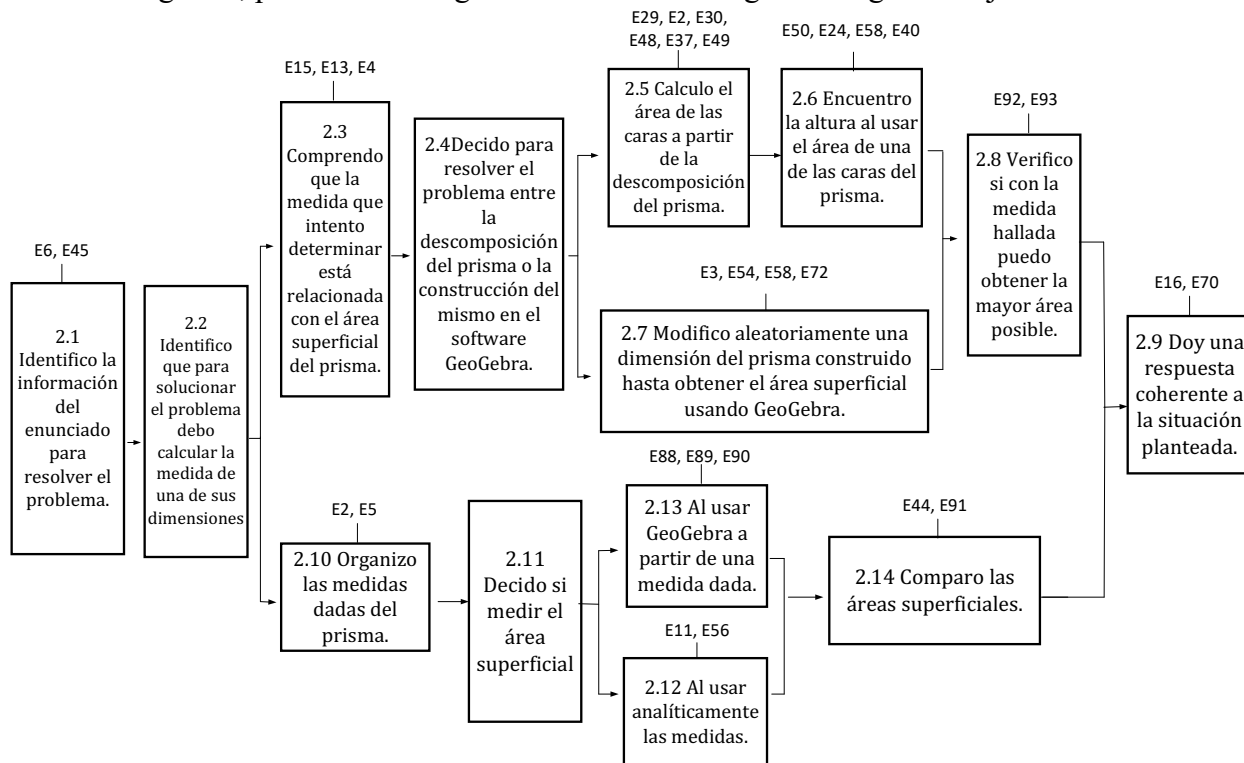


Figura 6. Grafo de criterios del logro del segundo objetivo.

En el grafo de criterios del segundo objetivo, los primeros criterios se enfocan en la habilidad del estudiante para identificar la información clave en el enunciado y, a partir de ello, encontrar la medida de una de las aristas del prisma o determinar su área superficial. Luego, el grafo describe en la parte superior cómo el estudiante puede determinar la medida faltante de una de las aristas del prisma. Esto puede lograrse mediante el cálculo del área de las caras del prisma y, a partir de ese dato, determinar la medida de la arista faltante, o mediante GeoGebra al ajustar aleatoriamente la medida de la arista hasta que coincida con el área superficial inicial. Después de tomar la decisión, se espera que el estudiante verifique sus resultados y ofrezca una respuesta coherente según el contexto del problema.

Si el estudiante elige el camino inferior, que implica determinar el área superficial de diferentes prismas, puede hacerlo mediante GeoGebra o al usar las medidas de forma analítica para calcular las distintas áreas superficiales. Luego, el grafo describe la comparación de los resulta-

dos de los distintos prismas. Al finalizar el proceso, se espera que el estudiante de una respuesta coherente al problema planteado.

### 3. ESQUEMA GENERAL DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

En este apartado, describimos, en la tabla 3, la estructura general de la unidad didáctica, organizada en 16 sesiones, con una duración de 45 minutos cada una. Iniciamos con una tarea diagnóstica para evaluar los conocimientos previos, cuyo propósito es determinar si los estudiantes cuentan con los conocimientos necesarios para abordar las tareas de aprendizaje de la unidad didáctica. Además, proponemos una sección de retroalimentación para reforzar aquellos conocimientos previos en los que los estudiantes presenten dificultades. Luego, planteamos cuatro tareas de aprendizaje que permiten a los estudiantes alcanzar los objetivos establecidos. Cada tarea cuenta con una estructura definida y está acompañada de una serie de requisitos específicos. También diseñamos un examen final para evaluar el progreso de los estudiantes en el aspecto cognitivo. Para evaluar la efectividad de la unidad didáctica en aspectos cognitivos, afectivos y de motivación, prevemos una sesión de cierre.

Tabla 3

*Descripción general de la unidad didáctica*

Sesión	Actividad	Descripción	Tiempo
1	Evaluación de conocimientos previos	Explicación de la unidad didáctica e implementación de la evaluación diagnóstica	45 minutos
2	Retroalimentación de la prueba diagnóstica	Retroalimentación de la evaluación diagnóstica Aclaración de dudas y actividad de refuerzo Organización de los grupos	45 minutos
3	Presentación del Objetivo 1 y ejecución de la Tarea 1.1 El robot de ocho	Introducción del primer objetivo de aprendizaje Desarrollo de la primera parte de la tarea 1.1 El robot de ocho	45 minutos
4	Implementación tarea 1.1 El robot de ocho	Retroalimentación de la sesión anterior Desarrollo de la segunda parte de la tarea 1.1 El robot de ocho	45 minutos
5	Retroalimentación tarea 1.1 El robot de ocho	Aclaración de dudas Conclusiones	45 minutos

Tabla 3

*Descripción general de la unidad didáctica*

Sesión	Actividad	Descripción	Tiempo
6	Ejecución de la tarea 1.2 Decoremos el robot de ocho	Desarrollo primera parte de la tarea 1.2 Decoremos el robot de ocho	45 minutos
7	Implementación de la tarea 1.2 Decoremos el robot de ocho	Retroalimentación de la sesión anterior Desarrollo de la segunda parte de la tarea 1.2 Decoremos el robot de ocho	45 minutos
8	Retroalimentación tarea 1.2 Decoremos el robot de ocho	Aclaración de dudas Conclusiones	45 minutos
9	Retroalimentación objetivo 1	Retroalimentación del objetivo 1 Divulgación de las valoraciones obtenidas para el objetivo 1	45 minutos
10	Presentación objetivo 2 Ejecución de la tarea 2.1 Envolver bloques	Introducción del segundo objetivo de aprendizaje Desarrollo de la tarea 2.1 Envolver bloques	45 minutos
11	Implementación de la tarea 2.1 Envolver bloques	Retroalimentación de la sesión anterior Continuación el desarrollo de la tarea 2.1 Envolver bloques	45 minutos
12	Retroalimentación tarea 2.1 Envolver bloques Ejecución de la tarea 2.2 Rediseña el robot	Aclaración de dudas Conclusiones Desarrollo de la tarea 2.2 Rediseña el robot	45 minutos
13	Implementación tarea 2.2 Rediseña el robot Retroalimentación tarea 2.2 Rediseña	Retroalimentación de la sesión anterior Continuación el desarrollo de la tarea 2.2 Rediseña el robot Aclaración de dudas de la tarea 2.2 Rediseña el robot	45 minutos

Tabla 3

*Descripción general de la unidad didáctica*

Sesión	Actividad	Descripción	Tiempo
	el robot	Conclusiones	
14	Retroalimentación objetivo 2	Retroalimentación del objetivo 2 Divulgación de las valoraciones obtenidas para el objetivo 2	45 minutos
15	Examen final	Organización del salón Instrucciones generales Implementación el examen final	45 minutos
16	Sesión final	Retroalimentación del examen final.	45 minutos

### 3. TAREA DIAGNÓSTICA

En este apartado, presentamos la tarea diagnóstica diseñada para indagar sobre la apropiación de los conocimientos previos (CP) necesarios antes de la implementación de la unidad didáctica. Los conceptos y procedimientos que evaluamos en la tarea diagnóstica están relacionados con el reconocimiento de las características propias de los prismas, las operaciones para determinar medidas y el uso de la herramienta GeoGebra. A continuación, presentamos el listado de conocimientos previos en la tabla 4.

Tabla 4  
*Listado de conocimientos previos del tema área de prismas*

CP	Descripción
1	Reconocer las caras laterales, bases y aristas del prisma.
2	Clasificar los polígonos según su regularidad.
3	Reconocer la variable de una expresión algebraica.
4	Aplicar las propiedades aditivas y multiplicativas de los números reales.
5	Determinar el área de los polígonos regulares.
6	Convertir las unidades de medida.
7	Determinar la raíz cuadrada de un número.
8	Clasificar los polígonos según sus lados.
9	Resolver triángulos usando el teorema de Pitágoras.
10	Hallar el área de un rectángulo conociendo el valor de sus lados.
11	Deducir formas y dimensiones de las caras no visibles del prisma.
12	Reconocer que las bases de un prisma son congruentes.
13	Reconocer herramientas básicas del software GeoGebra.

Tabla 4

*Listado de conocimientos previos del tema área de prismas*

CP	Descripción
14	Construir polígonos regulares usando GeoGebra.
15	Reconocer que las dimensiones corresponden a las longitudes de las aristas del prisma.
16	Reconocer la unidad de medida que favorece la solución del problema.

*Nota.* CP: conocimientos previos.

En la tabla 4, consideramos los conocimientos previos que buscamos evaluar en la tarea diagnóstica. Creemos que es necesario asignar un periodo de 45 minutos para que los estudiantes completen esta actividad. Posteriormente, recomendamos realizar una sesión de retroalimentación para abordar las dificultades y errores identificados durante la ejecución. En este sentido, estimamos que sería necesario dedicar otros 45 minutos a esta fase. Se recomienda al lector consultar el anexo 3 para acceder a la ficha de la tarea diagnóstica.

En la primera pregunta de la tarea, exploramos los conocimientos previos necesarios para identificar las características distintivas de los prismas. Para ello, los estudiantes deben activar los conocimientos previos CP1, CP2, CP11 y CP12. Durante este proceso, es posible que incurran en errores, como usar las bases como parte de las caras laterales, clasificar el polígono de la base como uno diferente al que corresponde, suponer que la cara no visible del prisma tiene un polígono diferente al de la cara visible, o emplear dimensiones que no consideran la congruencia entre un lado de la cara lateral y uno de la base.

En la segunda pregunta, examinamos los conocimientos previos que relacionan el área superficial de las caras del prisma con las medidas de las aristas, correspondientes a los CP10 y CP15. Durante la activación de estos conocimientos previos, es posible que los estudiantes incurran en errores, como calcular el perímetro de cada cara del prisma en lugar del área o identificar el área superficial como la medida de una de las aristas.

En la tercera pregunta, los estudiantes deben calcular el área de un hexágono y justificar su respuesta, correspondiente a los CP4 y CP5. Durante la activación de estos conocimientos previos, los estudiantes pueden incurrir en el error de emplear una fórmula de área que no aplica para el polígono solicitado o utilizar las propiedades de igualdad sin considerar el elemento neutro y la existencia de inversos.

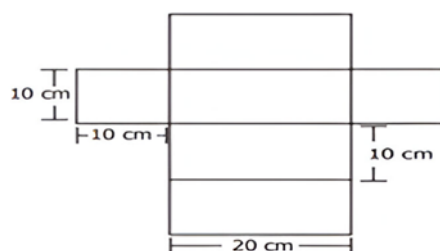
Para la cuarta pregunta, se espera que los estudiantes reconozcan la importancia de unificar unidades de medida, lo cual corresponde a los CP6 y CP16. Durante la activación de estos conocimientos previos, los estudiantes pueden incurrir en errores como realizar operaciones con diferentes unidades de medida o utilizar la misma unidad de medida sin considerar que algunas son diferentes.

En la quinta pregunta, los estudiantes deben resolver triángulos por medio del teorema de Pitágoras, correspondiente a los CP3, CP7 y CP9. Durante este proceso, pueden incurrir en errores como considerar un número constante como si fuera una variable, determinar la raíz cuadrada de

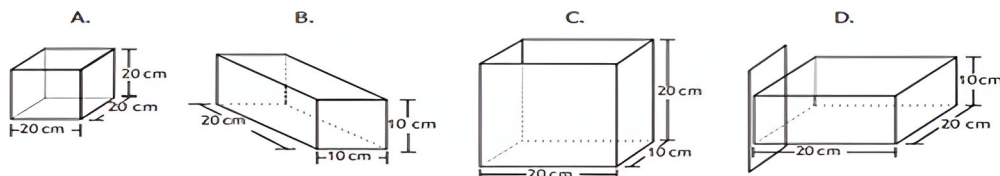
un número dividiéndolo en dos o confundir la hipotenusa con los catetos del triángulo rectángulo.

En la sexta pregunta, los estudiantes deben representar un teorema a partir del uso de la herramienta GeoGebra, que corresponde a los CP8, CP13 y CP4. Durante la activación de estos conocimientos previos, los estudiantes pueden incurrir en errores como confundir la clasificación de los lados con la clasificación de ángulos, pasar por alto herramientas básicas que simplifican los procedimientos en GeoGebra o llegar a conclusiones sin utilizar una representación que corresponda con la construcción del prisma. A continuación, presentamos la formulación de la tarea diagnóstica cuyo imprimible está en el anexo 4.

*Actividad<sup>1</sup>* 1. Una máquina corta moldes de cartón que se doblan y se pegan para construir cajas, con las medidas que se muestran en la figura.



- ¿Cuál de las siguientes cajas se arma con el molde del dibujo?

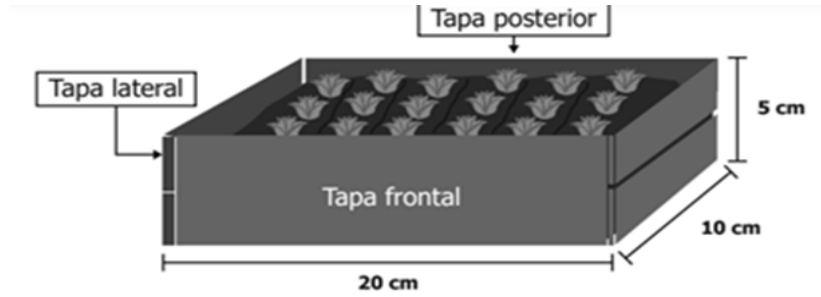


- Muestra qué diseño debe tener el molde de una caja con base hexagonal.

*Actividad<sup>2</sup>* 2. En una jardinería, venden huertos con las medidas que se muestran en la figura.

<sup>1</sup> Tomado Cuadernillo Prueba Saber 10<sup>o</sup>, pregunta número uno (2010).

<sup>2</sup> Tomado Cuadernillo 2 Matemáticas 9<sup>o</sup>, pregunta número once (2023).



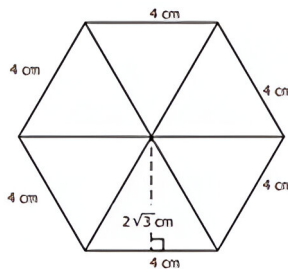
Para venderlos, le colocan una etiqueta con algunas características, pero se le borraron algunos datos.

Área de la base	200 cm <sup>2</sup>
	1.000 cm <sup>3</sup>
Área de la tapa frontal	100 cm <sup>2</sup>
	60 cm

¿Cuál de las opciones muestra correctamente la información completa de la etiqueta?

- A.**
- |                           |                       |
|---------------------------|-----------------------|
| Área de la base           | 200 cm <sup>2</sup>   |
| Área de la tapa posterior | 1.000 cm <sup>3</sup> |
| Área de la tapa frontal   | 100 cm <sup>2</sup>   |
| Área de la tapa lateral   | 60 cm                 |
- B.**
- |                         |                       |
|-------------------------|-----------------------|
| Área de la base         | 200 cm <sup>2</sup>   |
| Volumen del huerto      | 1.000 cm <sup>3</sup> |
| Área de la tapa frontal | 100 cm <sup>2</sup>   |
| Perímetro de la base    | 60 cm                 |
- C.**
- |                         |                       |
|-------------------------|-----------------------|
| Área de la base         | 200 cm <sup>2</sup>   |
| Peso del huerto         | 1.000 cm <sup>3</sup> |
| Área de la tapa frontal | 100 cm <sup>2</sup>   |
| Perímetro de la base    | 60 cm                 |
- D.**
- |                         |                       |
|-------------------------|-----------------------|
| Área de la base         | 200 cm <sup>2</sup>   |
| Precio del huerto       | 1.000 cm <sup>3</sup> |
| Área de la tapa frontal | 100 cm <sup>2</sup>   |
| Peso del huerto         | 60 cm                 |

*Actividad*<sup>3</sup> 3. La figura muestra un hexágono regular dividido en 6 triángulos equiláteros.



Para calcular el área del hexágono regular, se multiplica el área de uno de los triángulos equiláteros por seis. ¿Cuál es el área del hexágono regular? Justifique su respuesta.

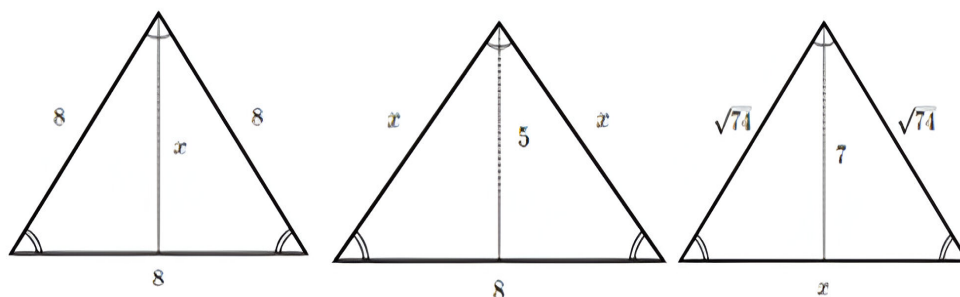
<sup>3</sup> Tomado del cuadernillo prueba saber grado 9º, pregunta número 13 (2022)



- A.  $5\sqrt{3} \text{ cm}^2$
- B.  $10\sqrt{3} \text{ cm}^2$
- C.  $24\sqrt{3} \text{ cm}^2$
- D.  $48\sqrt{3} \text{ cm}^2$

*Actividad*<sup>4</sup> 4. La longitud de dos varillas es de 0,18 m y 23 cm, respectivamente. Si la primera se alarga 3 cm y segunda se acorta 0,5 dm ¿Cuál es la diferencia entre la longitud de ambas varillas en milímetros?

*Actividad*<sup>5</sup> 5. En los siguientes triángulos encuentra el valor de  $x$ .



*Actividad* 6. Con la ayuda del software GeoGebra vamos a comprobar dinámicamente el teorema de Napoleón. El teorema afirma que el triángulo determinado por los centros de los triángulos equiláteros construidos exteriormente sobre los lados de un triángulo cualquiera es equilátero. Entonces los centros de estos tres triángulos forman a su vez un triángulo equilátero. ¿Cuál sería la construcción que propone para esto?

El profesor puede identificar de manera específica qué conocimientos previos necesitan refuerzo durante la retroalimentación, para facilitar el progreso en las tareas de aprendizaje. Recomendamos no asignar una calificación a la tarea diagnóstica, ya que su propósito es que el profesor comprenda el dominio de los conocimientos previos por parte de los estudiantes y pueda implementar acciones de mejora basadas en los resultados obtenidos. Para realizar la tarea diagnóstica, es necesario que los estudiantes tengan una tableta o computadora con la herramienta GeoGebra ya instalada, hojas blancas, regla y transportador.

<sup>4</sup> Adaptado Guía de clase Actividad 4211 (p.17, 2023) [https://cpsc.edu.co/cpscfiles/anexos\\_guias/ciclo\\_iii/M4/C3\\_M4\\_MATEMATICAS\\_GUIA.pdf](https://cpsc.edu.co/cpscfiles/anexos_guias/ciclo_iii/M4/C3_M4_MATEMATICAS_GUIA.pdf)

<sup>5</sup> Adaptado de la aplicación del teorema de Pitágoras. <https://es.khanacademy.org/math/cc-eighth-grade-math/cc-8th-geometry/cc-8th-pythagorean-theorem/e/use-pythagorean-theorem-to-find-side-lengths-on-isosceles-triangles>

## 4. TAREAS DE APRENDIZAJE

A continuación, abordamos las tareas de aprendizaje de la unidad didáctica. Cada tarea está diseñada con elementos específicos y previsiones que el profesor debe considerar antes de su implementación. Además, se sugiere que el profesor establezca relaciones entre las diferentes tareas para facilitar la retroalimentación y formular preguntas que ayuden a identificar posibles dificultades que los estudiantes puedan enfrentar durante su desarrollo.

### 1. TAREAS DE APRENDIZAJE PARA EL PRIMER OBJETIVO

Para la contribución del primer objetivo, presentamos dos tareas de aprendizaje. Para cada tarea, realizamos una descripción a partir de sus elementos, que abarcan diversos aspectos como requisitos, contribuciones al objetivo, metas, formulación, conceptos y procedimientos, sistemas de representación, contextos PISA, agrupamiento e interacción, y temporalidad. También, incluimos una sección que aborda los errores, el grafo de criterios de logro de cada tarea, pautas para la actuación del profesor, sugerencias metodológicas y la evaluación que orienta al lector para que pueda identificar el logro de las metas por parte del estudiante. La descripción completa de las tareas está disponible en el anexo 5.

#### 1.1. Tarea El robot de ocho

A continuación, describiremos los elementos de la tarea 1.1 El robot de ocho.

##### *Meta de la tarea*

Con esta tarea de aprendizaje, los estudiantes adquieren habilidades en la construcción de modelos tridimensionales, desarrollan la capacidad de identificar el área superficial mediante los materiales utilizados y tienen la posibilidad de experimentar variando las aristas para crear nuevas construcciones.

En esta tarea, los estudiantes colaborarán en grupos para fabricar prismas rectangulares con cartulina. Estos prismas se emplearán para ensamblar un robot a escala humana, cuyas dimensiones variarán según los acuerdos alcanzados por los estudiantes durante el proceso de diseño y construcción.

### *Requisitos*

Para realizar esta tarea con éxito, el estudiante debe tener un dominio previo de los conceptos relacionados con los elementos de un prisma, como las aristas, bases y vértices. Es importante que el estudiante comprenda el procedimiento para construir un sólido a partir de un desarrollo plano. Además, se requiere que el estudiante pueda identificar y extraer la información clave del enunciado.

### *Aportes de la tarea al objetivo de aprendizaje*

La tarea busca que los estudiantes adquieran la destreza de construir prismas rectos, lo que les posibilitará representar el área superficial al manipular el material correspondiente. Esta destreza se alcanza al tener en cuenta las medidas necesarias para cada prisma durante la elaboración de la pieza del robot.

### *Formulación de la tarea*

A continuación, presentamos la formulación de la tarea que el profesor debe entregar en una fotocopia al grupo de estudiantes. El material para imprimir la tarea se encuentra en el anexo 6.

*Tarea 1.1 El robot de ocho.* Vamos a construir un robot que tenga forma humana con solamente prismas rectos de base rectangular. Cada grupo conformado por tres estudiantes se encargará de construir una parte del robot con las cartulinas que están disponibles en el salón.

El profesor asigna a los grupos una parte del robot: al primer grupo la cabeza, al segundo grupo el tronco, al tercero el brazo izquierdo, al cuarto grupo el brazo derecho, al quinto grupo la pierna derecha y al sexto la pierna izquierda. Para esta parte del trabajo, no tienen permitido dialogar entre grupos, pero sí es necesario que un integrante realice un registro escrito de los pasos de la construcción y de las decisiones que tomen durante la construcción.

Cuando el profesor lo indique deberán presentar los diseños construidos a sus compañeros (para ello se permite el diálogo entre grupos) y, en caso de que las partes no sean proporcionales, realizar un nuevo diseño. Para esto, es necesario llegar a los acuerdos sobre el tamaño de las piezas, sin olvidar la cantidad de material que tienen disponible.

### *Conceptos y procedimientos*

La tarea aborda tanto conceptos como procedimientos. En cuanto a los conceptos, se enfoca en definiciones clave como la base, la altura, las aristas y las medidas de un prisma, así como en sus características y clasificación. En cuanto a los procedimientos, aborda el desarrollo plano y la composición de sólidos mediante la unión de polígonos para formar las caras del prisma.

### *Sistemas de representación que se activan*

La tarea utiliza el sistema de representación manipulativo cuando el estudiante desarrolla y construye un prisma a partir del desarrollo plano. También, usa la representación geométrica cuando el estudiante diseña el desarrollo plano en la cartulina para luego ser ensamblado.

### *Contextos PISA en los que se sitúa la tarea*

La tarea se sitúa en un contexto profesional según el marco de referencia PISA 2012, pues involucra una situación que requiere medir y tomar decisiones relacionadas con el trabajo en grupo.

### *Materiales y recursos que se utilizarán*

La tarea requiere octavos de cartulina para construir las piezas del robot. Además, es indispensable que los estudiantes cuenten con la fotocopia que contiene la formulación de la tarea, así como los materiales habituales de la clase, como regla, lápiz, tijeras y pegamento.

### *Agrupamiento e interacción en el aula*

En la primera parte de la tarea, los estudiantes se dividen en seis grupos para debatir estrategias de solución sobre el material o recurso a utilizar y para llegar acuerdos sobre las medidas óptimas que brindan la mejor propuesta de solución. En la segunda parte de la tarea, cada grupo presenta a toda la clase la justificación de sus elecciones. En el tercer y última parte, los grupos revisan y analizan los resultados obtenidos para rediseñar las piezas del robot, comparándolas con las de los otros grupos.

### *Temporalidad*

La tarea 1.1 El robot de ocho se estructura en cuatro etapas con una duración total de 135 minutos. Durante la primera etapa, se organiza el salón en grupos de trabajo y se presenta a los estudiantes el objetivo que deben alcanzar. En la segunda etapa, los estudiantes identifican las dimensiones óptimas para fabricar la pieza del robot asignada. Posteriormente, en equipos reducidos, construyen la pieza. En la tercera etapa, los estudiantes ensamblan el robot en el grupo completo y, después de unir las piezas, evalúan si el robot es proporcional. En caso de no serlo, negocian y diseñan una nueva pieza que cumpla con los requisitos establecidos en el enunciado.

### *Errores en lo que puede incurrir el estudiante y ayudas*

Al abordar la tarea, el estudiante puede incurrir en errores que cuentan con sus respectivas ayudas. El estudiante puede utilizar diferentes valores para la altura de cada cara del prisma (E86). En este caso, el profesor podría decir al estudiante que recuerde el valor que debe tener cada cara (A39). Luego, cuando el estudiante emplea el desarrollo plano, puede incurrir en el error de construir la cara lateral del prisma sin tener en cuenta que coincida con el lado de la base (E59). En este caso, el profesor puede realizar la siguiente pregunta: ¿si los lados de esas caras no coinciden, podrás cerrar el prisma? (A24). Por otro lado, si el estudiante decide construir el prisma a partir de la unión de polígonos para conformar las caras del prisma, puede incurrir en el error de diseñar polígonos que no corresponden a las caras del prisma (E106). Para esta situación, el profesor podría decirle al estudiante: “has diseñado polígonos que no se ajustan a las caras de un prisma recto de base cuadrada. ¿Cómo lo puedes arreglar?” (A49). Por último, el estudiante también puede incurrir en un error relacionado con obtener conclusiones sin usar una representación correspondiente a la construcción del prisma requerido para ensamblar el robot (E70) En este caso, el profesor puede preguntar si la representación que usó corresponde al prisma que se pretende construir (A28). Se sugiere al lector revisar el anexo 5, en la que presentamos todas las ayudas.

### Grafo de criterios de logro de la tarea

En la figura 7, mostramos el grafo de criterios de logro correspondiente de la tarea, elaborado a partir del grafo de criterios de logro del objetivo 1 (ver figura 5). Resaltamos las distintas opciones que tiene un estudiante para abordar la tarea.

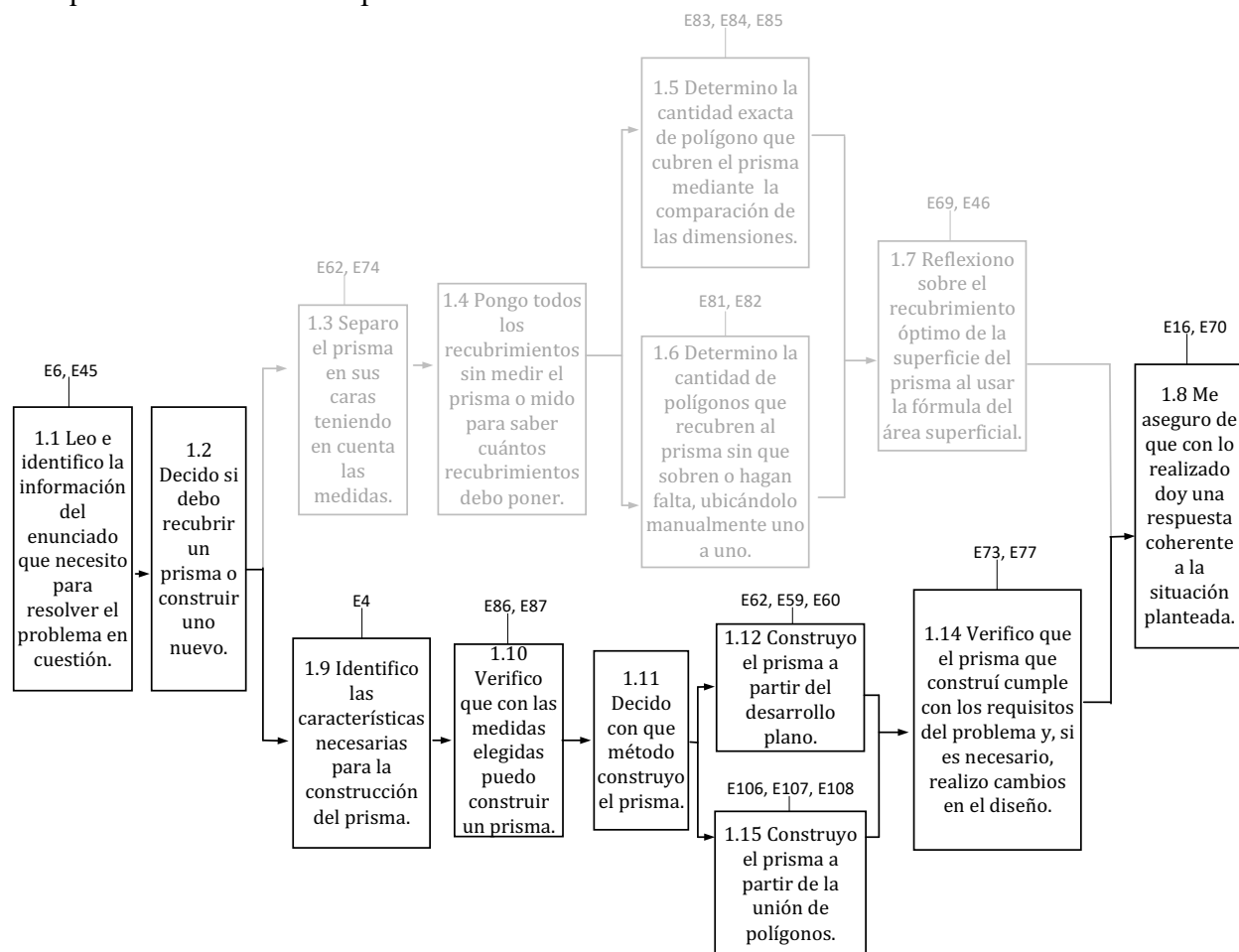


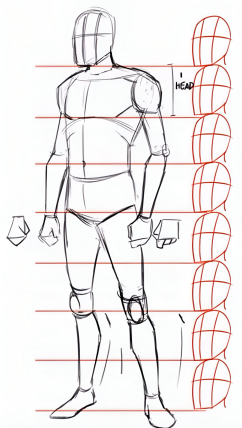
Figura 7. Grafo de criterios de logro para la tarea 1.1 El robot de ocho.

En el grafo de criterios de logro para la tarea, los cuadros resaltados indican la estrategia de solución o la secuencia de procedimientos previstos para abordarla. Como es común en la mayoría de las tareas, el estudiante identifica la información necesaria del enunciado del problema. Posteriormente, procede a determinar las características requeridas para la construcción del prisma y luego decide si lo construye mediante un desarrollo plano o mediante la unión de polígonos. Finalmente, el estudiante debe explicar o justificar la validez de sus resultados con una respuesta coherente en relación con el contexto del problema.

### Actuación del profesor

El profesor presenta la tarea junto con su correspondiente grafo de criterios. Además, distribuye la formulación de la tarea en hojas impresas. Durante la actividad, el profesor fomenta la interac-

ción dentro de los grupos para facilitar el intercambio de ideas y la colaboración. Posteriormente, selecciona al azar un estudiante para que exponga ante el resto de la clase el proceso seguido por su grupo, lo que estimula una reflexión colectiva sobre los resultados obtenidos. En esta fase, el profesor revisa los resultados de cada grupo, orienta la revisión y mejora de los diseños a partir de la figura 8.



*Figura 8. Silueta del robot*

Luego, cada grupo presenta su nuevo diseño y destaca los cambios realizados en la pieza. Finalmente, el profesor está disponible para abordar las inquietudes de los estudiantes, ofrecer apoyo en la identificación y superación de las dificultades y promover la interacción entre los estudiantes.

#### *Sugerencias metodológicas*

Recomendamos al profesor que ofrezca una de las ayudas diseñadas cuando algún estudiante incurra en errores, de manera que pueda identificar cuál criterio de logro presenta mayor dificultad para los estudiantes. El profesor debe fomentar en los estudiantes la importancia de verificar y asegurarse de que la solución obtenida sea correcta. Además, sería recomendable que el profesor supervise que los estudiantes completen el diseño dentro del plazo establecido, permitiéndoles así compartir las respuestas con sus compañeros en el momento indicado.

Si los estudiantes no logran identificar cómo construir el prisma o la relación entre el área superficial y el material debido a su uso inadecuado, el profesor puede sugerirles que usen una nueva cartulina para reconstruir el prisma. Es aconsejable que el profesor tenga cartulinas adicionales como precaución.

Respecto al material, es importante que se organicen los grupos de trabajo con anticipación para que los estudiantes puedan llevar a clase los materiales necesarios, preferiblemente un día antes de la sesión. Se sugiere que cada grupo cuente con la misma cantidad de cartulinas. En nuestra experiencia, al poner a prueba la tarea, encontramos que doce octavos de cartulina blanca son suficientes para cada grupo.

### *Evaluación*

El resultado de la tarea consiste en que los estudiantes lleven a cabo la construcción de los prismas y se aseguren de que estos cumplan con las condiciones establecidas en el problema. Tras las presentaciones de los estudiantes y las negociaciones para ajustar los prismas a las proporciones indicadas en la figura 8, se procede a evaluar las nuevas construcciones. Asimismo, se recomienda que el profesor observe la participación de cada miembro del grupo para brindar retroalimentación al inicio de la siguiente tarea de aprendizaje. Los errores en los que los estudiantes incurran proporcionan al profesor la oportunidad de evaluar tanto el desempeño individual como el grupal de manera cuantitativa.

## **1.2. Tarea Decoremos el robot de ocho**

A continuación, describiremos los elementos de la tarea 1.2 Decoremos el robot de ocho.

### *Meta de la tarea*

Con esta tarea de aprendizaje, los estudiantes miden la cantidad de material necesario para decorar cada una de las piezas del robot mediante recubrimientos de áreas superficiales y, luego, la contrastan con la fórmula del área superficial. En esta tarea, los estudiantes trabajarán en grupos y usarán los mismos prismas que construyeron para la tarea 1.1 El robot de ocho. Estos prismas serán recubiertos con *post-it* para luego determinar la cantidad y encontrar así el área superficial.

### *Requisitos*

Para abordar esta tarea, el estudiante debe haber completado previamente la tarea 1.1 El robot de ocho, ya que necesitará las piezas ensambladas. Además, es fundamental que el estudiante cuente con los conocimientos previos adquiridos en la tarea anterior, así como la capacidad de reemplazar expresiones algebraicas para obtener un valor numérico y de calcular el área superficial de polígonos regulares. Como requisito adicional, el estudiante deberá ser capaz de identificar y extraer la información relevante del enunciado para establecer una conexión adecuada entre la respuesta y la situación planteada.

### *Aportes de la tarea al objetivo de aprendizaje*

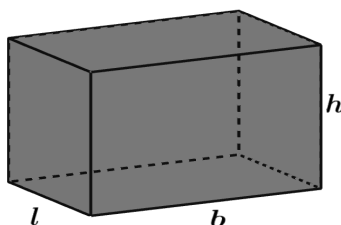
En esta tarea, los estudiantes reconocen el área superficial mediante los recubrimientos, lo que les permite relacionar el área superficial manipulable con la fórmula del área superficial. Esto se logra cuando el estudiante recubre la pieza del robot y determina cuántos recubrimientos usó. Luego, por medio de las medidas de las aristas y la fórmula del área superficial, establece una relación con sus resultados.

### *Formulación de la tarea*

A continuación, presentamos la formulación de la tarea que el profesor debe entregar en una fotocopia al grupo de estudiantes. El material para imprimir de la tarea se encuentra en el anexo 6.

*Tarea 1.2 Decoremos el robot de ocho.* Su grupo se enfrenta a una nueva misión. En esta ocasión, el profesor les proporcionará una de las piezas del robot que construyeron en la tarea anterior, junto con una cantidad específica de *post-it* de colores. La tarea consiste en recubrir la pieza del robot con los *post-it*, determinar la cantidad exacta de *post-it* utilizados y

contrastar la fórmula del área superficial comparándola con el área de los post-it utilizados de manera aproximada, como se presenta a continuación en la figura.



$$A_s = 2(bl + lh + hb)$$

Durante la tarea, deben documentar todo el proceso de cómo midieron, la estimación inicial de *post-it* necesarios y la cantidad real utilizada. Cuando el profesor lo solicite, el grupo presenta sus resultados ante el resto de la clase.

### *Conceptos y procedimientos*

En la tarea 1.2 Decoremos el robot de ocho, abordamos los conceptos relacionados con las definiciones de los elementos de un prisma como la base, la altura, las aristas y las medidas del prisma. En relación con los procedimientos, usamos la fórmula del área superficial de prismas rectos de base cuadrada.

### *Sistemas de representación que se activan*

La tarea incluye el sistema de representación simbólico cuando el estudiante utiliza las medidas de las aristas del prisma en la fórmula del área superficial para comparar estos resultados con la cantidad de recubrimientos realizados. También, usa el sistema geométrico al trabajar con la representación del área superficial y relacionarla con los recubrimientos.

### *Contextos PISA en lo que se sitúa la tarea*

La tarea se enmarca en un contexto científico según el marco de referencia de PISA 2012, ya que implica la aplicación de fórmulas de área superficial en situaciones del mundo real que demandan medición y comparación de resultados para llegar a conclusiones.

### *Materiales y recursos que se utilizarán*

Los estudiantes deben tener disponibles las nuevas piezas construidas del robot de ocho. Además, es necesario que los estudiantes cuenten con los *post-it*<sup>6</sup> y la fotocopia que contiene la formulación de la tarea, así como los materiales habituales de clase, como regla, lápiz, tijeras y pegamento. En caso de no contar con *post-it*, le sugerimos al profesor recortar cuadrados de hojas de colores.

---

<sup>6</sup> Es una hoja pequeña de papel, empleada generalmente para escribir notas, con una franja auto-adhesiva en el reverso, que permite pegarla y despegarla con facilidad.



### *Agrupamiento e interacción en el aula*

Los estudiantes continúan en los mismos grupos de trabajo de la tarea anterior, para obtener conclusiones sobre la representación del área y responder al problema. Cada integrante del grupo tendrá un rol para organizar y agilizar el trabajo. Por ejemplo, uno de los miembros estará encargado de registrar en el cuaderno o en hojas las decisiones y procedimientos utilizados durante el desarrollo de la tarea. Otros se encargarán de determinar la cantidad de recubrimientos empleados en la pieza del robot, mientras que el resto del equipo utilizará la fórmula del área superficial. De esta manera, todos colaborarán para llegar a una conclusión conjunta al finalizar la actividad. Luego, de cada grupo se elige un estudiante al azar para que comparta las observaciones al resto del salón para obtener una conclusión general.

### *Temporalidad*

Esta tarea se estructura en tres etapas con una duración total de 135 minutos. Durante la primera etapa, se organiza el salón en grupos de trabajo y se presenta a los estudiantes la meta de la tarea. En la segunda etapa, los estudiantes llegan acuerdos para realizar los recubrimientos. Posteriormente, realizan la descripción y explicación de la solución al resto de la clase, generan una reflexión del trabajo y verifican sus propios resultados.

### *Errores en los que puede incurrir el estudiante y ayudas*

Al abordar la tarea, el estudiante puede incurrir principalmente en errores relacionados con los recubrimientos del prisma. Uno de ellos es sobreponer los polígonos en una de las caras del prisma o al dejar espacios entre ellos (E81). En este caso, el profesor invita a los estudiantes a interactuar con un aplicativo<sup>7</sup> (A34). Otro error es sumar solo los resultados de los recubrimientos de las caras visibles y así obtener una cantidad incompleta de recubrimientos (E85). En este caso, el profesor puede realizar la siguiente pregunta: ¿has mirado todas las caras del prisma? (A38). Se sugiere al lector revisar el anexo 5, en el que se presentan todas las ayudas.

### *Grafo de criterios de logro de la tarea*

En la figura 9, mostramos el grafo de criterios de logro correspondiente a la tarea 1.2 Decoremos el robot de ocho, elaborado a partir del grafo de criterios de logro del objetivo 1 (ver figura 5). Resaltamos las distintas opciones que tiene un estudiante para abordar la tarea.

---

<sup>7</sup> [https://phet.colorado.edu/sims/html/area-builder/latest/area-builder\\_all.html?locale=es](https://phet.colorado.edu/sims/html/area-builder/latest/area-builder_all.html?locale=es)

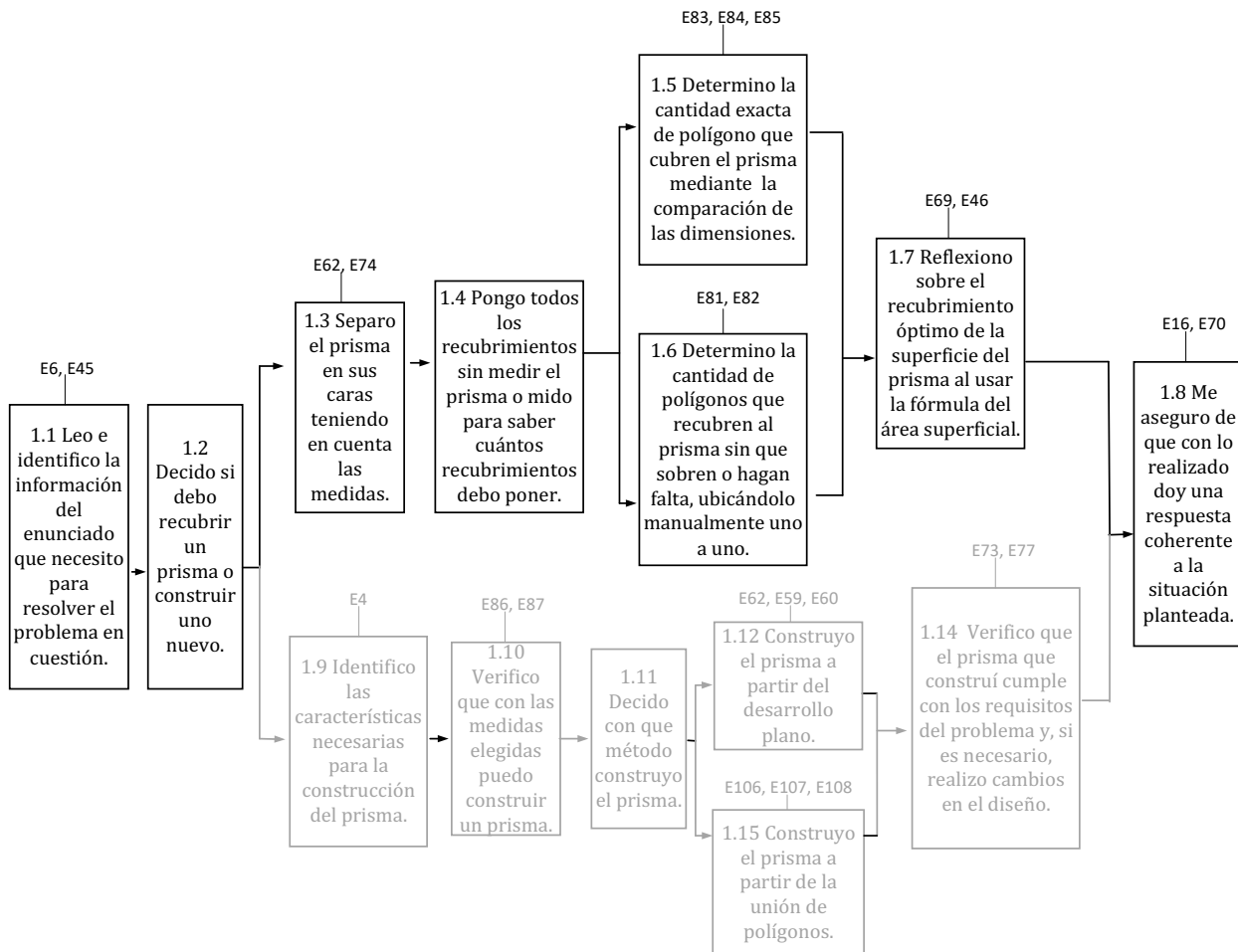


Figura 9. Grafo de criterios de logro para la tarea 1.2 Decoremos el robot de ocho

En el grafo de criterios de logro para la tarea 1.2 Decoremos el robot de ocho, los cuadros resaltados señalan las estrategias de solución o la secuencia de procedimientos previstos para abordar la tarea. Como es habitual en la mayoría de las tareas, el estudiante primero identifica la información necesaria del enunciado. Luego, procede a determinar si opta por calcular la cantidad de recubrimientos uno a uno o si, por el contrario, utiliza las medidas de las aristas del prisma para determinar cuántos caben en él y, enseguida, aplica la fórmula del área superficial para prismas rectos de base cuadrada, con el fin de comparar los resultados. Finalmente, el estudiante debe explicar o justificar la validez de sus resultados con una respuesta coherente en relación con el contexto del problema.

#### Actuación del profesor

El profesor presenta la tarea junto con su correspondiente grafo de criterios de logro. Además, distribuye la formulación de la tarea en hojas impresas. Luego, el profesor guía a sus estudiantes en función de las contribuciones hechas durante la discusión grupal. Les indica que tienen la opción de ajustar las longitudes del material si es necesario, pero sin perder de vista la cantidad que

se desperdicia durante los cálculos. En la discusión grupal, el profesor dirige las conclusiones hacia el concepto de área, planteando preguntas como: ¿cuál de todas las piezas utilizó la mayor cantidad de *post-it*? y ¿qué conclusiones pueden extraer del proceso realizado? También se sugiere una aplicación<sup>8</sup> para visualizar las caras y características de los prismas.

#### *Sugerencias metodológicas*

Recomendamos que el profesor pase por todos los grupos y verifique si todos los estudiantes encargados con el recubrimiento lo estén haciendo de forma correcta sin dejar espacios o sobreponiendo los *post-it*. Además, el profesor puede realizar preguntas para corroborar si están relacionando la cantidad de recubrimientos con el área superficial. Hemos diseñado ayudas útiles cuando un estudiante incurre en errores, para garantizar el éxito de la tarea. Invitamos al lector a revisar el anexo 5.

Si los estudiantes tienen dificultades para identificar cómo hacer los recubrimientos debido al uso inadecuado del material, el profesor puede sugerirles que utilicen nuevos *post-it* y vuelvan a recubrir las caras del prisma. Es recomendable que el profesor tenga *post-it* adicionales como medida de precaución. Además, debe recordar a los estudiantes que organicen los grupos de trabajo con anticipación para traer los materiales necesarios, preferiblemente un día antes de la sesión.

#### *Evaluación*

El producto de la tarea es realizar un análisis comparativo de cómo los distintos recubrimientos aplicados afectan el cálculo del área superficial del prisma. Tras las presentaciones de los estudiantes, cada grupo debe exponer al profesor sus conclusiones, basadas en los procedimientos empleados. A partir de lo expuesto en los informes escritos de los estudiantes, el profesor puede identificar los errores más comunes y así asegurar el logro de los objetivos de aprendizaje. Además, se sugiere que el profesor observe la participación de cada miembro del grupo para brindar retroalimentación al inicio de la siguiente sesión.

## 2. TAREAS PARA EL SEGUNDO OBJETIVO

Para contribuir al logro del segundo objetivo, presentamos dos tareas de aprendizaje. Para cada tarea, describimos sus elementos, abarcando aspectos como requisitos, contribuciones al objetivo, metas, formulación, conceptos y procedimientos, sistemas de representación, contextos PISA, agrupamiento e interacción, y temporalidad. También, incluimos una sección que aborda los errores, el grafo de criterios de logro de cada tarea, pautas para la actuación del profesor, sugerencias metodológicas y la evaluación que orienta al lector para que pueda identificar el logro de las metas por parte del estudiante. La descripción completa de los elementos de las tareas está disponible en el anexo 5.

---

<sup>8</sup> <https://www.geogebra.org/m/tTzjCn4d>

## 2.1. Tarea Envolver bloques

A continuación, describiremos los elementos de la tarea 2.1 Envolver bloques.

### *Meta de la tarea*

Con esta tarea de aprendizaje, los estudiantes adquieren habilidades en la optimización del área superficial de prismas rectos. Esto implica determinar el área de diferentes prismas rectos y seleccionar aquel que requiera la menor cantidad de material para su envoltura. Con el propósito de optimizar el material utilizado, los estudiantes modifican las medidas de las aristas, comparan diferentes configuraciones y seleccionan aquella que resulte en la menor área superficial. En esta tarea, los estudiantes colaborarán en grupos para diseñar y verificar cuál de las configuraciones de tamaños de aristas permite envolver el prisma con la menor cantidad de material.

### *Requisitos*

Para realizar esta tarea con éxito, el estudiante debe tener un dominio previo de los conceptos relacionados con los elementos de un prisma, como las aristas, bases y vértices. Es importante que el estudiante determine el procedimiento para encontrar el área superficial del prisma recto de base cuadrangular mediante su fórmula. Además, se requiere que el estudiante pueda identificar y extraer la información clave del enunciado.

### *Aportes de la tarea al objetivo de aprendizaje*

La tarea permite que los estudiantes desarrollen la habilidad para calcular la cantidad mínima de área superficial. Ellos comparan las áreas superficiales resultantes al variar las dimensiones de las aristas del prisma recto, con el objetivo de identificar cuál de estas configuraciones optimiza el uso del material.

### *Formulación de la tarea*

A continuación, presentamos la formulación de la tarea. Sugerimos, que el profesor entregue una fotocopia a cada grupo de estudiantes. El material para imprimir la tarea se encuentra en el anexo 6.

*Tarea 2.1 Envolver bloques.* Una compañía de juguetes planea comercializar en Colombia un set de bloques de alfabeto inglés para niños que estudian en colegios bilingües, como se ilustra en la figura. Cada bloque es un cubo cuyas aristas miden 1 pulgada (1 in).



La compañía quiere organizar los 24 bloques en forma de un prisma rectangular y luego envolverlos en papel para facilitar su transporte. Reúnase con un compañero para discutir y proporcionar una respuesta conjunta a la siguiente pregunta: ¿qué arreglo recomendarían a la compañía de juguetes en el que se use la menor cantidad de papel? Antes de proporcionar una respuesta, asegúrense de que su solución requiera la menor cantidad de material en comparación con las propuestas de sus compañeros. Justifiquen su elección.

### *Conceptos y procedimientos*

La tarea 2.1 Envolver bloques, aborda tanto conceptos como procedimientos. En cuanto a los conceptos, se enfoca en la base, la altura, las aristas y las dimensiones de un prisma. En cuanto a los procedimientos, aborda el cálculo del área superficial de prismas rectos de base cuadrangular mediante su fórmula y la comparación de los resultados obtenidos.

### *Sistemas de representación que se activan*

En la tarea 2.1 Envolver bloques, los estudiantes emplean el sistema de representación simbólico cuando sustituyen los valores de las medidas de las aristas del prisma en la fórmula del área superficial, similar al procedimiento utilizado en la tarea 1.2 Decorando el robot de ocho. Además, los estudiantes también utilizan el sistema de representación geométrico cuando diseñan o representan los distintos prismas que consideran que emplean la menor cantidad de área superficial mediante el uso de GeoGebra.

### *Contextos PISA en los que se sitúa la tarea*

La tarea se sitúa en un contexto profesional según el marco de referencia PISA 2012, pues involucra una situación que requiere medir y tomar decisiones relacionadas con el trabajo en grupo.

### *Materiales y recursos que se utilizarán*

La tarea requiere los materiales habituales de la clase, como regla, lápiz, borrador, hojas de cuaderno y la formulación de la tarea impresa.

### *Agrupamiento e interacción en el aula*

En la primera parte de la tarea, los estudiantes trabajarán en parejas. El propósito de esta agrupación es que las parejas discutan estrategias de solución y lleguen a acuerdos sobre las medidas óptimas que ofrecen la mejor propuesta de solución. En la segunda parte de la tarea, cada grupo presentará a toda la clase la justificación de sus elecciones. Finalmente, toda la clase determinará cuál grupo cumplió con el reto.

### *Temporalidad*

La tarea 2.1 Envolver bloques se divide en dos etapas, con una duración total de 90 minutos. En la primera etapa, el profesor introduce el tema a los estudiantes, presenta la meta que se busca alcanzar y organiza las parejas de trabajo según su criterio. En la segunda etapa, los estudiantes trabajan en parejas para buscar conjuntamente la solución a la situación planteada. Una vez encontrada, la presentan a la clase, ya sea en el tablero o mediante una cartelera.

### *Errores en lo que puede incurrir el estudiante y ayudas*

Al abordar la tarea, el estudiante puede incurrir en errores que cuentan con sus respectivas ayudas. El estudiante puede, al organizar las medidas del prisma, descomponer dos caras continuas tomándolas como una sola (E2). En este caso, el profesor podría decir al estudiante: ¿cuántas caras del prisma estás tomando con esa longitud? (A1). Luego, cuando el estudiante usa el software GeoGebra para diseñar el prisma y determinar el área superficial según las aristas, puede incurrir en el error de identificar el área de una cara del prisma en vez del área total (E90). En este caso,

el profesor puede dar la indicación de seleccionar las etiquetas que determinan el área de cada cara y verificar si corresponde con la etiqueta del área total (A43). Por otro lado, si el estudiante decide medir el área superficial analíticamente a partir de las medidas de las aristas, puede incurrir en el error de hallar el perímetro de cada cara del prisma en lugar del área (E56). Para esta situación, el profesor podría decirle al estudiante: “lo que ha hallado es la suma de todas las dimensiones. Esto corresponde al perímetro y lo que necesitamos es el área.” (A45). Por último, el estudiante también puede incurrir en un error relacionado con comparar solo algunas áreas superficiales del conjunto de prismas dado (E44) a lo que el profesor puede solicitar que señale los prismas que está comparando: ¿son todos los prismas posibles? (A41). Se sugiere al lector revisar el anexo 5, en el que presentamos todas las ayudas.

### Grafo de criterios de logro de la tarea

En la figura 10, mostramos el grafo de criterios de logro correspondiente a la tarea, elaborado a partir del grafo de criterios de logro del objetivo 2 (ver figura 6). Resaltamos las distintas opciones que tiene un estudiante para abordar la tarea.

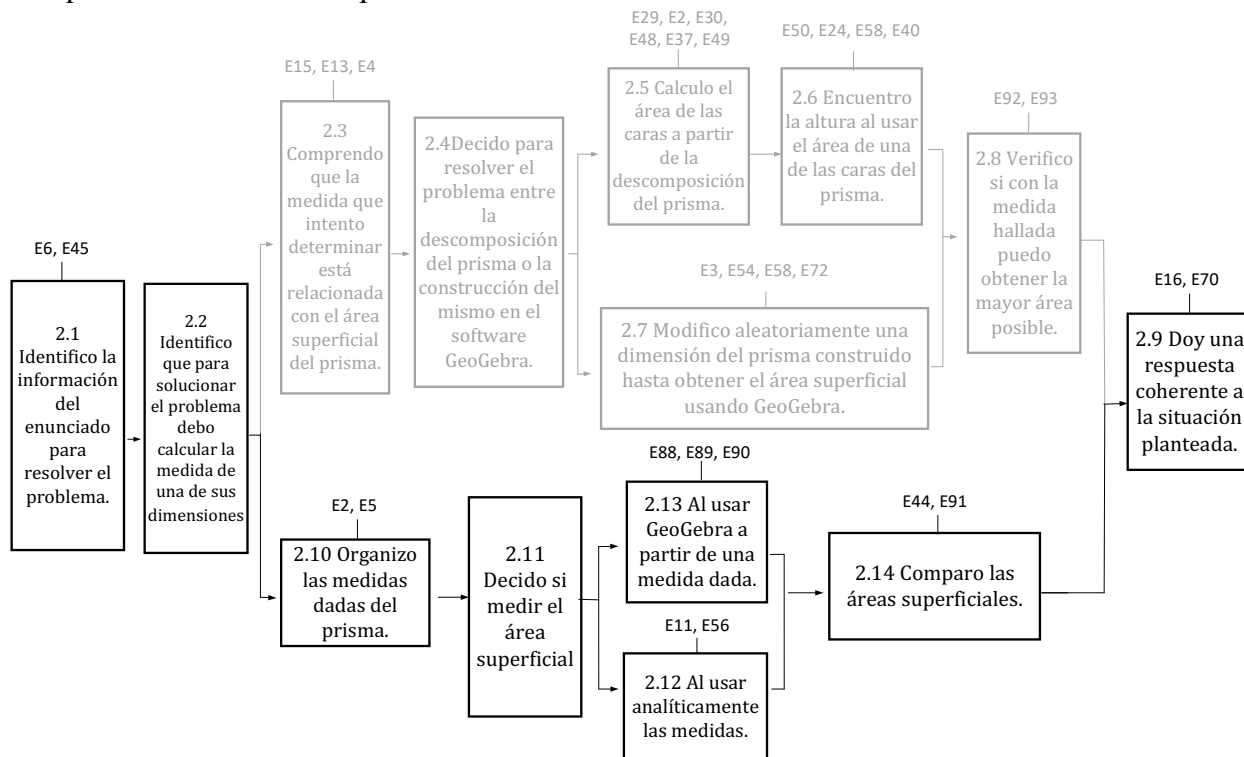


Figura 10. Grafo de criterios de logro para la tarea 2.1 Envolver bloques.

En el grafo de criterios de logro para la tarea, los cuadros resaltados indican la estrategia de solución o la secuencia de procedimientos previstos para abordarla. Como es común en la mayoría de las tareas, el estudiante identifica la información necesaria del enunciado del problema. Posteriormente, procede a organizar las medidas de los distintos prismas y luego decide si halla el área superficial mediante el uso del software GeoGebra o de manera analítica al usar las medidas de

las aristas de los distintos prismas, por medio de la fórmula del área superficial para prismas rectos de base cuadrangular. Finalmente, el estudiante, luego de comparar los resultados de los distintos prismas, debe explicar o justificar la validez de sus resultados con una respuesta coherente en relación con el contexto del problema.

#### *Actuación del profesor*

El profesor presenta la tarea junto con su correspondiente grafo de criterios. Además, distribuye la formulación de la tarea en hojas impresas. Durante la actividad, el profesor fomenta la interacción dentro de las parejas de trabajo para facilitar el intercambio de ideas y la colaboración. Posteriormente, selecciona al azar un estudiante para que exponga ante el resto de la clase el proceso conseguido en su grupo, lo que estimula una reflexión colectiva sobre los resultados obtenidos. En esta fase, el profesor revisa los resultados de cada grupo, orienta la revisión y decide junto con la clase cuál o cuáles grupos obtuvieron la respuesta correcta que utiliza la menor cantidad de material.

#### *Sugerencias metodológicas*

Recomendamos al profesor que ofrezca una de las ayudas diseñadas cuando algún estudiante incurra en errores, de manera que pueda identificar cuál criterio de logro presenta mayor dificultad para los estudiantes. El profesor debe fomentar en los estudiantes la importancia de verificar y asegurarse de que la solución obtenida sea correcta. Además, sería recomendable que el profesor supervise que los estudiantes realicen varios diseños y no se queden solo con el primero que conciben. Asimismo, es importante que completen la actividad dentro del plazo establecido, lo que les permitirá compartir las respuestas con sus compañeros en el momento indicado.

Si los estudiantes tienen dificultades para iniciar la actividad, el profesor puede ofrecerles orientación sobre cómo organizar los bloques, asegurándose de no sugerir la opción que requiera menos material para envolverlos. En cuanto al trabajo en grupo, es fundamental que las parejas no se comuniquen con otros grupos, de manera que no se limiten únicamente a superar la cantidad mínima de material utilizada por otro grupo o que recurran a copiar el trabajo de sus compañeros.

#### *Evaluación*

El resultado de la tarea consiste en que los estudiantes realicen el diseño del prisma que utiliza menos área superficial de material asegurándose de que este cumpla con las condiciones establecidas en el problema. Asimismo, se recomienda que el profesor observe la participación de cada miembro del grupo para brindar retroalimentación al inicio de la siguiente tarea de aprendizaje. Los errores en los que los estudiantes incurran proporcionan al profesor la oportunidad de evaluar tanto el desempeño individual como el grupal de manera cuantitativa.

## **2.2. Tarea Rediseña el robot**

A continuación, describiremos los elementos de la tarea 2.2 Rediseña el robot.

### *Meta de la tarea*

Con esta tarea de aprendizaje, los estudiantes determinan la altura de un prisma que tiene un área superficial dada, al emplear procedimientos que implican el uso de expresiones algebraicas o con el software GeoGebra. Durante esta actividad, los estudiantes trabajarán en grupos y utilizarán los mismos prismas que construyeron para la tarea 1.1 El robot de ocho. Los prismas mencionados se modificarán con el fin de aprovechar al máximo la superficie específica asignada a cada componente del robot.

### *Requisitos*

Para abordar esta tarea, el estudiante debe haber completado previamente la tarea 1.1 El robot de ocho, ya que necesitará las piezas construidas. Además, es fundamental que el estudiante cuente con los conocimientos previos utilizados en la tarea anterior, así como la capacidad de utilizar expresiones algebraicas para despejar variables en ecuaciones lineales. Como requisito adicional, el estudiante deberá ser capaz de identificar y extraer la información relevante del enunciado, para establecer una conexión adecuada entre la respuesta y la situación planteada.

### *Aportes de la tarea al objetivo de aprendizaje*

En esta actividad, los estudiantes identifican la variación de la dependencia al relacionar el tamaño de las aristas con el área superficial resultante del prisma recto, mediante la manipulación de las dimensiones del prisma, particularmente su altura. Posteriormente, utiliza las medidas de las aristas y la fórmula del área superficial, para establecer una relación con los resultados obtenidos.

### *Formulación de la tarea*

A continuación, presentamos la formulación de la tarea que el profesor debe entregar en una fotocopia al grupo de estudiantes. El material para imprimir la tarea se encuentra en el anexo 6.

*Tarea 2.2 Rediseña el robot.* El profesor les ha devuelto la pieza del robot que construyeron en la tarea 1.1 El robot de ocho para que la rediseñen. Esta vez, deben asegurarse de que la nueva pieza tenga una base cuadrada de 10 cm de lado y utilice la misma cantidad de material. La tarea consiste en determinar la altura adecuada para la nueva pieza, al mantener la misma área superficial. Verifiquen que con esta nueva medida se conserva la misma área superficial y justifiquen su respuesta. No es necesario volver a construir la pieza.

### *Conceptos y procedimientos*

La tarea 2.2 Rediseña el robot, utiliza los conceptos relacionados con las definiciones de los elementos de un prisma, como la base, la altura, las aristas y las medidas del prisma. En cuanto a los procedimientos, emplea la fórmula del área superficial de prismas rectos de base cuadrada para encontrar una de las medidas desconocidas, específicamente la altura del prisma.

### *Sistemas de representación que se activan*

La tarea incluye el sistema de representación simbólico cuando el estudiante sustituye el área superficial y algunas de las medidas como las aristas de la base en la fórmula del área superficial, para determinar la altura del nuevo prisma. También, usa el sistema ejecutable al presentar a los demás estudiantes el nuevo diseño ajustado con la altura encontrada.



### *Contextos PISA en lo que se sitúa la tarea*

La tarea se enmarca en un contexto científico según el marco de referencia de PISA 2012, ya que implica la aplicación de fórmulas de área superficial en situaciones del mundo real, que demandan medición y manipulación de resultados para llegar a conclusiones.

### *Materiales y recursos que se utilizarán*

Los estudiantes deben tener disponibles las nuevas piezas construidas en la tarea 1.1 El robot de ocho. Además, la tarea requiere de materiales habituales de la clase, como regla, lápiz, borrador, hojas de cuaderno y la formulación de la tarea impresa.

### *Agrupamiento e interacción en el aula*

En la primera parte de la tarea, los estudiantes se dividen en los seis grupos conformados en la tarea 1.1 El robot de ocho, con el fin de debatir estrategias de solución para llegar acuerdos sobre las medidas óptimas que brindan la mejor propuesta de solución. En la segunda parte de la tarea, cada grupo presenta ante toda la clase la justificación de sus elecciones. El profesor selecciona al azar a un integrante para exponerlas.

### *Temporalidad*

La tarea se estructura en dos etapas, que duran 90 minutos en total. En la primera etapa, el profesor presenta los objetivos que se pretenden alcanzar, el grafo de criterios de logro, seguido de una organización del salón por parte de los estudiantes y la entrega de la pieza del robot por parte del profesor. Luego, los estudiantes trabajan en grupos para buscar conjuntamente una solución a la situación planteada. Finalmente, en la segunda etapa, cada grupo elige al azar a uno de sus miembros para presentar las conclusiones alcanzadas como equipo.

### *Errores en los que puede incurrir el estudiante y ayudas*

Al abordar la tarea, el estudiante puede incurrir en errores que cuentan con sus respectivas ayudas. El estudiante puede confundir el valor del área de una cara con una de las aristas del prisma (E50). En este caso, el profesor podría decir al estudiante: de los datos que tienes en el enunciado, ¿cuáles te sirven para poder hallar el dato que no conoces? (A20). Por otro lado, si el estudiante decide modificar aleatoriamente una dimensión del prisma construido hasta obtener el área superficial mediante el software GeoGebra, puede incurrir en el error de fijar las aristas de la base y variar la altura del prisma sin tener en cuenta el área superficial dada (E54). Para esta situación, el profesor podría preguntar al estudiante: cuando empiezas a mover la altura, ¿a qué número debes llegar? (A21). Por último, el estudiante también puede incurrir en un error de verificar los resultados obtenidos por medio de la comparación entre el área encontrada y una de las aristas del prisma, al omitir el área original del prisma (E93), a lo que el profesor puede decir: recuerda que la dimensión encontrada debe coincidir con el área superficial del prisma inicial (A46). Se sugiere al lector revisar el anexo 5, en el que presentamos todas las ayudas.

### Grafo de criterios de logro de la tarea

En la figura 11, mostramos el grafo de criterios de logro correspondiente a la tarea 2.2 Rediseña el robot, elaborado a partir del grafo de criterios de logro del objetivo 2 (ver figura 6). Resaltamos las distintas opciones que tiene un estudiante para abordar la tarea.

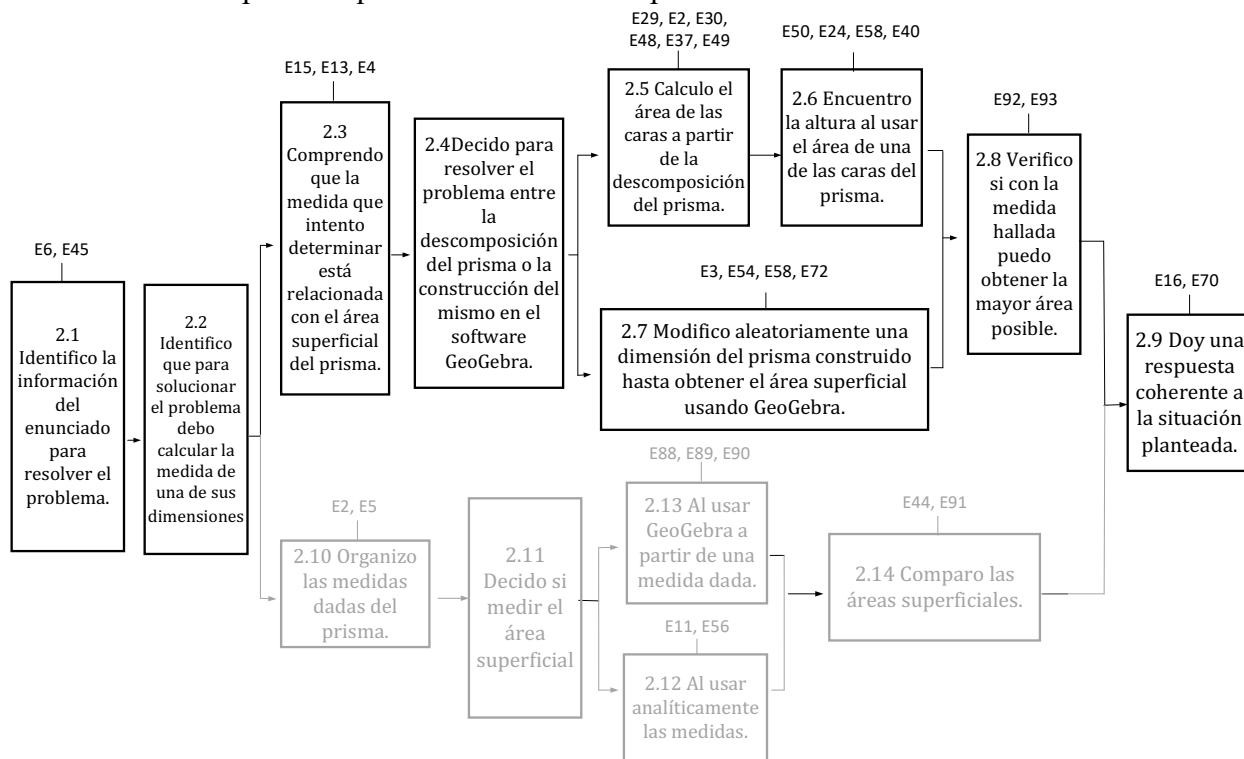


Figura 11. Grafo de criterios de logro para la tarea 2.2 Rediseña el robot

En el grafo de criterios de logro para la tarea 2.2 Rediseña el robot, los cuadros resaltados señalan las estrategias de solución o la secuencia de procedimientos previstos para abordar la tarea. Como es habitual en la mayoría de las tareas, el estudiante primero identifica la información necesaria del enunciado. Luego, procede a determinar si opta por descomponer el prisma para hallar la altura o si, por el contrario, utiliza el software GeoGebra para construir el prisma y, con él, determinar la altura requerida. Finalmente, el estudiante debe verificar si con la altura hallada puede obtener la cantidad de área superficial requerida por el problema. Además, debe de explicar o justificar la validez de sus resultados con una respuesta coherente en relación con el contexto del problema.

### Actuación del profesor

El profesor da inicio a la clase con la meta de la tarea, presenta el grafo de los criterios de logro, solicita a los estudiantes la organización del salón en los grupos de trabajo que se formaron en la tarea 1.1 El robot de ocho y entrega la pieza del robot junto con la formulación de la tarea. Luego, el profesor guía a sus estudiantes en función de las contribuciones hechas durante la discusión de cada grupo.

Además, el profesor les indica que, para realizar la tarea, pueden usar GeoGebra o, si lo desean, pueden ajustar analíticamente las longitudes del material. En la discusión que se da con todo el grupo de estudiantes, el profesor dirige las conclusiones hacia la solicitud de los procedimientos empleados para determinar la altura del nuevo prisma, mediante preguntas como: ¿por qué afirman que esa es la única altura posible para el prisma? y ¿qué conclusiones pueden extraer del proceso realizado?

### *Sugerencias metodológicas*

Recomendamos que el profesor pase por todos los grupos y verifique si todos los estudiantes están aportando ideas sobre cómo obtener la altura del nuevo prisma. Además, el profesor puede realizar preguntas para corroborar si los estudiantes utilizan el área superficial de la pieza original del robot. También, recomendamos al lector revisar el anexo 5, ya que proporciona ayudas diseñadas específicamente para superar errores en los que puedan incurrir los estudiantes. De esta manera, se asegura el éxito de la tarea.

En caso de que los estudiantes encuentren dificultades al verificar si la nueva altura del prisma produce un área superficial correspondiente a la de la pieza del robot y obtengan un resultado aproximado debido a no considerar la mayor cantidad de decimales durante los despejes de variables, el profesor puede sugerirles que utilicen resultados aproximados o que mantengan las fracciones numéricas expresadas en su forma original para tener la mayor veracidad posible en sus respuestas.

### *Evaluación*

El objetivo principal de esta tarea es que el estudiante pueda determinar alguna de las medidas faltantes del prisma a partir del área superficial proporcionada. Por lo tanto, es necesario que el estudiante domine los procedimientos detallados en los criterios de logro relacionados con el despeje de ecuaciones lineales (CdL2.5 y CdL2.6). En caso de que el estudiante elija utilizar el software GeoGebra para determinar el tamaño de la arista faltante, es necesario que comprenda cómo la variación de las medidas afecta el resultado del área superficial (CdL2.7).

Además, consideramos importante que los estudiantes verifiquen sus resultados. Aquellos que llevan a cabo la verificación demostrarán haber comprendido la relación de dependencia planteada en la tarea, ya que plasman sus ideas y las comparten con los demás.

A partir de los informes escritos de los estudiantes, el profesor puede identificar los errores más comunes y así evaluar en qué medida se logran los objetivos de aprendizaje. Asimismo, se sugiere que el profesor observe la participación de cada integrante del grupo para proporcionar retroalimentación al inicio de la siguiente sesión.

## 5. EXAMEN FINAL

En esta sección, presentamos el examen final diseñado para evaluar en qué medida los estudiantes alcanzan los objetivos de aprendizaje establecidos en la unidad didáctica. El examen consta de tres tareas. La primera tarea del examen tiene como objetivo evaluar si el estudiante logra alcanzar el primer objetivo relacionado con la representación de prismas mediante su construcción y la representación del área superficial a partir de los recubrimientos. Esta tarea consiste en dos preguntas, cada una centrada en estas representaciones.

La segunda y tercera tareas del examen pretenden evaluar si el estudiante alcanza el segundo objetivo, que consiste en comprender la relación de dependencia entre el área superficial y las medidas de las aristas. Para describir el examen final, presentamos su formulación, la rúbrica de evaluación con base en los criterios de logro para cada uno de los objetivos y algunas sugerencias para su implementación.

### 1.1. Formulación

A continuación, presentamos la formulación del examen final. El profesor debe entregar una fotocopia a cada estudiante. El material para imprimir está disponible en el anexo 7.

*Tarea 1.* Las asignaturas de Artes y Matemáticas se han unido para proponer un reto a los estudiantes. El reto consiste en diseñar una escultura con forma de prisma rectangular utilizando bloques de arcilla. La escultura debe tener las siguientes dimensiones: 30 centímetros, 12 centímetros y 15 centímetros. No hay un requisito sobre cuál de las dimensiones corresponde a la longitud, el ancho y la altura.

Cuando la escultura esté terminada, se aplicará una capa especial de resina transparente sobre su superficie. Esta capa permitirá que se adhieran fotografías impresas en papel especial. El propósito es adornar las caras visibles del prisma (las que no están en contacto con el suelo) con fotografías que representen los mejores momentos vividos en el colegio. Dichas imágenes miden 3x4 cm.

Pregunta 1: Muestra el diseño que elegiste para la escultura, indicando las dimensiones que asignaste para la longitud, el ancho y la altura.

Pregunta 2: ¿Cuántas fotografías en total podrás colocar en tu escultura? Explica tu razonamiento.

*Tarea 2.* Camilo un talentoso pintor, está trabajando en su última obra maestra: un prisma recto de base rectangular. Ha utilizado  $646 \text{ m}^2$  de pintura para cubrir la superficie del prisma. La base tiene un área de  $240 \text{ m}^2$  y un lado de la base rectangular mide 3 m. ¿Cuál es la altura del prisma que ha creado Camilo? Recuerda mostrar tu trabajo y justificarlo.

*Tarea 3.* Un científico está diseñando un recipiente para realizar un experimento con fluidos. Tiene tres opciones de prismas para construirlo:

Recipiente 1: Tiene una base rectangular con dimensiones de 10 metros, 5 metros y una altura de 4 metros.

Recipiente 2: Tiene una base cuadrada de 12 metros cuadrados y una altura de 6 metros.

Recipiente 3: La base de este prisma rectangular tiene un lado de 6 metros, 2 metros y una altura de 8 metros.

El científico necesita determinar cuál de los recipientes proporcionará la menor área superficial, ya que esto afectará la eficacia del experimento y la distribución del fluido, por causa de su alto costo y su dificultad en la importación.

¿Cuál de los recipientes proporciona la menor área superficial? Justifica tu respuesta y explica por qué este recipiente sería la mejor opción para el experimento con fluidos.

## 1.2. Rúbrica de evaluación

Para evaluar y calificar el examen final, hemos desarrollado una rúbrica específica para cada objetivo. El propósito de estas rúbricas es establecer una relación entre los desempeños según la escala de valoración nacional del MEN, los criterios de logro y los posibles errores asociados a cada uno. Esto brinda al profesor la flexibilidad de definir el nivel de desempeño de cada estudiante en el examen final. Además, le permite diseñar un plan de mejora personalizado para aquellos estudiantes que hayan obtenido un rendimiento bajo. A continuación, en la tabla 5, presentamos la rúbrica de evaluación correspondiente al primer objetivo.

Tabla 5  
*Rúbrica de evaluación primer objetivo*

Nivel de desempeño	Indicadores
Superior	El estudiante activa todas las secuencias previstas en el camino de aprendizaje del objetivo, sin incurrir en errores.
	El estudiante realiza la construcción y el recubrimiento del prisma teniendo en cuenta sus elementos.
Alto	El estudiante incurre en errores menores como confundir la base con la altura (E11). Sin embargo, pueden continuar con la construcción del prisma.
	El estudiante dibuja el prisma sin reflejar la realidad (E70). No obstante, esto no le impide realizar los recubrimientos necesarios.

Tabla 5  
*Rúbrica de evaluación primer objetivo*

Nivel de desempeño	Indicadores
Básico	<p>El estudiante entiende que la primera tarea implica la construcción y el recubrimiento de prismas (CdL1.2), pero incurre en algunos errores: no considera información relevante para el desarrollo posterior del problema (E6), construye el prisma sin considerar las características necesarias para formar las aristas (E86, E4, E59, E61 y E72) o realiza el recubrimiento superponiendo los polígonos o las caras del prisma (E81).</p> <p>El estudiante logra realizar la construcción del prisma de manera adecuada, realiza el recubrimiento de una de las caras y deduce de manera aproximada las de las demás.</p>
Bajo	<p>El estudiante enfrenta dificultades al identificar los datos básicos del problema como el no considerar las unidades de medida (E45).</p> <p>Identifica como adyacentes las bases del prisma para la construcción o al momento de la separación de las caras (E4 y E72).</p> <p>Construye un desarrollo plano que no corresponde al de un prisma (E60 - E62).</p> <p>Construye un prisma que es oblicuo (E77).</p> <p>Realiza la construcción del prisma, pero no obtiene ninguna conclusión sobre la validez de este (E70).</p> <p>El estudiante presenta dificultad para identificar qué dimensiones opera para encontrar la cantidad de recubrimientos, incluso si lo hace uno a uno (E82 y E83).</p> <p>El estudiante incurre en algunos de los errores mencionados anteriormente, razón por la cual no puede continuar con el desarrollo de la tarea evaluativa.</p>

*Nota.* E: Errores

En la tabla 5, detallamos los niveles de desempeño de la escala nacional, parte de los criterios y los posibles errores en los que un estudiante pueda incurrir. El profesor asignará el nivel de desempeño superior a aquellos estudiantes que resuelvan las situaciones planteadas sin dificultades. Los estudiantes que enfrenten dificultades en los criterios de logro, ya sea al inicio o al final, recibirán un nivel de desempeño alto. Se clasificará como rendimiento básico a aquellos que tengan dificultades para representar el prisma y llevar a cabo los recubrimientos. Por último, aquellos que enfrenten dificultades específicamente en relacionar los recubrimientos con la fórmula del área superficial del prisma se ubicarán en un nivel de desempeño bajo.

Estos niveles de desempeño se han definido en función de la estructura matemática y el grafo de criterios de logro para el objetivo 1, en los que se da mayor importancia a los procedimientos de construcción y recubrimiento del prisma. A continuación, presentamos la tabla 6 que contiene la rúbrica de evaluación del segundo objetivo.

Tabla 6  
*Rúbrica de evaluación segundo objetivo*

Nivel de desempeño	Indicadores
Superior	<p>El estudiante activa todas las secuencias previstas en el camino de aprendizaje del objetivo, sin incurrir en errores.</p> <p>El estudiante justifica de manera precisa y completa los resultados obtenidos al resolver problemas de optimización del área superficial de prismas rectos, mediante el uso de diferentes estrategias.</p>
Alto	<p>El estudiante presenta dificultad en la precisión al dibujar el prisma, esto no le impide llegar a la solución correcta del problema.</p> <p>El estudiante, en la segunda tarea, aplica la fórmula del área superficial y despeja la altura del prisma, proceso en el que puede incurrir en errores menores al realizar los cálculos (E92), pero, aun así, llega a una respuesta razonable.</p> <p>El estudiante, en la tercera tarea, logra determinar el área superficial de todos los prismas, proceso en el que puede incurrir en errores menores al realizar los cálculos (E44) y esto no le impide obtener conclusiones al comparar las áreas de los prismas.</p>
Básico	<p>El estudiante puede reconocer que la tarea 2 y 3 tienen relación con hallar una dimensión o hallar el área superficial (CdL2.2) para optimizar el área superficial del prisma, pero incurre en los siguientes errores: no considera información relevante necesaria para usar después en el desarrollo del problema (E6), organiza las medidas del prisma, pero confunde las aristas con las diagonales (E5 y E11), usa la altura de la base en lugar de la altura del prisma (E88 y E89) o compara solo con una cara superficial (E44).</p> <p>El estudiante logra encontrar la dimensión faltante o comparar las áreas superficiales, de manera exitosa, aunque aproximada.</p>
Bajo	<p>El estudiante expone dificultades para identificar los datos relevantes del problema de manera que confunde una de las longitudes del prisma (E6).</p> <p>El estudiante presenta dificultad para establecer una relación entre las dimensiones del prisma y su área superficial (E15, E13 y E4), lo que conlleva a no poder plantear una estrategia para encontrar la altura del prisma</p>

Tabla 6  
*Rúbrica de evaluación segundo objetivo*

Nivel de desempeño	Indicadores
	<p>(E29, E48 y E50).</p> <p>El estudiante manifiesta dificultad para diferenciar entre área y perímetro o solo halla el área lateral y no el área superficial (E56 y E90).</p> <p>El estudiante evidencia dificultad para comparar las áreas superficiales de los diferentes prismas, para determinar cuál de ellos tiene mayor área superficial (E91).</p> <p>El estudiante muestra dificultad para obtener conclusiones al determinar la altura o el área superficial de los prismas (E70).</p> <p>El estudiante incurre en algunos de los errores mencionados anteriormente, razón por la cual no puede continuar con el desarrollo de las tareas evaluativas.</p>

*Nota.* E: Error

En la tabla 6, detallamos los niveles de desempeño según la escala nacional. Consideramos los criterios de logro y los posibles errores en los que pueda incurrir un estudiante. El profesor asignará el nivel de desempeño superior a aquellos estudiantes que resuelvan las situaciones dadas sin dificultades. Se otorgará un nivel de desempeño alto a los estudiantes que, a pesar de incurrir en errores menores en los cálculos, lleguen a una respuesta razonable. El nivel de desempeño básico se asignará a los estudiantes que tengan dificultades al no considerar información relevante necesaria para resolver el problema, así como al utilizar descomposición o ensayo y error para encontrar las medidas de un prisma dado su área superficial. Por último, el nivel de desempeño bajo se asignará a aquellos estudiantes que presenten dificultades para establecer una relación entre las dimensiones del prisma y su área superficial.

### 1.3. Sugerencias metodológicas

Al ser una tarea de evaluación, consideramos importante que el examen final se realice de manera individual y que el profesor indique a sus estudiantes que lleven una ficha bibliográfica con el listado de fórmulas para calcular el área superficial de prismas rectos o con información que ellos consideren necesaria. Es importante que el estudiante tenga claras las instrucciones y se dé tiempo suficiente para que los estudiantes resuelvan el examen totalmente. Además, el profesor debe supervisar el progreso de los estudiantes y responder preguntas o aclarar dudas técnicas que pueden ayudar a evitar confusiones en la formulación de las tareas evaluativas. Tras entregar resultados, es conveniente realizar una retroalimentación de las tareas del examen final.



## 6. CONCLUSIONES

Este informe surge del análisis detallado de los aspectos cognitivos y afectivos que pueden influir en el proceso de enseñanza y aprendizaje del área de prismas rectos en estudiantes de octavo grado. Elegimos este tema debido a su relevancia transversal en diferentes grados, áreas y asignaturas, así como su importancia en la comprensión y resolución de múltiples situaciones cotidianas y en disciplinas diversas como la arquitectura. Además, el área de prismas está ligada a conceptos como expresiones algebraicas, perímetros, volúmenes, el estudio de sólidos geométricos y sus vistas isométricas, entre otros.

Nuestro enfoque se fundamenta en los documentos curriculares nacionales e internacionales, tales como los Estándares Básicos en Competencias de Matemáticas (MEN, 2006), Derechos Básicos de Aprendizaje (MEN, 2016) y el marco conceptual PISA 2012 (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2013). Además, nuestra propuesta está alineada con el plan de área del colegio Colsubsidio Norte de Bogotá. Inicialmente, realizamos un análisis de contenido para identificar los fundamentos del área de prismas, desde sus raíces, en los que encontramos que los primeros registros de discusión sobre geometría y áreas datan de la antigua Grecia, con matemáticos como Euclides, quien escribió “Los Elementos” alrededor del siglo III a.C. En este trabajo, Euclides estableció los fundamentos de la geometría euclidiana, la medición de áreas y volúmenes de diferentes figuras geométricas.

Posteriormente, nos centramos en comprender el proceso de aprendizaje de los estudiantes, para establecer objetivos cognitivos y afectivos, con posibles obstáculos que pudieran presentarse en su camino. Con esta información, diseñamos tareas de aprendizaje secuenciales y evaluaciones para medir el progreso de los estudiantes a lo largo de la unidad didáctica. Tras llevar a cabo estas actividades y análisis, elaboramos la primera versión de la unidad didáctica. Durante su implementación, evaluamos el logro de los objetivos de aprendizaje y afectivos, y ajustamos la unidad didáctica según los resultados obtenidos. En particular, realizamos modificaciones en los enunciados de las tareas de aprendizaje para evitar ambigüedades en las interpretaciones que pueden hacer los estudiantes y también ajustamos procedimientos que consideramos importantes en la comprensión del tema.

Nuestra propuesta pretende fomentar en los estudiantes una comprensión integral del concepto de área, tanto en figuras planas como en tridimensionales, mediante el recubrimiento de sólidos. Además, nuestro objetivo es que los estudiantes comprendan la relación intrínseca entre

las dimensiones del prisma y su área superficial, lo que les brindará una comprensión más profunda de este concepto. También fomentamos capacidades matemáticas fundamentales como el diseño de estrategias de resolución de problemas, la comunicación, la representación de prismas, el razonamiento y la argumentación matemática.

Para futuras mejoras, recomendamos incluir tareas que apliquen el concepto de áreas de prismas en diferentes contextos como el científico, así como explorar las áreas de prismas con bases triangulares o poligonales para enriquecer aún más el proceso educativo de los estudiantes.

Por último, reflexionamos sobre los aprendizajes obtenidos durante el proceso de diseño, implementación y evaluación de la unidad didáctica. Fortalecimos nuestros conocimientos sobre el currículo institucional y nacional, así como nuestra práctica pedagógica en el aula, al diseñar tareas que fomentan el uso del conocimiento en diversos contextos y al identificar diferentes formas de representar los temas matemáticos. Además, hemos aprendido a evaluar el aprendizaje de los estudiantes por medio de observaciones de su desempeño mediante las tareas de aprendizaje.

## 7. LISTADO DE ANEXOS

A continuación, presentamos el listado de anexos que acompañan este documento.

Tabla 5

*Listados de anexos*

A	Descripción
1	Listado completo de errores en los que podrían incurrir los estudiantes durante la implementación de cada una de las tareas de aprendizajes. Los errores se encuentran agrupados en tres dificultades.
2	Listado de criterios de logro de los objetivos de aprendizaje de la unidad didáctica.
3	Ficha de tarea diagnóstica.
4	Tarea diagnóstica imprimible.
5	Ficha de tareas de aprendizajes, presentamos los elementos de las tareas.
6	Tareas de aprendizaje imprimibles, presentamos las formulaciones de las tareas para imprimir y usarse con los estudiantes.
7	Examen final imprimible.

*Nota.* A: Anexo

## 8. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Cañadas, M. C., Gómez, P., & Pinzón, A. (2018). Análisis de contenido. En P. Gómez (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 53–112). Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes.
- Cerdán, F. (2010). Las igualdades incorrectas producidas en el proceso de traducción algebraico: un catálogo de errores. *PNA*, 4(3), (pp.99–110). Valencia, España: Universidad de Valencia.
- Gómez, P. (2018). *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares*. Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes.
- González, M. J., & Gómez, P. (2018). Análisis cognitivo. En P. Gómez (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 113–196). Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias*. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional de Colombia.
- Ministerio de Educación Nacional. (2015). *Derechos Básicos de Aprendizaje en Matemáticas*. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional de Colombia.
- Olmo, M. Á., Moreno, M. F., & Gil Cuadra, F. (1993). Formalización matemática del área y volumen. En, M. Á Olmo, M. F. Moreno y F. Gil (Eds.), *Superficie y volumen: algo más que el trabajo con fórmulas* (pp. 141–150). Madrid: Editorial Síntesis.