



MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

LEY DE SENOS

EDWIN GUTIÉRREZ, JORGE PAREDES Y NORA BENÍTEZ

BOGOTÁ, MAYO DE 2024

En el nivel de educación media, la Ley de senos crea un vínculo entre la comprensión teórica y la aplicación práctica de las matemáticas, especialmente en los campos de la geometría y la trigonometría. La Ley de senos establece una relación entre los lados y los senos de los ángulos de un triángulo. En ese sentido, hemos diseñado esta unidad didáctica con la finalidad de brindar a los estudiantes de grado décimo las herramientas necesarias para explorar y resolver problemas geométricos relacionados con triángulos no rectángulos aplicados a diferentes contextos.

Los conceptos y las descripciones que se abordan en este documento son producto del trabajo de análisis que realizamos como grupo 2 de la undécima cohorte de la Maestría en Educación Matemática de la Universidad de los Andes en Bogotá, Colombia.

Con esta unidad didáctica, pretendemos contribuir con la propuesta de planificación del profesor que consideramos como un pilar que promueve la enseñanza de las matemáticas escolares y el desarrollo del currículo. Además, esperamos fomentar el aprendizaje de los estudiantes mediante la implementación de un conjunto de tareas diseñadas para fortalecer el manejo de los conceptos y procedimientos que estos desarrollan en situaciones relacionadas con la Ley de senos. En esta unidad didáctica, asumimos que analizar las dificultades y los errores en que incurren los estudiantes proporciona información valiosa para lograr el fortalecimiento de los aprendizajes.

En cuanto a los contextos socioeconómicos y culturales de la institución en que implementamos esta unidad didáctica, encontramos que los estudiantes de grado décimo, con edades entre los 14 y 16 años, pertenecen a los estratos 1, 2 y 3, provenientes en su mayoría de las localidades 1 y 2 de la zona urbana de la ciudad de Santa Marta. El nivel de desempeño académico de los estudiantes de la institución es sobresaliente, de acuerdo con los resultados de las Pruebas Saber 11 aplicadas por el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES).

En Colombia, los Estándares Básicos de Competencias (EBC) y los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) son referentes de calidad educativa que establecen los aprendizajes esperados en los estudiantes para las diferentes áreas del saber. En este contexto, la unidad didáctica responde al desarrollo de los EBC de matemáticas en cuanto contribuye con el desarrollo del pensamiento espacial y sistemas geométricos en el ciclo de grados 10 y 11. En particular, esperamos que los estudiantes propongan argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias. Además, consideramos abordar las evidencias de aprendizaje relacionadas con el DBA #4 del grado décimo, que permiten al estudiante reconocer, explorar, aplicar y modelar las razones y funciones trigonométricas a partir de situaciones contextualizadas. Finalmente, resaltamos que esta unidad didáctica contempla situaciones y problemáticas relacionadas con los entornos social e institucional de los estudiantes. Con esto, esperamos estimular la curiosidad de los estudiantes para abordar la solución de situaciones que les puedan resultar familiares, así como contribuir con el desarrollo de la motivación al tiempo que los estudiantes aprenden las matemáticas relacionadas con la Ley de senos.

1. ANTES DE IMPLEMENTAR

En este primer apartado, presentamos la información necesaria para comprender la estructura del diseño de la unidad didáctica. En esta información, abordamos la identificación y contextualización del tema, el análisis de contenido, el análisis cognitivo y la estructura general de la unidad didáctica.

1. ARTICULACIÓN DE LOS CONTENIDOS

Analizamos tres aspectos para el desarrollo didáctico del tema Ley de senos. Este análisis nos permitió reconocer los conceptos y procedimientos relacionados con el tema, las diferentes maneras para representarlo y los fenómenos o situaciones cotidianas que lo caracterizan. A continuación, describimos las características de cada uno de estos aspectos.

1.1. Estructura conceptual

Mediante el análisis conceptual, hemos identificado los contenidos asociados con el tema que comparten su estructura matemática. Esto nos permitió reconocer los elementos de este tema de las matemáticas escolares y de su campo conceptual. En la figura 1, presentamos el esquema de la estructura matemática del tema Ley de senos.

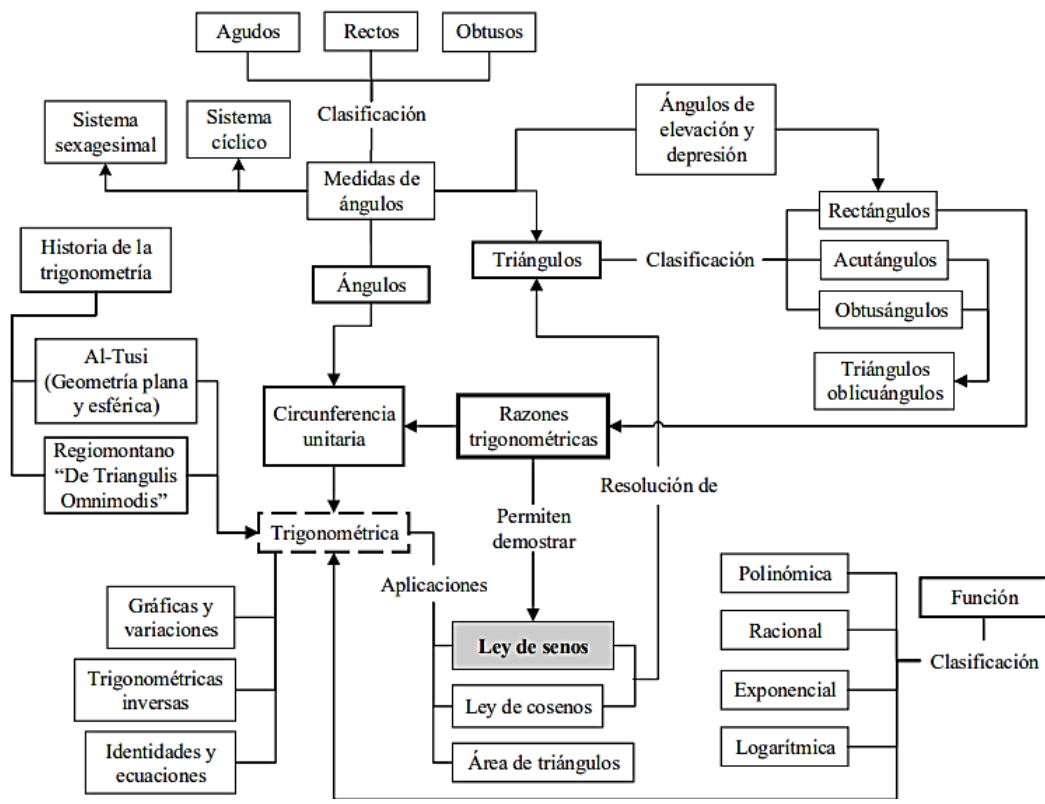


Figura 1. Esquema de la estructura matemática de la Ley de senos

En nuestra propuesta de esquema, utilizamos flechas para relacionar los conceptos que a nuestro juicio son los ejes de la estructura matemática. Contemplamos la revisión del origen y la evolución histórica del tema con los aportes de los matemáticos Al-Tusi y Regiomontano, respectivamente. Estos aportes han permitido un estudio detallado de las funciones trigonométricas, identificadas como el concepto central de nuestra estructura matemática y que diferenciamos visualmente con borde de guiones. Además, las funciones trigonométricas evalúan diferentes ángulos y sus valores numéricos se determinan con base en el análisis de la circunferencia unitaria. Para estudiar la circunferencia unitaria, se requiere conocimiento sobre las razones trigonométricas. También es fundamental entender los diferentes sistemas de medición de ángulos y cómo se clasifican los triángulos según sus ángulos interiores. Estos conceptos son necesarios para demostrar matemáticamente la Ley de senos que ubicamos como una aplicación de la función trigonométrica, puesto que posibilita analizar y resolver triángulos no rectángulos.

El análisis de la estructura conceptual nos permitió identificar los conceptos y procedimientos necesarios para el desarrollo de la Ley de senos. En la figura 2, mostramos la esquematización de este análisis.

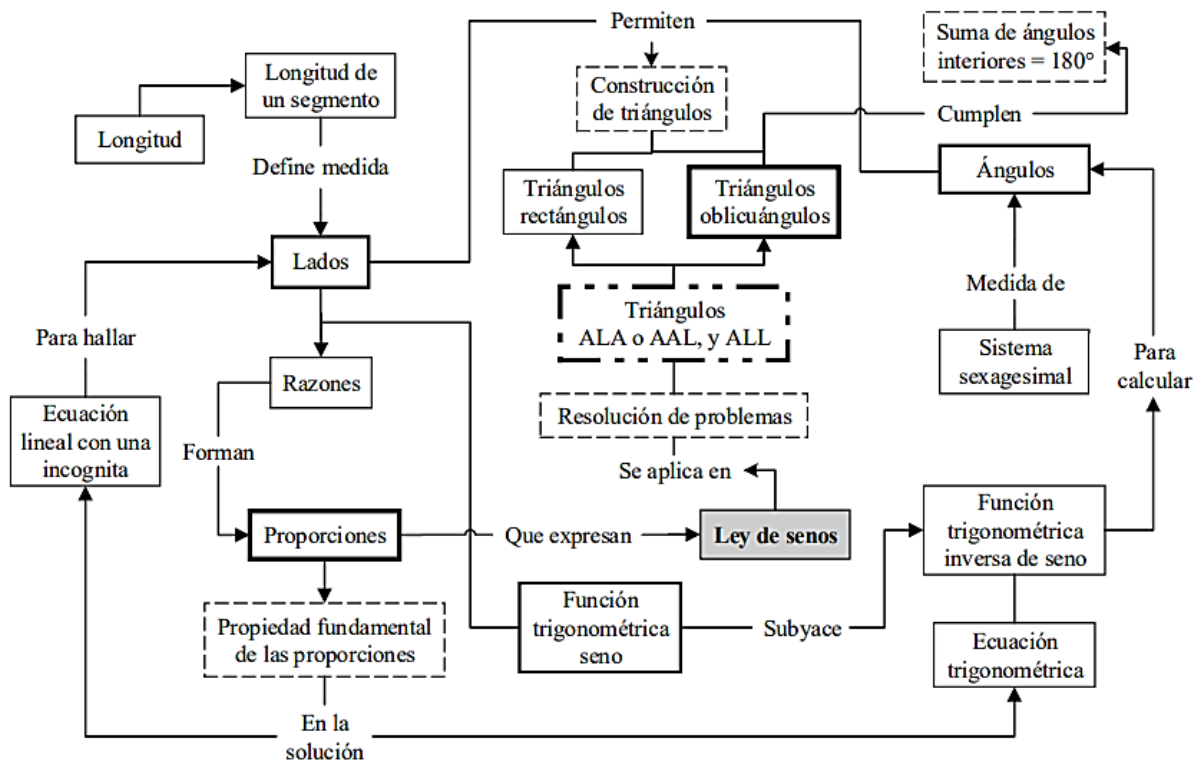


Figura 2. Esquema de la estructura conceptual de la Ley de senos

En el esquema de la estructura conceptual, hemos diferenciado los conceptos en recuadros y los procedimientos con líneas punteadas. Por ejemplo, el procedimiento para la construcción de triángulos requiere de los conceptos de lados y ángulos para diferenciar los triángulos rectángulos de los no rectángulos, también denominados triángulos oblicuángulos. A partir de la construcción de triángulos, podemos verificar que estos cumplen con la propiedad de la suma de ángulos interiores. Por otra parte, notamos que las proporciones requieren de otros conceptos, tales como las razones que surgen de la relación entre los lados del triángulo y los valores de la función seno para sus ángulos correspondientes. Además, vemos que la Ley de senos se expresa mediante proporciones en las que se emplean los procedimientos de la propiedad fundamental para determinar las medidas de lados o de ángulos del triángulo. Finalmente, consideramos que los conceptos y procedimientos que relacionamos con la Ley de senos son cruciales para resolver de manera práctica situaciones que involucran triángulos, ya sea con un ángulo y dos lados conocidos (ALL), o con dos ángulos y un lado conocidos (ALA o AAL).

1.2. Sistemas de representación

Para comprender las diferentes maneras en que se puede expresar la Ley de senos, nos apoyamos en la información previa sobre el análisis de la estructura conceptual del tema. Notamos que esta ley relaciona, para un triángulo ABC, las medidas de los lados con sus ángulos correspondientes. Usualmente, esta relación se representa mediante la expresión algebraica $\frac{a}{\text{Sen } A} = \frac{b}{\text{Sen } B} = \frac{c}{\text{Sen } C}$. Esta expresión utiliza el lenguaje simbólico matemático, lo que nos permite reescribirla en

diferentes expresiones equivalentes. Relacionamos con el sistema de representación simbólico todas estas formas de reescribir la expresión que constituye la Ley de senos. En la figura 3, presentamos un esquema en el que proponemos siete maneras diferentes para representar este tema.

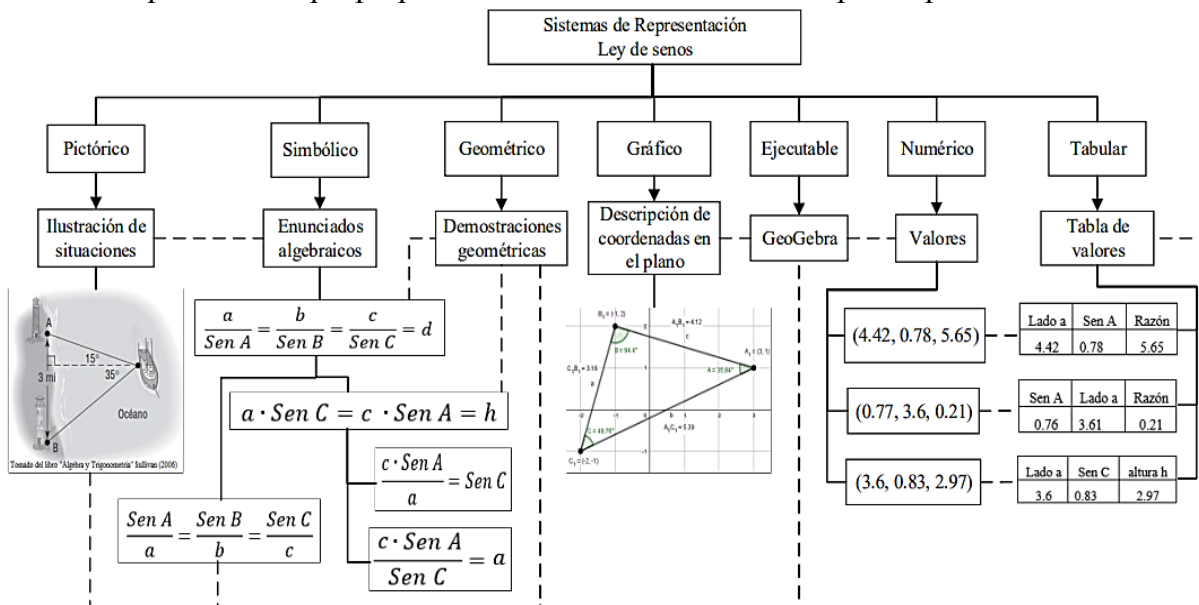


Figura 3. Esquema de los sistemas de representación de la Ley de senos

En el esquema, las líneas punteadas indican las relaciones que se pueden establecer entre las diferentes maneras de representación que hemos propuesto. Por ejemplo, es posible utilizar ilustraciones para representar de manera pictórica una situación o problema que se pueda resolver con la Ley de senos. La información proporcionada por dicha situación o problema permite el uso de enunciados algebraicos, de valores numéricos y de tablas que corresponden a los sistemas de representación simbólico, numérico y tabular, respectivamente. En particular, encontramos que el uso del software GeoGebra nos permitió constatar las relaciones que propusimos en el esquema anterior. Con base en la figura 4, describimos un ejemplo de las relaciones entre sistemas de representación.

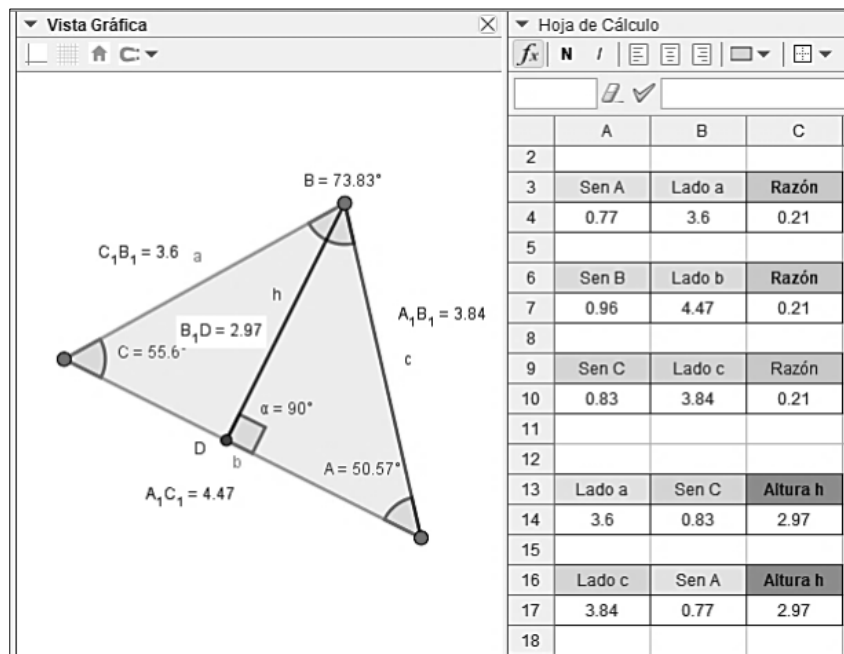


Figura 4. Ejemplo de relación entre sistemas de representación

En la figura 4, observamos que el sistema de representación ejecutable se emplea mediante la aplicación GeoGebra. Con este ejemplo, logramos verificar la demostración de la Ley de senos para el triángulo ABC relacionada con los sistemas de representación gráfico y geométrico a partir de la expresión $c \cdot \text{Sen } A = a \cdot \text{Sen } C = h$ del sistema de representación simbólico. Además, podemos comprobar que los procedimientos dados por las expresiones del sistema de representación simbólico conllevan a determinar las razones entre los senos de los ángulos y los lados correspondientes mediante la igualdad $\frac{\text{Sen } A}{a} = \frac{\text{Sen } B}{b} = \frac{\text{Sen } C}{c}$. Asignamos valores específicos a los lados y ángulos del triángulo ABC para realizar las operaciones y los procedimientos dados por los sistemas de representación que hemos mencionado. Con los resultados de estos procedimientos, conseguimos establecer el vínculo con los sistemas de representación numérico y el tabular.

1.3. Fenomenología

Después de analizar los conceptos, procedimientos y sistemas de representación, pudimos identificar una serie de situaciones o fenómenos que se pueden analizar y resolver mediante la Ley de senos. Utilizamos los diferentes contextos que se proponen en el marco conceptual de PISA 2012 para agrupar estas situaciones. Con base en esto, proponemos clasificar los fenómenos identificados en dos aspectos: los contextos fenomenológicos y las subestructuras. El esquema de la figura 5 sintetiza la fenomenología del tema.

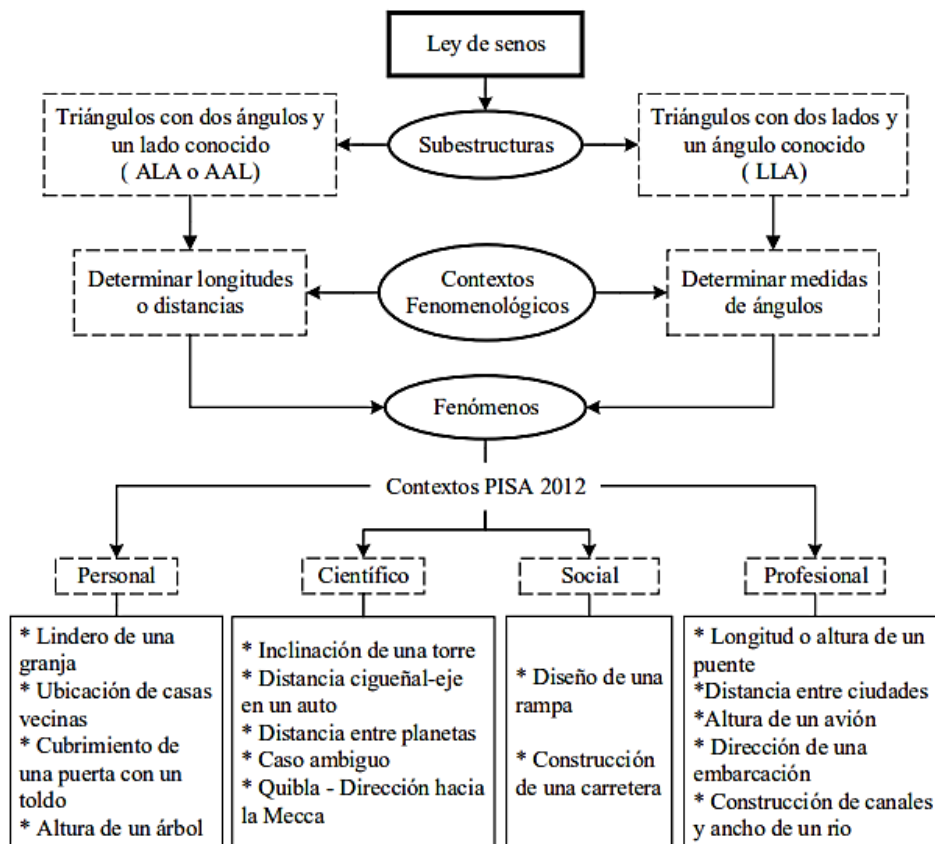


Figura 5. Esquema de la fenomenología de la Ley de senos

Las situaciones en que podemos, por ejemplo, (a) determinar la altura de un árbol, (b) calcular la distancia entre planetas, (c) tomar medidas para la construcción de una carretera o (d) determinar la longitud o altura de un puente tienen características estructurales similares que las relacionan con el contexto fenomenológico sobre determinar longitudes o distancias en el triángulo. Proponemos otra agrupación de las situaciones o fenómenos que se refieren al cálculo para determinar la medida de los ángulos del triángulo. Por ejemplo, cuando se requiere (a) establecer la inclinación de una torre, (c) determinar la inclinación para el diseño de una rampa y (d) verificar la dirección del rumbo de una embarcación.

En el análisis de la estructura conceptual mencionamos que la Ley de senos permite resolver situaciones en las que inicialmente se desconocen algunas de las medidas de los lados o ángulos del triángulo. Con base en esto, establecimos la relación de correspondencia entre los triángulos en los que se conoce un ángulo y dos lados (ALL) y los triángulos en los que se conocen dos ángulos y un lado (ALA o AAL) con cada uno de los contextos fenomenológicos, respectivamente. Por esto, a partir de la distinción que hemos realizado entre los triángulos ALL y los triángulos ALA o AAL emergen las subestructuras del tema.

En todos los análisis que hemos realizado en relación con la estructura conceptual, los sistemas de representación y la fenomenología han sido fundamentales para tener una comprensión

exhaustiva sobre este tema de las matemáticas escolares que servirá de base para los análisis posteriores.

2. ASPECTOS COGNITIVOS

La planificación apropiada de un tema específico de las matemáticas escolares requiere de dos elementos que se refieren a lo que el profesor espera que el estudiante aprenda y el modo en que prevé que desarrollará su aprendizaje. Así mismo, la planificación del tema tendrá éxito al integrar aspectos de los ámbitos cognitivo y afectivo que contribuyen al aprendizaje del estudiante. Para analizar estos aspectos, encontramos necesario establecer las expectativas cognitivas y afectivas relacionadas particularmente con la Ley de senos.

En este apartado, describimos los aspectos cognitivos que determinan las expectativas de aprendizaje (a) de nivel superior que están definidas en el marco conceptual PISA 2012, (b) de nivel medio que se refieren a los objetivos de aprendizaje de la unidad didáctica y (c) de nivel inferior que corresponden a los criterios de logro que contemplan los procedimientos que realizan los estudiantes al abordar situaciones relacionadas con el tema. En esta sección, también nos referimos a las expectativas afectivas, las limitaciones de aprendizaje y los grafos de criterios de logro.

2.1. Expectativas de aprendizaje de nivel superior

Para esta unidad didáctica, establecemos las expectativas de aprendizaje de nivel superior con base en los procesos matemáticos de formular, emplear e interpretar y evaluar, y en las capacidades matemáticas fundamentales conceptualizadas en el marco PISA 2012.

La contribución al proceso de formular se evidencia cuando los estudiantes identifican los conceptos y procedimientos relevantes para plantear matemáticamente una situación en la que interviene un triángulo no rectángulo. El proceso de emplear se reconoce en la utilización de las propiedades de los triángulos y en el cálculo de razones entre las medidas de los lados y los senos de los ángulos por parte de los estudiantes. Cada vez que los estudiantes dan argumentos que validan sus procedimientos y establecen la coherencia de los resultados sobre las medidas de lados o ángulos del triángulo se evidencia el proceso matemático de interpretar y evaluar.

En relación con las capacidades matemáticas fundamentales, consideramos que los estudiantes evidencian la capacidad de comunicación al extraer información relacionada con el triángulo proporcionado por una situación particular. Además, los estudiantes desarrollan la capacidad de matematización al formular expresiones de la Ley de senos con base en la información de una situación y realizar las operaciones correspondientes para resolverla.

Por su parte, los estudiantes desarrollan la capacidad de representación cuando utilizan y proponen diferentes formas de presentar un triángulo no rectángulo dado en el contexto de un enunciado. En cuanto a la capacidad de razonamiento y argumentación, consideramos que se desarrolla en la elaboración de explicaciones y argumentos consistentes basados en el uso de los procedimientos de la Ley de senos para dar respuesta al cuestionamiento de una situación. La capacidad de diseño de estrategias para resolver problemas se evidencia en la planificación que hacen los estudiantes para interpretar y establecer los pasos que conducen a la solución de un problema contextualizado en el que interviene un triángulo no rectángulo.

Finalmente, observamos que, con el empleo de las expresiones algebraicas y las operaciones de cálculo que surgen de una situación en la que se resuelve un triángulo mediante la Ley de senos, los estudiantes desarrollan la capacidad de utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico. En ese sentido, los estudiantes emplean la capacidad de utilización de herramientas matemáticas al usar favorablemente recursos como la calculadora para establecer procesos que conllevan a soluciones matemáticas del problema determinado.

2.2. Objetivos de aprendizaje

Como hemos mencionado, el profesor planifica su trabajo con base en las previsiones que tiene para el aprendizaje de sus estudiantes sobre un tema de las matemáticas escolares. Estas previsiones se basan en las habilidades y destrezas que se espera que los estudiantes desarrollen y se concretan por medio de los objetivos de aprendizaje que corresponden a las expectativas de nivel medio. Para el caso de esta unidad didáctica, proponemos dos objetivos de aprendizaje que enunciamos a continuación.

Objetivo 1. Proponer argumentos basados en las medidas obtenidas al resolver el triángulo no rectángulo dado en una situación problema.

Objetivo 2. Emplear estrategias para la solución de situaciones presentadas en enunciados en los que intervienen triángulos no rectángulos.

Con estos objetivos de aprendizaje buscamos que los estudiantes adquieran destrezas para justificar apropiadamente la solución de un problema mediante el uso adecuado de la Ley de senos. Además, esperamos generar las condiciones para que analicen situaciones en las que se promueva el diseño y la aplicación de planes alternativos para su solución.

2.3. Expectativas afectivas

El profesor debe articular los contenidos del tema de las matemáticas escolares con los factores que influyen en la motivación de sus estudiantes mientras aprenden. Destacamos que la motivación juega un papel crucial en el aprendizaje de conceptos matemáticos, tales como la Ley de senos. Por esto, en la tabla 1, proponemos las expectativas de tipo afectivo que están relacionadas con los objetivos de aprendizaje y con las expectativas de nivel superior que abordamos en el apartado anterior.

Tabla 1

Listado de expectativas afectivas

EA	Descripción
1	Desarrollar confianza para justificar una representación como parte de una estrategia de solución a un problema.
2	Desarrollar curiosidad por diseñar estrategias de solución a diferentes situaciones contextualizadas en las que intervienen triángulos no rectángulos.

Tabla 1
Listado de expectativas afectivas

EA	Descripción
3	Desarrollar el hábito de argumentar mediante procedimientos matemáticos la solución a un problema en que intervienen triángulos no rectángulos.

Nota. EA: expectativa afectiva.

Consideramos que el desarrollo de la confianza, la curiosidad por el diseño de estrategias y el hábito para argumentar sus procedimientos son los elementos más importantes para tener en cuenta sobre la motivación de los estudiantes mientras resuelven situaciones con la Ley de senos.

2.4. Limitaciones de aprendizaje

Para el logro de los objetivos de aprendizaje de esta unidad didáctica, hemos analizado las dificultades y los errores más significativos en los que los estudiantes pueden incurrir con mayor frecuencia cuando abordan situaciones relacionadas con la Ley de senos.

Hemos asignado etiquetas que diferencian los errores y las dificultades encontradas. Por ejemplo, diferenciamos con la etiqueta E8 el error en que incurren los estudiantes al plantear una proporción con más de una incógnita al reemplazar las medidas conocidas en la expresión de la Ley de senos. Asociamos este error con la dificultad D6 que se refiere al uso inadecuado de las propiedades de las razones y/o proporciones en la Ley de senos. En la tabla 2, presentamos las dificultades identificadas con algunos de los errores correspondientes.

Tabla 2
Listado de dificultades y errores para el tema Ley de senos

E	Descripción
	D1. No correspondencia entre la representación propuesta y la situación presentada en un enunciado
1	Utiliza datos presentados por la situación que no se asocian con la figura del enunciado.
2	Presenta una ilustración en la que intercambia la ubicación suministrada para los elementos del enunciado.
	D2. Disociación entre los lados y ángulos de un triángulo
6	Intercambia las medidas de los lados con las medidas de los ángulos del triángulo no rectángulo.
19	Relaciona cada lado con un ángulo que no es su opuesto correspondiente.
	D3. Dificultades con las sintaxis de las expresiones que contienen medidas de ángulos
10	Escribe el símbolo de un ángulo en lugar del símbolo que representa la medida del ángulo.
14	Escribe el valor de la medida de un ángulo en lugar del seno del ángulo en una razón.

Tabla 2

Listado de dificultades y errores para el tema Ley de senos

E	Descripción
	D4. Dificultades para operar matemáticamente una ecuación lineal con una incógnita
12	Realiza una resta entre medidas de ángulos cuya diferencia es un ángulo negativo.
29	Utiliza el inverso multiplicativo de un valor que no corresponde con el despeje del seno del ángulo desconocido.
	D5. Presentación de resultados y argumentos para un procedimiento o situación
30	Omite las medidas obtenidas de los lados del triángulo para realizar comparaciones.
32	Presenta argumentos que no incluyen todos los resultados obtenidos para responder los requerimientos de la situación.
	D6. Uso inadecuado de las propiedades de las razones y/o proporciones en la Ley de senos
8	Plantea una proporción con más de una incógnita.
23	multiplica el valor de un extremo por el valor de un medio de la proporción.

Nota. E: error, D: dificultad.

El listado con todos los errores que hemos identificado se encuentra en el anexo 1 de esta unidad didáctica.

2.5. Criterios de logro

Denominamos criterios de logro a los procedimientos sistemáticos que hacen parte de las estrategias que emplean los estudiantes para resolver las situaciones o tareas que conllevan al logro de los objetivos de aprendizaje. En ese orden de ideas, hemos establecido los criterios de logro que integran los procedimientos relacionados con cada objetivo de aprendizaje.

Para diferenciar cada criterio de logro, asignamos una etiqueta en la que el primer número corresponde al objetivo y el segundo corresponde al orden de los procedimientos. Podemos integrar los procedimientos mencionados en el ejemplo del apartado anterior en que los estudiantes reemplazan las medidas del lado y de los ángulos para determinar la medida de uno de los lados en el criterio de logro que se refiere a hallar la medida de dos de los lados desconocidos del triángulo (CdL1.4). Con este ejemplo, notamos que los procedimientos a los que se refieren los criterios de logro están asociados con los errores en que incurren los estudiantes. Esta relación se verá con mayor detalle en los apartados posteriores de esta unidad didáctica. En la tabla 3, presentamos la descripción de algunos de los criterios de logro que caracterizan cada objetivo de aprendizaje.

Tabla 3
Descripción de los criterios de logro

CdL	Descripción
Objetivo 1	
CdL1.1	Identifico los datos del enunciado que se refieren a los lados y ángulos del triángulo descrito
CdL1.3	Hallo el ángulo desconocido sabiendo que los ángulos interiores suman 180°
CdL1.4	Hallo la medida de dos de los lados del triángulo
CdL1.13	Utilizo las medidas obtenidas para responder la situación
Objetivo 2	
CdL2.2	Represento la situación mediante un dibujo
CdL2.6	Divido la medida del lado por el seno del ángulo opuesto
CdL2.7	Aplico el producto cruzado para la medida del lado
CdL2.13	Calculo el ángulo mediante la expresión sen^{-1} (SHIFT + sin)
CdL2.14	Hallo el ángulo desconocido utilizando el ángulo exterior al triángulo

Nota: CdL: criterio de logro

El listado con todos los criterios de logro que nos han permitido caracterizar cada objetivo de aprendizaje se encuentra en el anexo 2 de esta unidad didáctica.

2.6. Grafos de criterios de logro

Como hemos visto, los estudiantes siguen un conjunto de pasos o procedimientos secuenciales para completar el desarrollo de su estrategia de solución sobre una situación dada. Es así como cada objetivo de aprendizaje se caracteriza por medio de estrategias de solución que integran los diferentes criterios de logro. Por esto, proponemos un esquema para mostrar la organización de los criterios de logro que promueven el alcance de cada objetivo de aprendizaje. Denominaremos grafo de criterios de logro a esta forma particular de esquematización. En particular, el grafo de criterios de logro de la figura 6 esquematiza los procedimientos que caracterizan el primer objetivo de aprendizaje de esta unidad didáctica.

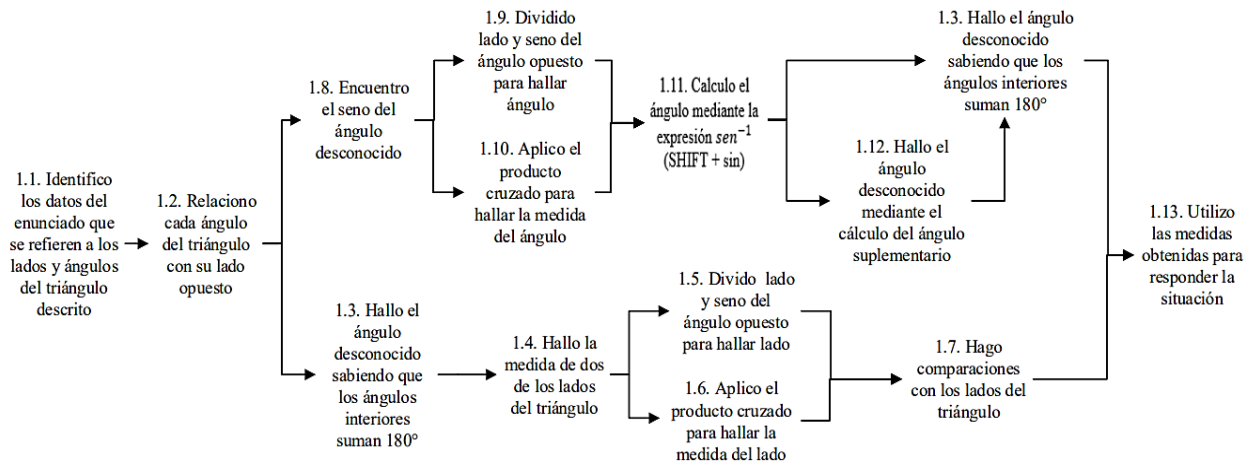


Figura 6. Grafo de criterios de logro del primer objetivo

En el grafo de criterios de logro de la figura 6, indicamos con flechas las alternativas que tienen los estudiantes para resolver dos situaciones diferentes que están relacionadas con el primer objetivo de aprendizaje. Los estudiantes pueden optar por el uso de diferentes procedimientos desde el CdL1.1 que les permitan llegar hasta el CdL1.13 y así concretar el logro del alcance del objetivo de aprendizaje. Por ejemplo, en los procedimientos de la parte inferior del grafo, los estudiantes utilizan la propiedad de la suma de ángulos interiores para determinar la medida del ángulo desconocido en el triángulo no rectángulo (CdL1.3). Luego, los estudiantes plantean la expresión de la Ley de senos con las medidas conocidas para hallar la medida de los lados (CdL1.4). Una vez planteada la expresión los estudiantes deben optar por alguno de los procedimientos alternativos, bien sea calcular la división entre el lado y el seno del ángulo conocido (CdL1.5) o aplicar el producto cruzado con las proporciones (CdL1.6). A partir de las medidas obtenidas, se pueden establecer las comparaciones que requiera la situación en particular (CdL1.7).

Análogamente, en la figura 7 esquematizamos el grafo de criterios de logro del segundo objetivo de aprendizaje.

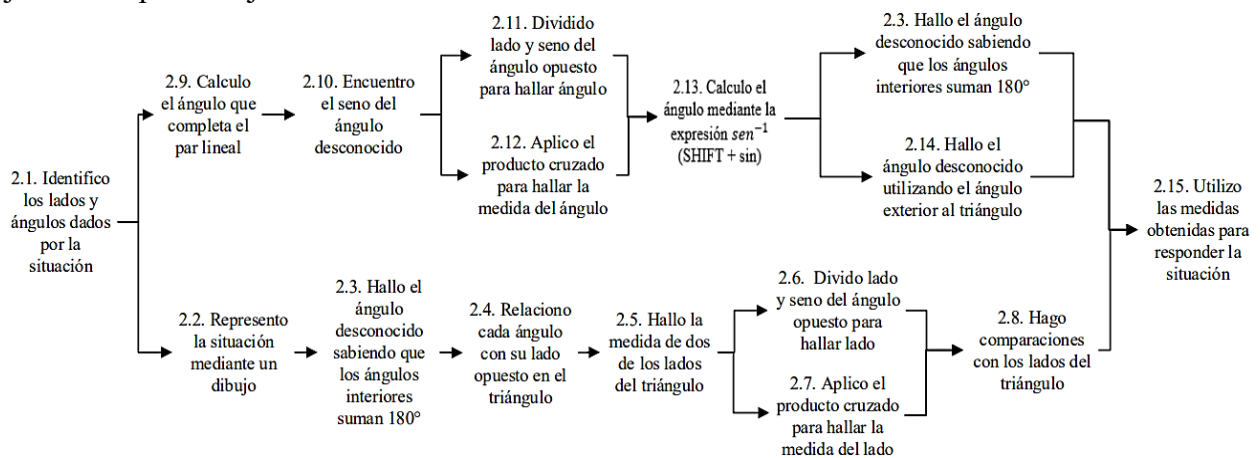


Figura 7. Grafo de criterios de logro del segundo objetivo

Los estudiantes pueden utilizar procedimientos variados entre el CdL2.1 y el CdL2.15 que les permitan concretar el alcance de este objetivo de aprendizaje. En la parte superior de este grafo, notamos que los estudiantes utilizan la información dada por una situación para realizar el cálculo del ángulo que completa el par lineal (CdL2.9) y así plantear la expresión de la Ley de senos. Con base en esto, los estudiantes determinan la medida de uno de los ángulos desconocidos en el triángulo mediante los valores de la función inversa de seno (CdL2.13) y pueden optar por dos procedimientos alternativos que conducen a obtener la medida del tercer ángulo interior del triángulo. Es decir, pueden utilizar la suma de ángulos interiores (CdL2.3) o emplear el ángulo exterior como elemento auxiliar al triángulo (CdL2.14).

Los grafos de criterios de logro que hemos esquematizado serán los elementos de apoyo para desarrollar las situaciones o tareas específicas que proponemos para la implementación de esta unidad didáctica.

3. ESQUEMA GENERAL DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

En este apartado, proponemos la organización de las actividades que contempla nuestra unidad didáctica para facilitar el logro de los objetivos de aprendizaje establecidos. Cada objetivo está asociado con dos tareas de aprendizaje específicas, diseñadas para abordar diferentes aspectos del tema. Para el primer objetivo, hemos planificado las tareas T1.1 Dron y T1.2 Pieza que invitan a los estudiantes a aplicar la Ley de senos en contextos relacionado con su entorno social. De manera similar, el segundo objetivo se explora mediante las tareas T2.1 Tienda escolar y T2.2 Rampa que están enfocadas en aplicaciones de la ley en situaciones cotidianas del contexto escolar. Los detalles sobre estas tareas de aprendizaje se pueden encontrar en el anexo 3. Además, la unidad didáctica incluye tareas de evaluación necesarias para valorar el progreso de las capacidades y destrezas de los estudiantes, como la tarea diagnóstica inicial y el examen final, cuyos detalles se presentan en los anexos 4 y 5, respectivamente. En la tabla 4, presentamos la organización general de esta unidad didáctica.

Tabla 4

Esquema general de la unidad didáctica

Momento	Descripción	Sesión	Tiempo (minutos)
1	Presentación de objetivos, metodología, sistema de evaluación y aplicación de tarea diagnóstica	1	110
2	Entrega de resultados y retroalimentación de la tarea diagnóstica	2	110
3	Presentación criterios de logro, implementación de las tareas T1.1 Dron y T1.2 Pieza, y diarios.	3 y 4	220

Tabla 4

Esquema general de la unidad didáctica

Momento	Descripción	Sesión	Tiempo (minutos)
4	Presentación criterios de logro, implementación de las tareas T2.1 Tienda escolar y T2.2 Rampa, y diarios.	5 y 6	220
5	Reflexión sobre el aprendizaje y preparación del examen final	7	55
6	Implementación del examen final	8	110
7	Retroalimentación del examen final, comentarios sobre unidad didáctica, entrega de calificaciones y planes de mejoramiento de los estudiantes	9	55

Organizamos la unidad didáctica en siete momentos. Cada momento consta de una o dos sesiones de clase con periodos de 55 minutos y hasta 110 minutos, según corresponda. Por ejemplo, la implementación de la tarea diagnóstica se debe llevar a cabo en la segunda sesión de 110 minutos que corresponde con el segundo momento. En este esquema general, hemos incluido la implementación de las tareas de aprendizaje y su retroalimentación, así como la implementación del examen final.

2. TAREAS DE APRENDIZAJE Y DE EVALUACIÓN

Para la implementación de esta unidad didáctica hemos diseñado diferentes tareas de aprendizaje y de evaluación. Las tareas de evaluación corresponden a la tarea diagnóstica y al examen final. Hemos propuesto dos tareas de aprendizaje para cada objetivo. En este apartado, describimos los elementos de las tareas de aprendizaje y proporcionamos sugerencias metodológicas para su implementación. También, presentamos los elementos que estructuran la tarea diagnóstica y el examen final. La versión para impresión de todas las tareas mencionadas se encuentra en el anexo 8.

1. TAREA DIAGNÓSTICA

Diseñamos la tarea diagnóstica con la finalidad de verificar el manejo de conceptos y procedimientos que los estudiantes necesitan previo a la implementación de las tareas de aprendizaje. Para esto, identificamos una lista de conocimientos previos relacionados con (a) los tipos de triángulo, (b) los ángulos interiores y exteriores al triángulo, y sus propiedades, (c) la correspondencia entre lados y ángulos del triángulo, y (d) las ecuaciones multiplicativas y aditivas, entre otros conocimientos relacionados con la Ley de senos. En la tabla 5, organizamos los conocimientos previos que consideramos que los estudiantes requieren para desarrollar las tareas de aprendizaje de la unidad didáctica.

Tabla 5

Listado de conocimientos previos

CP	Descripción
1	Clasifica los triángulos según la medida de sus ángulos
2	Relaciona cada ángulo del triángulo con su lado opuesto correspondiente
3	Ubica puntos de referencia en un plano
4	Emplea unidades de longitud y/o de medidas de ángulos
5	Establece el sentido de giro de ángulos descritos en posición normal
6	Describe las características de un ángulo de inclinación
7	Identifica los ángulos interiores y/o exteriores de un triángulo

Tabla 5
Listado de conocimientos previos

CP	Descripción
8	Aplica la propiedad de la suma de ángulos interiores de un triángulo
9	Verifica que dos ángulos que forman un par lineal son suplementarios
10	Despeja la incógnita en una ecuación aditiva
11	Despeja la incógnita en una ecuación multiplicativa
12	Identifica los términos de una razón
13	Expresa una razón entre dos valores
14	Utiliza la propiedad fundamental de las proporciones (producto de extremos y medios)
15	Expresa un número real en diferentes notaciones
16	Expresa la razón trigonométrica seno para los ángulos agudos del triángulo rectángulo
17	Halla medidas de ángulos mediante la función inversa de seno
18	Identifica equivalencias entre senos de ángulos suplementarios
19	Distingue las dimensiones de una figura plana

Nota. CP: conocimientos previos.

Diseñamos la tarea diagnóstica con base en los conocimientos previos identificados. Esta tarea integra preguntas abiertas y de opción múltiple que los estudiantes deben justificar con los procedimientos correspondientes. A continuación, presentamos algunas de las preguntas de la tarea diagnóstica. La versión completa de esta tarea se encuentra en el anexo 4.

En la figura¹, se muestra una vitrina rectangular que está encajada en la pared frontal de una tienda. En esta, se han dispuesto los cinco artículos más costosos para su venta. Los artículos están protegidos por un láser que pasa por una de las diagonales de la vitrina. En la figura, los triángulos 1 y 2 se forman a partir de la proyección del láser sobre la superficie del vidrio que protege los artículos.

¹ Adaptado de ICFES (2022)

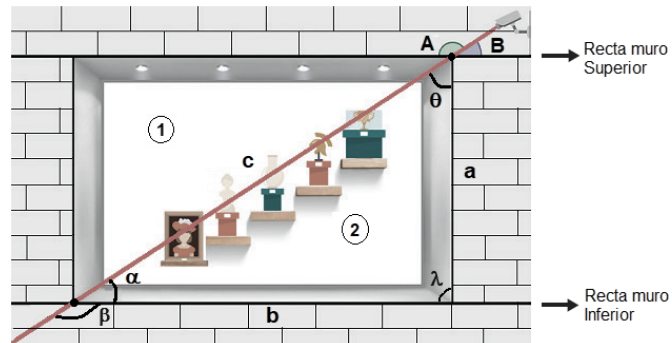


Figura. Vitrina

Con base en la información anterior, responde las preguntas de la 1 a la 8. Justifica tus respuestas.

1. Con base en el segmento diagonal proyectado por el láser, se puede afirmar que los triángulos 1 y 2 que se forman sobre la superficie del vidrio frontal de la vitrina son

- a. acutángulos
- b. equiláteros
- c. obtusángulos
- d. rectángulos

2. Los ángulos A y B que se describen entre el láser y la recta del muro superior son suplementarios, puesto que forman un par lineal y sus medidas suman 180° . Con base en la figura, otros ángulos que forman un par lineal son

- a. α y θ
- b. α y β
- c. θ y λ
- d. λ y β

3. Dado que los ángulos A y B forman un par lineal, si la medida del ángulo B es 30° , el procedimiento correcto para calcular la medida del ángulo A

- a. $m\angle A + 30^\circ = 180^\circ$
- b. $m\angle A - 180^\circ = 30^\circ$
- c. $m\angle A = \frac{180^\circ}{30^\circ}$
- d. $m\angle A = 30^\circ - 180^\circ$

9. Con base en las medidas suministradas en el siguiente enunciado, representa la situación con un dibujo o ilustración y determina la medida del ángulo que hace falta.

Enunciado	Representación
-----------	----------------

<p>Tres amigos, Ana, Beto y Camilo se encuentran dispersos en el parque de su barrio y sus posiciones forman el triángulo ABC. La distancia de Beto a Ana es de 25 metros y la de Ana a Camilo es de 12 metros. Entre Camilo y Beto, la distancia es de 32 metros. En el punto donde se encuentra Camilo, los segmentos que lo conectan con Beto y Ana forman un ángulo de 45°. En el punto donde se encuentra Beto, los segmentos que lo conectan con Ana y Camilo forman un ángulo de 20°. Con base en esto, ¿Cuál es la medida del ángulo formado en el punto donde se encuentra Ana?</p>	
	R//

Consideramos pertinente que el profesor realice una retroalimentación de la tarea diagnóstica con base en los resultados de su implementación. Resulta conveniente que el profesor centre su esfuerzo en abordar situaciones en las que los estudiantes presenten dificultades recurrentes. Esta retroalimentación permitirá que los estudiantes estén preparados para desarrollar las tareas de aprendizaje que abordamos en el siguiente apartado.

2. TAREAS DE APRENDIZAJE

En este apartado, presentamos y describimos los elementos característicos de las tareas de aprendizaje para cada uno de los objetivos de la unidad didáctica. Para cada tarea, mencionaremos los errores más significativos en los que incurren los estudiantes y las ayudas que hemos diseñado para contribuir con su superación. En el anexo 1, listamos las dificultades y errores relacionados con las tareas de aprendizaje. El listado completo de las ayudas y la descripción detallada de los elementos de cada tarea se encuentran en el anexo 3.

2.1. Tarea T1.1 Dron

Con esta tarea, pretendemos que los estudiantes utilicen de manera apropiada la información gráfica o visual referida a las distancias que se pueden establecer entre sitios de interés que hacen parte de su contexto local y que están asociadas con los elementos de los triángulos no rectángulos.

Requisitos

Los estudiantes son capaces de identificar el perímetro de un polígono dado y de realizar comparaciones mediante razones y proporciones formadas con diferentes magnitudes.

Metas

Se pretende contribuir a que los estudiantes planteen proporciones con los lados y los senos de los ángulos del triángulo no rectángulo y que argumenten la respuesta a una situación problema, basados en el análisis realizado a partir de las comparaciones de las medidas de los lados.

Formulación

El productor audiovisual de una campaña publicitaria para la promoción del turismo en Santa Marta realizará unas tomas de fotografía y video en lugares representativos del centro histórico

de la ciudad. El productor utilizará un dron equipado con cámara para este trabajo y ha seleccionado la Bahía, el Parque de los Novios y la Catedral como lugares referentes, tal como se aprecia en la figura.



Figura. Mapa de la ciudad²

El productor ya había realizado dos recorridos con su dron para otros trabajos de fotografía. El primero, de 186 metros desde la bahía hasta el parque, y el segundo, de 270 metros desde el parque hasta la Catedral. El productor proyecta realizar las tomas de los tres lugares en un solo recorrido, que inicie y termine en la Bahía.

La autonomía del dron con la batería cargada le permite recorrer una distancia acumulada de hasta 1800 metros si se mantiene la velocidad adecuada para obtener grabaciones de óptima calidad a una altura constante. El dron realiza un recorrido completo cada vez que pasa por los tres sitios representativos. Si el productor utiliza el dron con la batería cargada ¿cuántos recorridos completos puede realizar? Usa la información obtenida para argumentar tu respuesta.

Conceptos y procedimientos

Para esta tarea, los estudiantes usan la propiedad de la suma de medidas de ángulos interiores del triángulo. Además, establecen la correspondencia entre lados y ángulos del triángulo para determinar la medida de un lado desconocido.

Sistemas de representación

La tarea promueve el uso de los sistemas de representación simbólico y numérico cuando los estudiantes emplean la expresión algebraica de la Ley de senos y realizan cálculos para determinar

² Adaptado de [Bahía de Santa Marta], de Google, s.f., <https://maps.app.goo.gl/4o54rs9VWWuBpHe3A>. Todos los derechos reservados 2023 por Google. Adaptado con permiso del autor.

medidas de lados del triángulo no rectángulo. El sistema de representación gráfico se promueve con el uso de puntos que referencian los sitios de interés presentados en la imagen del mapa que permiten diferenciar los elementos del triángulo.

Contextos PISA en lo que se sitúa la tarea

La tarea se relaciona con los contextos personal y profesional según el marco PISA 2012, debido a que se sitúa en escenarios cotidianos para el estudiante y se da importancia al uso de los triángulos no rectángulos para la labor del productor audiovisual.

Materiales y recursos

Para el desarrollo de la tarea, se requiere de la hoja impresa con la imagen del mapa y el texto de la situación; también, se hacen necesarios los útiles escolares (lápiz, borrador, calculadora, etc.).

Agrupamiento e interacciones

La sesión de clase comienza con la formación de grupos de cuatro estudiantes, seguida por la presentación de la tarea asignada por parte del profesor. En este punto, cada estudiante colabora en el análisis y resolución de la tarea, lo que fomenta la interacción y el intercambio de ideas entre los miembros del grupo. Para finalizar, algunos estudiantes comparten con el grupo los métodos y procedimientos utilizados para la resolución de la tarea, lo que permite enriquecer la comprensión colectiva del tema.

Temporalidad

La tarea se desarrolla en cinco momentos. En el primer momento, el profesor comparte con los estudiantes los objetivos de aprendizaje de la unidad didáctica y el grafo de criterios de logro del primer objetivo (10 minutos). Luego, se organizan grupos de cuatro estudiantes para dar las indicaciones sobre la tarea (10 minutos). Acto seguido, los estudiantes desarrollan la tarea (35 minutos). El cuarto momento se da con la puesta en común de los resultados de los estudiantes (15 minutos). En el quinto momento, el profesor hace los comentarios generales de cierre de la tarea (10 minutos).

Errores

Algunos errores representativos en los que los estudiantes pueden incurrir son obtener una medida negativa para el ángulo interior del triángulo y el intercambio de los términos de la proporción al aplicar la propiedad del producto de extremos y medios. Proponemos ayudas para que los estudiantes puedan superar estos errores, tales como: si las medidas de dos ángulos del triángulo suman 100° (por ejemplo $m\angle\alpha = 40^\circ$, $\angle\beta = 60^\circ$), entonces, la medida del tercer ángulo está dado por la expresión $m\angle\theta = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$, en lugar de $m\angle\theta = 100^\circ - 180^\circ$ que obtiene una medida de ángulo negativo.

Grafo de criterios de logro

A continuación, presentamos en la figura 8 el grafo de criterios de logro que muestra los procedimientos que hacen los estudiantes y los errores correspondientes para la tarea.

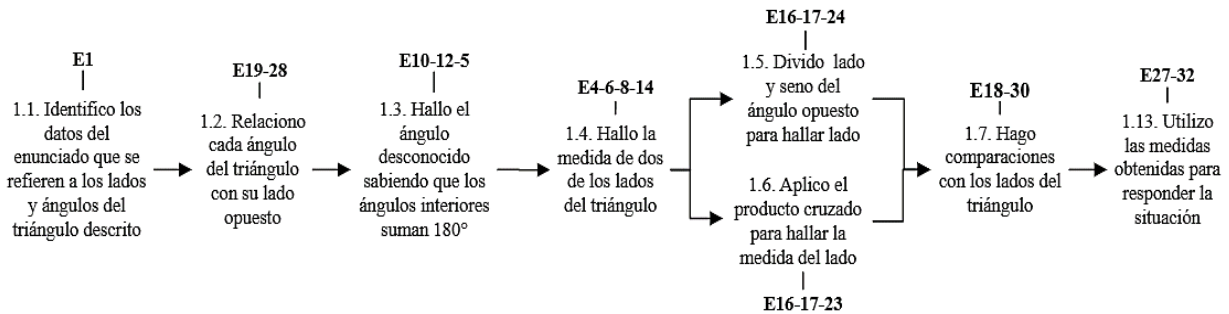


Figura 8. Grafo de criterios de logro T1.1 Dron

Vemos que, en esta tarea, los estudiantes deben establecer procedimientos para determinar las medidas de los lados del triángulo dado en la situación para establecer posteriormente su comparación. Esto, con el propósito de argumentar la respuesta que atiende a los requerimientos de la tarea.

Actuaciones del profesor

El profesor puede llevar a cabo las siguientes orientaciones en el desarrollo de la tarea: (a) entregar a los grupos de estudiantes la hoja impresa con la figura del mapa y el texto que enuncia la situación, (b) revisar avances de los estudiantes, y (c) dar orientaciones sobre los errores que identifica en sus procedimientos durante la sesión de clase.

Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

Con base en los materiales y recursos disponibles, el profesor tiene la alternativa de proyectar la imagen del mapa y la formulación de la tarea con un video beam, en lugar de entregar la hoja impresa. Sugerimos que el profesor haga énfasis en el contexto sobre los sitios de interés mencionados en el enunciado de la tarea, de tal manera que promueva la motivación de los estudiantes para su resolución. Esto permitirá que los estudiantes encuentren sentido práctico a los procedimientos y operaciones de cálculo que utilizaron para resolverla.

Evaluación

Para el proceso de evaluación, nos enfocamos en los procedimientos utilizados por los estudiantes para determinar la medida de los ángulos mediante la propiedad de los ángulos interiores del triángulo, así como en su habilidad para emplear las medidas de los lados al establecer comparaciones significativas. Por tanto, consideramos pertinente que el profesor valore la solidez de los argumentos que los estudiantes construyen al abordar la tarea.

2.1. Tarea T1.2 Pieza

Con esta tarea, esperamos que los estudiantes utilicen de manera apropiada las medidas obtenidas para los lados y ángulos del triángulo no rectángulo en la elaboración de argumentos consistentes que respondan a sus cuestionamientos. Además, esta tarea promueve la interacción de los estudiantes mediante el trabajo cooperativo empleado para modelar el diseño de la pieza referida en la situación.

Requisitos

Los estudiantes pueden establecer la relación entre lados y ángulos opuestos correspondientes en un triángulo no rectángulo. Esta tarea requiere que los estudiantes realicen cálculos en los que empleen la función seno de un ángulo y su función inversa.

Metas

Se pretende contribuir con los diferentes procedimientos que posibilitan el cálculo de las medidas de los ángulos de un triángulo no rectángulo. A su vez, se busca generar confianza en el estudiante para que modele y explique la solución de la situación problema.

Formulación

El operario de una máquina cortadora de láminas metálicas se encarga de diseñar piezas a medida para automóviles que han sufrido daños en la carrocería debido a choques o deterioro. En esta ocasión, un cliente solicita una pieza metálica triangular. El operario cuenta con una lámina metálica de forma irregular que desea reutilizar para este propósito. Al iniciar el trabajo, el operario ha posicionado el lado más largo de la pieza en el borde recto de la lámina, tal como se muestra en la figura. Aunque el operario conoce algunas medidas de lados y ángulos de la pieza triangular, debe realizar con precisión algunos cálculos que le permitan obtener la forma deseada.

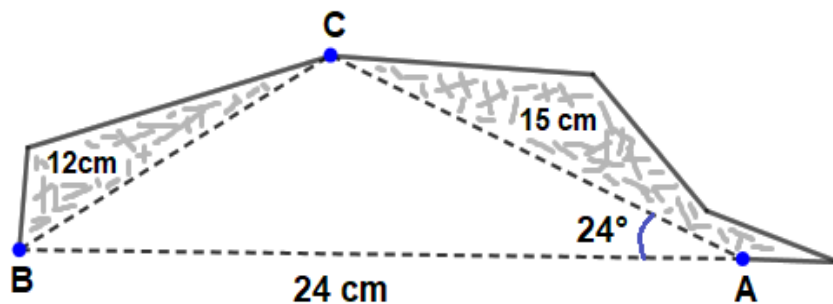


Figura. Pieza

El operario debe digitar las medidas de los lados y ángulos de la pieza en el sistema de la máquina cortadora. Con base en esta información, ¿cuáles son las medidas de los ángulos que el operario debe introducir en el sistema de la máquina cortadora? Justifiquen su respuesta por medio de la réplica de la pieza en la lámina de cartón que les entregué.

Conceptos y procedimientos

Esta tarea permite que los estudiantes empleen las propiedades de las razones y proporciones para determinar la medida de uno de los ángulos desconocidos en el triángulo. Por ende, pueden hallar la medida del tercer ángulo interior mediante la equivalencia entre valores de la función seno para ángulos suplementarios.

Sistemas de representación

La tarea promueve el uso de los sistemas de representación simbólico y numérico cuando los estudiantes emplean la expresión algebraica de la Ley de senos y realizan cálculos para determinar medidas de los ángulos del triángulo no rectángulo. El sistema de representación pictórico se promueve con el diseño de la pieza presentado en el enunciado y con la elaboración, en cartón, de un modelo a escala real.

Contextos PISA en lo que se sitúa la tarea

La tarea se relaciona con los contextos profesional y científico según el marco PISA 2012, debido a que se sitúa en escenarios de aplicación industrial en los que el conocimiento de las matemáticas relacionadas con la Ley de senos permite resolver de manera práctica la elaboración de una pieza metálica.

Materiales y recursos

Se utiliza el video beam y computador para proyectar el modelo de la pieza, de tal manera que se pueda visualizar la figura ampliada de la pieza con las medidas indicadas. Cada grupo de estudiantes recibe una lámina de cartón para replicar la pieza con el uso del transportador, la regla y demás útiles escolares.

Agrupamiento e interacción

El profesor orienta a los estudiantes a que se organicen en grupos de cuatro integrantes para establecer los roles de cada uno. En cada grupo, habrá un estudiante con el rol de (a) supervisor, que verifica que todos los miembros del grupo realicen sus funciones y controla el tiempo de ejecución de las tareas; (b) almacenista, que gestiona el uso de recursos para el desarrollo de la tarea; (c) técnico, que lidera la gestión de los procedimientos de cálculo y uso de medidas; e (d) interventor, que revisa los procedimientos realizados y el diseño de la pieza para su mejora y divulgación. El estudiante que asume el rol de interventor en cada grupo comparte el análisis realizado y el modelo de la pieza elaborado.

Temporalidad

La tarea se desarrolla en seis momentos. El primer momento se refiere a la fase de retroalimentación de la tarea anterior (10 minutos). Luego, el profesor presenta la tarea y su meta (cinco minutos). El tercer momento se da con la asignación de roles al interior de cada pequeño grupo (cinco minutos). El cuarto momento se refiere al desarrollo grupal de la tarea de aprendizaje (40 minutos). El quinto momento se refiere a la puesta en común de los resultados y la presentación del modelo de la pieza por parte del estudiante interventor de cada grupo (15 minutos). Finalmente, el profesor realiza los comentarios de cierre (10 minutos).

Errores

Esperamos contribuir con la superación de errores que tienen que ver con los despejes del seno del ángulo desconocido en una ecuación multiplicativa y el cálculo de la medida del ángulo mediante la función inversa de seno. Una de las ayudas que proponemos para contribuir con su superación,

se presenta en el siguiente ejemplo: para hallar un ángulo con la función inversa de seno, se utiliza un valor decimal entre cero y uno; por ejemplo, $\sphericalangle A = \text{Sen}^{-1}(0,5) = 30^\circ$.

Grafo de criterios de logro

A continuación, presentamos en la figura 9 el grafo de criterios de logro con los procedimientos que realizan los estudiantes y los errores correspondientes para la tarea.

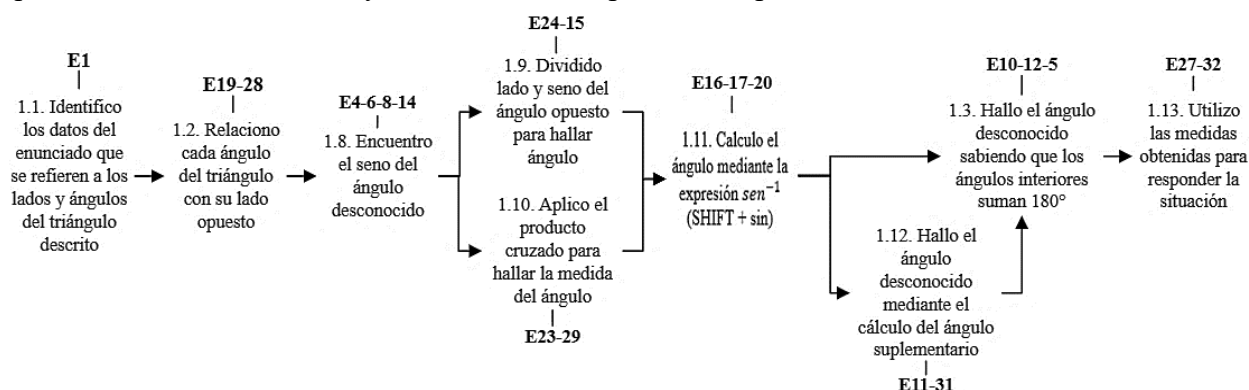


Figura 9. Grafo de criterios T1.2 Pieza

Notamos que los estudiantes deben establecer procedimientos de cálculo para determinar las medidas de los ángulos del triángulo. Luego de determinar la medida de uno de los ángulos desconocidos mediante la función inversa de seno, los estudiantes deben establecer si es pertinente utilizar la equivalencia de los valores de seno para ángulos suplementarios o aplicar directamente la propiedad de la suma de ángulos interiores del triángulo.

Actuaciones del profesor

Antes de iniciar con las orientaciones de la tarea, esperamos que el profesor realice la retroalimentación de la tarea anterior. El profesor verifica que los estudiantes de cada grupo hayan asumido y comprendido las funciones de su rol correspondiente. El profesor establece el tiempo necesario para que todos los grupos de estudiantes logren realizar el modelo de la pieza y hace seguimiento al uso eficiente de recursos, tales como la regla y el transportador. Con base en el uso real del tiempo por parte de los estudiantes, el profesor puede establecer, al azar, los grupos que participan de la puesta en común.

Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

Sugerimos al profesor que, en caso de que alguno de los grupos tenga tres integrantes, oriente a todos los estudiantes a asumir el rol de interventor con respecto a los procedimientos realizados por sus compañeros. Para grupos con cinco integrantes, las orientaciones del profesor deben aclarar que dos estudiantes pueden compartir las funciones de un mismo rol. En cualquiera de los casos, esperamos que se promueva el trabajo en equipo desde la perspectiva en que se puedan distinguir los aportes individuales de los estudiantes al producto final.

Sugerimos que el profesor cuente con materiales y recursos adicionales para compartir con los estudiantes, debido a que algunos grupos pueden necesitar varias piezas de cartón, reglas y

transportadores para construir el modelo de la pieza. Por otro lado, resulta conveniente que los grupos de estudiantes comparen entre sí el modelo de la pieza construida. De esta manera, la pieza elaborada que se comparte al final de la sesión cuenta con la revisión y los ajustes que los grupos de trabajo consideren necesarios.

Evaluación

Consideramos que el enfoque de evaluación de esta tarea se debe centrar en los procedimientos para determinar las medidas de los ángulos mediante el uso de la función inversa de seno, y el uso de la propiedad de la equivalencia de los valores de seno en ángulos suplementarios y de la propiedad de ángulos interiores del triángulo. Las explicaciones que argumentan los estudiantes para responder la tarea y el modelo de la pieza realizado también son insumos que el profesor debe incluir en su evaluación.

2.2. Tarea T2.1 Tienda escolar

Esta tarea promueve que los estudiantes diseñen estrategias grupales que les permitan representar o ilustrar la situación para resolverla. Esperamos que los estudiantes vivencien la aplicación de la Ley de senos en situaciones que ocurren en escenarios propios de la escuela, tales como la cancha de fútbol y la tienda escolar.

Requisitos

Los estudiantes deben utilizar las dimensiones de una figura plana para establecer comparaciones con las longitudes de sus lados. La tarea requiere que los estudiantes ubiquen puntos en el plano e identifiquen ángulos en posición normal.

Metas

Esta tarea pretende contribuir con que los estudiantes hagan uso de estrategias para representar pictóricamente la situación, generen confianza para justificarla y establezcan comparaciones con las longitudes de los lados del triángulo no rectángulo que se requieren para su solución.

Formulación

En la cancha de fútbol de la escuela, cuyas dimensiones son de 30 metros de largo y 20 metros de ancho, los estudiantes de grado décimo están en su clase de deporte. Los estudiantes David y Pedro se encuentran uno frente al otro, lanzándose el balón desde dos puntos de tiro de esquina, tal como se observa en la figura.

Cuando suena el timbre del descanso, ambos estudiantes se dirigen a la tienda escolar que se encuentra al otro lado de la cancha. A partir de la línea visual que los une, la trayectoria que sigue David para llegar a la tienda describe un ángulo de 47° , mientras que la trayectoria de Pedro describe un ángulo de 60° .

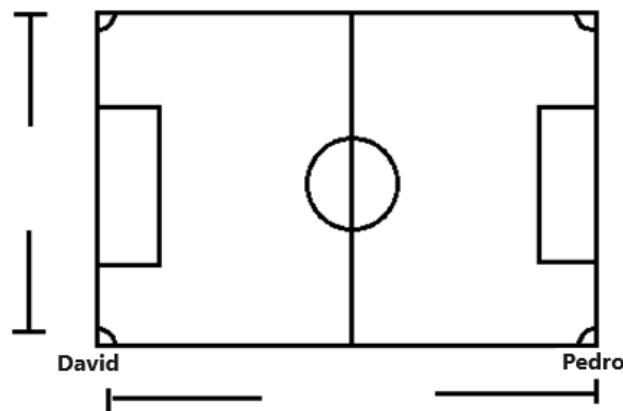


Figura. Cancha de fútbol

Basado en la información anterior, ubica e ilustra de manera coherente los elementos relevantes del problema. ¿Cuánto menor es la distancia que debe caminar Pedro con respecto a David para ir a la tienda escolar?

Conceptos y procedimientos

Esta tarea permite que los estudiantes propongan su propia representación pictórica de la situación, y relacionen los lados y ángulos del triángulo representado con la expresión de la Ley de senos. Por consiguiente, pueden determinar las medidas de los lados mediante el empleo de la propiedad fundamental de las proporciones y compararlas.

Sistemas de representación

La tarea promueve el uso de los sistemas de representación pictórico y geométrico, puesto que los estudiantes deben representar la situación del enunciado mediante una ilustración o dibujo y ubicar de forma apropiada sus elementos. De igual manera, se fomenta el uso de los sistemas de representación simbólico y numérico cuando los estudiantes emplean la expresión algebraica de la Ley de senos, y realizan cálculos para determinar y comparar las medidas de los lados del triángulo.

Contextos PISA en los que se sitúa la tarea

La tarea se relaciona con el contexto personal según el marco PISA 2012, debido a que se sitúa en escenarios relacionados con las vivencias de los estudiantes en los que la Ley de senos hace parte de la estrategia de solución a un problema del entorno escolar.

Materiales y recursos

Cada grupo de estudiantes recibe una hoja de block impresa con el plano de la cancha de fútbol y el texto de la situación de la tarea. Los estudiantes necesitarán de los útiles escolares, tales como lápiz, borrador, regla y calculadora.

Agrupamiento e interacción

Al inicio, el profesor hace el recuento de las disertaciones de la tarea anterior. Luego, entrega a cada grupo de cuatro estudiantes la formulación de la tarea en una hoja impresa. Acto seguido, el profesor se dirige con los estudiantes hacia la cancha de la escuela. En este escenario, el profesor se apoya en dos estudiantes para recrear la situación y propiciar el análisis individual. De vuelta en el aula, cada grupo concreta su propuesta de representación pictórica y determina la estrategia para el desarrollo de la tarea. Posteriormente, algunos grupos comparten sus procedimientos y resultados de la tarea, y el profesor realiza su retroalimentación para responder a las dudas que hayan surgido.

Temporalidad

Al comienzo de la sesión de clase, el profesor hace un recuento y retroalimentación de la tarea anterior (10 minutos). Luego, presenta el segundo objetivo y da las indicaciones de la tarea (15 minutos). Posteriormente, el profesor recrea la situación en la cancha de la escuela para su análisis y estrategia individual (20 minutos). Sigue la fase del desarrollo de la tarea que realiza cada grupo (25 minutos). Finalmente, algunos de los grupos realizan la puesta en común de los resultados de la tarea (15 minutos).

Errores

Se busca brindar oportunidades para la superación de los errores asociados con la organización de los datos que proponen los estudiantes para representar pictóricamente el problema: por ejemplo, cuando se intercambia la ubicación de los elementos dados en la situación o se plantea una figura geométrica que no corresponde. Una de las ayudas que proponemos para contribuir con la superación de estos errores es sugerir a los estudiantes que tengan en cuenta la ubicación de los tres elementos principales que se mencionan en la situación (David, Pedro y la tienda escolar) para obtener la figura geométrica apropiada.

Grafo de criterios de logro

A continuación, presentamos en la figura 10 el grafo de criterios de logro con los procedimientos que realizan los estudiantes y los errores correspondientes para la tarea.

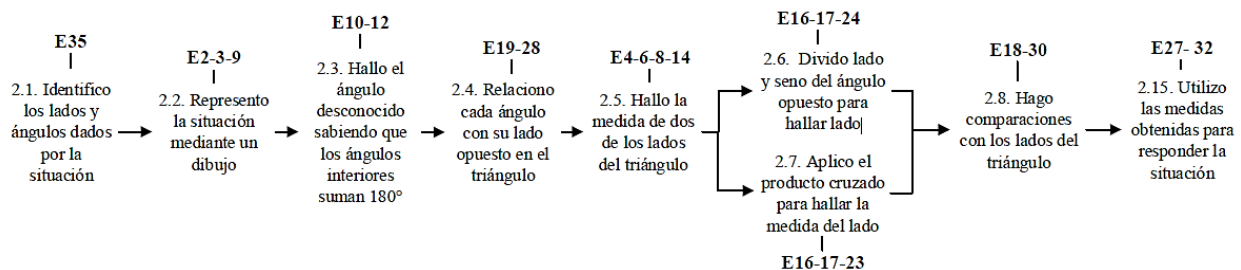


Figura 10. Grafo de criterios T2.1 Tienda escolar

Al comienzo de la tarea, notamos que los estudiantes identifican la información del enunciado que les permite proponer una representación pictórica de la situación. Luego, deben determinar la medida de los lados desconocidos mediante el uso de las propiedades de las proporciones para la

expresión de la Ley de senos. Posteriormente, los estudiantes realizan las comparaciones entre las medidas obtenidas para responder a los cuestionamientos de la tarea.

Actuaciones del profesor

El profesor debe organizar los grupos de trabajo de cuatro integrantes antes de dirigirse a la cancha de fútbol de la escuela. Luego, leerá en voz alta del enunciado, de tal manera que las acciones se realicen de forma paralela y secuencial para recrear la situación de la tarea en el escenario real. En la fase de desarrollo de la tarea, el profesor hará seguimiento de la representación grupal construida a partir de lo vivenciado en la cancha.

Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

Dado que los grupos de trabajo se han organizado previamente a la salida hacia la cancha de fútbol, sugerimos al profesor que motive a los estudiantes a realizar el análisis individual de la situación mientras se recrea en tiempo real. Consideramos que esto promoverá el diálogo reflexivo al interior de los grupos, de tal manera que se establezcan acuerdos para determinar la mejor estrategia que permita representar pictóricamente la situación y resolverla.

Evaluación

Para la evaluación de esta tarea, proponemos verificar que los estudiantes hayan integrado los elementos de la tarea de manera apropiada en la ilustración que realicen para representar la situación. En ese orden de ideas, es fundamental que el profesor analice la coherencia entre los elementos ilustrados con la correspondencia entre lados y ángulos al plantear las proporciones que estructuran la Ley de senos. Consideramos que es importante que el profesor revise el uso de las medidas obtenidas como parte de los argumentos que dan los estudiantes para justificar su respuesta.

2.3. Tarea T2.2 Rampa

Esta tarea se caracteriza por fomentar el uso de elementos auxiliares al triángulo no rectángulo, como los ángulos exteriores que se utilizan para determinar la medida de los ángulos interiores. Buscamos contribuir con el diálogo crítico de los estudiantes frente a los ajustes en el diseño de una rampa en la escuela para las personas con movilidad reducida.

Requisitos

Esta tarea requiere que los estudiantes describan las características del ángulo de inclinación dado en una figura. Además, deben identificar los ángulos interiores y exteriores a un triángulo y verificar cuándo dos ángulos forman un par lineal.

Metas

Pretendemos contribuir a que los estudiantes realicen procedimientos para determinar la medida de los ángulos del triángulo no rectángulo a partir de sus elementos auxiliares. Por otro lado, la tarea permite integrar la Ley de senos con el uso de las normas técnicas para construcción de rampas en busca del mejoramiento de las condiciones de movilidad y seguridad vial en la escuela.

Formulación

Los estudiantes y profesores con movilidad reducida han expresado dificultades para acceder al auditorio de la institución educativa, puesto que la pendiente de la rampa de ingreso es demasiado pronunciada, dado que alcanza un ángulo de inclinación de 10° . En consecuencia, el Consejo Directivo considera remodelar de manera urgente este acceso.

Es necesario que la nueva rampa cumpla con las normas técnicas colombianas de accesibilidad básica (NTC 4143). Estas normas son requeridas en el ámbito de la construcción, ya que establecen los requisitos, especificaciones y pautas para garantizar la calidad, la seguridad y la sostenibilidad de las infraestructuras. De acuerdo con estas normas, la nueva rampa debe cumplir con las siguientes especificaciones:

El punto de inicio de la rampa debe estar a 3 metros del acceso anterior.

La longitud de la rampa debe ser de 10 metros.

Con base en estas características, se ha propuesto el diseño para la remodelación de la rampa, tal como se muestra en la figura³.

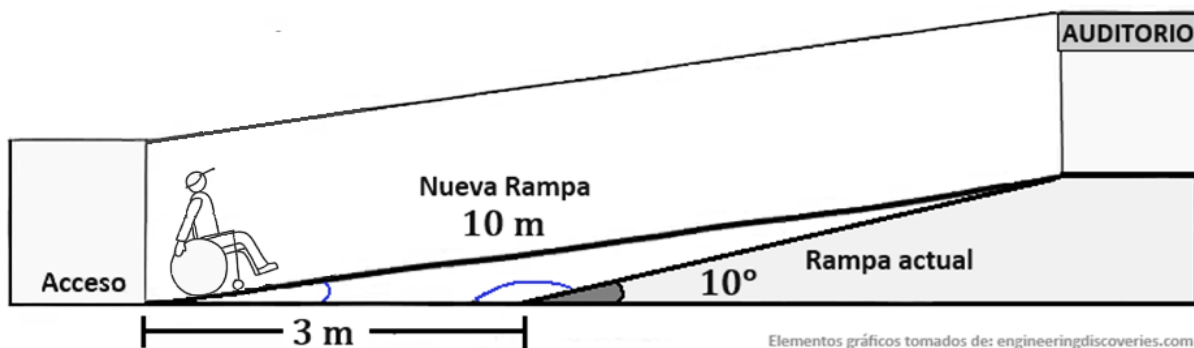


Figura. Rampa

Si se lleva a cabo esta remodelación, discute con tu grupo si las especificaciones de la nueva rampa reducirían la inclinación del acceso al auditorio. Justifica tu respuesta y comparte con toda la clase las conclusiones a las que ha llegado tu grupo.

Conceptos y procedimientos

El desarrollo de la tarea implica el uso de las propiedades de ángulos suplementarios para determinar las medidas de los ángulos que forman un par lineal. Los estudiantes emplean la función inversa de seno y los ángulos exteriores para calcular las medidas de los ángulos interiores del triángulo.

Sistemas de representación

La tarea promueve el uso del sistema de representación geométrico, puesto que los estudiantes deben identificar la ubicación de los ángulos de inclinación y las distancias entre las diferentes

³ Diseñada a partir de elementos gráficos de: <https://engineeringdiscoveries.com/important-information-about-ramp-and-stair-design-with-details/> (recuperado 13 de marzo de 2023)

rampas que se mencionan en la situación. De igual manera, se fomenta el uso de los sistemas de representación simbólico y numérico por parte de los estudiantes al realizar cálculos a partir de las propiedades de los ángulos interiores y exteriores al triángulo.

Contextos PISA en los que se sitúa la tarea

La tarea se relaciona con los contextos personal y social según el marco PISA 2012, puesto que abarca situaciones que influyen en las dinámicas de la movilidad y seguridad vial en el entorno escolar. Esta tarea también se sitúa en el contexto profesional, debido a que se relaciona con normas técnicas para el diseño y construcción de rampas.

Materiales y recursos

La tarea requiere de una hoja impresa con la figura del plano de la rampa y el texto de la situación. Se hacen necesarios los útiles escolares (lápiz, borrador, calculadora, etc.), video beam, computador y altavoz.

Agrupamiento e interacción

Al inicio, el profesor hace la retroalimentación de la tarea anterior. Luego, organiza grupos de cuatro estudiantes, presenta la tarea y el video sobre construcción de rampas como introducción de la situación. Posteriormente, los estudiantes discuten sobre el análisis de la situación y resuelven la tarea. El profesor revisa los avances de cada grupo y da orientaciones sobre los errores que ha encontrado en sus procedimientos. Finalmente, un integrante de algunos grupos participa de la puesta en común de las conclusiones de la tarea, mientras el profesor aporta sus comentarios al respecto.

Temporalidad

El primer momento corresponde a la fase de retroalimentación de la tarea anterior (10 minutos). Luego, el profesor da las orientaciones de la tarea y comparte el video sobre las normas técnicas colombianas para construcción de rampas (15 minutos). Después se generan los espacios de discusión y desarrollo de la tarea al interior de los grupos (40 minutos). Finalmente, se da la puesta en común de las conclusiones por un representante de algunos grupos y el profesor hace sus observaciones correspondientes a cada intervención (20 minutos).

Errores

Se espera aportar a la superación de errores que tienen que ver con el uso de las medidas de los ángulos exteriores a un triángulo para hallar uno de los ángulos interiores. Por ejemplo, cuando los estudiantes asignan la misma medida del ángulo exterior al ángulo interior adyacente, podemos indicarles que, si la medida del ángulo exterior al triángulo es 25° , entonces, las medidas de los ángulos interiores no adyacentes deben sumar 25° . Análogamente, esperamos que la tarea permita superar los errores relacionados con asignar medidas de ángulos que completan el par lineal que no cumplen con la propiedad de ángulos suplementarios. Para esto, podemos sugerir al estudiante que tenga en cuenta que la medida de los ángulos que forman un par lineal suma 180° .

Grafo de criterios de logro

A continuación, presentamos en la figura 11 el grafo de criterios de logro con los procedimientos que realizan los estudiantes y los errores correspondientes para la tarea.

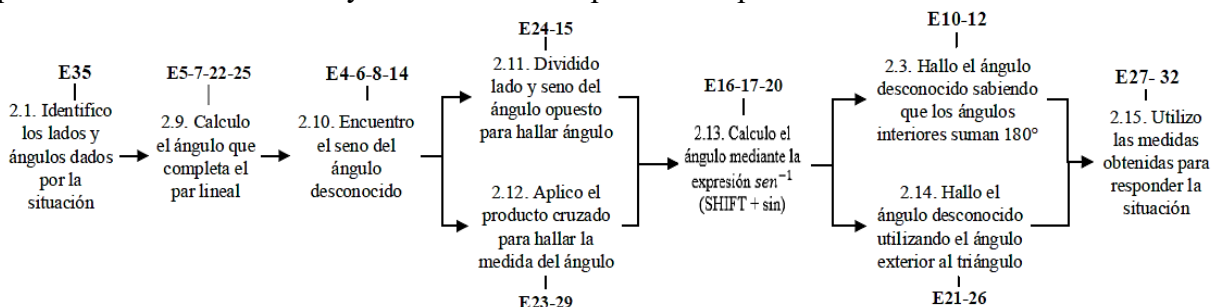


Figura 11. Grafo de criterios T2.2 Rampa

Al comienzo de la tarea, los estudiantes deben identificar el ángulo exterior que permite completar el par lineal para establecer la medida de uno de los ángulos interiores del triángulo. Luego, deben determinar la medida de los ángulos desconocidos mediante el uso de la función inversa de seno y de las propiedades de ángulos interiores no adyacentes al ángulo exterior. Al final del desarrollo de la tarea, los estudiantes deben establecer comparaciones entre los ángulos de inclinación correspondientes para expresar sus argumentos sobre la viabilidad de la nueva rampa diseñada.

Actuaciones del profesor

Con base en los resultados de la implementación, consideramos que las orientaciones del profesor deben enfocarse en los procedimientos asociados con las propiedades de ángulos suplementarios y par lineal. Durante el desarrollo de la tarea, el profesor debe hacer un recorrido por los grupos que le permita observar la manera en que los estudiantes utilizan la información relacionada con los elementos auxiliares del triángulo no rectángulo. Estos procedimientos, que corresponden al inicio de la estrategia de solución, son necesarios para continuar con el desarrollo apropiado de la tarea.

Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

Para compartir el video sobre el uso de la norma técnica para construcción de rampas, el profesor debe prever la disponibilidad de recursos tecnológicos (computador, video beam y altavoz) en el aula. Esperamos que el profesor complemente la información del video con ejemplos de diseños de rampas que los estudiantes puedan relacionar con su entorno. Es importante que el profesor permita la intervención de algunos estudiantes que muestren interés por comentar lo observado en el video. El propósito de abrir espacios de diálogo y discusión sobre el tema del video radica en motivar a los estudiantes para resolver la tarea. En el listado de las ayudas de la tarea que se presenta en el anexo 3, incluimos el enlace del sitio web en que se puede acceder al video.

Evaluación

Para esta tarea, la evaluación de los procedimientos que realizan los estudiantes debe centrarse en el empleo de las propiedades de ángulos exteriores al triángulo y de los ángulos suplementarios que forman un par lineal. Además, el profesor debe atender a la calidad de los argumentos y/o

justificaciones que los estudiantes proponen a partir de las comparaciones de los ángulos de inclinación para el diseño de la rampa. Un indicador del desarrollo de la dimensión afectiva de esta tarea es la capacidad de los estudiantes para asumir una postura crítica sobre las problemáticas que afectan a las personas con movilidad reducida en la escuela.

2.4. Diario del estudiante y del profesor

Los diarios del estudiante y del profesor son instrumentos que brindan herramientas para complementar la recolección de información relacionada con la implementación de la unidad didáctica. En estos diarios, podemos valorar aspectos relacionados con el desarrollo de las expectativas de aprendizaje de nivel medio y de las expectativas afectivas por parte de los estudiantes.

En el esquema general de la unidad didáctica, hemos incluido los tiempos para que los estudiantes registren sus percepciones sobre las evidencias del desarrollo de cada tarea de aprendizaje. Aclaramos que el profesor diligencia algunos ítems de su diario durante la implementación, y el resto, al finalizar cada tarea. En los anexos 6 y 7, proponemos los instrumentos de los diarios del profesor y del estudiante, respectivamente. Allí, compartimos algunas orientaciones que han surgido de la experiencia de implementación para su adecuado diligenciamiento.

Sugerimos al profesor que distribuya el tiempo para registrar la información del diario del estudiante con base en los momentos descritos en la temporalidad de cada tarea que se encuentra en el anexo 3 de las fichas de las tareas de aprendizaje.

3. EXAMEN FINAL Y RÚBRICA DE EVALUACIÓN

En este apartado, presentamos el examen final que hemos diseñado para evaluar el logro de los objetivos de aprendizaje de la unidad didáctica. De igual manera, describimos los indicadores de desempeño que proponemos para establecer las valoraciones de los estudiantes relacionadas con la implementación del examen final.

3.1. Examen final

Diseñamos el examen final con el propósito de evaluar los aspectos clave de cada objetivo de aprendizaje, basados en los conceptos y procedimientos que caracterizamos para la secuencia de tareas. El examen final será implementado una vez los estudiantes finalicen con el desarrollo de las tareas de aprendizaje y el profesor haya realizado su retroalimentación global.

El examen final consta de cuatro situaciones o tareas de evaluación. Las dos primeras tareas están relacionadas con los criterios de logro del primer objetivo, mientras que las dos últimas están relacionadas con el segundo objetivo de aprendizaje. A continuación, presentamos a manera de ejemplo, la formulación de la tercera tarea del examen final. La versión completa del conjunto de tareas del examen final se encuentra en el anexo 5.

Tarea 3 Torre de Pisa. Un turista observa la cúspide de la torre de Pisa con un ángulo de elevación de 60° . El turista está ubicado a 37 metros de la base de la torre desde su lado más bajo (hacia donde cae). Desde ese mismo lado, la torre describe un ángulo de 84° con respecto al suelo.



Figura. Torre inclinada de Pisa⁴, Italia

Ilustra la situación y determina la altura de la torre desde la base en su lado más bajo e indica en cuánto varió su altura si originalmente (antes de inclinarse) su altura era 60 metros.

Con esta tarea, pretendemos verificar que los estudiantes hayan alcanzado los aprendizajes relacionados con algunos de los procedimientos del segundo objetivo de la unidad didáctica. Por ejemplo, pretendemos evaluar (a) la representación pictórica que realizan los estudiantes basados en la información suministrada en el enunciado de la tarea, (b) el uso de las medidas conocidas para determinar los lados del triángulo no rectángulo relacionado con la situación y (c) los argumentos que dan los estudiantes para responder a los cuestionamientos a partir de la comparación de las medidas obtenidas para los lados del triángulo. La cuarta tarea del examen final, que se encuentra en el anexo 5, permite complementar la verificación de los aprendizajes de los estudiantes relacionados con los procedimientos del segundo objetivo.

3.2. Rúbrica de evaluación

Una vez que se haya implementado el examen final, el profesor debe analizar los procedimientos evidenciados por cada uno de los estudiantes para establecer el nivel de desempeño correspondiente. El profesor asignará la valoración del examen final con base en los indicadores de desempeño superior, alto, básico y bajo que se establecen en la rúbrica de evaluación.

En la tabla 6, presentamos los indicadores de desempeño que proponemos para evaluar los procedimientos de los estudiantes al desarrollar la tercera tarea del examen final (Torre de Pisa).

⁴ Tomado de <https://www.wallpaper-gratis.eu/handy-hintergrundbilder/europa/italien/schieferturm-pisa003-handy-hintergrundbild.php>

Tabla 6
Indicadores de desempeño de los estudiantes

Nivel de desempeño	Indicadores de desempeño
Superior	El estudiante ilustra la situación planteada de manera coherente con la información suministrada y emplea una estrategia eficaz para aplicar la propiedad de ángulos interiores, plantear la expresión de la Ley de senos, y determinar y comparar las medidas de los lados.
Alto	El estudiante usa de forma apropiada los datos suministrados por el enunciado para ilustrar la situación y resolverla. Sin embargo, no utiliza todas las medidas obtenidas de los lados del triángulo para realizar comparaciones y argumentar de manera concreta a los requerimientos de la tarea (E30 y E32).
Básico	El estudiante ilustra la situación planteada, sin embargo, se evidencia algunos de los datos asociados no están ubicados de manera coherente con la información de la tarea (E2, E9 y E35).
Bajo	El estudiante no identifica los datos suministrados que son necesarios para representar la situación. Por tanto, no logra establecer la estrategia de solución de la tarea (E1).

Los indicadores de desempeño de la tabla 6, surgieron del análisis de los criterios de logro del grafo del segundo objetivo de aprendizaje, así como, de los errores representativos correspondientes. La rúbrica de evaluación completa con los indicadores de desempeño para todas las tareas del examen final también se encuentra en el anexo 5.

3. CONCLUSIONES

Para la planificación de esta unidad didáctica, realizamos un análisis minucioso de los diferentes aspectos del currículo de las matemáticas escolares basados en el tema Ley de senos. En la estructuración de los contenidos, tuvimos en cuenta los estándares básicos de competencias y DBA propuestos por el MEN, así como las capacidades matemáticas fundamentales y los procesos matemáticos del marco PISA 2012. Con base en este análisis, propusimos los objetivos de aprendizaje, y diseñamos, para su alcance, un conjunto de tareas de aprendizaje que promueven la aplicabilidad de la Ley de senos en situaciones contextualizadas.

Con base en la implementación de la secuencia de tareas de aprendizaje, mencionamos algunas virtudes de la unidad didáctica. Los materiales y recursos utilizados para desarrollar las tareas de aprendizaje y de evaluación son asequibles, y de fácil manejo para los estudiantes y el profesor. Las tareas de aprendizaje fueron pensadas y diseñadas según las características de los contextos en que se desenvuelven los estudiantes, tales como sitios turísticos, escenarios y condiciones de la infraestructura de la escuela, entre otros. Estas tareas promueven la motivación y el interés de los estudiantes para proponer estrategias de solución a las situaciones planteadas, y para responder a sus cuestionamientos mediante argumentos críticos y reflexivos. Asimismo, destacamos que las tareas generan oportunidades de interacción y fortalecen las habilidades sociales de los estudiantes mediante el trabajo cooperativo.

Por su parte, la retroalimentación de cada tarea de aprendizaje permite a los estudiantes reflexionar sobre los procedimientos empleados en su resolución, así como en la incurrencia de los errores más significativos. En cuanto al uso de instrumentos de recolección de información, observamos que el diario del estudiante posibilita la autoevaluación y la identificación de aspectos de mejora para el desarrollo apropiado de procedimientos al resolver las tareas. También, la información que el profesor registra en su diario complementa el proceso evaluativo de la implementación de la unidad didáctica, con base en sus percepciones sobre las actuaciones de los estudiantes e interacciones en el aula. En cuanto a las limitaciones para la implementación, consideramos que el número de estudiantes del curso y el tiempo disponible para el desarrollo de las tareas de aprendizaje puede generar dificultades para el seguimiento individual de los procedimientos que estos evidencian. Esto condiciona el alcance de las ayudas que proporciona el profesor para la superación de los errores observados cuando los estudiantes abordan las tareas.

Basados en las experiencias de implementación de las tareas de aprendizaje, notamos que los estudiantes requirieron, con mayor frecuencia, de las ayudas del profesor cuando empleaban procedimientos relacionados con el uso de ángulos exteriores al triángulo. Además, los estudiantes solicitaron muchas orientaciones al profesor para poder representar mediante una ilustración la situación propuesta en algunas de las tareas. También, resaltamos que, de manera progresiva, los estudiantes enriquecieron sus argumentos para responder a los cuestionamientos de cada tarea. En

general, este progreso se evidenció en los resultados del examen final. Las tareas de aprendizaje fortalecieron en los estudiantes las destrezas para plantear razones y proporciones mediante la expresión de la Ley de senos, solucionar ecuaciones que permiten calcular medidas de lados y ángulos, y emplear la función inversa de seno. Compartimos estos resultados a manera de ejemplo para mostrar la importancia que tienen las reflexiones del profesor sobre su propia experiencia de implementación. Esto le permitirá hacer ajustes a sus previsiones y tomar decisiones para llevar a cabo el desarrollo de las tareas de aprendizaje y la aplicación del examen final.

En concordancia con lo anterior, esperamos haber proporcionado una mirada exhaustiva sobre la unidad didáctica, de tal manera que el profesor que desee implementarla se pueda sentir con la libertad de ajustarla según su criterio. Proponemos algunas recomendaciones particulares para algunas de las tareas de aprendizaje. Para la tarea T1.2 Pieza, el profesor puede variar las dimensiones y la forma de la lámina de cartón y de la pieza que deben diseñar los estudiantes para enriquecer las discusiones alrededor de los procedimientos de la tarea, y la puesta en común de sus resultados. Para la tarea T2.2 Rampa, el profesor puede utilizar ejemplos cercanos al entorno de los estudiantes mediante la observación directa o por medio de fotografías que sensibilicen sobre la importancia de emplear normas técnicas apoyadas en la resolución de triángulos no rectángulos. En términos generales, sugerimos al profesor que considere, según las necesidades de su aula y escuela, realizar ajustes sobre (a) el uso de materiales y recursos según su disponibilidad, (b) los tiempos de implementación de cada tarea de aprendizaje, (c) los procedimientos en los que desea hacer énfasis con la rúbrica de evaluación del examen final, (d) las ayudas que proporcionará a los estudiantes en el desarrollo de las tareas y (e) el esquema de los agrupamientos de las tareas, entre otros.

4. LISTADO DE ANEXOS

A continuación, listamos los anexos de la unidad didáctica.

Tabla 6
Listado de anexos

A	Nombre	Descripción
1	Dificultades y errores	Listado general de dificultades y errores en los que podrían incurrir los estudiantes en el desarrollo de las tareas de aprendizaje.
2	Criterios de logro	Listado de criterios de logro de los objetivos de aprendizaje de la unidad didáctica.
3	Tareas de aprendizaje	Elementos de las tareas de aprendizaje y listados completos de las ayudas.
4	Tarea Diagnóstica	Incluye todos los ítems y/o preguntas de la tarea diagnóstica.
5	Examen final y rúbrica	Contiene las tareas del examen final y los indicadores de desempeño por objetivo.
6	Diario del profesor	Instrumento del diario del profesor.
7	Diario del estudiante	Instrumento del diario del estudiante.
8	Imprimibles	Contiene la versión para impresión de la tarea diagnóstica, las tareas de aprendizaje y el examen final.

Nota. A: anexos.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Cañadas, M. C., Gómez P., y Pinzón, A. (2018). Análisis de contenido. En P. Gómez (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 53-71). Bogotá: Universidad de los Andes.
- Castro, P. y Gómez, P (2018). Evaluación de la planificación y la implementación. En P. Gómez. *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 371-411). Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes.
- Gómez, Pedro; Mora, María Fernanda; Velasco, Carlos (2018). Análisis de instrucción. En Gómez, Pedro (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 197-268). Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes.
- González, María José; Gómez, Pedro (2018). Análisis cognitivo. En Gómez, Pedro (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 113-196). Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes.
- Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (2022). Evaluar para avanzar 3° a 11°. *Cuadernillo 1, matemáticas 10°* (pág. 2). Bogotá, Colombia: ICFES
- ICONTEC (2009). Accesibilidad de las personas al medio físico. Edificios y espacios urbanos. Rampas fijas adecuadas y básicas. *Tercera actualización (30 de octubre 2009)*. Bogotá D.C.
- MEN. (2016). *Derechos básicos de aprendizaje (versión 2)*. Bogotá: MEN
- MEN. (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Bogotá: MEN.
- Ministerio de Educación Cultura y Deporte. (2013). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012: matemáticas, lectura y ciencias*. Descargado el 05/04/2024, de <https://goo.gl/Xwmerl>
- Pliago, Natalia (2011). El aprendizaje cooperativo y sus ventajas en la educación intercultural. ISSN: 1989-3558. *Hekademos, revista educativa digital (número 8)*. Recuperado de http://www.hekademos.com/hekademos/media/articulos/08/05_Aprendizaje_cooperativo.pdf
- Romero, Isabel; Gómez, Pedro (2018). Análisis de actuación. En Gómez, Pedro (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 269-301). Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes.
- Sullivan, M. (2006). *Álgebra y Trigonometría*, México: Pearson Educación de México, S.A.