



MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

MEDICIÓN DE LA CAPACIDAD DEL CILINDRO

LUIS ORTIZ, JUAN RODRÍGUEZ Y GONZALO HENAO

BOGOTÁ, MAYO DE 2024

En este documento, presentamos la unidad didáctica sobre la medición de la capacidad del cilindro. Esta unidad didáctica constituye una propuesta para la enseñanza de este tema de las matemáticas escolares para grado noveno y fue diseñada por el grupo 3 de la undécima cohorte de la Maestría en Educación Matemática de la Universidad de los Andes.

Implementamos esta unidad didáctica en el Instituto Pedagógico Nacional que está ubicado en la localidad de Usaquén de la ciudad de Bogotá. El Instituto es un establecimiento educativo del sector público y de régimen especial por ser una dependencia académico-administrativa de la Universidad Pedagógica Nacional. Además, el Instituto fue declarado como patrimonio histórico y cultural de la nación en la Ley 1890 de 2018. En relación con la población objetivo, los estudiantes del grado están en edades que oscilan entre los catorce y los diecisiete años y, en general, presentan un buen rendimiento académico. Este grupo demuestra constantemente interés por aprender y disposición favorable para el trabajo en clase. Asimismo, son estudiantes habituados a trabajar de manera colaborativa y en grupo en las clases de matemáticas.

El tema seleccionado es coherente con los referentes curriculares nacionales propuestos por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN). Estos referentes son los estándares básicos de competencias para grado noveno y el documento de los derechos básicos de aprendizaje en su segunda versión (DBA) para el mismo grado. Particularmente, la medición de la capacidad del cilindro atiende a los estándares “selecciono y uso técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados” y “uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas” (MEN, 2006, pp. 86-87). Asimismo, el DBA relacionado con esta unidad didáctica es “identifica y utiliza relaciones entre el volumen y la capacidad de algunos cuerpos redondos (cilindro, cono y esfera) con referencia a las situaciones escolares y extraescolares” (MEN, 2015, p. 68).

Consideramos que abordar la enseñanza de la medición de la capacidad del cilindro es relevante puesto que, en nuestra experiencia, notamos que los estudiantes tienen dificultades para diferenciar entre los conceptos de capacidad y volumen. Los procedimientos necesarios para medir indirectamente estas magnitudes son los mismos (Olmo, Moreno, & Gil Cuadra, 1993) por lo que, en la mayoría de situaciones, la atención de los profesores está centrada en la enseñanza del volumen.

1. ARTICULACIÓN DE CONTENIDOS

En este apartado, presentamos los aspectos conceptuales necesarios para una adecuada implementación de esta unidad didáctica. Primero, describimos los conceptos y procedimientos que componen el eje central para la medición de la capacidad del cilindro. Luego, organizamos los sistemas de representación que permiten dar significado a este tema de las matemáticas escolares. Finalmente, enunciaremos los fenómenos que dan sentido al tema y los agrupamos mediante sus características.

1. ESTRUCTURA MATEMÁTICA

A continuación, presentamos la estructura matemática de la medición de la capacidad del cilindro. Nuestro propósito es mostrar la relación entre algunos conceptos y procedimientos relevantes para este tema de las matemáticas escolares. No obstante, resaltamos que estos conceptos y procedimientos coinciden con la estructura matemática relacionada con la medición del volumen. Afirmamos esto porque “las matemáticas no han elaborado ningún modelo para describir la capacidad como tal, por lo que hay que recurrir a su relación con el volumen para manejarla matemáticamente” (Olmo et al, 1993, p. 101). Lo anterior, fundamenta que el volumen y la capacidad sean tratados procedimentalmente de la misma manera. Por ejemplo, al medir la capacidad de un recipiente, medimos el volumen de un objeto completamente macizo que encaja perfectamente en ese recipiente.

En la figura 1, presentamos la estructura conceptual relacionada con la medida de capacidad del cilindro. En los rectángulos sombreados y delimitados por un borde grueso se encuentran los ejes centrales del tema. Usamos rectángulos sin sombreado para establecer conceptos, mientras que los procedimientos están enmarcados en elipses. Las figuras con esquinas redondeadas contienen procedimientos con relevancia histórica que apoyan las relaciones en la estructura conceptual del tema. Usamos líneas continuas para relacionar dos conceptos, líneas punteadas para establecer relaciones entre dos procedimientos y líneas discontinuas para relacionar conceptos con procedimientos.

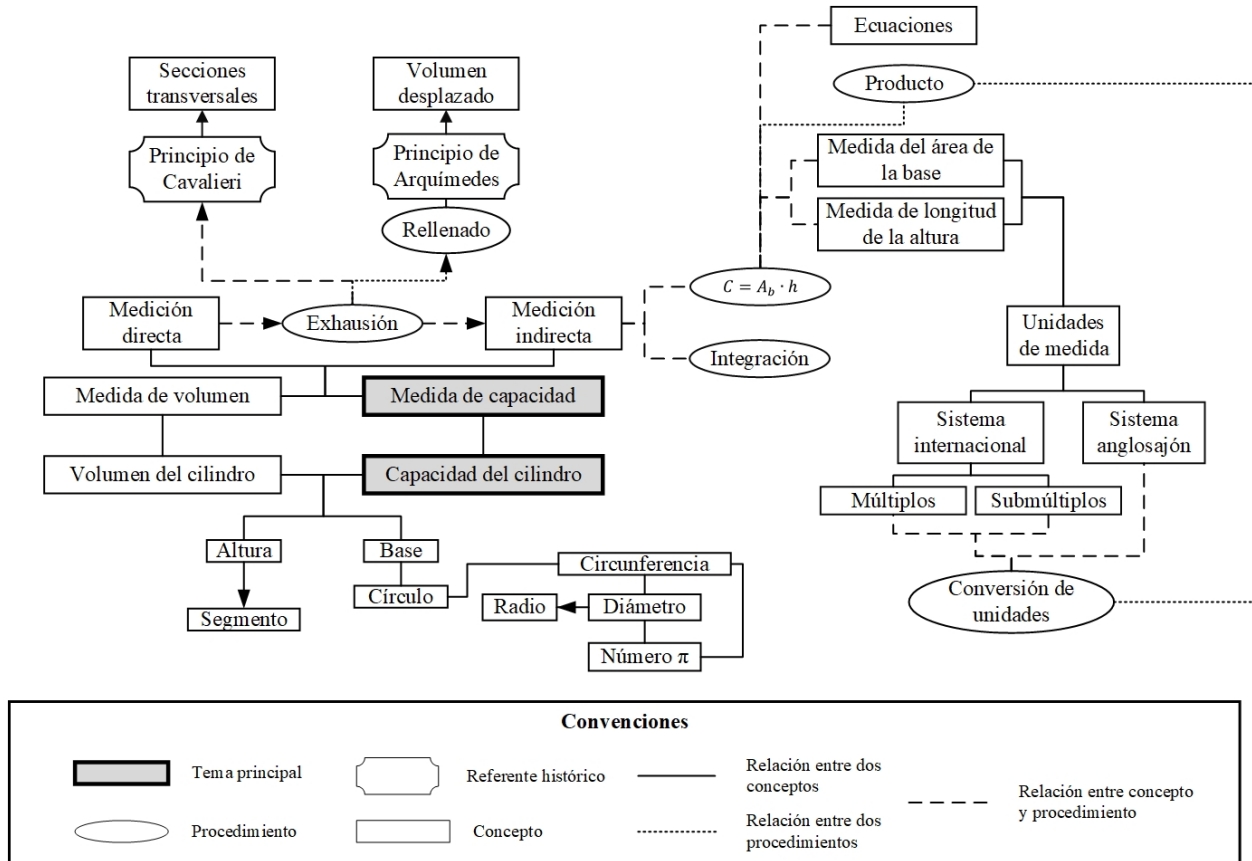


Figura 1. Estructura conceptual sobre la medición de la capacidad del cilindro

Consideramos necesario diferenciar los conceptos de volumen y capacidad. Asociamos el volumen con una subestructura matemática relacionada con el espacio ocupado por un objeto sólido que tiene la cualidad de desplazar un líquido en un contenedor (principio de Arquímedes). Esta magnitud es medida con unidades cúbicas (m^3 , cm^3 , ft^3 , in^3 , etc.). Por otra parte, la capacidad es la cualidad de un recipiente de ser llenado y está relacionada con el uso de secciones transversales para aproximar su medida (principio de Cavalieri). Esta magnitud es medida con múltiplos y submúltiplos del litro en el sistema internacional y con los galones, las onzas, las tazas, entre otras, en el sistema anglosajón.

La medición de la capacidad puede ser efectuada de manera directa o indirecta. La medición directa de la capacidad está relacionada con el conteo de las repeticiones de una unidad de medida seleccionada. El refinamiento de este proceso de conteo está relacionado con el método de exhaustión. Por ejemplo, podemos determinar la capacidad de una lata al usar repetidamente un envase de capacidad menor y conocida. No obstante, este procedimiento puede llevar a tener que usar fracciones del envase para estimar la capacidad. De esta manera, una persona puede utilizar un envase de capacidad cada vez más pequeña para refinar el conteo y llegar a una cantidad entera de unidades de medida.

2. SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

Según Kaput (1992), un sistema de representación es un conjunto de signos junto con unas reglas que permiten representar diversos aspectos de un concepto de las matemáticas. De acuerdo con esto, identificamos que podemos abordar la medida de capacidad de un cilindro con los sistemas de representación numérico, tabular, gráfico, simbólico, geométrico, manipulativo y ejecutable. Aclaramos que la descripción de los sistemas de representación geométrico y ejecutable para el tema de la unidad didáctica están apoyados en el concepto de volumen y su medida. A continuación, describimos los sistemas de representación para la medida de capacidad del cilindro.

2.1. Sistema de representación numérico

El sistema de representación numérico está presente durante la medición indirecta de la capacidad, puesto que un número representa la medida de una magnitud como la longitud, el área o la capacidad.

2.2. Sistema de representación tabular

Representamos en tablas la información relacionada con la medida de capacidad de cilindros al organizar en ternas ordenadas las medidas de atributos del cilindro como lo son (a) su altura, radio o diámetro de la base, (b) el área de la base y (c) la capacidad.

2.3. Sistema de representación gráfico

Empleamos un sistema de coordenadas cartesiano para representar cilindros y sus atributos. Usamos el sistema de referencia \mathbb{R}^3 para graficar y medir atributos de un cilindro como el radio, diámetro de la base o altura. Con esta información, podemos determinar la medida de su capacidad.

2.4. Sistema de representación simbólico

Recurrimos a la notación algebraica para expresar la medida de la capacidad de un cilindro. Para esto, relacionamos la medida de la capacidad del cilindro con el producto de la altura y el área de su base o cara circular. Usamos la expresión $C = A_b \cdot h$ para simbolizar esta relación. Empleamos la letra h para representar la medida de la altura y A_b para el área. También, utilizamos las letras r para el radio y d para el diámetro con el fin de representar los atributos de la base. Disponemos de las expresiones $r = \frac{1}{2} \cdot d$ y $A_b = \pi \cdot r^2$ para simbolizar las relaciones entre radio y diámetro, y la expresión para la medida del área de la base de un cilindro, respectivamente.

2.5. Sistema de representación geométrico

Para medir la capacidad de un envase cilíndrico, tomamos un disco de altura fija que cabe perfectamente en este recipiente para que sea la unidad de referencia. Replicamos este disco tantas veces como sea necesario de manera que llenamos el envase completamente. Por lo tanto, obtenemos la medida de capacidad del envase cilíndrico al contar la unidad de referencia (disco) las veces que fue replicado dentro del recipiente.

2.6. Sistema de representación manipulativo

Los antiguos egipcios usaron envases con forma cilíndrica para repartir una cantidad de granos entre un grupo de personas. En la figura 2, ilustramos un ejemplo de estos envases.

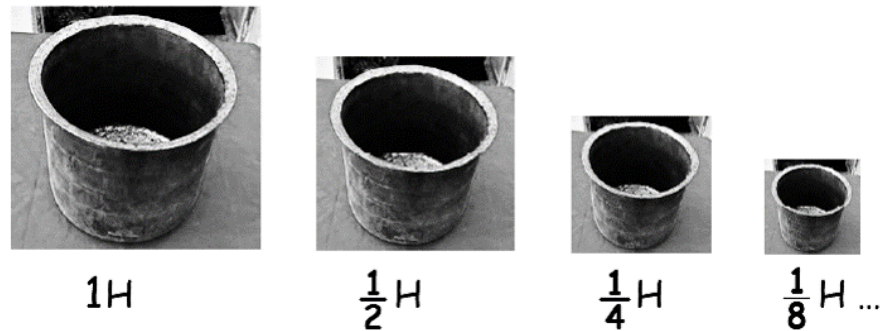


Figura 2. Envases usados en el antiguo Egipto. Tomado de Deif (2019).

Los egipcios fijaron una unidad de medida para la capacidad y la llamaron “hekat”. Expresaban la cantidad para repartir como una suma de las fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$ y $\frac{1}{64}$, las cuales eran llamadas fracciones del ojo de Horus. En consecuencia, consideramos relevante complementar el sistema manipulativo. Para este sistema de representación, incluimos como signos envases cilíndricos graduados y con distintas capacidades.

2.7. Sistema de representación ejecutable

Los paquetes informáticos para la enseñanza de las matemáticas, como GeoGebra, permiten diseñar recursos que ilustran de manera dinámica cómo es llenado un recipiente cilíndrico. Por medio de estos recursos, reproducimos el método de replicación de discos que presentamos en el sistema de representación geométrico. En GeoGebra, la herramienta de trazo permite mostrar el lugar geométrico generado al desplazar la base de manera que simula el llenado del cilindro. En la figura 3, presentamos los sistemas de representación de la medición de la capacidad del cilindro y sus relaciones.

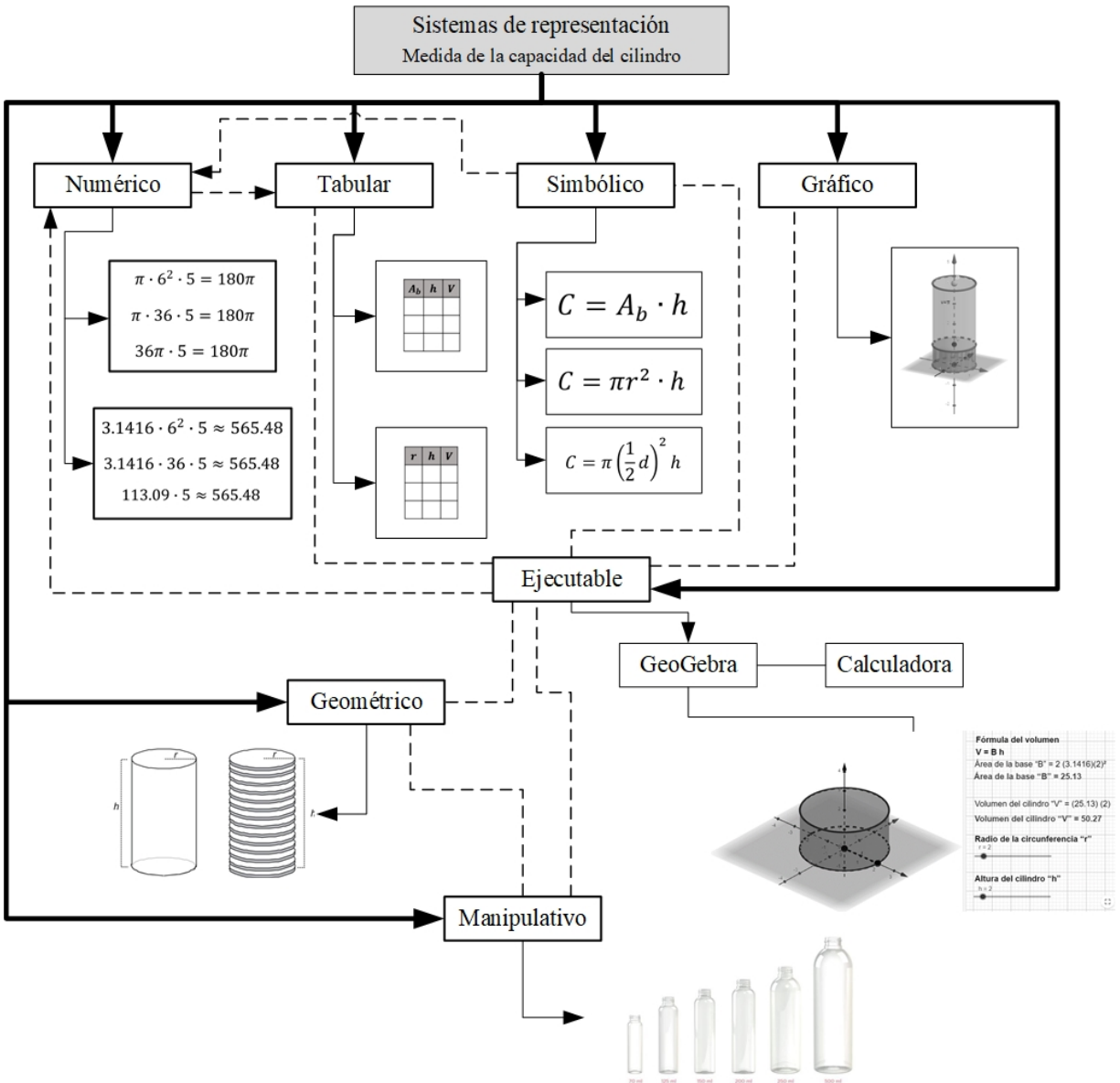


Figura 3. Sistemas de representación para la medida de capacidad del cilindro

2.8. Fenómenos que dan sentido al tema

Las civilizaciones antiguas tenían la necesidad de determinar la cantidad de granos que producían o la cantidad de tierra que debían mover en sus construcciones. Algunas de estas civilizaciones recopilaban estas situaciones y sus soluciones en diversos documentos. Por ejemplo, en la antigua China, se sintetizaron en el capítulo 5 del Jiu Zhan Suanshu (nueve capítulos en el arte matemático) situaciones en las que es necesario calcular la capacidad de un contenedor cilíndrico con el fin de determinar la cantidad de trabajo necesaria para llenarlo (Yong, 1994). De igual manera, papiros del antiguo Egipto describen situaciones que buscan determinar la cantidad de grano dispuesta en

contenedores cilíndricos con cubierta semiesférica (Deif, 2019). A partir de lo expuesto, presentamos un listado de situaciones relacionadas con la capacidad de recipientes cilíndricos.

- ◆ Capacidad de los cilindros de un motor de combustión interna.
- ◆ Capacidad de un frasco o contenedor cilíndrico (tanque, vaso, balde, olla, etc.).
- ◆ Capacidad de una tubería de longitud y radios conocidos.
- ◆ Tierra por remover en la construcción de túneles para un metro subterráneo.
- ◆ Cantidad de parafina líquida para elaborar una vela mediante el uso de un molde de forma cilíndrica.
- ◆ Cantidad de concreto para construir una columna cilíndrica (postes de luz o columnas estructurales).

Identificamos que los fenómenos listados involucran recipientes cilíndricos para los que podemos medir (a) el espacio ocupado y (b) el espacio disponible para ser llenados. Evidenciamos que estas cualidades surgen al considerar cilindros sólidos (espacio ocupado) y recipientes cilíndricos con o sin tapa (espacio disponible). Estas dos categorías reciben el nombre de contextos fenomenológicos, según lo expuesto por Cañadas, Gómez, & Pinzón (2018). En la tabla 1, ilustramos la agrupación de los fenómenos listados en dos contextos fenomenológicos.

Tabla 1

Fenómenos y contextos fenomenológicos de la capacidad del cilindro

Fenómenos	Contextos fenomenológicos
Cilindraje de un motor; capacidad de un contenedor cilíndrico o tubería; cantidad de parafina líquida para crear una vela; cantidad de concreto para construir columnas	Situaciones de llenado
Espacio ocupado por una vela de forma cilíndrica; tierra por remover en una excavación; espacio ocupado por una columna de concreto; cantidad de arroz almacenado en un envase hermético de forma cilíndrica.	Situaciones de espacio ocupado

Observamos que los fenómenos que dan sentido al tema están agrupados con la ayuda de las propiedades físicas de la sustancia contenida en un recipiente cilíndrico. Las situaciones de llenado están relacionadas con líquidos o gases y la cantidad de estos fluidos que pueden llenar un recipiente cilíndrico. Esta cualidad tiene que ver con el espacio vacío determinado por un recipiente y que es susceptible de ser llenado (Olmo et al., 1993). Por otra parte, las situaciones de espacio ocupado están relacionadas con sustancias en estado sólido cuya forma está completamente determinada por un recipiente cilíndrico. En la figura 4, presentamos un esquema que corresponde con los contextos fenomenológicos y las subestructuras que dan sentido a la unidad didáctica.

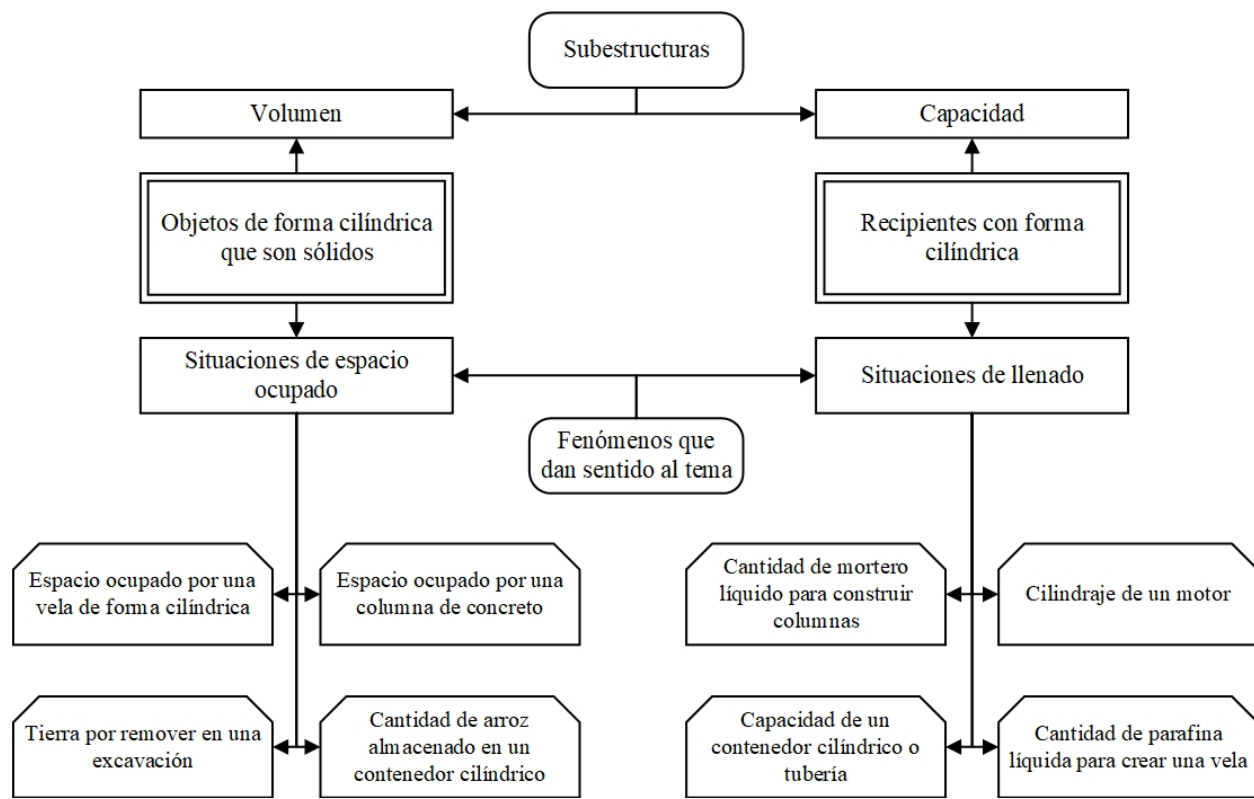


Figura 4. Análisis fenomenológico para la medición de la capacidad del cilindro

2. ASPECTOS COGNITIVOS

En este apartado, presentamos los aspectos cognitivos que la unidad didáctica desarrolla en los estudiantes para fortalecer su competencia matemática. Describimos estos aspectos a partir de tres tipos de expectativas a las que el profesor busca contribuir: las expectativas de nivel superior, los objetivos de aprendizaje y las expectativas de tipo afectivo. En lo que sigue, exponemos estas expectativas, junto con las limitaciones de aprendizaje asociadas a esas expectativas y la caracterización de los objetivos de aprendizaje.

1. EXPECTATIVAS DE NIVEL SUPERIOR

Para caracterizar las expectativas de nivel superior, empleamos la noción de alfabetización matemática establecida por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) en el marco teórico expuesto para las pruebas PISA del año 2012. Para potenciar en el largo plazo esta competencia matemática en los estudiantes, el marco PISA describe tres procesos matemáticos y siete capacidades matemáticas fundamentales que se deben desarrollar a lo largo de la educación escolar (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2013).

Con la unidad didáctica sobre la medición de la capacidad del cilindro, prevemos contribuir a los procesos matemáticos de formular, emplear e interpretar. Los estudiantes evidencian el proceso matemático de formular cuando comprenden los contextos expuestos, extraen la información relevante para abordarlos y plantean adecuadamente una estrategia de solución. Sobre el proceso de emplear, los estudiantes usan constantemente procedimientos para medir indirectamente esta magnitud. Finalmente, los escolares deben verificar la coherencia de sus respuestas dentro del contexto por lo que deben interpretar las respuestas obtenidas y su significado en las situaciones propuestas.

De igual manera, la unidad didáctica contribuye en mayor medida a las capacidades matemáticas fundamentales de diseño de estrategias para resolver problemas, comunicación, utilización de operaciones y un lenguaje formal, simbólico y técnico, y representación. Esta unidad didáctica aporta a las capacidades matemáticas fundamentales de razonamiento y argumentación, matemática y utilización de herramientas matemáticas.

2. OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Con el fin de concretar la contribución a las expectativas de nivel superior, establecimos los siguientes objetivos de aprendizaje para la unidad didáctica.

Objetivo 1. Justificar la medición de la capacidad de recipientes cilíndricos y de sus dimensiones en diversos contextos.

Objetivo 2. Justificar la elección de un recipiente cilíndrico como resultado de la comparación de su capacidad y la de otros recipientes con la misma forma.

Con el primer objetivo de aprendizaje, esperamos que los escolares midan indirectamente la capacidad de envases cilíndricos o de alguna de sus dimensiones. Además, buscamos que puedan estimar la capacidad de un recipiente irregular al acotar su capacidad con envases cilíndricos. Con el segundo objetivo de aprendizaje, esperamos que los estudiantes elijan recipientes cilíndricos al compararlos en situaciones que involucren las capacidades de estos recipientes. También, buscamos que los escolares justifiquen los procedimientos utilizados y la elección del mejor envase a partir del contexto propuesto.

De igual manera, los errores más frecuentes en la medición de la capacidad de recipientes cilíndricos son de multiplicación, de división y de tipo proporcional (Olmo et al., 1993). Además, consideramos que los escolares pueden incurrir en errores relacionados con el uso inadecuado de las unidades de medida puesto que pueden existir confusiones entre los conceptos de volumen y capacidad.

3. EXPECTATIVAS DE TIPO AFECTIVO

El aprendizaje de los estudiantes involucra diversos factores relacionados con la motivación (González & Gómez, 2018, p. 164). Con base en esto, formulamos una serie de expectativas para contribuir a los aspectos afectivos que median en el aprendizaje de los escolares. En la tabla 2, presentamos las tres expectativas afectivas formuladas para la unidad didáctica.

Tabla 2

Listado de expectativas afectivas

EA	Descripción
1	Fortalecer la seguridad en la presentación de la información relacionada con la medición de la capacidad de un recipiente cilíndrico acorde con un contexto establecido.
2	Desarrollar cuidado y precisión en la medición indirecta de la capacidad de cilindros.
3	Valorar la utilidad de la medición de la capacidad de recipientes cilíndricos en la resolución de diferentes situaciones cotidianas.

Nota. EA: Expectativa afectiva

4. LIMITACIONES DE APRENDIZAJE

Según Lupiáñez (2009), las limitaciones de aprendizaje de las matemáticas escolares están caracterizadas a partir de (a) las dificultades y (b) los errores. Las dificultades se refieren a los aspectos generales que impiden o retrasan el logro de los objetivos de aprendizaje propuestos en la unidad didáctica (González & Gómez, 2018). Asimismo, un error es la acción realizada por un estudiante que hace explícita alguna dificultad relacionada con el tema.

Para describir las dificultades relacionadas con la medición de la capacidad, Olmo et al. (1993) citan resultados de investigaciones sobre dificultades en el aprendizaje del volumen y la capacidad. Además, determinamos algunas dificultades que surgen al reflexionar sobre nuestra experiencia docente. De esta manera, consolidamos las dificultades en el siguiente listado.

- ◆ Dificultades aritméticas y algebraicas.
- ◆ Dificultad para medir indirectamente por modelos multiplicativos.
- ◆ Dificultad relacionada con la interpretación de la medición.
- ◆ Dificultad asociada con la representación geométrica de la información.
- ◆ Dificultad relacionada con la conservación de la cantidad.

En la tabla 3, presentamos los errores más frecuentes asociados con cada una de estas dificultades. El lector puede encontrar el listado completo de errores y las descripciones de las dificultades en el anexo 1.

Tabla 3

Dificultades y errores para la medición de la capacidad del cilindro

Dificultad	Error
Dificultades aritméticas y algebraicas	E4 Resolver la ecuación que relaciona las medidas del cuadrado del radio, la altura y el volumen de un cilindro despejando un valor distinto al solicitado
Dificultad para medir indirectamente por modelos multiplicativos	E43 Multiplicar la altura de un recipiente cilíndrico por un número distinto a la medida del área de la base
	E44 Multiplicar el radio y la altura por pi para determinar la capacidad de un recipiente cilíndrico
Dificultad relacionada con la interpretación de la medición	E11 Asignar una unidad de medida distinta a la requerida u omitirla
	E12 Intercambiar unidades de medida de volumen con unidades de medida de longitud o de superficie
Dificultad asociada con la representación geométrica de la información	E18 Etiquetar el radio como si fuera el diámetro del círculo
	E42 Confundir la notación estándar para los datos dados en el enunciado
Dificultad relacionada con la conservación de la cantidad	E19 Concluir que dos cilindros de dimensiones distintas deben tener volúmenes distintos

Nota. E: Error

5. CRITERIOS DE LOGRO

En este apartado, presentamos los criterios de logro y los grafos de criterios de logro con los que caracterizamos los objetivos de aprendizaje de la unidad didáctica.

5.1. Criterios de logro

Los criterios de logro describen con un lenguaje cercano para los estudiantes los procedimientos necesarios para el desarrollo de una tarea matemática escolar (Gómez, 2018). Para su elaboración, analizamos las diferentes formas de solucionar las tareas matemáticas escolares propuestas y los errores en los que pueden incurrir los estudiantes. En la tabla 4, presentamos algunos de los criterios de logro más relevantes para la unidad didáctica organizados por objetivo de aprendizaje. El listado completo de criterios de logro puede ser consultado en el anexo 2.

Tabla 4
Criterios de logro

CdL	Descripción
Objetivo 1	
1.1	Identifico las dimensiones del cilindro que me permiten solucionar el problema
1.2	Interpreto los datos del problema y los represento algebraicamente
1.9	Escribo la relación entre la capacidad, el área y la altura de un cilindro
1.12	Resuelvo la ecuación que me permite determinar una dimensión del cilindro a partir de su relación con otra
1.16	Verifico la coherencia de la solución obtenida y doy respuesta a la tarea
Objetivo 2	
2.3	Comparo las capacidades de los dos recipientes mediante fórmulas
2.8	Comparo la cantidad de material usado para llenar los recipientes
2.12	Comparo el precio por unidad de capacidad de los envases
2.19	Comparo la capacidad del envase antes y después de la ampliación

Nota. CdL: Criterio de logro

5.2. Grafos de criterios de logro de los objetivos de aprendizaje

Para una tarea matemática escolar, un camino de aprendizaje es una secuencia de criterios de logro que aborda completamente su solución. Como las tareas matemáticas escolares tienen distintas estrategias de solución, podemos establecer un camino de aprendizaje por cada una de estas estrategias. Los grafos de criterios de logro permiten visualizar gráficamente todas las estrategias de solución para las tareas de un mismo objetivo de aprendizaje y los errores en los que puede incurrir un estudiante al resolverlas. Además, estos grafos permiten caracterizar un objetivo de aprendizaje

mediante los procedimientos que prevemos que los estudiantes desarrollarán. En la figura 5, presentamos un ejemplo de un grafo de criterios de logro para una tarea matemática escolar de esta unidad didáctica.

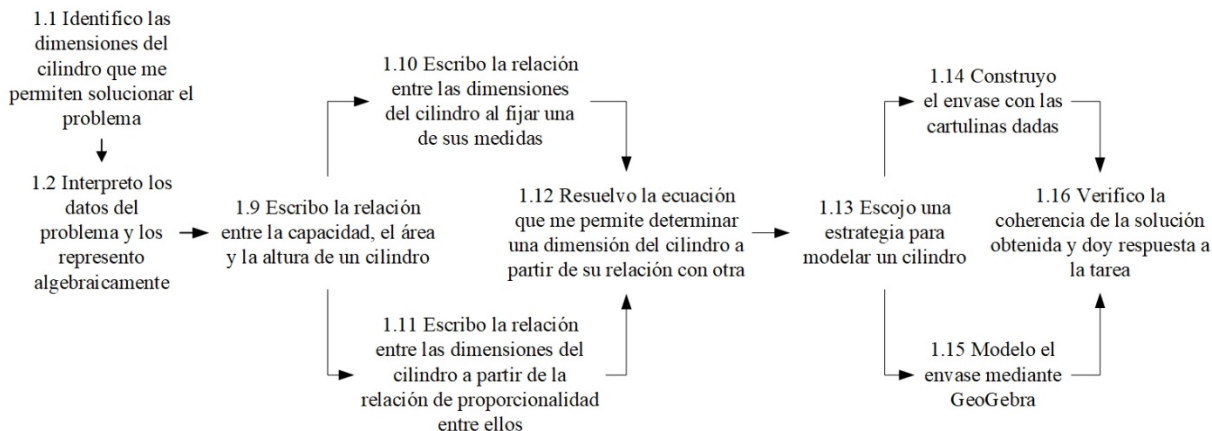


Figura 5. Ejemplo de un grafo de criterios de logro para una tarea matemática escolar

Evidenciamos que la tarea matemática escolar que usamos como ejemplo tiene cuatro caminos de aprendizaje distintos. Al organizar todos los grafos de las tareas matemáticas escolares de un mismo objetivo, estructuramos el grafo de criterios de logro de dicho objetivo. En la figura 6, presentamos el grafo de criterios de logro del primer objetivo de la unidad didáctica.

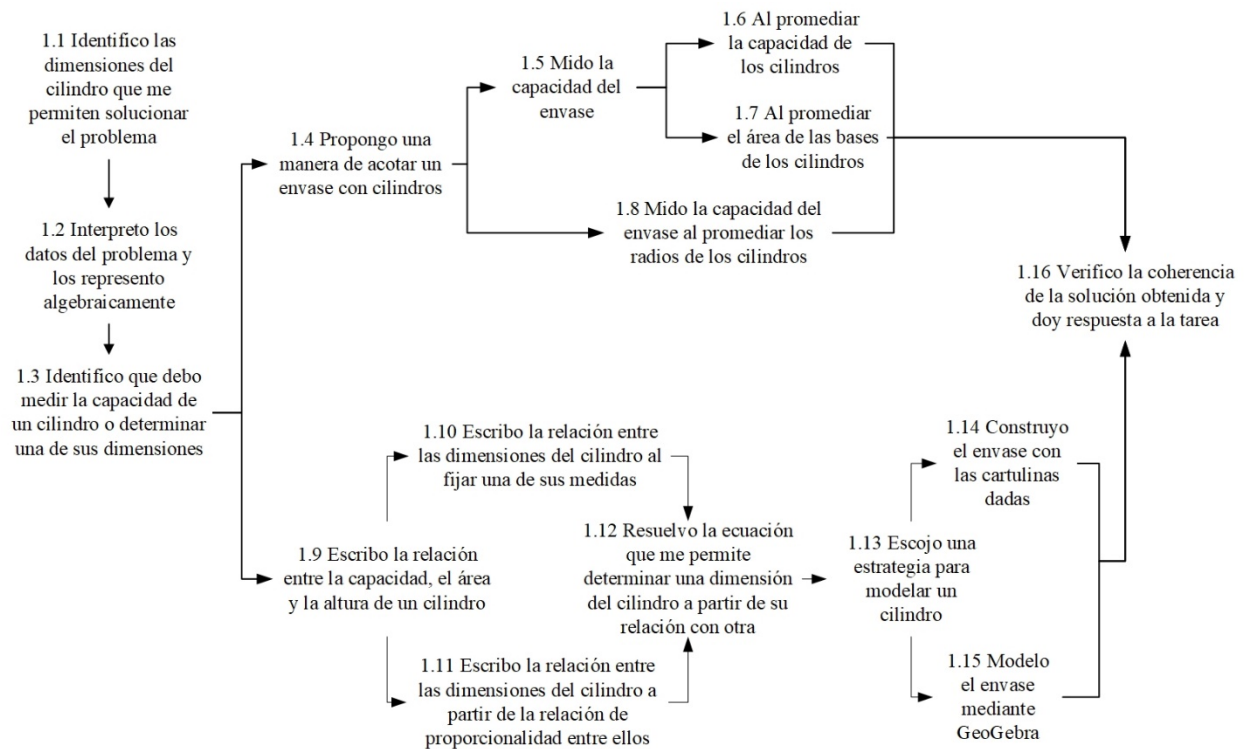


Figura 6. Grafo de criterios de logro del primer objetivo

Para lograr el objetivo propuesto, los escolares deben (a) identificar e interpretar los datos dados en el problema (criterios de logro 1.1, 1.2); (b) determinar si es necesario estimar la capacidad de un envase no cilíndrico o determinar una dimensión de un recipiente con capacidad conocida (criterio de logro 1.3); (c) medir indirectamente la capacidad de un envase cilíndrico o una de sus dimensiones (criterios de logro 1.6, 1.7, 1.8 y 1.12); y (d) validar la coherencia de su solución (criterio de logro 1.16). Ahora, presentamos en la figura 7 el grafo de criterios de logro del segundo objetivo.

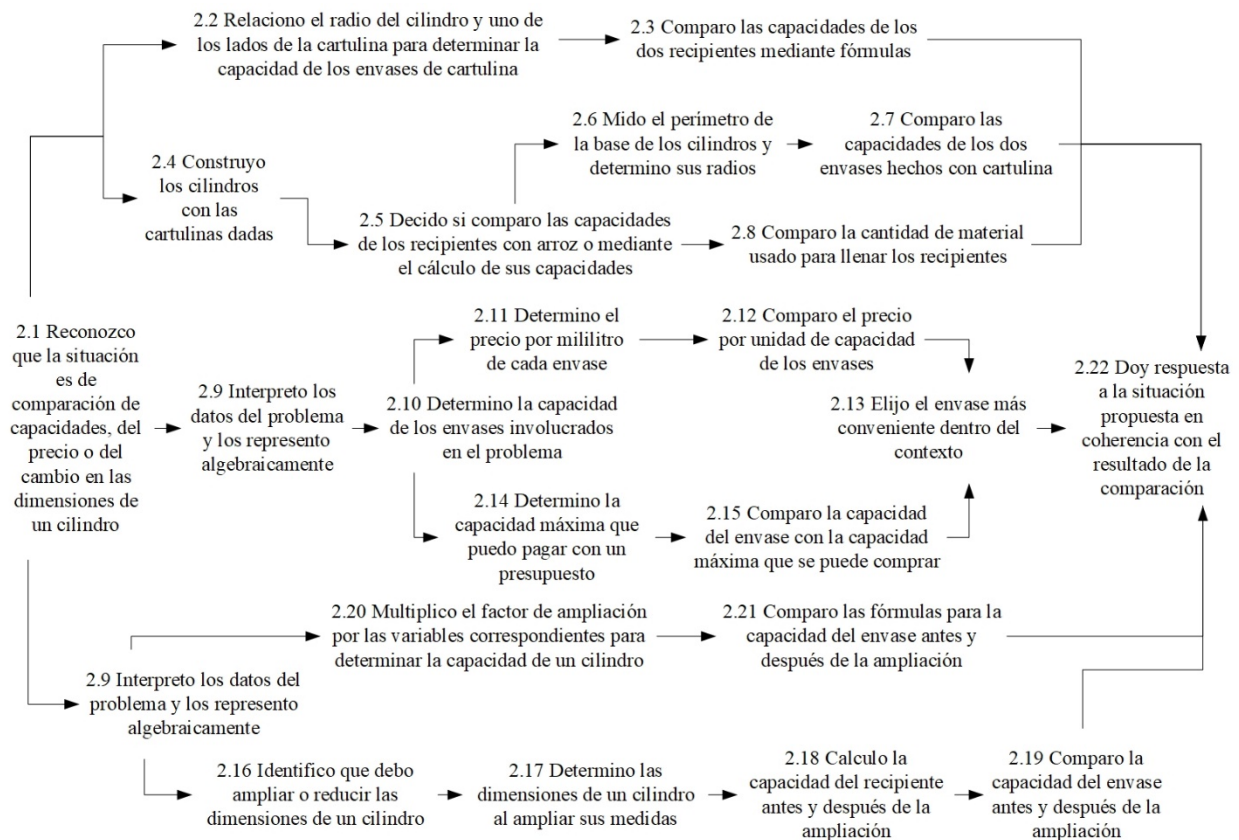


Figura 7. Grafo de criterios de logro del segundo objetivo

Para lograr el segundo objetivo, notamos que un escolar debe (a) identificar e interpretar los datos del problema (criterios de logro 2.4 y 2.9); (b) medir indirectamente la capacidad de varios recipientes cilíndricos (criterios de logro 2.2, 2.6, 2.10, 2.16, 2.18 y 2.20); (c) comparar las capacidades (criterios de logro 2.3, 2.7, 2.8, 2.12, 2.15, 2.19 y 2.21); y (d) validar la coherencia del resultado de esta comparación dentro del contexto propuesto (criterios de logro 2.13 y 2.22).

3. ESQUEMA GENERAL DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

En la tabla 5, presentamos el diseño global de la unidad didáctica. Incluimos cada una de las sesiones trabajadas con estudiantes, las actividades a desarrollar por sesión y el tiempo en minutos destinado para estas actividades. Distribuimos el total de actividades de la unidad didáctica en nueve sesiones que tienen una duración de noventa minutos cada una.

Tabla 5

Estructura de la unidad didáctica sobre la medición de la capacidad del cilindro

Sesión	Actividad	Descripción	Tiempo
1	Organización del grupo	Organización del grupo	5
	Presentación, actividades y evaluación de la unidad didáctica	Introducción al tema de la unidad didáctica Explicación de la distribución de actividades de la unidad didáctica, de la ponderación de cada una de las actividades de la unidad y de los procedimientos para definir la valoración del desempeño individual en la unidad	25
	Tarea diagnóstica	Evaluación para determinar el nivel de consecución de los conocimientos previos requeridos para el desarrollo de la unidad didáctica	60
2	Organización del grupo	Organización del grupo	5
	Realimentación tarea diagnóstica	Explicación de las dificultades encontradas en las evaluaciones	15
	Explicación	Abordaje de los temas que presentan más dificultades	30
	Actividad de refuerzo	Ejercicios rutinarios y de aplicación para poner en práctica los temas explicados	40
3	Organización del grupo	Organización del grupo	10
Medición de la capacidad del cilindro			17

Tabla 5

Estructura de la unidad didáctica sobre la medición de la capacidad del cilindro

Sesión	Actividad	Descripción	Tiempo
		Conclusiones	
	Tarea 2.2	Presentación de la meta y descripción	30
		Desarrollo de la tarea	
		Presentación en el gran grupo	10
	Tarea 2.3	Presentación de la meta y descripción	25
		Desarrollo de la tarea	
		Presentación en el gran grupo	10
8	Organización del grupo	Organización del grupo	5
	Retroalimentación tareas 2.2 y 2.3	Aclaración de dudas	10
		Conclusiones	
	Examen final	Orientaciones generales	75
		Aplicación del examen final	
9	Organización del grupo	Organización del grupo	5
	Retroalimentación del examen final	Explicación de las dificultades encontradas en los trabajos de los estudiantes	15
	Valoraciones de desempeño	Compartir la valoración de desempeño global en la unidad didáctica	30
	Evaluación de la unidad didáctica	Diligenciamiento de una encuesta sobre la unidad didáctica	30
	Actividades de superación de dificultades	Desarrollo de una guía de refuerzo y citación de estudiantes con dificultades a asesorías	10

Contemplamos que la primera sesión incluya la presentación de la unidad didáctica y la implementación de la tarea diagnóstica. Además, en la segunda sesión, retroalimentamos la tarea diagnóstica, explicamos las dificultades encontradas en las evaluaciones y desarrollamos una actividad de refuerzo con ejercicios rutinarios y de aplicación para poner en práctica los conocimientos previos.

Asimismo, distribuimos una secuencia de cinco tareas de las matemáticas escolares en cinco sesiones de clase. Las dos primeras tareas corresponden al primer objetivo de aprendizaje mientras que las tres siguientes corresponden al segundo objetivo. En general, las sesiones previstas para

desarrollar las tareas mantienen un esquema similar. En este esquema, cada sesión inicia con la retroalimentación de la tarea desarrollada en la sesión anterior. Posteriormente, el profesor realiza la presentación de la tarea de aprendizaje y orienta su desarrollo.

Por último, proponemos una sesión para evaluar el logro de los objetivos propuestos por medio de un examen final de la unidad didáctica. También, planteamos una sesión para retroalimentar este examen y dar cierre a la unidad didáctica.

4. TAREA DIAGNÓSTICA

En este apartado, presentamos la tarea diagnóstica para esta unidad didáctica. La tarea diagnóstica es un instrumento conformado por un conjunto de tareas de evaluación y una retroalimentación a realizar después de su implementación. Las tareas de evaluación de este instrumento permiten establecer los conocimientos previos con los que cuentan los estudiantes para abordar las tareas que conforman la unidad didáctica. Asimismo, la retroalimentación de la tarea diagnóstica tiene como propósito ayudar a que los estudiantes superen las dificultades y errores relacionados con dichos conocimientos previos. En la tabla 6, presentamos el listado de conocimientos previos para la unidad didáctica y los errores que tienen asociados (ver anexo 1).

Tabla 6
Conocimientos previos y errores asociados

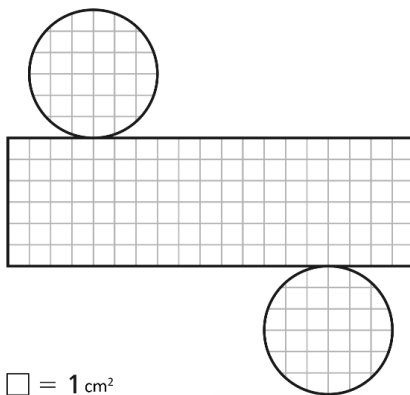
CP	Descripción	Errores
1	Caracterizar objetos bidimensionales mediante sus medidas de área	E55
2	Caracterizar poliedros mediante sus medidas de volumen	E56
3	Identificar y describir las partes de un cilindro	E57
4	Identificar y describir las partes de un prisma	E58
5	Representar gráficamente un cilindro a partir de la relación entre sus dimensiones	E59
6	Medir el área de un círculo de manera indirecta (fórmula)	E60 – 61
7	Utilizar los factores de conversión entre unidades de medida	E62
8	Plantear ecuaciones a partir de la relación que hay entre los datos presentados en un problema	E63
9	Resolver ecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita	E64 – 65
10	Medir indirectamente el volumen de un prisma rectangular	E66 – 67
11	Utilizar las razones y proporciones en la interpretación y solución de problemas	E68 – 69
12	Interpretar la respuesta decimal obtenida luego de usar una calculadora	E70 – 71
13	Determinar el valor intermedio entre dos cantidades mediante su promedio	E80 – 81

Nota. CP: Conocimientos previos; E: Código de error

Los conocimientos previos están relacionados con las partes de prismas y cilindros, la medición del área del círculo, el uso de factores de conversión entre unidades de medida y la solución de ecuaciones de primer y segundo grado. También, algunos de estos conocimientos abordan aspectos relacionados con el cálculo del promedio de un conjunto de datos y su interpretación como un valor intermedio a dos cantidades dadas. Con base en el listado de conocimientos previos, diseñamos una tarea diagnóstica que consta de siete actividades. A continuación, presentamos la tarea diagnóstica de la unidad didáctica.

Resuelve los siguientes ejercicios en parejas sustentando todos los procedimientos por escrito de manera organizada. El uso de calculadora está permitido en todo momento.

1. Juan va al supermercado y encuentra dos cajas de cereal. La primera contiene 14 onzas de cereal y cuesta \$15 920. La segunda caja es de 5 cm por 6 cm por 8 cm y cuesta \$10 360. ¿Cuál es la opción más conveniente para pagar la menor cantidad de dinero por onza? Justifica tu respuesta. (Nota: una onza equivale aproximadamente a $29,5 \text{ cm}^3$)¹.
2. Llenamos un vaso de vidrio con agua a la mitad de su capacidad. Sacamos 400 ml de agua y el contenido que queda es 0,34 del total. ¿Qué cantidad de agua queda en el vaso?²
3. Determina la medida del radio y la altura del cilindro (a escala) que se puede armar con el desarrollo plano que se muestra en la siguiente figura³. Haz un bosquejo del cilindro resultante.



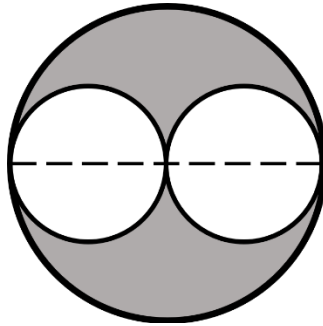
4. Dos círculos idénticos son ubicados lado a lado dentro de un círculo más grande, como se muestra en la siguiente figura⁴. El diámetro del círculo más grande es de 2 centímetros. ¿Cuál es el área de la región sombreada?

¹ Adaptado de Lappan, Fey, Fitzgerald, Friel, & Phillips (2006a, p. 15)

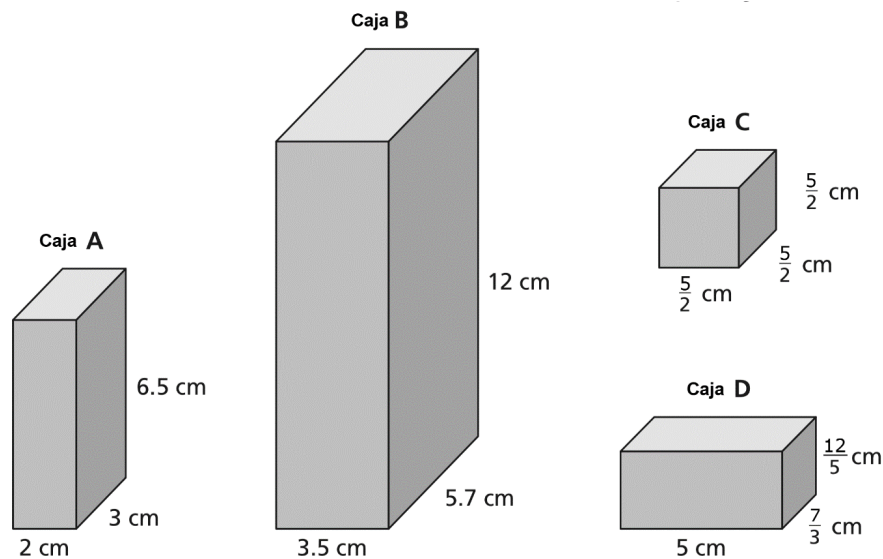
² Adaptado de Lappan, Fey, Fitzgerald, Friel, & Phillips (2006b, p.17)

³ Adaptado de Lappan et al. (2006b, p.41)

⁴ Adaptado de Lappan, Fey, Fitzgerald, Friel, & Phillips (2006c, p.18)



5. Mide los volúmenes de las cajas mostradas en la siguiente imagen⁵. Una vez hayas realizado esto, utiliza los resultados que obtuviste para organizar de mayor a menor los volúmenes de estas cajas.



6. Con la información de los volúmenes del ejercicio 5 encuentra una manera de medir el volumen de una caja intermedia entre las cajas A y D.

7. ¿Cuál es la diferencia entre el radio de la circunferencia cuya medida de área es 54 cm^2 y el radio de la circunferencia cuya medida de área es $30\pi \text{ cm}^2$?

Una vez valorados los resultados de la tarea diagnóstica, sugerimos dividir la sesión propuesta para la retroalimentación en dos momentos. En el primero, proponemos reflexionar sobre las dificultades que fueron encontradas de manera recurrente en las producciones escritas de los estudiantes. En el segundo, proponemos devolver las producciones escritas a los estudiantes y solicitarles que las corrijan. Para esto, sugerimos agrupar a los estudiantes de manera que aquellos que demuestren buena apropiación de los conocimientos previos apoyen a los que evidenciaron mayores dificultades. Durante este espacio, proponemos que el profesor acompañe a los grupos de estudiantes y

⁵ Adaptado de Lappan et al. (2006b, p. 27)

ofrezca diferentes ayudas relacionadas con las dificultades y errores evidenciados en las producciones escritas de las actividades que componen esta tarea. En la tabla 7, listamos dichas ayudas y el error al que corresponden.

Tabla 7

Listado de ayudas para la tarea diagnóstica

Error	Ayuda
E55	Indicar que las unidades de medida de área son unidades cuadradas
E56	Indicar que las unidades de medida de volumen son unidades cúbicas
E57	Recordar la definición de altura mediante un ejemplo con un objeto tridimensional
E58	Recordar la definición de base de un cuerpo geométrico mediante un ejemplo con un objeto tridimensional
E59	Retomar la definición de cuerpos redondos rectos a partir de la proyección ortogonal de la base superior
E59	Proporcionar material manipulativo para apoyar los procesos de desarrollo del ejercicio
E60	Relacionar el radio y el diámetro para identificar cuál es el necesario para medir el área del círculo indirectamente
E61	Pedir al estudiante que consulte la fórmula que permite calcular el área de un círculo
E62	Preguntar por las unidades más frecuentes para medir la cantidad de líquido en un recipiente (envases familiares de gaseosa, cajas de leche)
E63	Preguntar por el significado de las variables relacionadas mediante la ecuación propuesta y verificar que todas las cantidades del enunciado estén involucradas
E64	Recordar el uso de opuestos aditivos e inversos multiplicativos para despejar ecuaciones
E65	Retomar la relación entre elevar al cuadrado y raíz cuadrada
E66	Sugerir al estudiante observar los siguientes videos: https://youtu.be/qj-DrIQRHvo?si=FsqmEhr3_4kCsT6F https://youtu.be/4A23ycIyLe4?si=L3VWPO8qRxeFSdJv
E67	Preguntar por la magnitud que se quiere calcular
E68	Preguntar si es válido hablar de galones por cada peso o de precio por cada galón
E69	Revisar el planteamiento y preguntar si este permite obtener la unidad de medida requerida
E70	Reflexionar sobre el significado de las cifras decimales escritas con relación a las fracciones de la magnitud calculada

Tabla 7
Listado de ayudas para la tarea diagnóstica

Error	Ayuda
E71	Verificar en la calculadora del estudiante qué símbolo es usado para escribir números decimales

Nota. E: Código de error

5. TAREAS DE APRENDIZAJE

Las tareas de aprendizaje componen el eje central de la unidad didáctica de la medida de la capacidad de recipientes cilíndricos. Gómez, Mora y Velasco (2018) definen las tareas de aprendizaje como aquellas tareas matemáticas escolares que el profesor propone a los estudiantes con el propósito de favorecer el logro de las expectativas que ha establecido y la superación de sus limitaciones de aprendizaje (p. 202). Además, los autores describen siete elementos para caracterizar las tareas de aprendizaje. Estos elementos son (a) los requisitos, (b) las metas, (c) la formulación o enunciado, (d) los materiales y recursos, (e) las formas de agrupamiento (f) las interacciones y (g) la temporalidad (p. 211). Incluimos en este capítulo los elementos anteriores en las tareas de aprendizaje. Además, integramos en dichas tareas los conceptos y procedimientos claves para su desarrollo, los sistemas de representación más relevantes, los errores en los que pueden incurrir los estudiantes, sus grafos de criterios de logro y, por último, algunas sugerencias metodológicas y de evaluación.

Esta unidad didáctica cuenta con una secuencia de cinco tareas de aprendizaje que distribuímos en los dos objetivos enunciados en el segundo capítulo. El primer objetivo tiene dos tareas mientras que al segundo objetivo le corresponden tres tareas. Empleamos la etiqueta $a.b$ donde a representa el objetivo al que corresponde la tarea y b indica el número de la tarea en dicho objetivo. Invitamos al lector a consultar el detalle de las tareas de aprendizaje en el anexo 3. En los siguientes apartados, presentamos las tareas de aprendizaje y describimos de manera breve sus componentes.

Introducimos de manera general la evaluación de las tareas y las apoyamos en (a) las dinámicas de aula y (b) las producciones escritas de los estudiantes. En las dinámicas de aula, el profesor puede valorar la motivación de los estudiantes por medio de la interacción, el cumplimiento de las funciones asignadas y su participación en la puesta en común de los resultados ante el gran grupo. Este espacio permite a los estudiantes evaluar la coherencia de los resultados propios en comparación con los resultados de sus compañeros. También, recomendamos al profesor verificar que la totalidad de los estudiantes exponga al gran grupo durante la implementación de las cinco tareas de aprendizaje. En relación con las producciones escritas, el profesor debe determinar los errores en los que incurrieron los estudiantes y emplear sus resultados como insumo para realizar la retroalimentación al inicio de la siguiente sesión. Asimismo, la valoración de las producciones posibilita identificar a los estudiantes con limitaciones de aprendizaje por causa de los conocimientos previos o requisitos de tareas previas. Además, el profesor puede valorar aspectos relacionados con el orden y la claridad en los procedimientos de las producciones escritas, la redacción de la respuesta en términos del contexto formulado y las cuestiones relacionadas con la aproximación y el uso apropiado de unidades de medida. A continuación, presentamos las tareas de aprendizaje de la unidad didáctica.

1. TAREA 1.1. LATAS DE MILO®

Con esta tarea, buscamos que los estudiantes utilicen la relación entre las dimensiones de un recipiente cilíndrico y la medida de su capacidad. Con base en esta relación, esperamos que los estudiantes midan indirectamente una de las dimensiones del envase cilíndrico dada su medida de capacidad. Esta tarea contribuye al primer objetivo puesto que los escolares deben justificar las estrategias utilizadas para determinar las dimensiones del recipiente dentro del contexto formulado.

1.1. Requisitos de la tarea

Esta tarea requiere del dominio de los conocimientos previos formulados para esta unidad didáctica. Además, la tarea requiere que los estudiantes planteen la relación o expresión algebraica para medir indirectamente la capacidad de un recipiente cilíndrico. Esto es coherente con la exploración y consolidación de los procedimientos necesarios para medir indirectamente la capacidad de un recipiente cilíndrico o una de sus dimensiones.

1.2. Formulación de la tarea

El profesor entrega a cada estudiante, en la primera sesión de trabajo de esta tarea, una guía de trabajo que expone la siguiente situación.

Para promover el talento joven colombiano, Nestlé te contrata para diseñar una nueva presentación de las latas de Milo® de manera que tenga el doble de capacidad de sus latas medianas. Sabemos que las medidas actuales de las latas medianas son 5 cm de radio y 10 cm de altura.

A partir de esta información, formula un diseño para la nueva presentación. Indica las medidas del diseño propuesto y describe, de manera ordenada, los procedimientos empleados.

Para la segunda sesión de trabajo, el profesor organiza a los estudiantes en grupos de cuatro y entrega una guía de trabajo con las siguientes instrucciones.

A partir de la información propuesta por cada integrante en la sesión anterior, elijan un diseño y construyan un prototipo para la nueva lata. Indiquen las medidas del diseño elegido y sustenten por escrito, de manera ordenada, los procedimientos empleados.

Para el diseño, construcción y presentación del prototipo, cada integrante del grupo debe tener uno de los siguientes roles.

Líder: Organiza el grupo, vela por que cada miembro cumpla con el rol asignado y sintetiza las preguntas que el mensajero puede hacerle a otros grupos.

Secretario: Está encargado de escribir las ideas y los procedimientos relacionados con el diseño de la lata.

Presentador: Está a cargo de presentar frente al gran grupo el diseño propuesto y el procedimiento usado para conseguir dicha propuesta.

Mensajero: Es el miembro del equipo que puede ir a observar el trabajo de un grupo (asignado por el profesor) durante cinco minutos para traer información sobre posibles procedimientos a su equipo. Además, durante este tiempo puede formular preguntas al grupo que visite.

1.3. Conceptos y procedimientos más relevantes

En esta tarea, los estudiantes exploran la relación entre las dimensiones de un recipiente para un valor constante de su capacidad. Hacen esto al utilizar las expresiones $V = A_b h$ y $V = \pi r^2 h$ y al solucionar la ecuación multiplicativa (lineal o cuadrática) correspondiente.

1.4. Sistemas de representación que se activan

En esta tarea, los estudiantes pueden emplear los sistemas de representación geométrico, algebraico y numérico de manera permanente. Además, esperamos que los estudiantes utilicen los sistemas de representación manipulativo y ejecutable para el diseño y presentación del prototipo solicitado.

1.5. Materiales y recursos

Consideramos que los escolares pueden abordar la tarea de dos maneras: (a) con material manipulativo mediante el uso de cartulina, hojas, tijeras, pegamento o cinta para establecer el prototipo solicitado, o (b) con el uso de GeoGebra para aquellos estudiantes que deseen elaborar el prototipo de manera digital. También, contemplamos como recurso un aplicativo que permite al docente otorgar una ayuda para fortalecer el concepto de capacidad.

1.6. Agrupamiento e interacciones

Esta tarea requiere que los estudiantes trabajen tanto de manera individual como organizados en cuartetos. Esperamos que, en el trabajo individual, el escolar comprenda la situación propuesta y plantee algunas ideas iniciales sobre cómo abordarla. Asimismo, permite al profesor identificar estudiantes con dificultades en los primeros procedimientos y ofrecer las ayudas de acuerdo con los errores en los que incurran.

Para el trabajo grupal, cada estudiante comparte sus avances o estrategias para obtener las medidas del prototipo requerido. Lo anterior promueve unificar las propuestas de diseño en una sola y el orden de la presentación de los resultados. Esperamos que el docente interactúe con cada grupo para orientar su trabajo y aclarar las dudas que surjan. Dentro de cada grupo, esperamos que los estudiantes tomen uno de los siguientes roles: líder, secretario, presentador y mensajero. Explicamos con detalle cada uno de estos roles y el procedimiento para asignarlos en el anexo 3.

Para el cierre de la tarea, los estudiantes se reúnen en el gran grupo para participar de la puesta en común. Después, el profesor sintetiza las ideas comunicadas por los grupos y concreta los procedimientos empleados para determinar indirectamente las dimensiones del recipiente.

1.7. Temporalidad de la tarea

Formulamos esta tarea para que sea desarrollada en dos sesiones de clase. Durante la primera sesión, el profesor presenta la meta de la tarea al grupo, da la instrucción escrita y otorga 45 minutos para que los estudiantes trabajen de manera individual. En la segunda sesión, el profesor distribuye a los estudiantes en grupos y asigna los roles de trabajo (diez minutos) y los escolares desarrollan y concretan el diseño solicitado en la tarea (40 minutos). A los 15 minutos después del inicio del trabajo grupal, los mensajeros de cada grupo disponen de cinco minutos para interactuar con el grupo asignado. Al finalizar esta sesión, los grupos presentan frente a la clase sus diseños y el profesor sintetiza las ideas principales presentadas por los grupos (15 minutos).

1.8. Errores

Esperamos que los estudiantes incurran con mayor frecuencia en ciertos errores mientras avanzan en los procedimientos. Estos errores son (a) asignar una unidad de medida distinta a la requerida u omitirla, (b) intercambiar unidades de medida de volumen con unidades de medida de longitud o de superficie y (c) confundir la notación estándar para los datos dados en el enunciado. En la tabla 8, organizamos la relación de las dificultades y errores para la tarea.

Tabla 8
Limitaciones de aprendizaje de la tarea 1.1

Tarea	Dificultades	Errores
Latas de Milo®	Aritméticas y algebraicas	E4, E5, E22, E23, E24, E25
	Medición indirecta por modelos multiplicativos	E7, E8, E43
	Interpretación de la medición	E10, E11, E80
	Representación geométrica de la información	E16, E17, E18, E41, E42, E58, E73, E77, E78, E79

Nota. E: Código de error

1.9. Grafo de criterios de logro y actuación del profesor

En la figura 8, presentamos el grafo de criterios de logro de la tarea 1.1. Resaltamos cada criterio de logro previsto para la tarea en un rectángulo gris. Además, incluimos los errores en los que pueden incurrir los estudiantes al ejecutar cada procedimiento. Esta tarea contempla cuatro estrategias posibles para solucionar la tarea, que están diferenciadas en función de los criterios de logro 1.10, 1.11, 1.14 y 1.15.

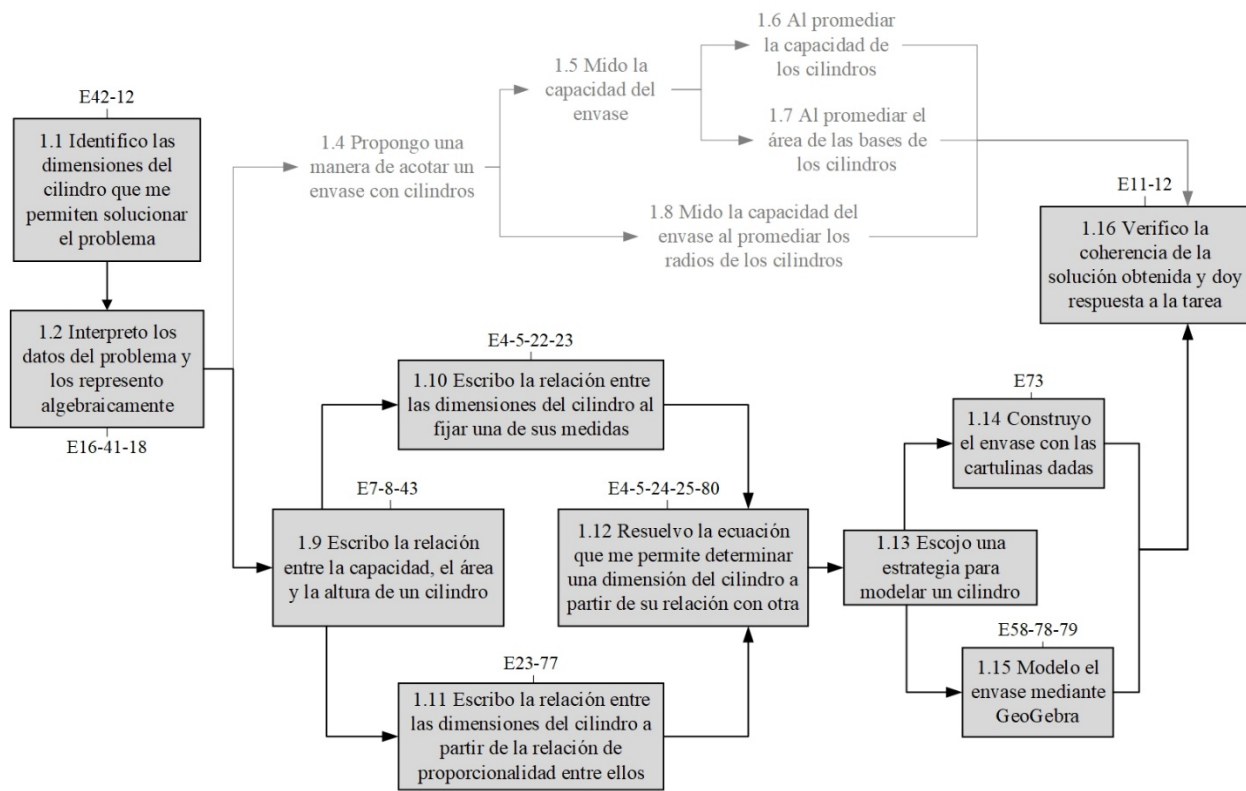


Figura 8. Grafo de criterios de logro de la tarea 1.1

1.10. Evaluación

Sugerimos hacer seguimiento de las dificultades relacionadas con los criterios de logro 1.1 y 1.2 puesto que son los procedimientos que ponen en juego de manera explícita algunos conocimientos previos de la unidad didáctica. También, proponemos acompañar a los estudiantes cuando ejecuten los procedimientos necesarios para determinar una dimensión del recipiente cilíndrico que es desconocida mediante la relación entre la medida de capacidad y las medidas de las dimensiones del recipiente.

Asimismo, proponemos que, al momento de compartir al gran grupo los resultados de la tarea, los estudiantes empleen un lenguaje formal y coherente en términos de la formulación de la tarea. Adicionalmente, sugerimos reflexionar en esta discusión sobre la coherencia de los diseños propuestos y orientar a los estudiantes para que concluyan que el diseño más adecuado debe tener una forma proporcional a la lata original.

1.11. Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

Para iniciar la unidad didáctica, sugerimos explicar a los estudiantes la expresión algebraica para determinar el volumen de un cilindro que es obtenida al extrapolar el procedimiento utilizado para el volumen del prisma. Por otro lado, recomendamos resolver esta tarea con el acompañamiento del profesor para ofrecer las ayudas de manera oportuna y anticipar las interacciones de la segunda sesión. Si hay escolares que no asisten a las sesiones de la tarea, recomendamos abordarla de

acuerdo con los agrupamientos previstos. Recomendamos que estos estudiantes completen esta tarea como requisito para la siguiente sesión.

2. TAREA 1.2. VASOS DE GASEOSA

Con esta tarea, buscamos que los estudiantes utilicen la medida de la capacidad del cilindro para estimar la capacidad de un recipiente de forma irregular al acotarlo con cilindros. Esta tarea contribuye al primer objetivo puesto que los escolares deben justificar la manera de utilizar los cilindros para aproximar la capacidad de un envase no cilíndrico.

2.1. Requisitos de la tarea

Esta tarea requiere que los estudiantes representen cilindros en un dibujo y etiqueten adecuadamente sus dimensiones. Además, los estudiantes deben utilizar expresiones algebraicas para medir indirectamente la capacidad de un recipiente cilíndrico. También, deben conocer cómo determinar un promedio entre dos cantidades conocidas.

2.2. Metas de la tarea

Por medio de esta tarea, los estudiantes usan la medición de la capacidad de un recipiente cilíndrico para justificar la medición de un recipiente en un contexto real. Además, pretendemos que esta medición adquiera significado a partir de la manipulación de material concreto. Buscamos que los estudiantes utilicen cilindros para inscribir y circunscribir el recipiente mostrado y que, de esta manera, empleen estos cilindros para estimar la capacidad del envase al promediar sus radios, las áreas de sus bases o sus capacidades.

2.3. Formulación de la tarea

El docente pide a los escolares que formen parejas. Entrega a cada equipo un vaso plástico y una guía de trabajo que enuncia la siguiente situación.

Felipe, al ir al cine, compra una gaseosa. Le entregan un vaso como el que el profesor les entregó y que se muestra en la imagen y le dicen que ese vaso tiene una capacidad de 600 ml. Felipe considera que el vaso no tiene esa capacidad.

¿Cómo pueden ayudar a Felipe para aproximar (por medio de cilindros) la capacidad del vaso y verificar que el vaso que compró sí tiene 600 ml de capacidad? Explica tu respuesta e incluye por escrito, de manera ordenada, todos los procedimientos empleados.



2.4. Conceptos y procedimientos más relevantes

En esta tarea, los estudiantes consolidan la medición indirecta de la capacidad del cilindro. Asimismo, deben relacionar la capacidad de recipientes no cilíndricos al acotarlos con dos cilindros y deben interpretar que una estimación para la medida de capacidad requerida puede obtenerse mediante el promedio de la capacidad de dos cilindros.

2.5. Sistemas de representación que se activan

Para el desarrollo de esta tarea, prevemos que los estudiantes utilicen los sistemas de representación geométrico, simbólico y numérico. Además, esperamos que los estudiantes utilicen el sistema de representación manipulativo para comprender cómo la acotación con cilindros permite estimar la capacidad del envase no cilíndrico.

2.6. Materiales y recursos

Consideramos que es útil para los estudiantes poder utilizar un vaso plástico semejante al usado en las salas de cine. Esto permite que el contexto presentado sea cercano para ellos. Además, proponemos el uso de este recurso para fomentar la medición directa de las dimensiones del vaso. Por esto, incluimos además la regla graduada como un recurso a emplear.

2.7. Agrupamiento e interacciones

Esta tarea requiere que los estudiantes se organicen en parejas. Esto permite que los escolares propongan sus procedimientos y puedan conversarlos con un compañero. Así, ponen en juego sus conocimientos previos por medio de la forma como los comunican. Para el cierre de la tarea, los estudiantes vuelven al gran grupo para escuchar los resultados obtenidos por algunas de las parejas. También, buscamos que el docente interactúe con cada grupo para orientar su trabajo y aclarar las dudas que surjan. Asimismo, el profesor interactúa con todos los estudiantes en el gran grupo durante la discusión final al recopilar las conclusiones presentadas y las estrategias que cada grupo implementa.

2.8. Temporalidad de la tarea

Esta tarea está planteada para desarrollarse en tres etapas durante 60 minutos. En los primeros diez minutos, los estudiantes forman los grupos de trabajo y el profesor presenta la tarea y entrega la instrucción escrita. Luego, los escolares abordan la situación propuesta y exploran posibilidades para estimar la capacidad del envase mostrado durante 25 minutos. En la última etapa, que dura 25 minutos, los estudiantes comparten, discuten y debaten las propuestas de aproximación de la capacidad. Esto último lo hacen en gran grupo bajo la orientación del profesor.

2.9. Errores

Durante el desarrollo de esta tarea, es posible que los escolares omitan alguna de las dimensiones involucradas en la medición indirecta de la capacidad; que representen incorrectamente los cilindros máximo y mínimo; y que los usen inadecuadamente para efectuar la estimación de la capacidad del recipiente propuesto. Además, los estudiantes pueden omitir las unidades de medida o asignarlas de manera incorrecta. En la tabla 9, organizamos las dificultades y errores para la tarea.

Tabla 9
Limitaciones de aprendizaje de la tarea 1.2

Tarea	Dificultades	Errores
Vasos de gaseosa	Aritméticas y algebraicas	E3, E4
	Medición indirecta por modelos multiplicativos	E7, E43, E44, E45
	Interpretación de la medición	E10, E11, E12
	Representación geométrica de la información	E16, E17, E18, E41, E42
	Dificultad relacionada con la conservación de la cantidad	E54

Nota. E: Código de error

2.10. Grafo de criterios de logro y actuación del profesor

En la figura 9, presentamos el grafo de criterios de logro para la tarea 1.2. Resaltamos cada criterio de logro previsto para la solución de la tarea en un rectángulo gris. Además, incluimos los errores en los que pueden incurrir los estudiantes al ejecutar cada procedimiento. Esta tarea contempla tres estrategias posibles para solucionar la tarea, que están determinadas en los criterios de logro 1.6, 1.7 y 1.8.

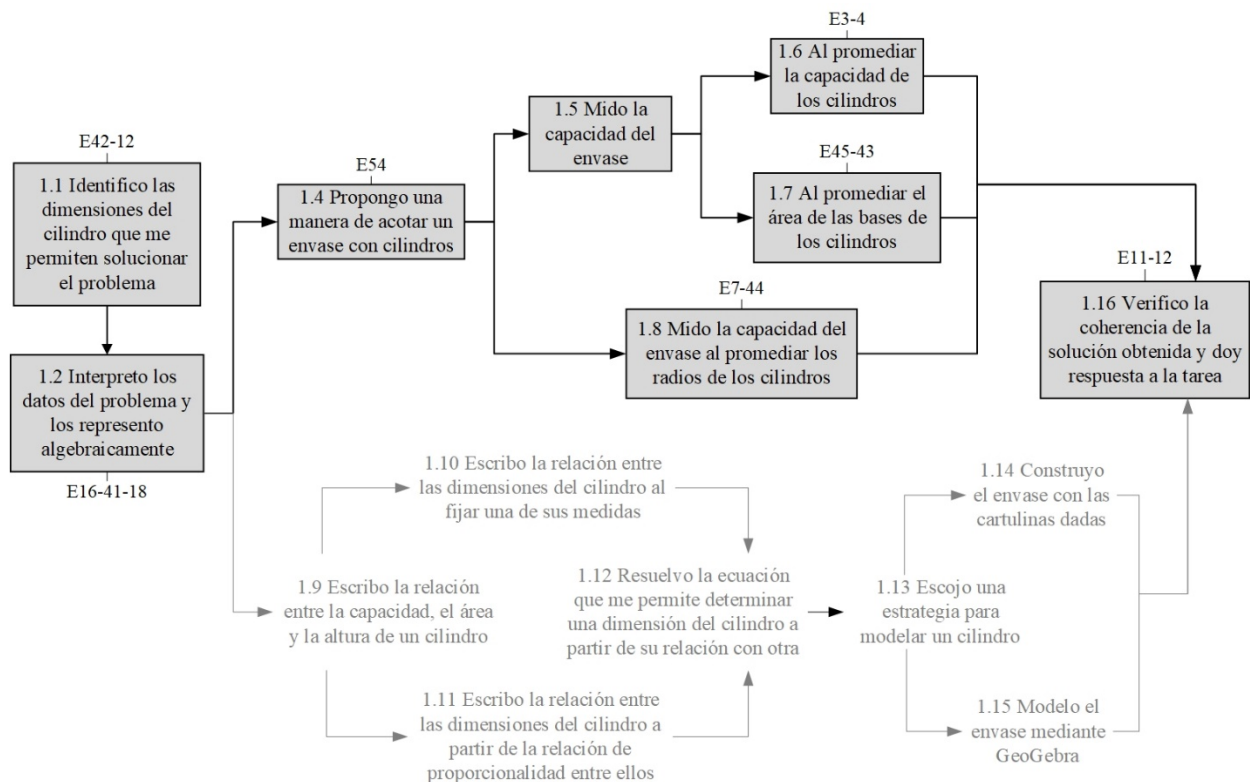


Figura 9. Grafo de criterios de logro de la tarea 1.2

2.11. Evaluación

Sugerimos apoyar el procedimiento relacionado con la acotación del vaso a partir de cilindros por medio del uso de material concreto. Consideramos que este procedimiento puede significar un reto para los estudiantes por el nivel de abstracción que requiere. Adicionalmente, proponemos orientar la interpretación del promedio que es necesaria para efectuar la estimación de la capacidad del recipiente no cilíndrico. Este acompañamiento debe realizarse sobre todo con los estudiantes que evidenciaron dificultades relacionadas con el conocimiento previo correspondiente con el promedio durante la tarea diagnóstica.

2.12. Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

Si un estudiante no asiste a esta sesión, deberá trabajar de manera individual y autónoma en casa. Por su nombre vasos de cine, sugerimos que el profesor disponga de vasos de gaseosa de tamaño grande que son comercializados en las salas de cine. Para la implementación de esta tarea, adquirimos vasos de gaseosa de la cadena de restaurantes Sr. Wok® en la ciudad de Bogotá, Colombia. Sin embargo, el profesor puede reformular la tarea para que el dato de la capacidad cobre sentido y funcione con un vaso desechable de fácil adquisición. En caso de no poder disponer de estos vasos, sugerimos utilizar la imagen presentada en la formulación e incluir las dimensiones del vaso.

3. TAREA 2.1 COMPARACIÓN DE CILINDROS

Esta tarea contribuye al segundo objetivo dado que los estudiantes construyen recipientes cilíndricos con cartulina y comparan sus capacidades. Con esto, los escolares comprenden que ciertos recipientes con construcciones similares pueden tener distintas capacidades y que una forma objetiva de comparar dichas capacidades es por medio de la medición indirecta.

3.1. Requisitos de la tarea

En esta tarea, los estudiantes deben medir indirectamente la capacidad de un recipiente cilíndrico y deben relacionar el perímetro de la base del cilindro con su radio por medio de una expresión algebraica. Además, necesitan construir adecuadamente, con material manipulativo, recipientes cilíndricos.

3.2. Formulación de la tarea

El docente pide a los estudiantes que formen parejas para trabajar. Cada pareja recibe dos trozos de cartulina idénticos y semejantes a un octavo de cartulina, y dos círculos del mismo material que sirven para los fondos de los envases. El docente pide a los grupos que construyan recipientes cilíndricos de la siguiente manera.

Con una cartulina, junten completamente los lados más largos y luego péguenlos con cinta. Con la otra cartulina, repitan lo mismo, pero juntando y pegando completamente los lados más cortos. Luego, peguen los círculos dados como tapa inferior de cada cilindro. ¿Cuál de los cilindros construidos tiene mayor capacidad? Expliquen su respuesta e incluyan por escrito, de manera ordenada, todos los procedimientos empleados.

3.3. Conceptos y procedimientos más relevantes

Para el desarrollo de esta tarea, los estudiantes consolidan la medición indirecta de la capacidad al tener que medir la capacidad de varios recipientes cilíndricos. Asimismo, tienen la oportunidad de fortalecer el significado de la medición de la capacidad al relacionar la medición directa con la indirecta.

3.4. Sistemas de representación que se activan

Para esta tarea, prevemos que los estudiantes utilicen los sistemas de representación numérico, simbólico y geométrico. Además, esperamos que ellos utilicen el sistema de representación manipulativo para comparar las capacidades de manera directa y relacionar este procedimiento con la medición indirecta.

3.5. Materiales y recursos

Dentro de los materiales necesarios para esta tarea, incluimos rectángulos de cartulina de 25 cm de largo y 17,5 cm de ancho. Además, incluimos cinta pegante, colbón y los útiles de los escolares (cuaderno, lápiz, regla graduada y calculadora). Asimismo, incluimos bolsas de arroz como un recurso disponible para los grupos de estudiantes que decidan efectuar la comparación de capacidades de manera directa. Adicionalmente, contemplamos un aplicativo que permite al docente otorgar una ayuda para fortalecer el concepto de capacidad.

3.6. Agrupamiento e interacciones

Esta tarea requiere que los estudiantes estén organizados en parejas. Para el cierre de la tarea, los estudiantes se reúnen en el gran grupo para escuchar las presentaciones de algunos compañeros. Durante la construcción del recipiente, aunque es individual, deberán compartir los recursos dispuestos. Luego, cada pareja determina la capacidad de su recipiente para poder efectuar la comparación. Por otra parte, el docente interactúa con cada pareja para orientar su trabajo y aclarar las dudas que surjan. Asimismo, el profesor interactúa con todos los estudiantes en el gran grupo durante la discusión final. Durante la presentación de los grupos, el profesor recopila las conclusiones presentadas y las estrategias implementadas para comparar la capacidad de los envases cilíndricos en cartulina. Luego, resume estas estrategias en los procedimientos que fueron empleados.

3.7. Temporalidad de la tarea

Esta tarea está planteada para desarrollarse en tres etapas durante 55 minutos. En los primeros diez minutos, los estudiantes forman los grupos de trabajo y el profesor entrega los rectángulos de cartulina previstos en los materiales. El docente proporciona la instrucción escrita sobre la construcción de los recipientes cilíndricos. En la segunda etapa, los escolares construyen durante 30 minutos los recipientes cilíndricos con base en la instrucción proporcionada. Luego, abordan la situación propuesta y exploran las medidas de la cartulina y su relación con las dimensiones del cilindro para medir indirectamente su capacidad. En la última etapa, los estudiantes comparten los resultados obtenidos al comparar los dos recipientes construidos durante los 15 minutos restantes. El docente guía la presentación de los equipos seleccionados para sintetizar las estrategias discutidas.

3.8. Errores

Los errores en que los estudiantes pueden incurrir con más frecuencia en el desarrollo de la tarea son (a) confundir la notación estándar para los datos dados en el enunciado, (b) multiplicar el radio y la altura por pi para determinar la capacidad de un recipiente cilíndrico y (c) establecer las comparaciones de la medida de la capacidad mediante la referencia a atributos diferentes de los recipientes en la respuesta a la tarea. Un ejemplo de esto es indicar que tiene más capacidad el recipiente con mayor perímetro de la base en comparación con el que tiene más altura. En la tabla 9, organizamos la relación de las dificultades y errores para la tarea.

Tabla 10

Limitaciones de aprendizaje de la tarea 2.1

Tarea	Dificultades	Errores
Comparación de cilindros	Aritméticas y algebraicas	E28, E29
	Medición indirecta por modelos multiplicativos	E31, E33, E34, E44
	Interpretación de la medición	E10, E21, E48, E73, E74

Tabla 10
Limitaciones de aprendizaje de la tarea 2.1

Tarea	Dificultades	Errores
	Representación geométrica de la información	E26, E27, E30, E42
	Conservación de la cantidad	E19, E20, E32, E34

Nota. E: Código de error

3.9. Grafo de criterios de logro y actuación del profesor

En la figura 10, presentamos el grafo de criterios de logro para la tarea 2.1. Resaltamos cada criterio de logro previsto para la solución de la tarea en un rectángulo gris. Además, incluimos los errores en los que pueden incurrir los estudiantes al ejecutar cada procedimiento. Esta tarea contempla tres estrategias posibles para solucionar la tarea, que están determinadas en los criterios de logro 2.2, 2.6 y 2.8.

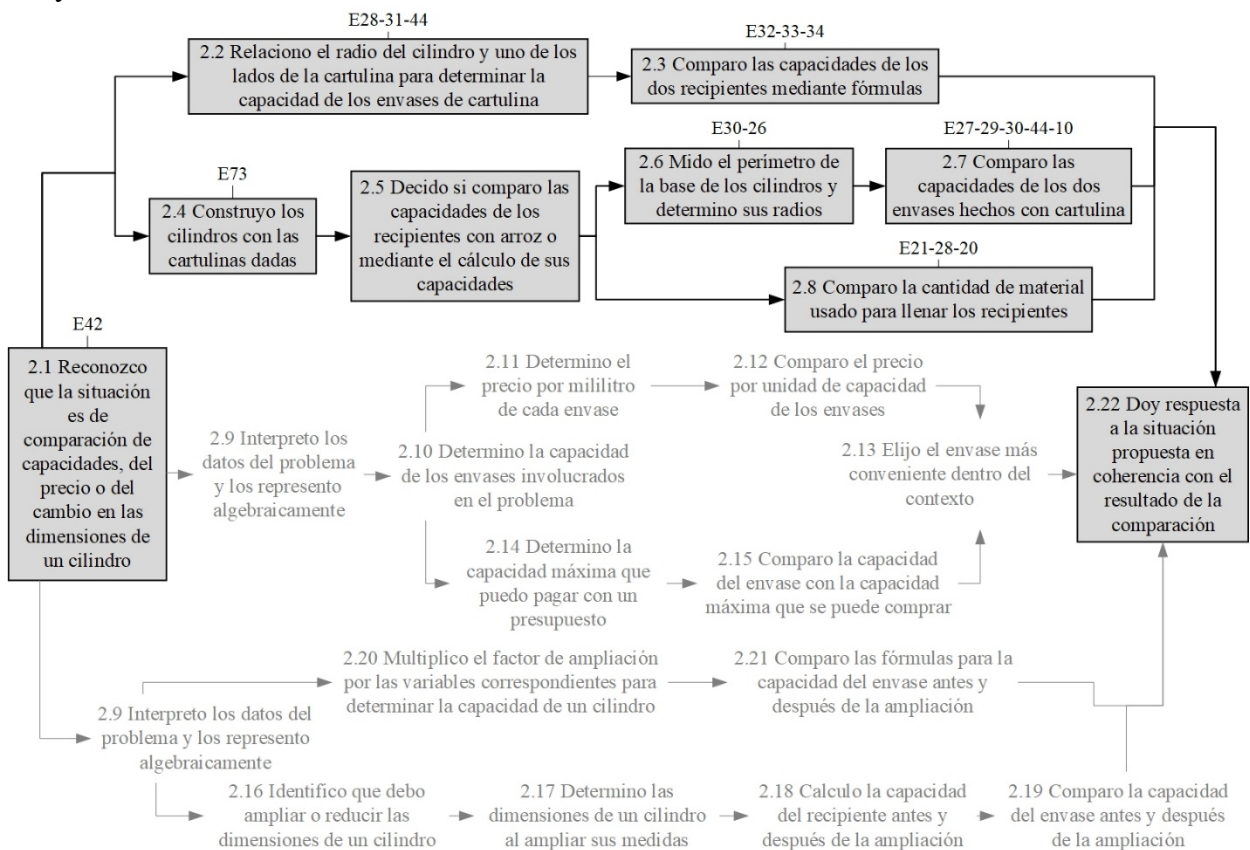


Figura 10. Grafo de criterios de logro de la tarea 2.1

3.10. Evaluación

Sugerimos prestar atención, durante el desarrollo de la clase, al procedimiento relacionado con la medición indirecta del radio del cilindro por medio de la medida del perímetro de la base, que puede ser obtenida al medir con regla el largo de la cartulina. Consideramos que este procedimiento puede ser retador para los estudiantes porque no han determinado indirectamente la medida del radio de un cilindro en las tareas previas. Asimismo, sugerimos orientar los procedimientos que implican un tratamiento puramente algebraico del problema.

3.11. Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

Al iniciar la sesión, proponemos que el profesor retome la ecuación que relaciona el perímetro y el radio de una circunferencia. Además, si el profesor nota dificultades durante la ejecución del criterio de logro 2.6, consideramos importante explicar que el perímetro corresponde al lado de la cartulina que debe ser doblado para construir el envase cilíndrico. Resaltamos que los estudiantes pueden medir directamente el perímetro de la base antes de construir el cilindro (largo de la cartulina) o pueden construir el envase para medir su diámetro y, como consecuencia, medir indirectamente el radio del cilindro.

Por otra parte, sugerimos proporcionar a los estudiantes los siguientes elementos para facilitar la construcción de los envases cilíndricos. Cada cartulina debe ser de 25 cm de largo y 17,5 cm de ancho. Indicamos a los estudiantes que dejen una pestaña de un centímetro para facilitar el armado de los envases cilíndricos. Las tapas de los recipientes deben tener un diámetro de 8 cm y 5,5 cm. Además, proponemos utilizar cinta de enmascarar para facilitar la construcción de los envases.

Por último, si hay un grupo que tome el camino de aprendizaje que mide y compara las capacidades directamente, sugerimos que este grupo sea el primero en presentar sus resultados frente al gran grupo. Esto permite comparar su respuesta con la obtenida por los demás grupos.

4. TAREA 2.2 COMPARACIÓN DE PRECIOS

Con esta tarea, los estudiantes comparan tres envases cilíndricos por medio de la relación entre el precio que tiene cada uno y su capacidad. Igualmente, los estudiantes deben escribir la relación inversa de modo que determinen la relación capacidad-precio, comparen los costos de los recipientes y evidencien la importancia de tener en el antecedente de la razón al precio de venta de los envases.

4.1. Requisitos de la tarea

Esta tarea requiere que los estudiantes conozcan las razones y proporciones y que puedan relacionar el costo de un producto por unidad de medida. Adicionalmente, los estudiantes necesitan medir indirectamente la capacidad de varios recipientes cilíndricos para luego compararlos.

4.2. Formulación de la tarea

El docente pide a los escolares que formen grupos de cuatro estudiantes que sean distintos a los conformados en sesiones anteriores. Luego, entrega a cada equipo una guía de trabajo con la siguiente situación.

Un supermercado vende gaseosas en lata que están envasadas en las tres presentaciones que mostramos en la siguiente imagen.



El día de hoy, la lata pequeña cuesta \$2.800, la mediana \$4.000 y la grande \$5.500. En las etiquetas de venta del supermercado aparece indicado el precio por cada mililitro como lo exige la ley colombiana.

Para poder cumplir con un plan de ahorro, Alejandra no podrá comprar una lata con un precio superior a \$4,5 por mililitro, que corresponde al precio que pagó por mililitro la última vez que estuvo en el supermercado. Con esta restricción, ¿cuáles latas de gaseosa puede comprar Alejandra?

Para trabajar en esta actividad, cada integrante del grupo debe tener uno de los siguientes roles.

Líder: organiza el grupo, vela por que cada miembro cumpla con el rol asignado y sintetiza las preguntas que el mensajero puede hacerle a otros grupos.

Secretario: está encargado de escribir las ideas y los procedimientos relacionados con el diseño de la lata.

Presentador: está a cargo de presentar frente al gran grupo el diseño propuesto y el procedimiento usado para conseguir dicha propuesta.

Mensajero: es el miembro del equipo que puede ir a observar el trabajo de un grupo (asignado por el profesor) durante cinco minutos para traer información sobre posibles procedimientos a su equipo. Además, durante este tiempo puede formular preguntas al grupo que visite.

Cada grupo aborda el ejercicio propuesto y presenta frente al gran grupo la estrategia empleada para elegir el envase más conveniente.

4.3. Conceptos y procedimientos más relevantes

En esta tarea, los estudiantes utilizan la medida de capacidad de diversos recipientes cilíndricos para determinar el precio por unidad de capacidad de cada envase. Con base en esta relación, los

estudiantes comparan cada recipiente y escogen el que tiene el precio más conveniente a partir de un presupuesto dado.

4.4. Sistemas de representación que se activan

Durante el desarrollo de esta tarea, esperamos que los estudiantes utilicen los sistemas de representación numérico y simbólico para medir indirectamente las capacidades de los envases involucrados en el contexto. Además, estos sistemas de representación son utilizados para relacionar cada capacidad con el precio del envase correspondiente.

4.5. Materiales y recursos

La tarea requiere que el profesor disponga de un computador o tablet. Este dispositivo debe tener instalado el programa GeoGebra de manera que el profesor pueda utilizar el aplicativo diseñado para ofrecer la ayuda 15 que permite ilustrar la relación entre la capacidad y las dimensiones del cilindro.

4.6. Agrupamiento e interacciones

En esta tarea, los estudiantes están organizados en grupos de cuatro personas generados aleatoriamente. Al igual que sugerimos en la tarea 1.1, esperamos que los estudiantes asuman los roles de líder, secretario, presentador y mensajero. El estudiante con el rol de mensajero observa la interacción del grupo que se le ha asignado, les hace preguntas y explica al suyo lo que observó.

También, buscamos que el docente interactúe con cada grupo para orientar su trabajo y aclarar las dudas que surjan. Asimismo, el docente interactúa con todos los estudiantes en el gran grupo durante la discusión final al recopilar las conclusiones presentadas y las estrategias que los grupos implementan para escoger la lata que mejor se ajusta al presupuesto dado.

4.7. Temporalidad de la tarea

La tarea está planteada para desarrollarse en la primera mitad de la quinta sesión de implementación. Este tiempo está distribuido en cuatro etapas que comprenden un total de treinta minutos. En los primeros cinco minutos, los estudiantes forman los grupos de trabajo y el profesor les da la instrucción escrita. En este tiempo, los escolares asignan sus roles. En la segunda etapa, los escolares abordan la situación propuesta y concretan el diseño solicitado durante 15 minutos. En los primeros cinco minutos de esta etapa, todos los miembros del equipo deben aportar ideas para dar solución a la tarea. Luego, los mensajeros pueden ir a observar a los demás grupos durante un periodo de cinco minutos. En la tercera etapa, de diez minutos, los estudiantes presentan y discuten los diseños propuestos frente al gran grupo guiados por el profesor. Para finalizar, el profesor sintetiza las ideas principales presentadas por los grupos y concreta los procedimientos usados para determinar indirectamente las dimensiones del recipiente.

4.8. Errores

En el desarrollo de la tarea, el profesor puede identificar estudiantes que persisten en el error de asignar una unidad de medida distinta a la requerida u omitirla. Además, los estudiantes pueden efectuar la división de la capacidad total de un contenedor por su costo. En la tabla 11, organizamos las dificultades y otros errores previstos para la tarea.

Tabla 11
Limitaciones de aprendizaje de la tarea 2.2

Tarea	Dificultades	Errores
Comparación de precios	Aritméticas y algebraicas	E46, E51, E52
	Medición indirecta por modelos multiplicativos	E7, E44
	Interpretación de la medición	E10, E11, E49, E50
	Representación geométrica de la información	E16, E17, E18, E41, E42, E30

Nota. E: Código de error

4.9. Grafo de criterios de logro y actuación del profesor

En la figura 11, presentamos el grafo de criterios de logro para la tarea 2.1. Resaltamos cada criterio de logro previsto para la solución de la tarea en un rectángulo gris. Además, incluimos los errores en los que pueden incurrir los estudiantes al ejecutar cada procedimiento. Esta tarea contempla tres estrategias posibles para su solución, que están determinadas en los criterios de logro 2.10, 2.1 y 2.14.

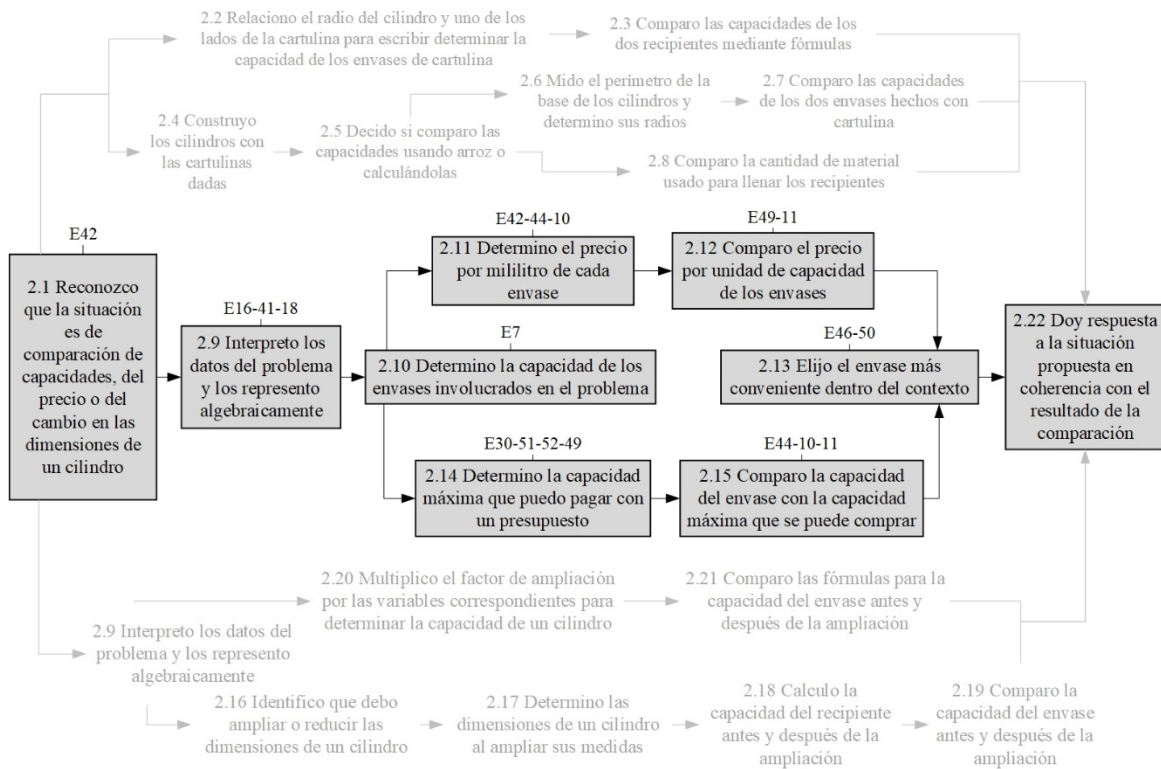


Figura 11. Grafo de criterios de logro de la tarea 2.2

4.10. Evaluación

Recomendamos verificar que los estudiantes midan indirectamente la capacidad de los tres recipientes cilíndricos de manera adecuada. Además, consideramos importante cuidar que los estudiantes planteen correctamente la relación precio-capacidad para comparar con el presupuesto dado. Asimismo, proponemos orientar las conclusiones a las que pueden llegar los estudiantes si escogen determinar el precio máximo que puede ser pagado al multiplicar cada capacidad por el presupuesto dado en la formulación.

4.11. Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

Sugerimos tener en cuenta que la lata pequeña es la única lata que no puede ser comprada con el presupuesto indicado en la formulación. Para el camino de aprendizaje que requiere de la relación precio por unidad de capacidad, esta lata cuesta \$4,64 por mililitro. Para el camino que utiliza el presupuesto máximo, esta lata tendría un costo máximo de \$2 714.

5. TAREA 2.3 INCREMENTOS

En esta tarea, los escolares ponen en juego los procedimientos abordados durante el desarrollo de las tareas anteriores, de modo que pueden efectuar la comparación de la capacidad mediante la medición indirecta o al relacionar las expresiones algebraicas correspondientes por medio de una razón. Esta tarea contribuye al segundo objetivo porque consiste en una situación en la que los estudiantes puedan establecer la relación entre la capacidad de un recipiente antes y después de un incremento en sus dimensiones.

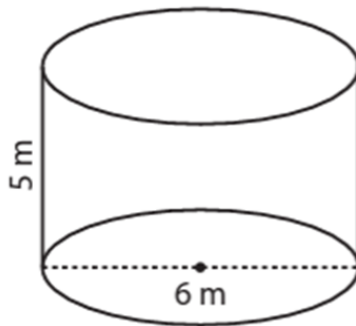
5.1. Requisitos de la tarea

Esta tarea requiere que los estudiantes puedan determinar las dimensiones de un cilindro después de efectuar un incremento en una o varias de sus dimensiones. Asimismo, los estudiantes deben calcular el porcentaje de una cantidad y adicionarlo a esa cantidad.

5.2. Formulación de la tarea

El docente indica a los escolares que, durante los primeros cinco minutos de la actividad, trabajarán individualmente. Entrega a cada estudiante una guía de trabajo que enuncia la siguiente situación.

Para el recipiente cilíndrico mostrado en la imagen, ¿cuánto incrementa su capacidad si cada dimensión (radio y altura) incrementa en un 20%? Explica tu respuesta e incluye por escrito, de manera ordenada, todos los procedimientos empleados.



5.3. Conceptos y procedimientos más relevantes

Durante el desarrollo de esta tarea, los estudiantes deben determinar las dimensiones de un envase con un factor de ampliación dado. Con esto, deben medir indirectamente la capacidad del recipiente antes y después del incremento. Luego, los estudiantes deben determinar cuántas veces incrementó la capacidad del recipiente a partir del incremento en sus dimensiones.

5.4. Sistemas de representación que se activan

En esta tarea, preveamos que los estudiantes utilicen los sistemas de representación geométrico para representar el cilindro antes y después del incremento formulado. Además, esperamos que utilicen los sistemas de representación numérico y simbólico durante los procedimientos relacionados con la medición indirecta y para determinar las dimensiones del envase cilíndrico después del incremento formulado.

5.5. Materiales y recursos

La tarea requiere que el profesor disponga de un computador o tableta. Este dispositivo debe tener instalado el programa GeoGebra de manera que el profesor pueda utilizar el aplicativo diseñado para ofrecer la ayuda 15. Esta ayuda permite ilustrar la relación entre la capacidad y las dimensiones del cilindro.

5.6. Agrupamiento e interacciones

Esta tarea requiere que los estudiantes trabajen, tanto de manera individual, como organizados en parejas y cuartetos. Buscamos que, con el trabajo individual, el escolar comprenda la situación propuesta y plantee algunas ideas iniciales sobre cómo abordarla. Luego, en parejas, cada estudiante comenta sus ideas con su compañero y los dos establecen un procedimiento común para dar solución al ejercicio. Después, en grupos de cuatro, cada pareja comparte sus estrategias y la respuesta obtenida para establecer acuerdos sobre los términos y el vocabulario apropiado para usar en la presentación de los resultados.

Por otra parte, el docente interactúa con cada pareja y cuarteto para orientar su trabajo y aclarar las dudas que surjan. Asimismo, el profesor interactúa con todos los estudiantes en el gran grupo durante la discusión final al recopilar las conclusiones presentadas y las estrategias que cada grupo implementa.

5.7. Temporalidad de la tarea

La tarea está planteada para desarrollarse en la segunda mitad de la quinta sesión de implementación en cuatro momentos. En el primer momento, durante los primeros cinco minutos, el profesor proporciona a los estudiantes el enunciado del ejercicio propuesto y ellos inician su trabajo individual. Una vez terminado este tiempo, los escolares forman parejas y tienen diez minutos para abordar conjuntamente la situación propuesta. Después, cada pareja tiene cinco minutos para trabajar en conjunto con otra pareja, revisar mutuamente el trabajo realizado, concluir los procedimientos efectuados y preparar una presentación breve de la solución lograda. Para finalizar, el docente orienta durante diez minutos la presentación de algunos cuartetos frente al gran grupo sobre los resultados obtenidos al comparar el recipiente.

5.8. Errores

En esta tarea, los estudiantes pueden incurrir en errores como (a) utilizar un factor de ampliación o reducción en una dimensión distinta a la requerida o (b) calcular el porcentaje de ampliación o reducción dado sin incluirlo en la cantidad inicial. En la tabla 11, organizamos las dificultades y otros errores previstos para la tarea.

Tabla 12

Limitaciones de aprendizaje de la tarea 2.3

Tarea	Dificultades	Errores
Incrementos	Aritméticas y algebraicas	E4, E38, E39, E47, E76
	Medición indirecta por modelos multiplicativos	E7, E44, E40
	Interpretación de la medición	E10, E35, E36, E37, E74
	Representación geométrica de la información	E42, E16, E17, E18, E41
	Conservación de la cantidad	E19, E20, E32

Nota. E: Código de error

5.9. Grafo de criterios de logro y actuación del profesor

En la figura 12, presentamos el grafo de criterios de logro para la tarea 2.1. Resaltamos cada criterio de logro previsto para la solución de la tarea en un rectángulo gris. Además, incluimos los errores en los que pueden incurrir los estudiantes al ejecutar cada procedimiento. Esta tarea contempla dos estrategias posibles para solucionar la tarea, que están determinadas en los criterios de logro 2.16 y 2.20.

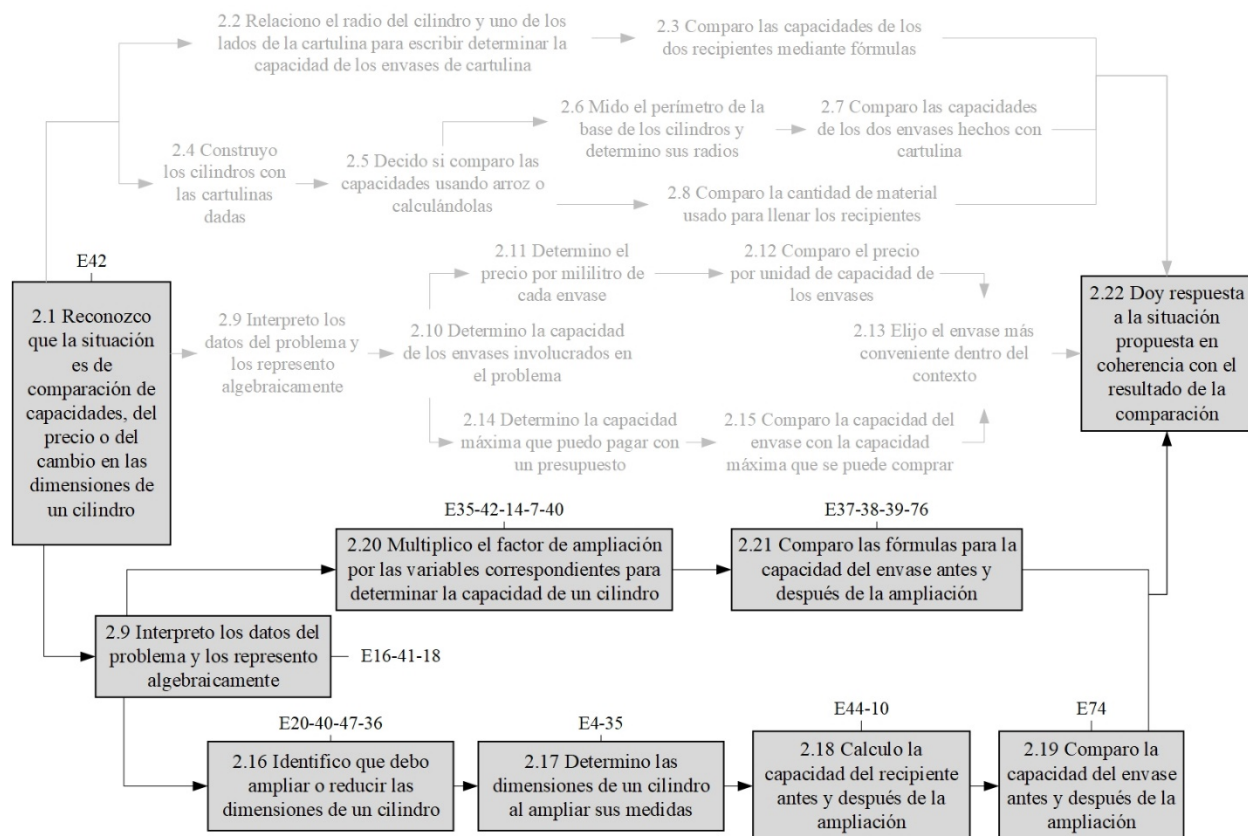


Figura 12. Grafo de criterios de logro de la tarea 2.3

5.10. Evaluación

Sugerimos revisar los procedimientos relacionados con la medición indirecta de las dimensiones del recipiente cilíndrico obtenido al ampliar las dimensiones del recipiente original. Además, consideramos necesario observar la estrategia empleada por los estudiantes para explicar cuánto incrementa la capacidad del recipiente descrito en la tarea. Por otra parte, sugerimos estar atentos a los procedimientos que implican un tratamiento puramente algebraico del problema.

5.11. Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

A partir de la formulación de la tarea, sugerimos tener en cuenta que el incremento requerido puede presentarse de tres maneras. Una manera involucra determinar cuánto aumentó la capacidad con la ayuda de la diferencia entre sus medidas, otra manera implica determinar cuántas veces aumentó la capacidad mediante un cociente entre las medidas de capacidad mayor y menor. Por último, otra manera utiliza este cociente para expresar el aumento como un porcentaje.

6. EVALUACIÓN FINAL

Como complemento a la evaluación formativa que realiza el profesor mediante la tarea diagnóstica y en las tareas de aprendizaje, formulamos un examen final que permite valorar el nivel de logro de los objetivos de aprendizaje en los estudiantes. Para esto, proponemos tres tareas de evaluación que permiten valorar el alcance de los objetivos de aprendizaje propuestos para esta unidad didáctica. Estas tareas evalúan la apropiación de conceptos y procedimientos clave para la medición indirecta de la capacidad de un recipiente cilíndrico y la comparación de contenedores con esta forma. Adicionalmente, presentamos una rúbrica de evaluación que permite valorar el desempeño de los estudiantes en el examen final. Con base en los resultados de la evaluación, proponemos que el profesor realice un ejercicio de retroalimentación similar a los que sugerimos en la tarea diagnóstica y las tareas de aprendizaje en el capítulo del esquema general de la unidad didáctica.

1. DISEÑO DEL EXAMEN FINAL

Presentamos las tres tareas de evaluación que conforman el examen final de la unidad didáctica sobre la medición de la capacidad del cilindro. La primera tarea está orientada a evaluar el primer objetivo de aprendizaje mientras que la segunda y tercera tarea permiten evaluar el segundo objetivo.

1. *Construcción de contenedores*⁶. Postobón envasa jugos Hit® en recipientes rectangulares. Cada recipiente tiene 4,8 cm de largo, 3,5 cm de ancho y 12 cm de alto, de modo que pueden envasar, en cada uno, 200 ml de jugo. Además, estos envases son agrupados en cajas de cartón de manera que caben tres envases en el ancho y ocho en el largo, como lo muestra la figura.



Para mejorar sus ventas, la empresa decide cambiar los envases rectangulares por envases cilíndricos de manera que puedan seguir agrupándose en las cajas de cartón. Si tú eres el

⁶ Adaptado de Lappan, Fey, Fitzgerald, Friel, & Phillips (2006)

diseñador de este nuevo tipo de envase, ¿cuáles dimensiones usarías para que contenga la misma cantidad de jugo que el envase rectangular? Justifica tu respuesta.

2. *Presupuesto.* Una compañía ofrece dos tipos de contenedores cilíndricos para transportar gasolina. El contenedor tipo A tiene 2 metros de radio, 6 metros de largo, y cuesta \$4 000 000. El contenedor tipo B tiene diámetro de 4 metros, largo de 5 metros y cuesta \$3 500 000. Si una estación de servicio tiene presupuestado pagar un precio máximo de \$54 por cada litro, ¿podrán contratar el tanque de mayor capacidad? Justifica tu respuesta. (Ayuda: recuerda que 1000 litros equivalen a un metro cúbico).

3. *Combo agrandado.* Camilo y Juana fueron en una cita a comer a Presto®. Cada uno pidió un combo que incluía hamburguesa, papas y una gaseosa de 492 ml servida en un envase cilíndrico de 15 cm de alto. El cajero al finalizar el pedido les preguntó si querían agrandar la bebida por una servida en un envase de la misma forma, pero 20% más alto y con radio 15% más pequeño. Camilo agrandó su bebida mientras que Juana decidió no hacerlo. ¿Quién tomará más gaseosa? Explica tu respuesta.

La primera tarea presenta una situación en la que los estudiantes deben relacionar la medida de capacidad de una caja de jugo (prisma rectangular) con la medida de capacidad de un recipiente cilíndrico. Mediante esta relación, los estudiantes deben medir indirectamente el posible radio del nuevo diseño al deducir que la altura del envase cilíndrico debe ser igual a la altura de los envases rectangulares. Además, los estudiantes deben medir indirectamente la capacidad del cilindro que proponen para verificar si su capacidad satisface las condiciones dadas en la tarea. De esta manera, la primera tarea del examen permite evaluar el logro del primer objetivo de aprendizaje puesto que involucra procedimientos que permiten medir indirectamente una de las dimensiones de un recipiente cilíndrico y su capacidad.

La segunda tarea propone una situación en la que los estudiantes deben medir indirectamente la capacidad de dos contenedores cilíndricos para determinar cuál de los dos contenedores puede ser contratado a partir de un presupuesto dado. Esta comparación puede llevarse a cabo con la relación precio-capacidad o con el precio máximo que puede ser pagado para contratar cada contenedor acorde con su capacidad. De esta manera, los estudiantes utilizan la medición de la capacidad de dos recipientes cilíndricos para compararlos y elegir cuál es más conveniente dentro del contexto propuesto.

La tercera tarea presenta una situación en la que los estudiantes deben determinar indirectamente la medida de capacidad de un envase cilíndrico y, después, realizar incrementos en el radio y altura de este envase. Con estas nuevas dimensiones, los estudiantes deben medir indirectamente la capacidad de un nuevo recipiente y compararla con la capacidad del primero. Esta tarea aborda procedimientos trabajados en los dos objetivos de aprendizaje de esta unidad didáctica.

2. RÚBRICA DE EVALUACIÓN

La rúbrica de evaluación forma parte integral del examen final. Esta herramienta tiene como propósito organizar los criterios de evaluación que facilitan la clasificación en los niveles de desempeño de cada uno de los estudiantes en relación con el logro de los objetivos de aprendizaje. Cada nivel de desempeño tiene una serie de indicadores que están redactados en términos de los criterios

de logro más importantes de los objetivos de aprendizaje. También incluyen los errores que limitan el alcance de uno o varios criterios de logro, que debe tener en cuenta el profesor y los estudiantes en cada nivel de desempeño.

En la tabla 13, presentamos la rúbrica de evaluación del examen final. Esta rúbrica de evaluación organiza en la primera columna los niveles de desempeño en los que es posible clasificar a un estudiante de acuerdo con las destrezas demostradas en el examen final según la escala de valoración nacional del decreto 1290 de 2009. Cada uno de estos niveles de desempeño tiene asignado los criterios de evaluación que permiten realizar dicha clasificación en la segunda columna. Formulamos estos criterios con base en los procedimientos que el estudiante debe demostrar para determinar en qué medida el estudiante desarrolla correctamente las tareas de evaluación.

Tabla 13

Rúbrica de evaluación del examen final

Nivel de desempeño	Indicadores
Superior	El estudiante activa todos los procedimientos necesarios para dar solución a las tareas de evaluación sin incurrir en errores. Estos procedimientos incluyen la medición indirecta de la capacidad de un recipiente cilíndrico o de una de sus dimensiones; el uso adecuado de la expresión $C = \pi r^2 h$ en todas las tareas; la comparación de los recipientes cilíndricos propuestos en las tareas 2 y 3; la organización de los procedimientos; y la correcta interpretación de la respuesta obtenida.
Alto	El estudiante activa los procedimientos relacionados con la medición indirecta de la capacidad de un recipiente cilíndrico o de una de sus dimensiones; el uso adecuado de la expresión $C = \pi r^2 h$ en las tareas; la comparación de los recipientes cilíndricos propuestos en las tareas 2 y 3; la organización de los procedimientos; y la correcta interpretación de la respuesta obtenida. No obstante, el estudiante incurre en algún error relacionado con asignar unidades de medida distintas a la requeridas. En el caso de las unidades de capacidad, utiliza unidades de volumen o las omite. En el caso de las dimensiones pedidas, utiliza unidades que no son de longitud o las omite. Además, el estudiante incurre en el error E12 al intercambiar unidades de medida de volumen con unidades de medida de longitud o de superficie o incurre en el error E10 en el que aproxima la respuesta al usar una cantidad de cifras decimales distinta de las requeridas. También, incurre en el error E75 en el que omite las unidades de medida en la respuesta final.
Básico	El estudiante desarrolla correctamente una de las tres tareas de evaluación. En esta tarea, el estudiante activa los procedimientos relacionados con la medición indirecta de la capacidad de un recipiente cilíndrico o de una de sus dimensiones, el uso adecuado de la expresión $C = \pi r^2 h$ en dicha tarea, la

Tabla 13
Rúbrica de evaluación del examen final

Nivel de desempeño	Indicadores
	<p>comparación de los recipientes cilíndricos propuestos en las tareas 2 o 3, la organización de los procedimientos.</p> <p>Además, el estudiante puede incurrir en los errores descritos en el nivel de desempeño Alto y en errores como asignar incorrectamente unidades de medida o establecer inadecuadamente las relaciones entre la longitud, área y capacidad (E7, E8). También, el estudiante no ofrece las respuestas de las tareas en términos de la formulación.</p>
Bajo	<p>El estudiante no completa ninguna de las tres tareas de evaluación. En general, predominan los cálculos incompletos por causa de los errores E7 o E8.</p> <p>Además, El estudiante incurre en el error E42 en el que confunde la notación estándar para los datos en el enunciado de la tarea y en el error E44 en el que multiplica la medida del radio y la altura por pi para medir la capacidad de un recipiente cilíndrico.</p>

El estudiante se ubica en el nivel superior de desempeño si activa todos los procedimientos necesarios para resolver las tres tareas de evaluación sin incurrir en errores. Por otra parte, el estudiante obtiene un nivel alto de desempeño si resuelve correctamente dos de las tres tareas de evaluación. Para el primer objetivo, las tres tareas permiten verificar su alcance porque los estudiantes deben medir indirectamente la capacidad del cilindro. Asimismo, la primera y la tercera tarea verifican la medición indirecta de una de las dimensiones de un recipiente cilíndrico. Para el segundo objetivo, las tareas dos y tres evalúan la comparación de recipientes cilíndricos al usar la medida de capacidad como criterio de elección. No obstante, los estudiantes incurren en errores relacionados con el uso inadecuado de las unidades de medida. Un estudiante alcanza el nivel básico de desempeño cuando resuelve una de las tres tareas de evaluación correctamente. Por último, un estudiante clasifica en el nivel bajo de desempeño si realiza cálculos incorrectos en las tareas de evaluación y usa de manera incorrecta las ecuaciones para medir la capacidad de recipientes cilíndricos.

7. CONCLUSIONES

Este documento es el resultado del diseño, implementación, evaluación y mejora de una unidad didáctica sobre la medición de la capacidad de recipientes cilíndricos. Fundamentamos el trabajo en los conceptos pedagógicos y referentes didácticos consolidados por Gómez (2018). Su propósito es concretar una propuesta de enseñanza y aprendizaje sobre la medición de la capacidad de envases cilíndricos y su aplicación en diversos contextos. Los contextos involucran la estimación de la capacidad de recipientes no cilíndricos, la comparación de envases a partir de la medición de esta magnitud y el uso de su capacidad como criterio para llevar a cabo esta elección. Realizamos el diseño de la propuesta en la Maestría en Educación Matemática ofertada por UED, el centro de investigación y formación en Educación Matemática de la Facultad de Educación de la Universidad de los Andes en Bogotá, Colombia.

Seguimos tres etapas para consolidar esta propuesta de enseñanza sobre la medición de la capacidad del cilindro. En la primera etapa, analizamos la medición de la capacidad del cilindro mediante sus conceptos y procedimientos, sus sistemas de representación, los fenómenos que dan sentido a este tema e introducimos algunos de los contextos que forman parte de esta propuesta de enseñanza (Cañadas, Gómez, & Pinzón, 2018). Luego, formulamos los aspectos cognitivos que son concretados en las expectativas de nivel superior a las que contribuye este trabajo, los objetivos de aprendizaje, las expectativas afectivas y las limitaciones de aprendizaje propias del tema. Estos objetivos de aprendizaje están contruidos con base en aspectos curriculares, institucionales y de la población, y diseñamos una secuencia de tareas de aprendizaje con base en los referentes curriculares de los estándares básicos de competencias y el marco PISA 2012. Con esto, organizamos los procedimientos necesarios para lograr los objetivos de aprendizaje con la ayuda de los criterios de logro y caracterizamos los objetivos mediante sus grafos de criterios de logro. Adicionalmente, diseñamos las tareas de evaluación agrupadas en la tarea diagnóstica y el examen final. La tarea diagnóstica tiene como propósito identificar los conocimientos que tienen los estudiantes y reforzar los que no, mientras que el examen final busca evaluar el alcance de los objetivos de aprendizaje de la unidad didáctica. En la segunda etapa, implementamos el diseño inicial de la unidad didáctica con estudiantes de grado noveno del Instituto Pedagógico Nacional de la ciudad de Bogotá. Durante esta implementación, recolectamos información relacionada con la enseñanza y el aprendizaje de este tema de las matemáticas escolares. Finalmente, en la tercera etapa, analizamos esta información y formulamos mejoras al diseño inicial de la unidad didáctica para concretar la información abordada en los capítulos que conforman este documento. Complementamos la información presentada en los apartados de este documento con un total de tres anexos.

Esta propuesta de enseñanza contribuye al desarrollo de la competencia matemática de los estudiantes de manera que la medición de la capacidad vaya más allá de la utilización de fórmulas. Las tareas de aprendizaje permiten abordar de manera constante los sistemas de representación

numérico, geométrico y simbólico. Además, estas tareas fortalecen la competencia matemática de los estudiantes puesto que promueven la formulación de estrategias para abordar los problemas, la utilización de operaciones para medir indirectamente, la comunicación y la interpretación de las respuestas obtenidas. Asimismo, los contextos formulados son cercanos y llamativos para los estudiantes de manera que son un medio para fortalecer el significado que tiene la medida de capacidad. Igualmente, esta propuesta de enseñanza promueve la interacción y comunicación constante de los estudiantes de manera que compartan ideas e inquietudes y negocien significados para lograr consensos sobre las posibles estrategias de solución. Esta interacción es complementada cuando los estudiantes comparten los resultados de las tareas en el gran grupo.

Para futuras implementaciones, invitamos a los profesores a profundizar en la diferencia entre capacidad y volumen y en el uso adecuado de las unidades de medida de estas magnitudes. Además, recomendamos implementar las tareas de aprendizaje sin olvidar las sugerencias metodológicas y las observaciones abordadas en los apartados sobre la evaluación. Por otra parte, consideramos que los errores en los que incurren los estudiantes son una oportunidad para que los profesores reflexionen sobre la importancia de la retroalimentación como herramienta para evaluar el aprendizaje y fortalecer la enseñanza.

Dos de las limitaciones que tiene esta unidad didáctica están relacionadas con el uso de unidades de medida de capacidad distintas a los mililitros y el uso del software de geometría dinámica GeoGebra. En relación con la primera limitación, todas las tareas de aprendizaje utilizan únicamente esta unidad de medida por la relación directa que tiene con el centímetro cúbico. No obstante, consideramos que existe una oportunidad de profundizar en otras unidades de medida de capacidad y en su relación con los mililitros y los centímetros cúbicos después de implementar esta unidad didáctica. En relación con la segunda limitación, entendemos que no todos los establecimientos educativos cuentan con salas de computadores idóneos o dispositivos electrónicos con acceso a internet para usar GeoGebra. Por otra parte, consideramos que la propuesta del examen final tiene un limitante en relación con su agrupamiento puesto que las tareas de aprendizaje están formuladas para que los estudiantes trabajen en grupo mientras que el examen final es individual. Por esto, sugerimos fortalecer los tiempos de trabajo individual en las tareas de aprendizaje para disminuir imprevistos que pueda generar el examen final.

Consideramos que este trabajo se puede complementar al abordar las relaciones y diferencias entre las unidades de medida de longitud, área, volumen y capacidad. Proponemos este tema porque evidenciamos durante la implementación que el tratamiento de estas unidades de medida causa dificultades en los estudiantes. Pensamos que es posible formular una unidad didáctica que aborde de manera más profunda la comprensión de estas unidades de medida mediante un análisis didáctico de este tema. Asimismo, consideramos que otro tema que puede complementar este trabajo está relacionado con el volumen y la capacidad de otros cuerpos redondos y su relación con la capacidad del cilindro. Consideramos que esto es relevante porque permite dar mayor significado a la medición de esta magnitud y fortalece el significado de las fórmulas que sirven para medir indirectamente la capacidad de envases cónicos o esféricos.

8. LISTADO DE ANEXOS

En la tabla 14, presentamos el listado de anexos de esta unidad didáctica.

Tabla 14
Listado de anexos

A	Descripción
01	Listado de dificultades y errores en los que podrían incurrir los estudiantes durante la implementación de las tareas de aprendizajes. Incluimos la descripción detallada de las dificultades.
02	Listado de criterios de logro de los objetivos de aprendizaje de la unidad didáctica.
03	Fichas de tareas de aprendizaje. En este anexo incluimos los requerimientos de las tareas de aprendizaje y sus tablas de ayudas.
04	Archivo imprimible con la formulación de la tarea diagnóstica, tareas de aprendizaje y examen final.

Nota. A: Anexo

9. REFERENCIAS

- Cañadas, M. C., Gómez, P., & Pinzón, A. (2018). *Análisis de contenido*. En P. Gómez (Ed.), Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares (pp. 53–112). Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes.
- Deif, A. (2019) *Mathematics in ancient Egypt (Part II)*. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/337941217_Mathematics_in_Ancient_Egypt_Part_II
- Gómez, P. (2018). *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares*. Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes.
- Gómez, P., Mora, M. F., & Velasco, C. (2018). *Análisis de instrucción*. En P. Gómez (Ed.), Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares (pp. 197–268). Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes.
- González, M. J., & Gómez, P. (2018). *Análisis cognitivo*. En P. Gómez (Ed.), Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares (pp. 113–196). Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes.
- Kaput, J. J. (1992). *Technology and mathematics education*. En D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 515–556). Nueva York: Macmillan.
- Lappan, G., Fey, J., Fitzgerald, W., Friel, S., & Phillips, E. (2006a). *Connected mathematics 2: Comparing and scaling*. Michigan: Michigan State University.
- Lappan, G., Fey, J., Fitzgerald, W., Friel, S., & Phillips, E. (2006b). *Connected mathematics 2: Filling and wrapping*. Michigan: Michigan State University.
- Lappan, G., Fey, J., Fitzgerald, W., Friel, S., & Phillips, E. (2006c). *Connected mathematics 2: Stretching and shrinking*. Michigan: Michigan State University.
- Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Granada: Universidad de Granada.
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2013). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012: matemáticas, lectura y ciencias*. Madrid, España: Autor.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias*. Bogotá, Colombia: Autor.
- Ministerio de Educación Nacional. (2015). *Derechos Básicos de Aprendizaje en Matemáticas*. Bogotá, Colombia: Autor.
- Olmo, M. Á., Moreno, M. F., & Gil Cuadra, F. (1993). *Formalización matemática del área y volumen*. En *Superficie y Volumen: Algo más que el trabajo con fórmulas* (pp. 141–150). Madrid: Editorial Síntesis.
- Yong, L. L. (1994). Jiu zhang suanshu (nine chapter on the mathematical art): An overview. *Archive for History of Exact Sciences*, 47(1), 1–51.