Universidad de los Andes
Facultad de Educación

Maestría en Educación Matemática

# Teorema de Tales

Camila Sánchez, Angy Pinto y Catalina Páez

Bogotá, mayo de 2024

En este documento, presentamos la unidad didáctica sobre el teorema de Tales, elaborada por nuestro grupo, integrante de la décimo primera cohorte de la Maestría en Educación Matemática de la Universidad de los Andes. Hemos diseñado e implementado esta unidad didáctica con estudiantes de grado octavo de la educación básica secundaria del Instituto Caldas en la ciudad de Bucaramanga.

En algunas instituciones educativas, el teorema de Tales es un tema que a menudo no recibe la debida importancia, ya que se priorizan los criterios de congruencia y semejanza entre triángulos. Por consiguiente, esperamos que los estudiantes puedan emplear el teorema de Tales en situaciones cotidianas, lo que les permitirá comprender su aplicación práctica y su relevancia en el mundo real.

Al revisar los documentos curriculares relevantes, como los estándares básicos de competencia del MEN, el informe del Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes (PISA 2012) y los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA), se destaca que el tema de la unidad didáctica del Teorema de Tales se enmarca en el pensamiento espacial y los sistemas geométricos. Este enfoque se centra en comprender teoremas fundamentales de la geometría, como el teorema de Tales, que facilita la comprensión de proporciones y ayuda a la resolución de problemas en diversas áreas como la arquitectura, la ingeniería y las ciencias.

Respecto al documento PISA 2012, el tema está enmarcado en la categoría de contenido espacio y forma. Además, nos permite contemplar los tres procesos de formular, emplear e interpretar. En cuanto a las capacidades matemáticas fundamentales, la implementación de nuestra unidad didáctica busca contribuir al uso de herramientas, razonamiento, argumentación y diseño de estrategias para resolver problemas.

Referente a los derechos básicos de aprendizaje para grado octavo, en MEN (2015) encontramos el derecho número siete: “identifica regularidades y argumenta propiedades de figuras geométricas a partir de teoremas y las aplica en situaciones reales” (p.62).

Por otro lado, el diseño de la unidad didáctica y los recursos contemplados permiten que pueda ser implementado con estudiantes de cualquier estrato socioeconómico. Se adapta fácilmente a las características sociales e institucionales del contexto educativo.

Nuestra unidad didáctica busca que los estudiantes identifiquen la utilidad del teorema de Tales para la solución de situaciones de la vida cotidiana. Consideramos que, a diferencia del teorema de Pitágoras, el teorema de Tales es poco mencionado en el transcurso de la educación básica secundaria. De este modo, la meta de la implementación de la unidad didáctica es proveer a los estudiantes los conocimientos necesarios para organizar la información, establecer relaciones geométricas entre distancias conocidas y deducir otra distancia desconocida mediante procedimientos matemáticos.

# Antes de implementar

En este apartado, realizamos una síntesis del análisis de contenido, el análisis cognitivo y el esquema general de nuestra unidad didáctica. En los siguientes apartados, nos enfocamos en explicar cómo la organización de los contenidos nos permitió formular las expectativas de aprendizaje, identificar las limitaciones de aprendizaje y proponer el esquema general de la unidad didáctica.

## Articulación de los contenidos

Presentamos la estructura matemática en la que se enmarca el teorema de Tales. Para ello, identificamos los conceptos y procedimientos más importantes del tema y establecemos las relaciones entre ellos. Además, presentamos los sistemas de representación y los contextos fenomenológicos que caracterizan el tema.

### 1. Conceptos y procedimientos

El teorema de Tales está enmarcado en el pensamiento espacial y los sistemas geométricos. Partimos de la geometría para establecer los conceptos y procedimientos que conllevan a la deducción del teorema. En el mapa conceptual de la figura 1, presentamos la estructura matemática en la que se ubica el tema.

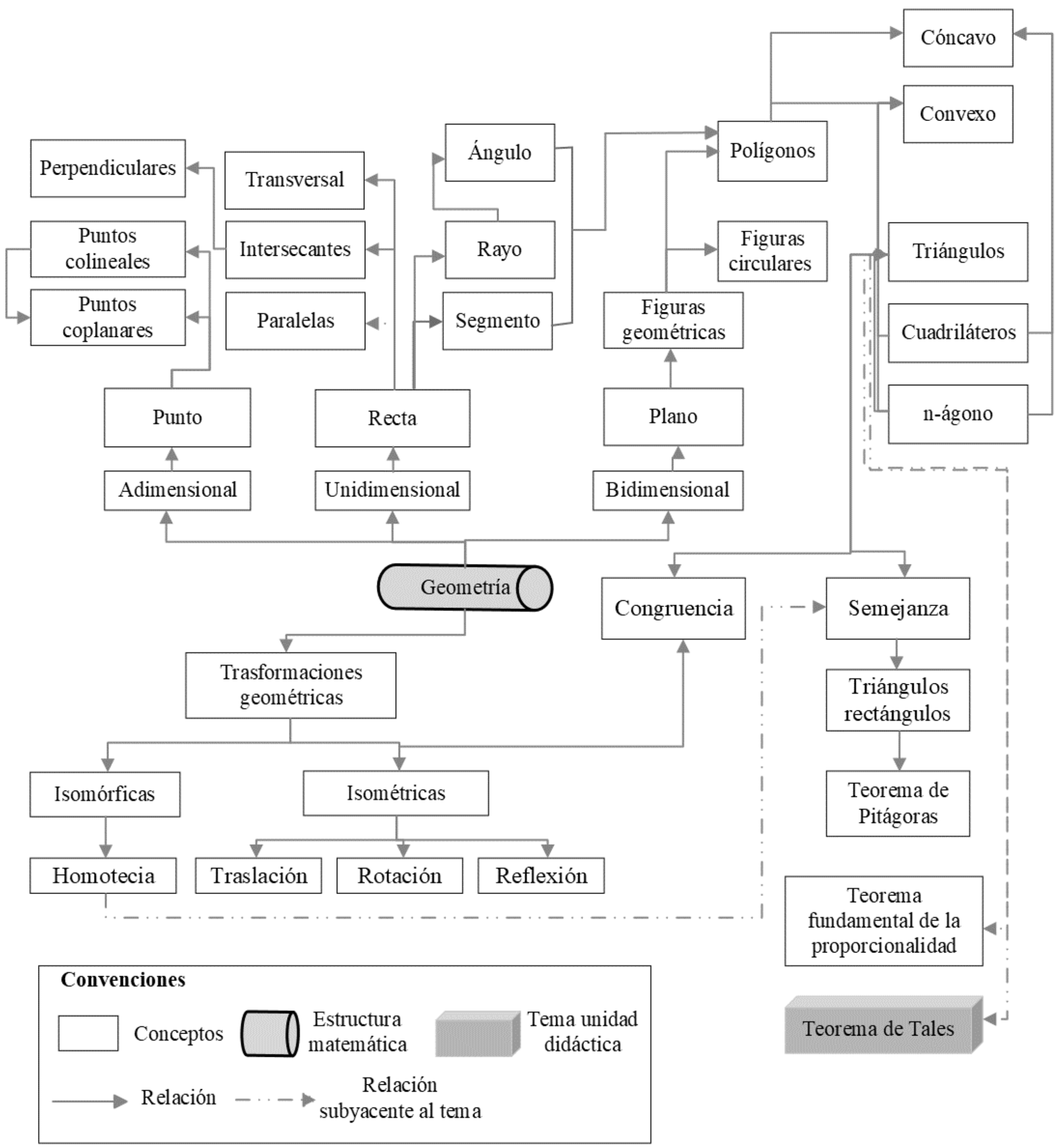



*Figura 1.* Estructura matemática del teorema de Tales

En la figura 1, establecemos la geometría como el eje central, que abarca los conceptos fundamentales de punto y recta, que son componentes esenciales de las relaciones geométricas que definen el teorema de Tales. Además, tenemos en cuenta el concepto de ángulo ya que, al presentarse la intersección entre rectas determinamos si dos o más rectas son paralelas, perpendiculares o secantes. Por otro lado, presentamos procedimientos que involucran transformaciones geométricas. Estas transformaciones, al aplicarse a las figuras geométricas, facilitan la transición hacia los conceptos de congruencia y semejanza. Este proceso conduce a la definición de criterios de semejanza, propiedades de proporcionalidad en algunas figuras, especialmente en triángulos, y la formulación del teorema de Tales.

**2. Campo procedimental**

Las rectas paralelas y las rectas transversales son conceptos que permiten reconocer el uso del teorema de Tales en una situación. A continuación, indicamos los procedimientos que consideramos necesarios para el planteamiento y solución de una situación mediante la aplicación del teorema de Tales.

- Identificar intersecciones entre rectas paralelas y rectas transversales.
- Identificar segmentos correspondientes o adyacentes que se determinan luego de la intersección de rectas.
- Plantear relaciones de proporcionalidad entre los segmentos.
- Elegir entre calcular la constante de proporcionalidad u optar por las propiedades de las proporciones.
- Mediante la solución de la ecuación multiplicativa, determinar la cuarta proporcional.

Para el caso particular en que se tenga un triángulo y se trace una recta paralela a cualquiera de sus lados, se realiza un procedimiento homólogo.

A continuación, en la figura 2, presentamos un mapa conceptual que resume las ideas expuestas sobre los conceptos y los procedimientos relacionados con el teorema de Tales.

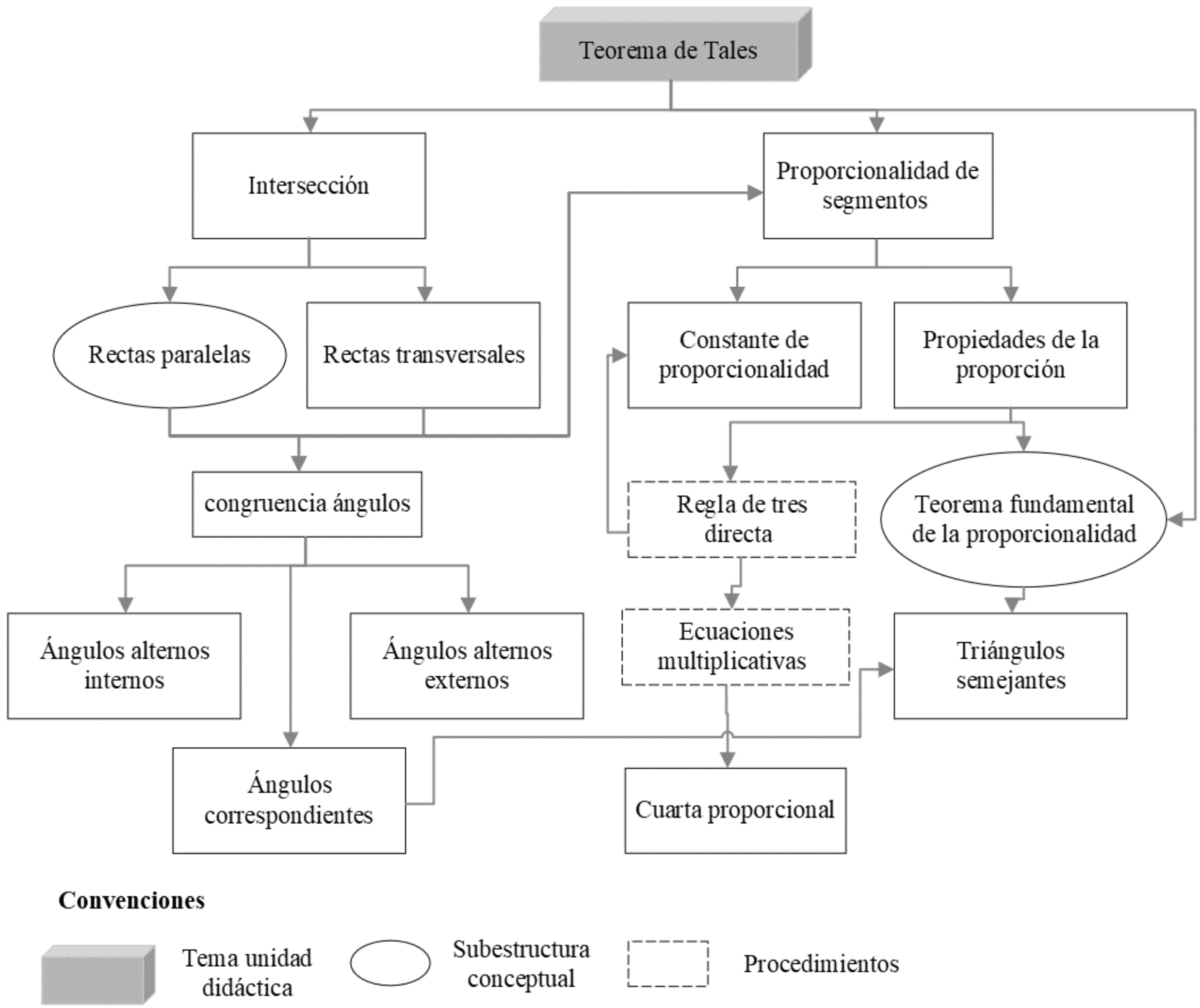



*Figura 2.* Estructura conceptual del teorema de Tales

En la estructura conceptual de la figura 2, destacamos la importancia de cómo las rectas de un mismo plano se intersecan. Por ejemplo, cuando las rectas se intersecan y forman ángulos diferentes a 90º, las reconocemos como rectas secantes. Si al prolongar las rectas infinitamente no se intersecan, las llamamos rectas paralelas. La recta transversal es aquella que corta a dos o más rectas en diferentes puntos dentro de un mismo plano.

En el teorema de Tales, las rectas paralelas y transversales desempeñan un papel crucial. Este teorema establece que cuando tres o más rectas paralelas son cortadas por dos transversales, las rectas paralelas dividen a las transversales en segmentos proporcionales. Por lo tanto, se utilizan procedimientos relacionados con la proporcionalidad de segmentos correspondientes, la regla de tres directa y ecuaciones multiplicativas para determinar la cuarta proporcional en la igualdad de dos razones.

## 3. Sistemas de representación

Según Kaput (1992), un sistema de representación es un conjunto organizado de signos que sigue reglas específicas. Estas reglas determinan cómo se crean, identifican y transforman los signos dentro del sistema, al establecer relaciones entre ellos.

De acuerdo con lo anterior y al analizar cada sistema de representación, identificamos para el teorema de Tales los sistemas de representación simbólico, numérico, tabular, geométrico, gráfico, pictórico, manipulativo y ejecutable. Presentamos los sistemas de representación de nuestro tema en la figura 3.

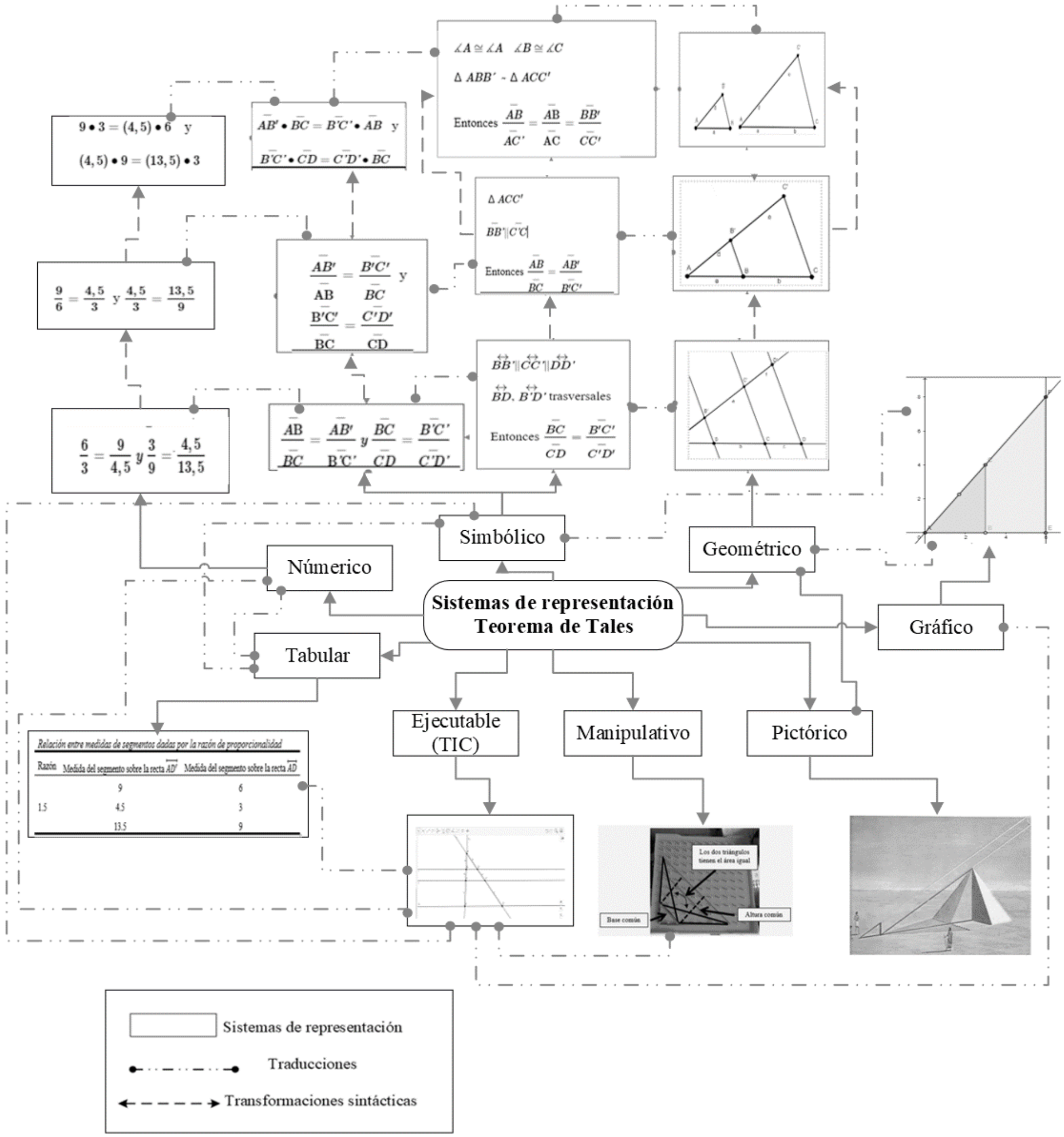



*Figura 3.* Sistemas de representación para el teorema de Tales

A continuación, describimos brevemente cada sistema de representación presentado en la figura 3.

*Sistema de representación simbólico*

El teorema de Tales afirma que, si a tres o más rectas paralelas las intersecan dos transversales, estas forman segmentos proporcionales entre las rectas paralelas. La interpretación simbólica de esta afirmación se puede ver de la siguiente manera: si $\overleftrightarrow{BB'} \parallel \overleftrightarrow{CC'} \parallel \overleftrightarrow{DD'}$ con $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{AD'}$ transversales, entonces $\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{C'D'}}$.

El recíproco del teorema de Tales afirma que, si varias rectas son cortadas por dos transversales y los segmentos determinados entre las rectas paralelas son proporcionales, entonces las rectas son paralelas. La representación simbólica es, si $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{AD'}$ dos rectas transversales que intersecan tres rectas y se cumple que $\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{C'D'}}$ entonces $\overleftrightarrow{BB'} \parallel \overleftrightarrow{CC'} \parallel \overleftrightarrow{DD'}$.

*Sistema de representación numérico*

Con el sistema de representación numérico es posible representar relaciones entre medidas de segmentos en forma de fracción. Se emplean las medidas de los segmentos resultantes de la intersección entre rectas paralelas y transversales para establecer razones y proporciones. Por ejemplo, para tres rectas paralelas cortadas por dos rectas transversales $6cm$, $3cm$, $9\ cm$, son las medidas de los segmentos que se forman sobre una de las rectas transversales y 9 $cm$, 4,5 cm, 13,5 cm, son las medidas de los segmentos sobre la otra recta transversal. Por lo tanto, se obtienen las siguientes proporciones $\frac{6cm}{9cm} = \frac{3cm}{4{,}5cm} = \frac{9cm}{13{,}5\ cm}$. Lo anterior se lee 6 cm es a 9 cm, como 3 cm es a 4,5 cm como 9 cm es a 13,5 cm.

*Sistemas de representación tabular*

El sistema de representación tabular permite organizar los datos en tablas. Por ejemplo, en una situación relacionada con el Teorema de Tales, es posible plantear una tabla en la que se evidencie la relación de proporcionalidad entre las medidas de los segmentos y se calcule la razón, tal como se observa en la tabla 1.

Tabla 1

*Relación entre medidas de segmentos dadas por la razón de proporcionalidad*

| Razón | Medida del segmento sobre la recta $\overleftrightarrow{AD'}$ | Medida del segmento sobre la recta $\overleftrightarrow{AD}$ |
|---|---|---|
| | 9 | 6 |
| 1.5 | 4.5 | 3 |
| | 13.5 | 9 |

*Sistema de representación geométrico*

El sistema de representación geométrico se basa en la representación gráfica de figuras geométricas y las relaciones entre ellas, lo que facilita la visualización y comprensión de rectas paralelas y transversales. Para ilustrar el teorema de Tales mediante el sistema de representación geométrico, se suelen utilizar dibujos que representan tres rectas paralelas cortadas por dos transversales, tal y como aparece en la figura 4.

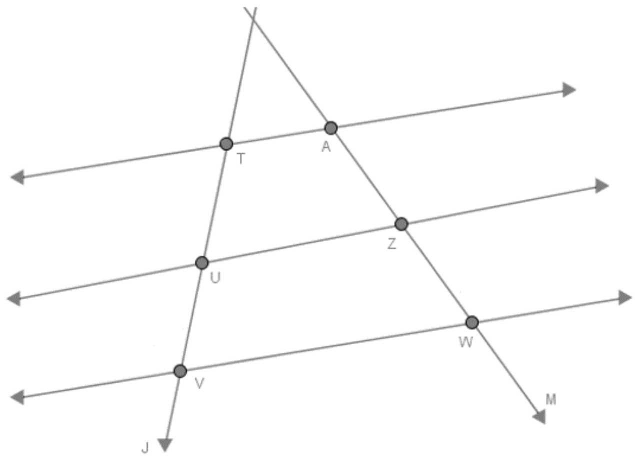



*Figura 4.* Representación geométrica Teorema de Tales.

*Sistema de representación gráfico*
El sistema de representación gráfico permite medir distancias entre dos puntos y así determinar la medida de los segmentos que se forman, para luego establecer relaciones de proporcionalidad entre las medidas de segmentos correspondientes.

*Sistema de representación pictórico*
El teorema de Tales se puede representar mediante dibujos que permitan a los estudiantes visualizar el enunciado. Esto facilita la comprensión de la afirmación matemática, que establece que, si dos rectas paralelas son cortadas por cualquier secante, los segmentos formados son proporcionales. Al observar un dibujo que ilustre el teorema, se puede entender fácilmente cómo se relacionan los segmentos.

*Sistema de representación manipulativo*
En el sistema de representación manipulativo, vemos que el geoplano puede usarse para mostrar triángulos en posición de Tales. Por ejemplo, en la figura 5, al trazar el segmento $BB'$ paralela al segmento $CC'$, se forman dos triángulos semejantes que, tienen una base común y alturas de la misma medida. Por lo tanto, los dos triángulos tienen igual área.

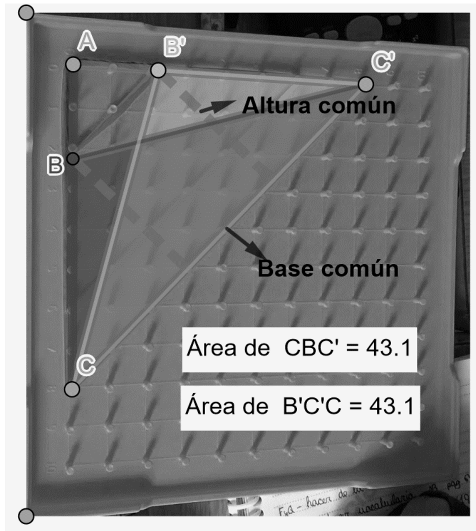



*Figura 5.* Sistema de representación manipulativo adaptado de https://www.conectadosalasmates.com/2018/05/thales-y-cuales.html

*Sistema de representación ejecutable*

Para el sistema de representación ejecutable, consideramos que GeoGebra o Cabri son herramientas que permiten crear representaciones visuales dinámicas que facilitan la comprensión del Teorema de Tales. Estas representaciones permiten realizar variaciones en las medidas de los segmentos y verificar que siempre existirá una constante de proporcionalidad, aunque varíe su valor.

## 4. Contextos fenomenológicos que involucran el teorema de Tales

En este apartado, presentamos los fenómenos que se relacionan con el teorema de Tales. Organizamos los fenómenos como se observa en la figura 6. Primero presentamos las subestructuras que dan sentido al teorema. Luego, presentamos los contextos fenomenológicos que dan respuesta a preguntas como ¿para qué se utiliza el teorema? y ¿qué problemas se pueden solucionar con el teorema? Finalmente, presentamos los fenómenos que se relacionan con las subestructuras y los contextos.

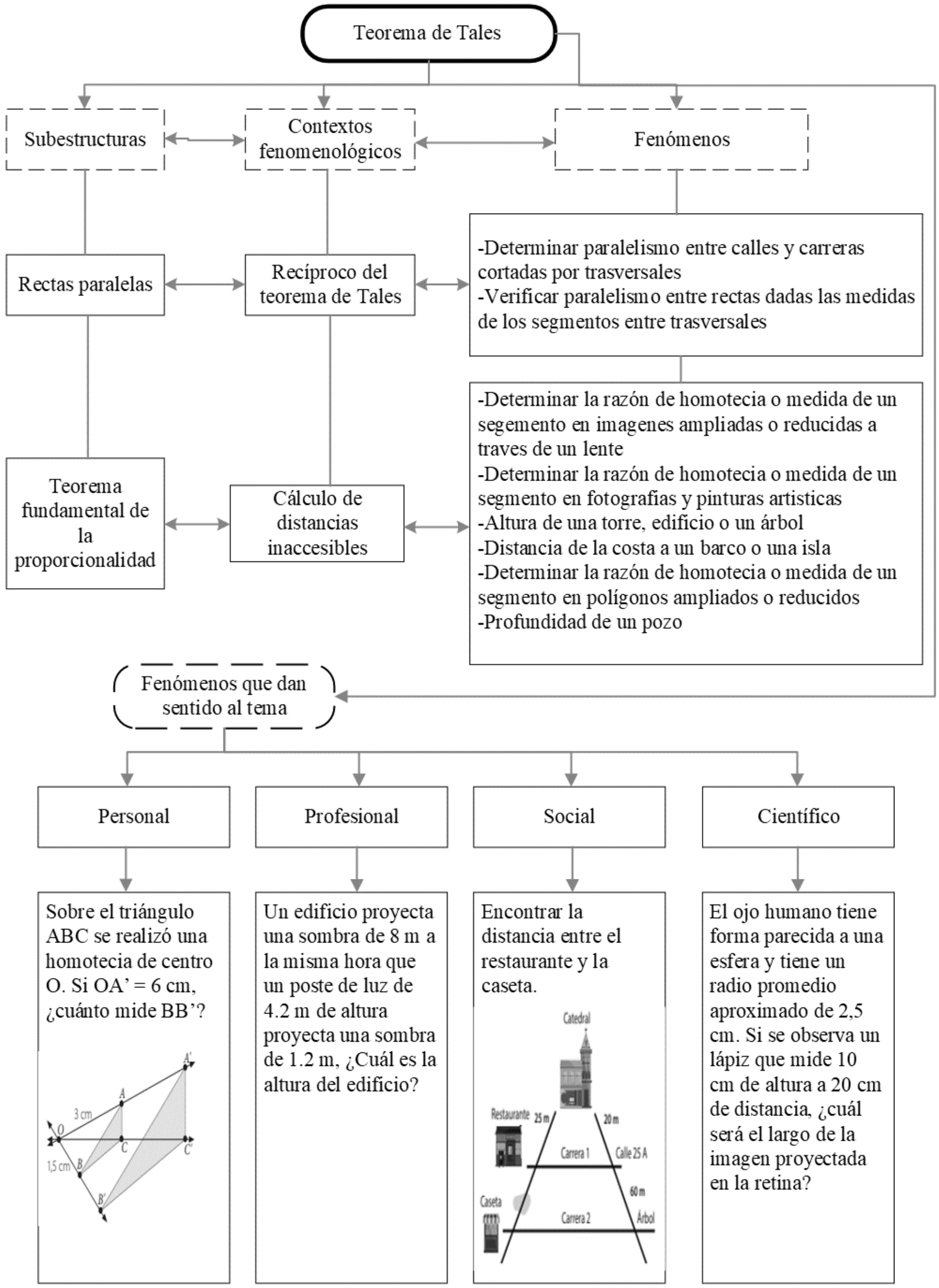



*Figura 6.* Fenómenos que dan sentido al teorema de Tales.

El paralelismo entre calles y carreras cortadas por transversales es uno de los fenómenos que se relaciona con el contexto fenomenológico recíproco del teorema de Tales, que corresponde a la primera subestructura de rectas paralelas. El concepto del recíproco establece que, si varias rectas son cortadas por dos secantes y los segmentos determinados sobre las secantes son proporcionales, entonces las rectas son paralelas. Las situaciones asociadas a esta subestructura se reducen a comprobar que dos o más rectas son paralelas a partir de las medidas de los segmentos correspondientes.

Determinar la altura de una torre, edifico o un árbol, o encontrar la profundidad de un pozo son fenómenos que se relacionan con el contexto profesional, según el marco PISA, y son situaciones en las que se aplica el teorema fundamental de la proporcionalidad, que corresponde a la segunda subestructura del teorema de Tales. En estas circunstancias, el teorema proporciona un método preciso y efectivo para calcular distancias inaccesibles mediante la geometría y la proporción.

# Aspectos cognitivos

En este apartado, presentamos los aspectos cognitivos asociados a nuestra unidad didáctica. Primero, abordamos las expectativas de aprendizaje de nivel superior. Luego, exponemos los objetivos de aprendizaje como expectativas de aprendizaje de nivel medio, las expectativas afectivas y las limitaciones de aprendizaje. Por último, caracterizamos los objetivos de aprendizaje por medio de grafos de criterios de logro.

## 1. Expectativas de nivel superior

Las expectativas de nivel superior de nuestra unidad didáctica provienen del marco conceptual de PISA (2012). Para la evaluación de la competencia matemática de los estudiantes, adoptamos las ideas de las capacidades matemáticas fundamentales y los procesos matemáticos.

Un proceso matemático describe lo que hacen los estudiantes para relacionar el contexto de un problema con las matemáticas, para luego resolverlo. Con nuestra unidad didáctica buscamos contribuir a los procesos de formular, emplear e interpretar.

También, buscamos contribuir a seis capacidades matemáticas fundamentales que subyacen a los procesos mencionados anteriormente. Estas capacidades son la comunicación, la matematización, la representación, el razonamiento y argumentación, el diseño de estrategias para resolver problemas, y la utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico.

En la tabla 2, presentamos la relación entre cada proceso y las capacidades matemáticas fundamentales que pretendemos abordar para cada uno.

Tabla 2

*Relación entre procesos matemáticos y capacidades fundamentales para el teorema de Tales*

| | Procesos matemáticos | | |
|---|---|---|---|
| CMF | Formular | Emplear | Interpretar y evaluar |
| Comunicación | Leer e interpretar enunciados o imágenes para crear un modelo geométrico de la situación. | Presentar los pasos realizados para plantear una proporción y explicar el procedimiento. | Verificar la coherencia de las respuestas, de acuerdo con el contexto. |
| Matematización | Identificar las distancias inaccesibles y asociarlas con la medida de segmentos en una representación geométrica. | | |
| Representación | Crear una representación pictórica o geométrica con los datos del enunciado. | Realizar traducciones entre el sistema de representación geométrico, simbólico y numérico. | Evaluar si los resultados numéricos son coherentes en comparación con las representaciones pictóricas o geométricas |
| Razonamiento y argumentación | Justificar el uso de dibujos, elementos geométricos y su respectiva ubicación en las representaciones pictóricas o geométricas. | Explicar las propiedades de la proporción usadas en cada trasformación sintáctica del sistema simbólico y numérico. | Reflexionar sobre la veracidad de las respuestas, al comparar medidas de las distancias accesibles e inaccesibles. |
| Diseño de estrategias para resolver problemas | Diseñar una representación pictórica o geométrica del enunciado y luego, traducir al lenguaje simbólico. | | |
| Utilización de operaciones y un lenguaje simbólico formal y técnico | Utilizar la incógnita para representar la distancia desconocida. Plantear una proporción entre las razones de segmentos correspondientes. | Usar las propiedades de la proporción y aplicación de las operaciones básicas. | |

*Nota*. CMF = Capacidades matemáticas fundamentales

## 2. Objetivos de aprendizaje

Para nuestra unidad didáctica, tenemos dos objetivos de aprendizaje que abarcan el cálculo de distancias y el recíproco teorema de Tales y que presentamos a continuación.

*Objetivo 1.* Utilizar el teorema de Tales para calcular distancias en contextos matemáticos y situaciones reales.

*Objetivo 2.* Verificar el paralelismo entre rectas cortadas por dos transversales a partir de relaciones de proporcionalidad entre segmentos adyacentes y correspondientes.

Con el primer objetivo, buscamos que los estudiantes reconozcan situaciones en las que el uso de un instrumento de medición no permita calcular directamente la distancia entre dos puntos. Después, esperamos que los estudiantes utilicen las relaciones y propiedades geométricas asociadas al teorema de Tales para abordar el problema. Esto implica que los estudiantes identifiquen las medidas conocidas, establezcan relaciones entre segmentos, planteen proporciones y calculen el valor desconocido.

Con el segundo objetivo, buscamos que los estudiantes identifiquen situaciones en las que los segmentos tengan medidas proporcionales entre sí. Mediante la aplicación de propiedades, se podrá verificar una constante de proporcionalidad que determine si existe paralelismo entre dos o más rectas.

## 3. Expectativas afectivas

Las expectativas afectivas, proporcionan un marco para entender y abordar el desarrollo emocional y motivacional de los estudiantes en relación con el aprendizaje del teorema de Tales. En el proceso educativo, es importante enfocarnos en aspectos como la autoestima, la confianza, el interés por aprender y la actitud hacia las matemáticas. Así, podemos crear un entorno de aprendizaje más enriquecedor y efectivo.

Estas expectativas afectivas no solo influyen en el bienestar emocional de los estudiantes, sino que también pueden impactar significativamente en su desempeño académico y en su disposición para participar activamente en el proceso de aprendizaje. Con base en lo anterior, al diseñar la unidad didáctica sobre el teorema de Tales, nos centramos en el enfoque que aborda la confianza y el interés por aprender. En la tabla 3, presentamos las tres expectativas afectivas específicas para nuestra unidad didáctica.

Tabla 3
*Listado de expectativas afectivas del teorema de Tales*

| EA | Descripción |
|---|---|
| 1 | Desarrollar confianza para representar datos de un enunciado o una situación. |
| 2 | Adquirir seguridad para establecer proporciones entre segmentos de recta adyacentes o correspondientes. |
| 3 | Fomentar el interés por conocer las aplicaciones del teorema de Tales para solucionar situaciones reales. |

*Nota*. EA = expectativa afectiva

Con la expectativa afectiva 1, esperamos que los estudiantes puedan identificar datos relevantes en los enunciados o situaciones reales, y posteriormente, usen estos datos para modelar el problema mediante un sistema de representación. Respecto a la expectativa afectiva 2, pretendemos que los estudiantes identifiquen los pares de segmentos que pueden ser correspondientes o adyacentes entre sí. De este modo, los estudiantes no tendrán dificultades para plantear una proporción que relacione los segmentos. En cuanto a la expectativa afectiva 3, la finalidad es despertar la curiosidad de los estudiantes por conocer otras aplicaciones del teorema de Tales a partir de la solución de situaciones del contexto cercano.

## 4. Limitaciones de aprendizaje

En este apartado, describimos las limitaciones de aprendizaje que identificamos para el teorema de Tales. En primer lugar, establecemos la diferencia entre una dificultad y error, la primera entendida como una circunstancia que impide o entorpece los objetivos de aprendizaje y el error como expresión observable de una dificultad.

En segundo lugar, presentamos cuatro categorías de dificultades que agrupan los errores en que incurren los estudiantes al desarrollar una tarea del tema: (a) confusión en el concepto de puntos y segmentos; (b) dificultad para extraer información de los enunciados y crear representaciones; (c) confusión en la interpretación y planteamiento correcto de las proporciones y (d) dificultad en el proceso algebraico para resolver problemas. En la tabla 4, mostramos el listado de dificultades y algunos de los errores más relevantes. En el anexo 1, presentamos el listado completo de los errores contemplados en la unidad didáctica.

La primera columna de la tabla corresponde a la nomenclatura asignada a cada error y la segunda columna a la descripción de cada error. Además, se pueden identificar los errores en cada una de las cuatro dificultades definidas para el teorema de Tales.

Tabla 4
*Listado de dificultades y errores para el tema teorema de Tales*

| E | Descripción |
|---|---|
| | D1. Confusión en el concepto de puntos y segmentos |
| 1 | Relacionar puntos no correspondientes entre las rectas transversales cortadas por rectas paralelas |
| 2 | Relacionar un segmento de recta con otro segmento no correspondiente ni adyacente |
| | D2. Dificultad para extraer información de los enunciados y crear representaciones |
| 10 | Realizar una representación geométrica en la cual no se evidencia la intersección de rectas paralelas y rectas transversales |
| 11 | Hallar la constante de proporcionalidad con el cociente entre las medidas de dos segmentos no correspondientes ni adyacentes entre sí |

Tabla 4
*Listado de dificultades y errores para el tema teorema de Tales*

| E | Descripción |
|---|---|
| 35 | En la toma de medidas la ubicación del estudiante no cumple las condiciones establecidas |
| | D3. Confusión en la interpretación y planteamiento correcto de las proporciones |
| 19 | Plantear proporciones entre las razones formadas por segmentos de recta no correspondientes |
| 34 | Colocar la constante de proporcionalidad como la medida de un segmento de recta |
| 22 | Plantear proporciones entre las razones formadas por segmentos de recta no adyacentes |
| | D4. Dificultad en el proceso algebraico para resolver problemas |
| 32 | Reemplazar la incógnita encontrada en una expresión algebraica que no corresponde al segmento solicitado |
| 12 | Colocar el valor de la constante de proporcionalidad como el valor de la incógnita |
| 37 | Confundir el resultado de los productos cruzados con la constante de proporcionalidad |

*Nota*. E: error, D: dificultad.

## 5. Criterios de logro de los objetivos de aprendizaje

En este apartado, exponemos algunas de las estrategias que los estudiantes pueden emplear para abordar las tareas de aprendizaje propuestas. Reconocemos la diversidad de procedimientos para solucionar un problema por lo que definimos como criterios de logro a cada procedimiento que los estudiantes emplean al enfrentar las tareas de aprendizaje de cada objetivo. Asimismo, hemos agrupado estos criterios en secuencias denominadas caminos de aprendizaje, que representan una posible solución. En la tabla 5, presentamos los criterios de logro más relevantes para cada objetivo de aprendizaje debido a su influencia respecto a la formulación de proporciones y el empleo de procedimientos que determinan la solución a las tareas. En el anexo 2, presentamos el listado completo de criterios de logro de la unidad didáctica.

Tabla 5
*Descripción de los criterios de logro*

| CdL | Descripción |
|---|---|
| | Objetivo 1 |
| CdL1.7 | Plantear razones y proporciones entre las medidas de segmentos de recta correspondientes |
| CdL1.8 | Elegir una operación para solucionar una proporción |

Tabla 5
*Descripción de los criterios de logro*

| CdL | Descripción |
|---|---|
| CdL1.9 | Utilizar la propiedad uniforme $a = b \rightarrow a \pm c = b \pm c$; $a \div c = b \div c$; $a \cdot c = b \cdot c$ |
| CdL1.10 | Utilizar los productos cruzados en una proporción |
| CdL1.14 | Hallar la constante de proporcionalidad |
| CdL1.15 | Hallar la medida de un segmento mediante de la constante de proporcionalidad |
| | Objetivo 2 |
| CdL2.2 | Elegir una forma para resumir la información dada en el enunciado |
| CdL2.5 | Plantear razones y proporciones entre segmentos de recta correspondientes |
| CdL2.6 | Elegir el procedimiento para verificar el paralelismo |
| CdL2.7 | Encontrar la constante de proporcionalidad |
| CdL2.8 | Utilizar los productos cruzados en una proporción |
| CdL2.9 | Determinar si las rectas involucradas en la situación son paralelas |

Nota. CdL: criterio de logro

En los siguientes apartados, presentamos el grafo del objetivo 1, que caracteriza tareas de aprendizaje en las cuales se debe calcular distancias desconocidas con el teorema de Tales. En segundo lugar, presentamos el grafo del objetivo 2, que evoca el uso del recíproco teorema de Tales para comprobar el paralelismo entre rectas.

## 6. Grafo de criterios de logro del objetivo 1

En la figura 7, presentamos el grafo de criterios de logro para el objetivo 1, que se centra en el cálculo de distancias mediante el teorema de Tales. Los estudiantes tienen la opción de abordar una situación al identificar y representar segmentos, mediante los sistemas de representación simbólico, tabular o geométrico. Luego, los estudiantes plantean razones y proporciones, aplican la propiedad uniforme o la propiedad de las proporciones, y finalmente determinan el valor necesario en la situación. Alternativamente, los estudiantes pueden abordar la solución con otros procedimientos que también llevan inmersa la constante de proporcionalidad.

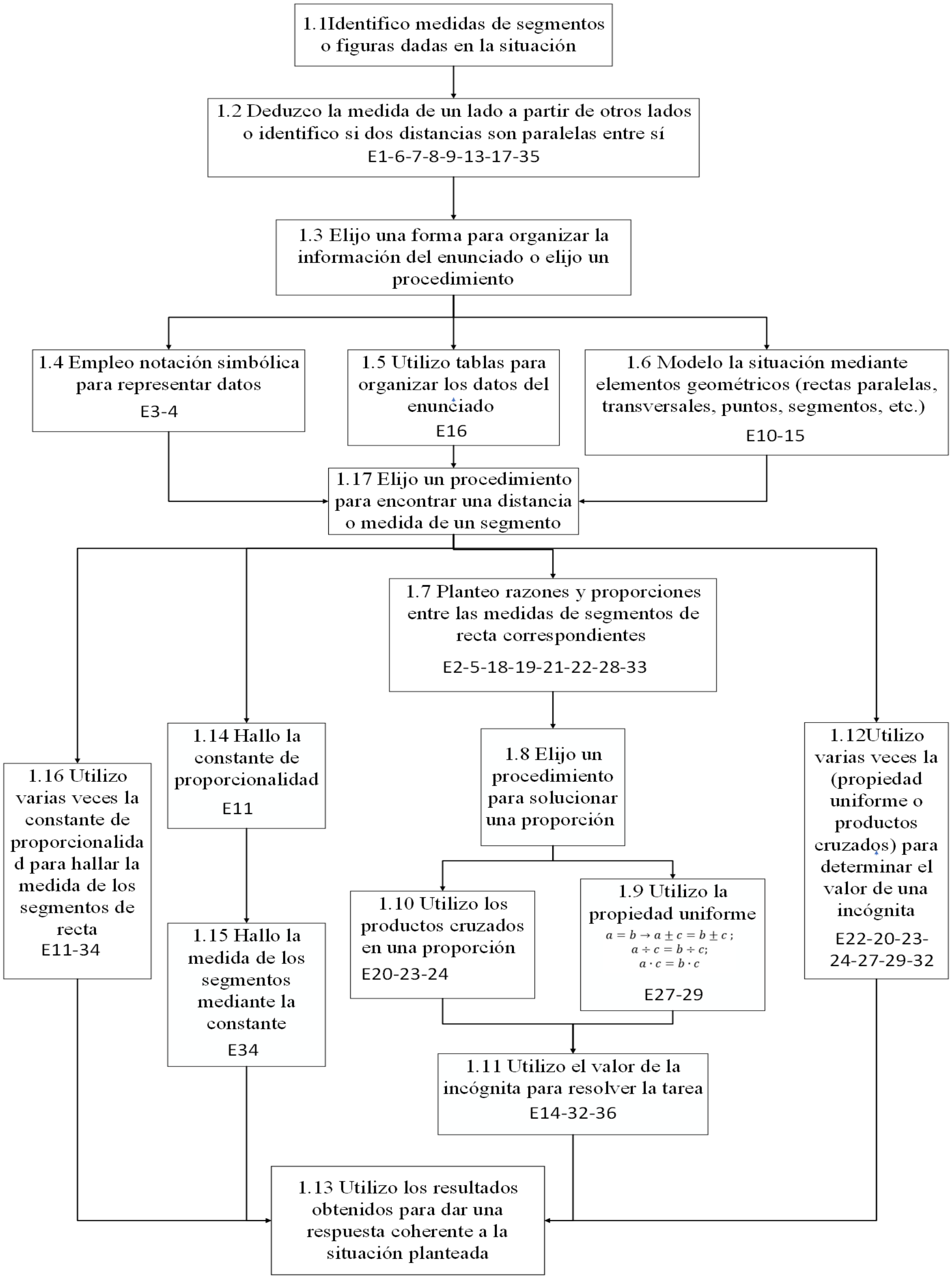



*Figura 7.* Grafo criterios de logro del objetivo 1

## 7. Grafo de criterios de logro del objetivo 2

En la figura 8, presentamos el grafo de criterios de logro correspondiente al objetivo 2, que se enfoca en la verificación del paralelismo entre rectas. Para las tareas de aprendizaje relacionadas con este objetivo, los estudiantes tienen la opción de utilizar diferentes sistemas de representación. Luego, los estudiantes deben formar razones y proporciones para comprobar la proporcionalidad entre segmentos, ya sea al utilizar las propiedades de las proporciones o al encontrar la constante de proporcionalidad. Finalmente, los estudiantes verifican si se cumple el recíproco del teorema de Tales.

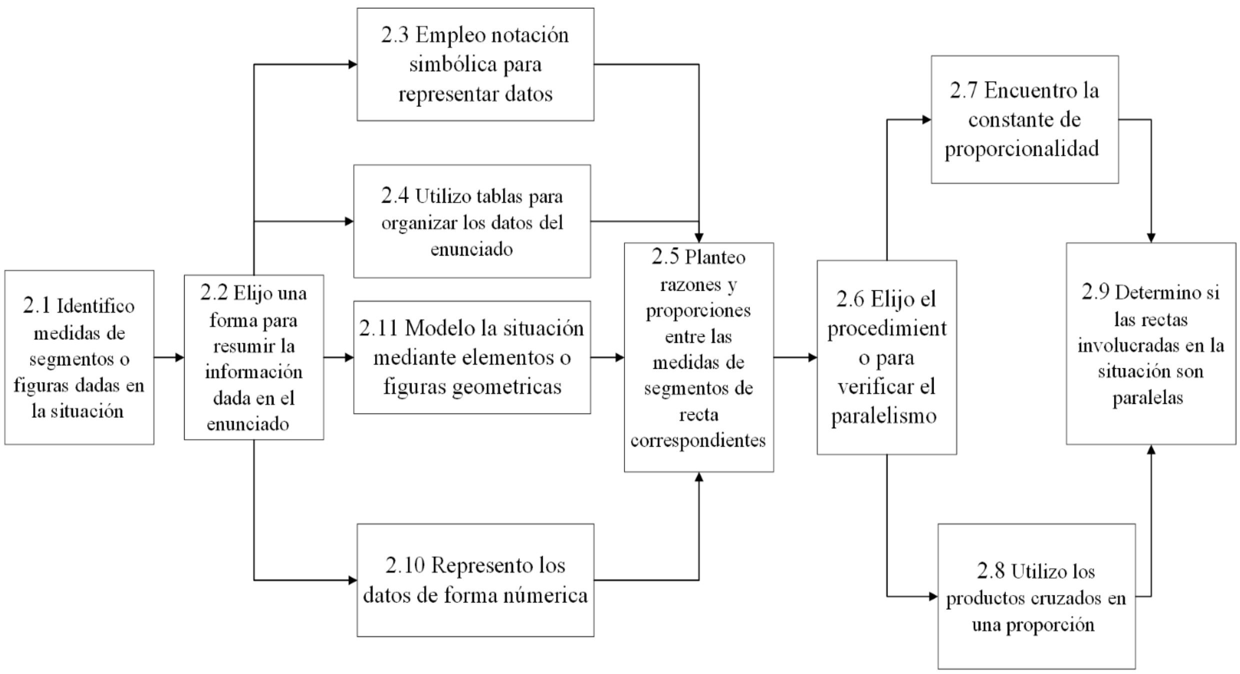



*Figura 8.* Grafo de criterios de logro del objetivo 2

# Esquema general de la unidad didáctica

En este apartado, presentamos el esquema general de la unidad didáctica pensada para 11 sesiones de clase. En la tabla 6, presentamos cada una de las actividades a desarrollar, el número de sesión y el tiempo sugerido para su desarrollo.

Tabla 6
*Temporalización global de sesiones unidad didáctica Teorema de Tales*

| Nº sesión | Actividad | Tiempo aproximado (minutos) |
|---|---|---|
| 1 | Presentación del tema teorema de Tales. Objetivos, metodología y sistema de evaluación. | 50 |

Tabla 6

*Temporalización global de sesiones unidad didáctica Teorema de Tales*

| | | |
|---|---|---|
| 2 | Presentación e implementación de la tarea diagnóstica. | 50 |
| 3 | Retroalimentación de la tarea diagnóstica. | 40 |
| 4 | Recordar el primer objetivo, implementar la tarea 1.1 El barandal y presentar criterios de logro del objetivo 1. | 60 |
| 5 | Recordar el primer objetivo, implementar la tarea 1.2 Canchas de baloncesto y presentar criterios de logro del objetivo 1. | 60 |
| 6 | Recordar el segundo objetivo, implementar la tarea 2.1 Cuerdas y presentar criterios de logro del objetivo 2. | 60 |
| 7 | Recordar el segundo objetivo, implementar la tarea 2.2 Los cables y presentar los criterios de logro del objetivo 2. | 60 |
| 8 | Retroalimentación sobre lo aprendido en las tareas de aprendizaje como preparación para el examen final. | 50 |
| 9 | Examen final. | 60 |
| 10 | Retroalimentación del examen final. | 50 |
| 11 | Cierre de la unidad didáctica. | 50 |

Con la primera sesión, nuestro objetivo es introducir a los estudiantes a los objetivos de la unidad didáctica, la metodología utilizada para completar los diarios del estudiante y el sistema de evaluación. En las sesiones 2 y 3, nos enfocaremos en la presentación, implementación y retroalimentación de la prueba diagnóstica. Es crucial retroalimentar los conocimientos previos que puedan influir en el desarrollo efectivo de las tareas de aprendizaje para cada objetivo. Las sesiones 4 y 5 están reservadas para el desarrollo de las tareas de aprendizaje 1.1 El barandal y 1.2 Canchas de baloncesto respectivamente. En estas sesiones, también se presentarán los criterios de logro para cada objetivo y se dedicará tiempo para completar los diarios del estudiante. Del mismo modo, las sesiones 6 y 7 se enfocarán en el desarrollo de las tareas de aprendizaje 2.1 Cuerdas y 2.2 Los cables. La sesión 8 se dedica a proporcionar retroalimentación a los estudiantes sobre las cuatro tareas de aprendizaje, como preparación para el examen final. Las sesiones 9 y 10 serán para la implementación y retroalimentación del examen final, respectivamente. Finalmente, la sesión 11 se propone como el cierre de la unidad didáctica, en la que se informará a los estudiantes sobre su desempeño en las actividades, se explorarán las percepciones relacionadas con los procesos y la metodología de calificación, y se concluirá sobre el logro de las expectativas cognitivas y afectivas.

# TAREAS DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

En este apartado, presentamos la tarea diagnóstica, las tareas de aprendizaje y el examen final diseñados para nuestra unidad didáctica. En primer lugar, para la tarea diagnóstica, indicamos el listado de conocimientos previos y la descripción de los ítems que la conforman. En segundo lugar, describimos detalladamente las tareas de aprendizaje, identificamos los errores asociados a cada criterio de logro, compartimos nuestra actuación como profesores y ofrecemos sugerencias metodológicas. Por último, en el examen final, proporcionamos información para verificar el cumplimiento de la meta de cada tarea.

## TAREA DIAGNÓSTICA

Con la tarea diagnóstica pretendemos verificar si los estudiantes tienen los conocimientos previos para abordar el tema de nuestra unidad didáctica. Algunos de los conocimientos previos que identificamos para el tema están relacionados con aspectos numéricos y geométrico-métricos. En la tabla 1, presentamos el listado de conocimientos previos.

Tabla 1
*Listado de conocimientos previos del tema teorema de Tales*

| CP | Descripción |
|---|---|
| 2 | Utilizar notación simbólica para nombrar puntos, segmentos y rectas |
| 3 | Formar razones y proporciones |
| 4 | Identificar el antecedente y el consecuente en la razón |
| 5 | Realizar conversiones de unidades de longitud |
| 6 | Identificar los medios y extremos en una proporción |
| 7 | Reconocer el concepto de magnitud como una cantidad medible |
| 10 | Modelar la expresión matemática que permita calcular una incógnita |
| 11 | Utilizar la regla de tres simple directa |
| 12 | Resolver operaciones con números decimales |
| 16 | Interpretar la información de un problema que se presenta en un gráfico |
| 17 | Plantear la información de un problema por medio de un gráfico |

Tabla 1

*Listado de conocimientos previos del tema teorema de Tales*

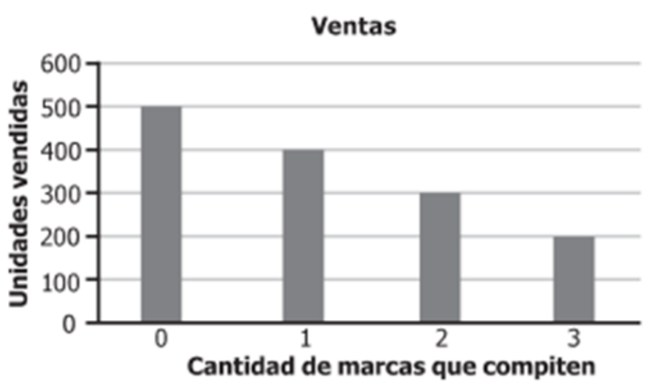
| CP | Descripción |
|---|---|
| 18 | Resolver ecuaciones multiplicativas |
| 19 | Simplificar fracciones |
| 20 | Multiplicar expresiones algebraicas |
| 21 | Sumar y restar términos semejantes en una expresión algebraica |
| 22 | Usar la propiedad uniforme para resolver ecuaciones |

*Nota*. CP: conocimientos previos.

Los conocimientos previos que presentamos en la tabla 1 son esenciales para diseñar una tarea diagnóstica relacionada con el teorema de Tales. En consecuencia, nos enfocamos en aspectos como el uso correcto de símbolos matemáticos, la aplicación de razones y proporciones en contextos geométricos, así como la resolución de ecuaciones, la regla de tres directa y operaciones con expresiones algebraicas. A continuación, presentamos la tarea diagnóstica.

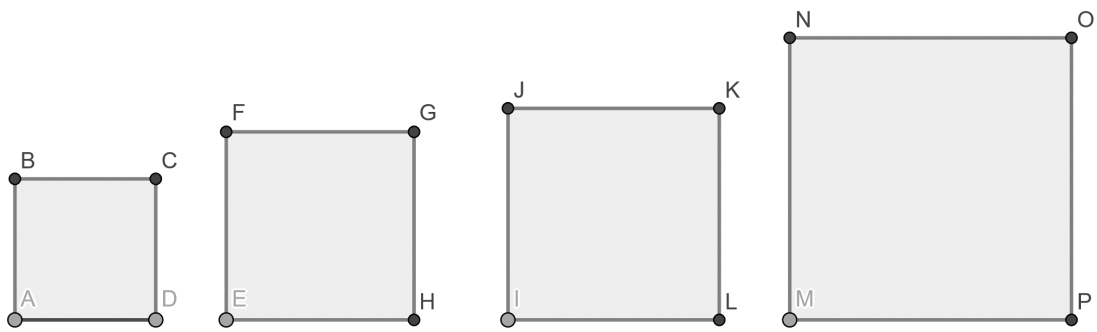
## 1. Tarea diagnóstica

1. Un estudio de mercado revela el número de unidades vendidas de un producto de una marca determinada. La figura presenta los resultados de dicho estudio correspondientes a la venta de este producto durante un mes. En ella, se muestra la cantidad de unidades vendidas para la marca cuando no tiene competencia (representada con el valor 0 en el eje horizontal de la gráfica) y las unidades vendidas cuando hay presencia de una o más marcas competidoras (indicadas con los valores 1, 2 y 3 en el mismo eje horizontal de la gráfica).




Suponiendo un comportamiento similar para una tienda que vende 1250 unidades del producto cuando este no tiene competencia, ¿cuántas unidades se venderán aproximadamente de este producto en un mes, si compite contra 3 marcas?

2. Diego diseñó unas pinturas como las de la imagen para exhibir en su galería y formuló las siguientes ecuaciones para calcular las medidas de los lados de cada pintura: $\frac{3}{4}(mEF) = (\mathrm{m}AB)$; $(mIJ) = \frac{3}{2}(mAB)$; $\frac{1}{2}(mMN) = (\mathrm{m}AB)$




Si $AB = 0{,}18\ m$, complete la siguiente tabla, y compruebe y explique si existe proporcionalidad entre la longitud del lado y el perímetro.

| Longitud del lado(cm) | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Perímetro (cm) | | | | |

3. Se desea construir una bodega cuyas dimensiones del largo y ancho estén a razón de 3 a 2. Si el ancho de la bodega debe ser $49\ m$, encuentre la medida del largo.

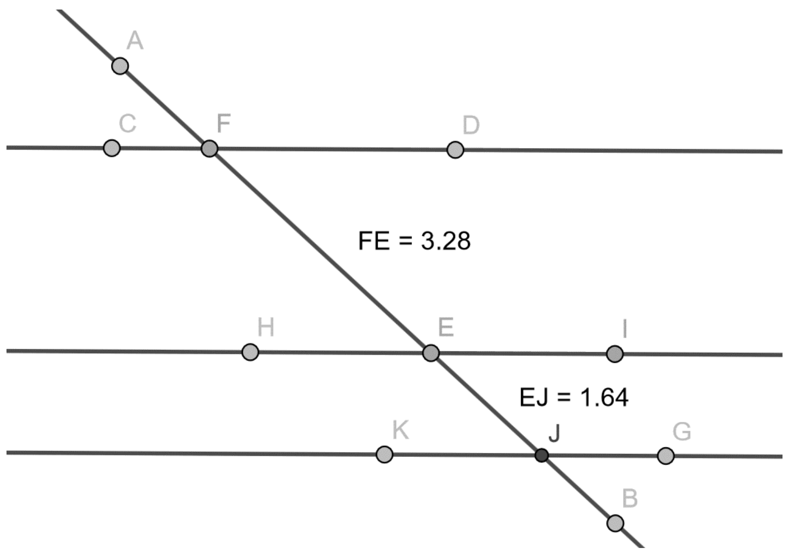
4. Dibuje un objeto rectangular de base $PQ = 3x + 2$ y altura $PR = 5$. Luego, encuentre las expresiones algebraicas que representen el perímetro y área. Finalmente, determine la medida de la base si se sabe que el área es $130\ m^2$.

5. Para el arreglo geométrico que aparece en la imagen de abajo, determine lo siguiente:

a) ¿Qué rectas son paralelas entre sí?

b) De las cuatro rectas, ¿cuál es una transversal?

c) ¿Cuál es el cociente entre los segmentos adyacentes en la transversal?




La tarea diagnóstica consta de cinco ítems diseñados para identificar debilidades o fortalezas relacionadas con el dominio de conceptos o procedimientos requeridos para abordar las tareas de aprendizaje.

Con el primer ítem, pretendemos verificar si los estudiantes interpretan la información presentada en el gráfico y si logran establecer relaciones de proporcionalidad entre los datos. Además, se requiere que domine procedimientos relacionados con la regla de tres simple directa y la solución de ecuaciones multiplicativas. Algunos de los errores tienen lugar cuando los estudiantes no logran utilizar adecuadamente la información del gráfico para plantear proporciones y cuando, al emplear la regla de tres simple directa, multiplican antecedentes y consecuentes.

Con el segundo ítem, esperamos que los estudiantes logren realizar conversiones de unidades para luego organizar los datos en una tabla que relaciona la medida del lado de un cuadrado con su perímetro. Posteriormente, los estudiantes deben analizar los datos y encontrar la constante de proporcionalidad o deducir la igualdad del producto cruzado en las proporciones que se pueden formular a partir de la tabla. Algunos errores en que pueden incurrir los estudiantes son la confusión entre las unidades de medida y los respectivos procedimientos para las conversiones. Proponemos ayudas como tener a disposición una tabla con las equivalencias de los submúltiplos del metro.

En el tercer ítem, se espera que los estudiantes planteen una proporción entre la razón del largo y ancho y la razón que se forma con la medida del lado desconocido (largo) y la medida del lado conocido (ancho). Los estudiantes pueden emplean el producto cruzado y resolver una ecuación multiplicativa, para calcular la medida del largo de la bodega. Uno de los errores relacionados es asignar la medida del ancho al largo y viceversa. Por lo tanto, sugerimos a los estudiantes realizar una representación pictórica con las medidas proporcionadas en el enunciado.

Formulamos el cuarto ítem con la intención de que los estudiantes utilicen sus conocimientos algebraicos. Para ello, involucramos el uso de la propiedad distributiva, términos semejantes y el reemplazo de incógnitas por su valor numérico. Los errores que esperamos, en este caso, son el uso incompleto de la propiedad distributiva y la suma de términos que no son semejantes entre sí.

Proponemos enunciar las siguientes preguntas como ayuda para superar los errores: ¿cuántos términos resultan de multiplicar un monomio por un binomio? y ¿cómo se reconocen los términos semejantes: por tener el mismo coeficiente o por tener la misma parte literal?

Con el quinto ítem, pretendemos indagar el dominio de los conceptos de rectas paralelas, rectas transversales y segmentos adyacentes. De manera similar al primer ítem, buscamos que los estudiantes utilicen la notación simbólica para representar elementos geométricos como rectas y segmentos. Además, proponemos que realicen el cociente entre las medidas de los segmentos, para verificar el uso del algoritmo de la división de números decimales, para su eventual uso en las tareas de aprendizaje.

## Tareas de aprendizaje

A continuación, presentamos las tareas de aprendizaje diseñadas para los dos objetivos de nuestra unidad didáctica. En la primera tarea, los estudiantes identifican las rectas paralelas y transversales en una imagen del contexto. Luego, los estudiantes usan el teorema de Tales para calcular una medida desconocida. En la segunda tarea, los estudiantes tienen el reto de calcular una distancia inaccesible dentro del contexto escolar al aplicar los fundamentos que definen el teorema de Tales. En la tercera tarea, los estudiantes utilizan el recíproco del teorema de Tales para verificar el paralelismo entre rectas intersecadas por dos rectas transversales. Por último, en la cuarta tarea los estudiantes determinan el uso adecuado del recíproco del teorema de Tales cuando las rectas transversales se intersecan entre sí.

### 1. Tarea 1.1 El barandal

Con esta tarea de aprendizaje, buscamos que los estudiantes calculen una distancia desconocida mediante el uso del teorema de Tales. Para ello, los estudiantes deben identificar, en el dibujo de la formulación de la tarea, las rectas paralelas y las transversales a ellas.

*Requisitos*

Para el desarrollo de la tarea 1.1 El barandal, es necesario que los estudiantes conozcan las características de las rectas paralelas y las rectas transversales. Además, es importante que identifiquen los segmentos adyacentes o correspondientes en una situación de intersección entre paralelas y transversales.

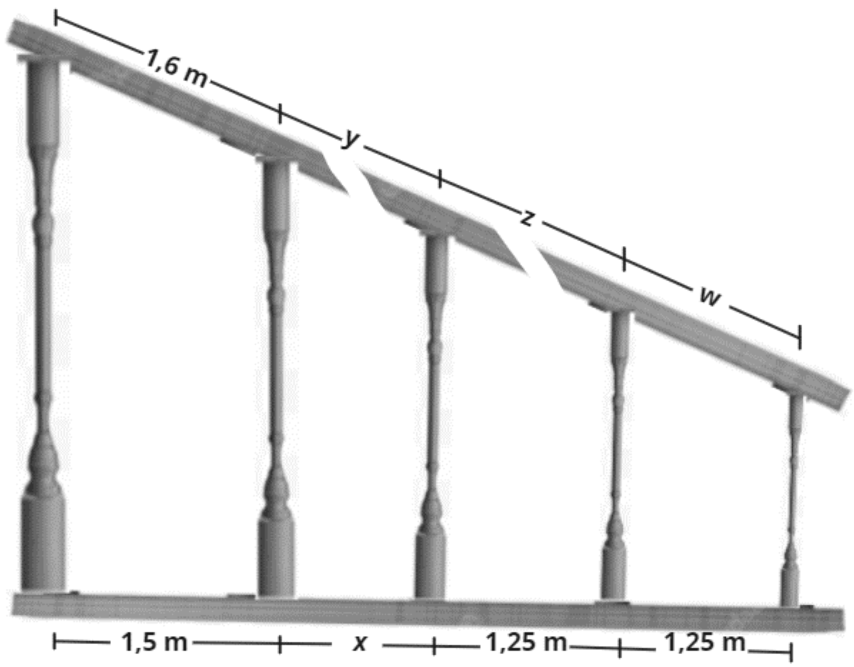
*Aportes de la tarea al objetivo de aprendizaje*

Con la tarea 1.1 El barandal, buscamos que los estudiantes identifiquen, como rectas paralelas, a los barandales verticales que se observan en el dibujo de la tarea y, como rectas transversales, al barandal horizontal y el barandal que se debe reemplazar por sus daños. Luego, esperamos que los estudiantes logren determinar cómo usar el teorema de Tales para calcular la medida del barandal que se encuentra deteriorado.

*Formulación*

El profesor hace entrega de una hoja a cada pareja de estudiantes con la tarea 1.1 El barandal, que incluye un dibujo que permite dar una idea sobre la situación planteada. A continuación, presentamos la formulación de la tarea.

> En el Instituto Caldas, se dañó uno de los barandales de las escaleras, como se muestra en la figura. Carlos, el señor de mantenimiento, registró algunas medidas antes de extraviar el metro y necesita calcular la medida total del barandal que debe ser reemplazado. Se conoce que el barandal horizontal inferior mide 5 $m$. Halle la medida del barandal que se dañó y explique cómo el teorema de Tales contribuyó a encontrar esta medida.




*Conceptos y procedimientos*

Los conceptos y procedimientos que se abordan con esta tarea están relacionados con los elementos geométricos rectas paralelas, rectas transversales y segmentos. En primer lugar, los estudiantes deben extraer las medidas conocidas e identificar las incógnitas que se requieren encontrar para calcular la medida total del barandal deteriorado. Por otro lado, los procedimientos asociados son el planteamiento de razones y proporciones y la regla de tres simple directa.

*Sistemas de representación*

En la tarea de aprendizaje, se espera utilizar los sistemas de representación simbólico, numérico, geométrico y tabular. Los sistemas de representación simbólico y numérico están relacionados, ya que los estudiantes pueden nombrar rectas y segmentos mediante la notación simbólica y luego realizar la traducción al sistema numérico. Los estudiantes también pueden optar por omitir la notación simbólica y solo utilizar el sistema numérico. Respecto al sistema geométrico, los estudiantes, a partir del dibujo de la tarea, representan la situación con la intersección de las rectas paralelas y transversales identificadas. Finalmente, consideramos que el sistema de representación tabular les facilita a los estudiantes organizar la información correspondiente a las medidas de segmentos.

*Materiales y recursos*
La implementación de la tarea de aprendizaje incluye una hoja con la formulación de la tarea, lápiz y borrador. Se sugiere que los estudiantes dispongan de regla en el caso que se inclinen por representar la situación geométricamente. No se requiere el uso de calculadora.

*Agrupamiento e interacciones*
En un primer momento, el profesor organiza los estudiantes en parejas. Luego, esperamos que los estudiantes debatan sus ideas y elijan la solución apropiada. Posteriormente, se comparten las respuestas con el gran grupo para identificar errores y fortalezas en las estrategias de solución.

*Temporalidad*
Al iniciar la sesión, el profesor recuerda el primer objetivo, la meta de la tarea y organiza las parejas (diez minutos). Luego, se realiza una lectura general y se precisan los datos de la imagen de la tarea (cinco minutos). Después, cada pareja dispone de un tiempo para leer, interpretar, debatir y plantear la solución (25 minutos). El profesor lidera la retroalimentación de las estrategias y procedimientos empleados para solucionar la tarea (diez minutos). Finalmente, se permite al estudiante compartir su perspectiva sobre el logro de la meta de la tarea y su nivel de motivación durante su desarrollo (diez minutos).

*Errores*
En el desarrollo de la tarea T1.1 El barandal, los estudiantes pueden incurrir en algunos errores. Por ejemplo, cuando los estudiantes confunden rectas paralelas con rectas transversales (E7), ubican la incógnita en un segmento no solicitado en el problema (E17) y plantean proporciones entre las razones formadas por segmentos no adyacentes (E22), entre otros. En el anexo 3, presentamos una tabla de ayudas para cada error asociado a los criterios de logro que determinan la solución de esta tarea.

*Grafos de criterios de logro*
En el grafo de criterios de logro del objetivo 1, se indican los pasos y procedimientos que pueden desarrollar los estudiantes para resolver la tarea 1.1 El barandal. En la figura 9, presentamos el grafo de criterios de logro para esta tarea de aprendizaje.

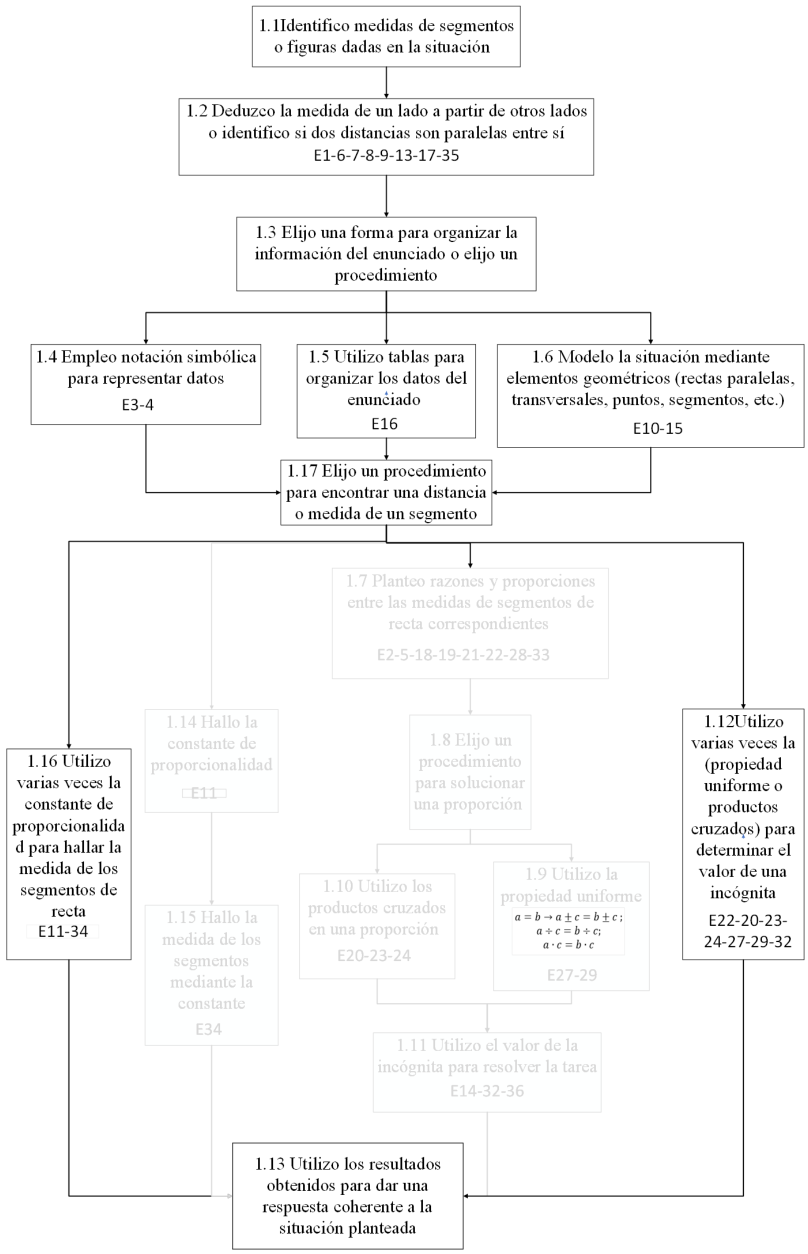



*Figura 9.* Grafo de criterios de logro de la tarea 1.1

En la figura 9, observamos que, para la tarea 1.1 El barandal, los estudiantes deben identificar las medidas conocidas y desconocidas a partir de la imagen del enunciado. Luego, los estudiantes eligen el sistema de representación para organizar la información. Después, optan por resolver la tarea mediante los procedimientos contemplados: el primero, asociado al cálculo de la constante de proporcionalidad y, el segundo, con los productos cruzados en una proporción. Por último, utilizan los resultados obtenidos para dar respuesta coherente a la situación planteada.

*Actuación del profesor*
En esta tarea de aprendizaje, el profesor debe recordar el objetivo y presentar la meta de la tarea en relación con los conceptos y procedimientos. Además, realiza precisiones en la formulación de la tarea y los datos de la imagen, ya que en esta tarea los estudiantes deben calcular la medida de un segmento que no se da directamente en el enunciado. A la vez que los estudiantes resuelven la tarea, el profesor interactúa con ellos para identificar los errores frecuentes y brindar la ayuda respectiva.

*Sugerencias metodológicas y aclaraciones*
Para esta tarea de aprendizaje, es probable que los estudiantes concluyan que no se puede resolver dado que no disponen de la medida de uno de los segmentos. Por lo tanto, el profesor debe brindar la ayuda respectiva y sugerir a los estudiantes que para ese cálculo no es necesario utilizar el teorema de Tales sino optar por las operaciones básicas. Es importante que el profesor esté al tanto que la tarea tiene diferentes procedimientos de solución y esté abierto a escuchar las conclusiones de los estudiantes. Recomendamos al profesor disponer de una hoja con las ayudas relacionadas a cada error.

*Evaluación*
Proponemos que el grafo de criterios de logro sea el instrumento de evaluación del profesor al momento de evaluar la tarea 1.1 El barandal. Para ello, el profesor debe identificar en un primer momento el nivel de dificultad durante la interpretación, representación y uso de los datos del enunciado. En este caso, la tarea sugiere identificar rectas paralelas y transversales, y ubicar datos del enunciado en la imagen de la tarea e identificar incógnitas. Luego, el profesor debe analizar el nivel de convicción de los estudiantes al elegir un sistema de representación. Después, el profesor debe evaluar la capacidad de superar errores al momento de elegir un procedimiento matemático (por ejemplo, el cálculo de la constante de proporcionalidad o el uso de los productos cruzados).

**2. Tarea 1.2 Canchas de baloncesto**
Con esta tarea de aprendizaje, queremos que los estudiantes conozcan las aplicaciones del teorema de Tales al solucionar situaciones de la vida cotidiana: por ejemplo, calcular la altura de la canasta de una cancha de baloncesto. La meta de esta tarea de aprendizaje es que los estudiantes identifiquen los triángulos en posición de Tales y utilicen el sistema de representación geométrico para representar la situación planteada.

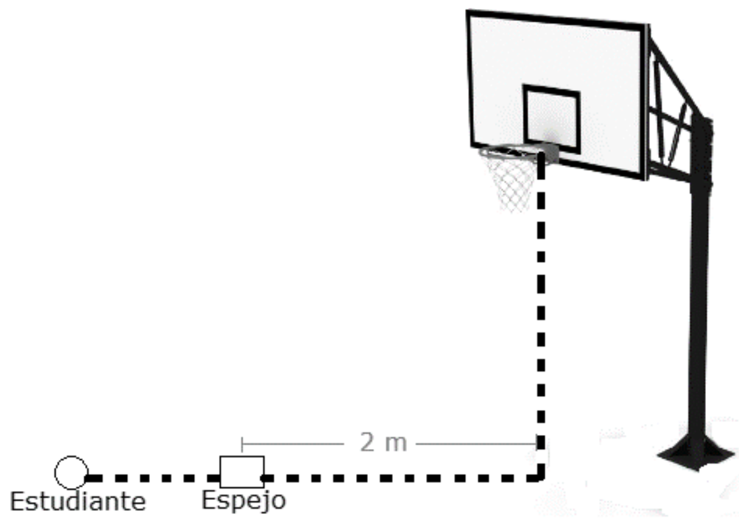
*Requisitos*
Para desarrollar esta tarea de aprendizaje, los estudiantes deben tener clara la definición de triángulos semejantes y segmentos correspondientes, formar razones y proporciones y realizar procedimientos como la regla de tres directa, conversiones de unidades y ecuaciones lineales con coeficientes racionales.

*Aportes de la tarea al objetivo de aprendizaje*
Con esta tarea de aprendizaje, buscamos que los estudiantes identifiquen situaciones reales que involucren el teorema de Tales. Es decir, que los estudiantes comprendan cómo se puede calcular

una distancia luego de plantear proporciones entre las medidas de los segmentos que se forman al trazar una paralela a uno de los lados de un triángulo.

*Formulación*
El profesor entrega una hoja con la formulación de la tarea a cada grupo de estudiantes. A continuación, presentamos la formulación de la tarea 1.2 Canchas de baloncesto.

> Se entrega a cada grupo una hoja con la siguiente información.
>
> Ubicar el espejo como se indica en la figura. Luego, uno de los integrantes debe alejarse del espejo, hasta ver el reflejo de la canasta. Después, con el metro, los estudiantes deben medir las distancias necesarias para calcular la altura de la canasta. Para finalizar, los estudiantes escriben la altura de la canasta de baloncesto y un argumento que verifique la coherencia de la respuesta con la situación.




*Conceptos y procedimientos*
El desarrollo de esta tarea requiere comprensión de conceptos como las propiedades de las proporciones y la propiedad uniforme. Esta tarea también involucra procedimientos para encontrar la constante de proporcionalidad y su uso para hallar medidas de segmentos.

*Sistemas de representación*
El desarrollo de esta tarea implica el sistema de representación geométrico, involucrado en la construcción de los dos triángulos creados a partir del tablero de la cancha, el espejo y la ubicación del estudiante. El sistema de representación simbólico está involucrado en la escritura de las razones y proporciones a partir de la notación correcta de los segmentos. El sistema de representación tabular está presente cuando los estudiantes usan una tabla para organizar las medidas de los segmentos correspondientes.

*Materiales y recursos*

Los materiales y recursos para el desarrollo de esta tarea son la hoja con el enunciado de la situación, y el espejo que se ubica en el piso frente al tablero de la cancha. Con la ayuda del metro, los estudiantes pueden tomar las medidas de la altura del estudiante, su ubicación con referencia al espejo y los dos metros que debe haber del tablero de la cancha al espejo sobre el piso. Con ayuda del lápiz, borrador y taja lápiz, los estudiantes toman sus apuntes y desarrollan los procedimientos necesarios para la solución de la situación.

*Agrupamiento e interacciones*

Para el desarrollo de esta tarea de aprendizaje, el profesor organiza los estudiantes en grupos de cuatro integrantes. El primer estudiante es el encargado de ubicarse frente al espejo hasta observar el reflejo de la canasta en la cancha de baloncesto. Otros dos estudiantes se encargan de medir las distancias requeridas con ayuda del metro y el cuarto estudiante realiza el registro de datos en la hoja de trabajo.

La interacción se presenta primero entre estudiantes, de modo que recolectan y organizan la información necesaria e implementan estrategias de solución. Luego, el profesor ofrece las ayudas correspondientes a las dificultades presentadas. Por último, los estudiantes comparten los diferentes procedimientos empleados para solucionar la tarea y el profesor realiza la retroalimentación.

*Temporalidad*

La tarea 1.2 Canchas de baloncesto está diseñada para ser desarrollada en 60 minutos. Primero se realiza la presentación de la tarea (cinco minutos). Después, se organizan los grupos de estudiantes, alistan los materiales y recursos necesarios, y se desplazan hacia las canchas (diez minutos). Luego, se inicia con el desarrollo de la tarea (25 minutos) y se retorna al salón de clases para finalizar con la retroalimentación de la actividad (20 minutos).

*Errores*

Para esta tarea, los estudiantes pueden incurrir en errores que obstaculizan el desarrollo de la tarea. Diseñamos ayudas para que los estudiantes sigan con la solución de la situación. Uno de los errores en que los estudiantes pueden incurrir es asignar medidas a segmentos sin convertir a una misma unidad de longitud (E8). Por ejemplo, los estudiantes pueden usar medidas en centímetros y otras en metros. También, los estudiantes pueden incurrir en el error de ubicar la medida de un segmento en otro segmento o diseñar una representación geométrica que no corresponda a la situación. Además, al usar las tablas para ordenar los datos, los estudiantes pueden incurrir en el error de ubicar las medidas de los segmentos formados en las transversales sin tener en cuenta si son correspondientes o adyacentes entre sí. El listado completo de errores está en el anexo 1.

Algunas de las ayudas diseñadas para superar los errores presentados en la tarea 1.2 Canchas de baloncesto son estas preguntas: ¿la distancia del espejo corresponde a la altura del estudiante?, ¿cuál es la distancia que separa al estudiante del espejo?, ¿qué distancia no se pudo medir con el metro? y ¿en qué posición quedó el estudiante respecto a la ubicación de la cancha? Presentamos el listado completo de las ayudas en el anexo 3.

*Grafos de criterios de logro*

En la figura 10, presentamos el grafo de criterios de logro en el cual se evidencian los caminos de solución que tienen los estudiantes para resolver la tarea 1.2 Canchas de baloncesto.

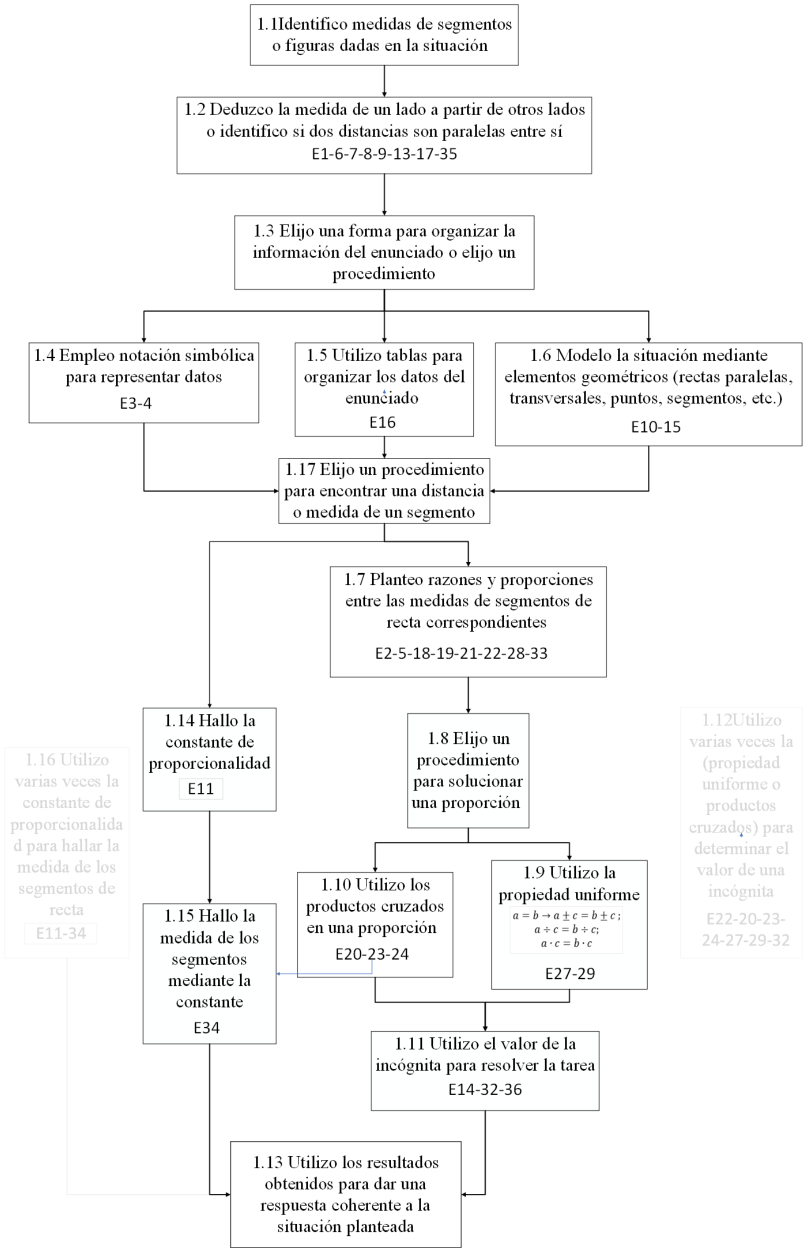



*Figura 10.* Grafo de criterios de logro de la tarea 1.2

La tarea 1.2 Canchas de baloncesto, tal como se muestra en el grafo, implica que los estudiantes comprendan y modelen la situación al utilizar la imagen proporcionada en el enunciado. Luego, los estudiantes utilizan el metro para tomar las medidas necesarias. Posteriormente, esperamos que los estudiantes elijan un sistema de representación adecuado para visualizar la situación. En función de ello, los estudiantes deciden entre plantear razones y proporciones o determinar la constante de proporcionalidad para calcular la altura de la canasta en la cancha de baloncesto. Si los estudiantes optan por plantear razones y proporciones, pueden aplicar propiedades como la uniforme o la de las proporciones. Alternativamente, pueden calcular la constante de proporcionalidad y utilizarla para determinar la altura de la canasta en la cancha. Finalmente, los estudiantes encuentran la respuesta de la tarea y realizan el análisis correspondiente.

*Actuación del profesor*
Para el desarrollo de esta tarea, el profesor primero debe encargarse de organizar los grupos de cuatro estudiantes y verificar que dispongan de los materiales solicitados antes de salir a la cancha. Una vez se encuentre en la cancha, el profesor debe estar pendiente de los grupos, corroborar que los estudiantes comprenden el enunciado e identifican la meta de la tarea. Luego, el profesor verifica la ubicación de los estudiantes para que se refleje la canasta de la cancha de baloncesto en el espejo ubicado en el suelo. Por último, el profesor realiza la retroalimentación de las observaciones y procedimientos de los estudiantes antes, durante y después de la tarea de aprendizaje.

*Sugerencias metodológicas y aclaraciones*
Es importante que el profesor esté pendiente de los procesos que realizan los estudiantes en cada grupo y que brinde acompañamiento oportuno si los estudiantes tienen dudas o incurren en un error. Por ello, recomendamos al profesor tener una hoja con las ayudas respectivas. También, se recomienda al profesor estar atento cuando los estudiantes ubiquen el espejo en el suelo para que se refleje la canasta de la cancha de baloncesto. Los estudiantes no suelen hacer seguimiento escrito de sus procedimientos u observaciones, dado que es una actividad fuera del aula. Por ello, proponemos que el profesor recuerde constantemente a los estudiantes tomar nota de cada idea o solución que propongan.

*Evaluación*
Para la evaluación de esta tarea, el profesor debe revisar las hojas que los estudiantes entregaron con la respectiva solución. El profesor se puede apoyar en el grafo de criterios de logro y comparar los procedimientos empleados por los estudiantes para calcular la altura de la canasta en la cancha de baloncesto. El profesor también revisa en cuántos errores incurrieron los estudiantes y si fueron o no superados con las ayudas dispuestas para estos. En la evaluación, el profesor también revisa el buen uso de los sistemas de representación, la formulación de proporciones entre las razones de segmentos adyacentes y correspondientes, y el uso correcto de las propiedades de las proporciones. A partir de los resultados, el profesor puede determinar si se cumplió con la meta de la tarea y verificar su aporte al primer objetivo de la unidad didáctica.

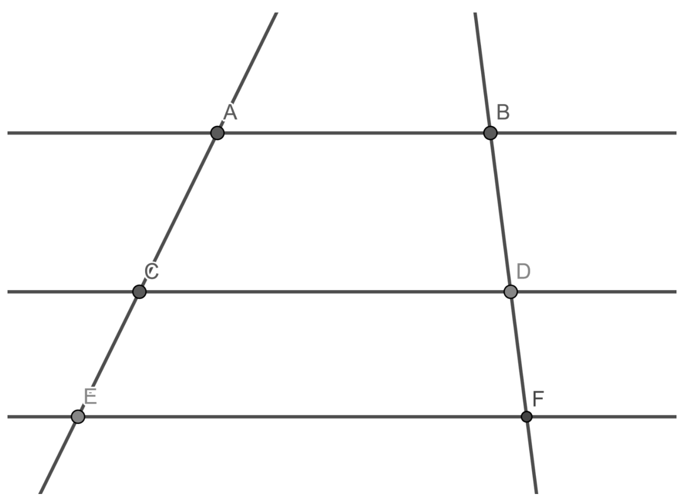
## 3. Tarea 2.1 Cuerdas

Con esta tarea de aprendizaje, pretendemos que los estudiantes verifiquen si dos o más rectas son paralelas entre sí. Para ello, los estudiantes emplean el recíproco del teorema de Tales. En primer lugar, deben modelar la representación geométrica proporcionada en la formulación de la tarea con las medidas indicadas. Luego, los estudiantes verifican si existe proporcionalidad entre los segmentos relacionados de forma adyacente o correspondiente.

*Requisitos*
Para el desarrollo de esta tarea, se requiere que los estudiantes reconozcan en las intersecciones de rectas los segmentos que son adyacentes o correspondientes entre sí. Además, es necesario que los estudiantes dominen los conceptos de antecedente y consecuente como los términos que conforman una razón. Por último, es importante que los estudiantes usen adecuadamente el metro como instrumento de medición.

*Aportes de la tarea al objetivo de aprendizaje*
Con la tarea 2.1 Cuerdas, pretendemos que los estudiantes comprendan la utilidad del recíproco del Teorema de Tales para verificar el paralelismo entre rectas. Los estudiantes deben identificar las intersecciones entre las cuerdas que se extienden en el suelo y lograr que las medidas de los segmentos concuerden con las indicadas en la formulación de la tarea. Luego, esperamos que los estudiantes planteen una igualdad entre dos razones (conformadas por las medidas de segmentos antecedentes o correspondientes), y comprueben la existencia de la proporcionalidad mediante la igualdad del producto de extremos y medios.

*Formulación*
El profesor entrega a cada grupo de estudiantes la hoja con la formulación de la tarea, en la que se proporciona la imagen que deben modelar en el suelo, una tabla con las medidas que debe tener cada segmento y cinco cuerdas.

> Con las cuerdas modelen en el suelo la siguiente imagen de manera que los segmentos $\overline{AC}$, $\overline{EC}$, $\overline{BD}$ y $\overline{FD}$ tengan las medidas solicitadas en la tabla adjunta.
>
> 
> 
>
> Para cada grupo de medidas, completen la información solicitada. ¿En qué casos las rectas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{EF}$ resultaron ser paralelas? Justifiquen su respuesta.

| Medidas de los segmentos | Planteamiento de proporciones | Constante de proporcionalidad |
|---|---|---|
| $m\overline{AC} = 80\ cm$ <br> $m\overline{EC} = 95\ cm$ <br> $m\overline{BD} = 120\ cm$ <br> $m\overline{FD} = 142{,}5\ cm$ | | $K =$ |
| $m\overline{AC} = 30\ cm$ <br> $m\overline{EC} = 120\ cm$ <br> $m\overline{BD} = 1280\ cm$ <br> $m\overline{FD} = 150\ cm$ | | $K =$ |
| $m\overline{AC} = 73\ cm$ <br> $m\overline{EC} = 57\ cm$ <br> $m\overline{BD} = 146\ cm$ <br> $m\overline{FD} = 114\ cm$ | | $K =$ |

*Conceptos y procedimientos*

Los conceptos que se abordan con esta tarea involucran conocimientos previos relacionados con la terminología de los temas de razón y proporción. En primer lugar, los estudiantes deben relacionar las medidas de los segmentos adyacentes o correspondientes con el antecedente y consecuente de una razón. En segundo lugar, los estudiantes proponen igualdades entre las razones propuestas y verifican la proporcionalidad. Por lo tanto, los estudiantes eligen entre multiplicar extremos y medios o calcular la constante de proporcionalidad.

*Sistemas de representación*

Los sistemas de representación contemplados para esta tarea de aprendizaje son el simbólico y numérico. En la formulación de la tarea, se dota a los estudiantes con una imagen que luego modelan en el suelo y que debe cumplir las condiciones establecidas. Es importante usar la notación simbólica para identificar las rectas intersecadas y los segmentos formados entre ellas. Luego, los estudiantes realizan la traducción del sistema de representación simbólico al numérico, al asignar las medidas correspondientes.

*Materiales y recursos*

La implementación de la tarea de aprendizaje requiere como materiales la hoja con la formulación de la tarea, lápiz, borrador y cinta adhesiva. Además, es imprescindible el uso de la cinta métrica conocida como el metro, para ubicar las cuerdas correctamente según las medidas que se indican en la formulación de la tarea.

*Agrupamiento e interacciones*
En un primer momento, el profesor conforma grupos de tres estudiantes. Luego, cada grupo de estudiantes extiende las cuerdas de acuerdo con las medidas sugeridas en la tabla. Posteriormente, los estudiantes de cada grupo analizan la situación y concluyen sobre el paralelismo entre rectas. Por último, el profesor dirige la retroalimentación y compara las soluciones de los diferentes grupos.

*Temporalidad*
En esta tarea de aprendizaje, sugerimos distribuir el tiempo de la siguiente manera: el profesor lee el segundo objetivo y la meta de la tarea, y organiza los grupos (15 minutos). Luego, cada grupo lee la tarea, interpreta la información, coloca las cuerdas en el suelo a partir de la representación y las medidas indicadas, y plantean la solución (25 minutos). El profesor lidera la retroalimentación de los procedimientos empleados por cada grupo (diez minutos). Por último, los estudiantes comparten sus percepciones sobre el logro de la tarea y su nivel de motivación durante la implementación (diez minutos).

*Errores*
Durante la implementación de la tarea, los estudiantes pueden incurrir en algunos errores. Por ejemplo, ellos pueden nombrar segmentos determinados por puntos no correspondientes ni colineales en las transversales (E3), ubicar la medida de un segmento en otro segmento (E5), plantear proporciones entre las razones formadas por segmentos de recta no adyacentes (E22), y reescribir una proporción al intercambiar antecedente y consecuente en una sola razón (E20). En el anexo 3, presentamos una tabla de ayudas para los errores mencionados y los demás errores en los que pueden incurrir los estudiantes durante la implementación de la tarea.

*Grafo de criterios de logro*
En la figura 11, presentamos el grafo de criterios de logro para la tarea de aprendizaje 2.1 Cuerdas.

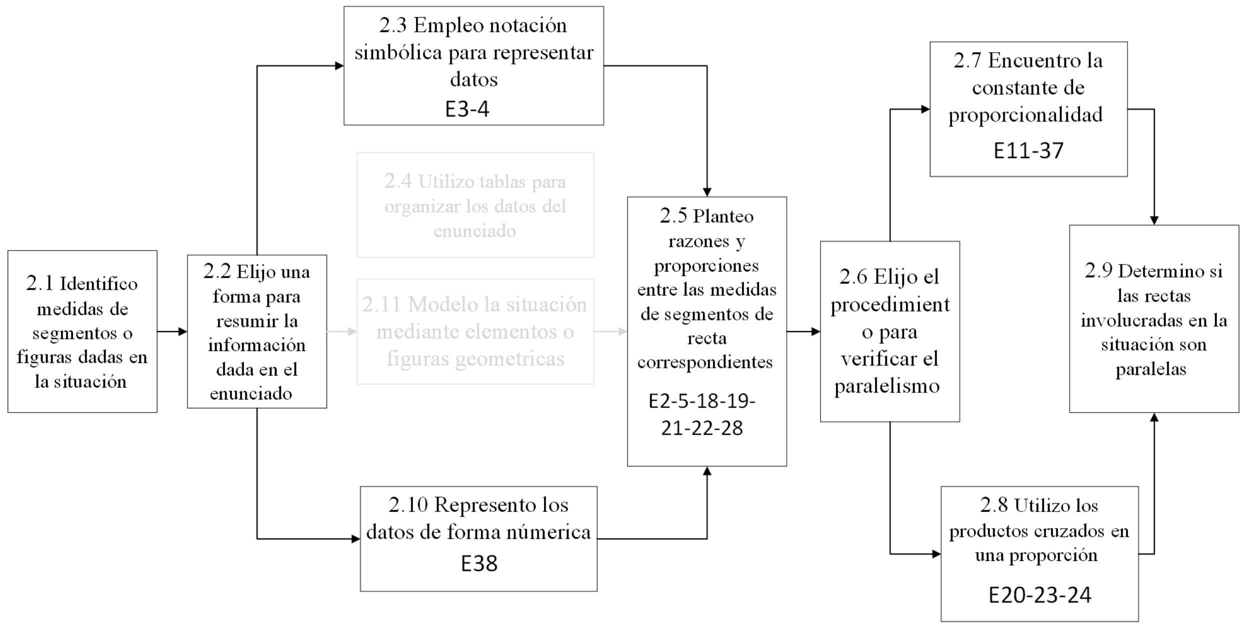



*Figura 11.* Grafo de criterios de logro de la tarea 2.1 Cuerdas

En la figura 11, indicamos que, para iniciar la tarea, los estudiantes deben identificar las medidas de los segmentos proporcionados en la información y asociarlas con el segmento correspondiente en la representación realizada en el suelo con las cuerdas. Luego, los estudiantes eligen el sistema de representación que les permita organizar la información. Continúan con la solución al decidir qué procedimiento les permite verificar el paralelismo entre las rectas: si verificar la igualdad del producto de extremos y medios o demostrar la existencia de la constante de proporcionalidad. Por último, con los resultados obtenidos, los estudiantes dan respuesta al problema e indican si existe el paralelismo entre rectas.

*Actuación del profesor*

El profesor en esta tarea de aprendizaje debe tener especial cuidado con la administración del tiempo. En primer lugar, debe presentar el objetivo de aprendizaje, la meta de la tarea y organizar los grupos. No tenemos ninguna condición o restricción para la conformación de los grupos. Además, el profesor verifica que los estudiantes comprendan la formulación de la tarea, para que ubiquen correctamente las cuerdas en el suelo y asocien las medidas según los datos. En caso contrario, debe usar las ayudas relacionadas con posibles errores de la tarea.

*Sugerencias metodológicas y aclaraciones*

En esta tarea de aprendizaje, probablemente los estudiantes presenten dificultades en el manejo del material como las cuerdas, el metro y la cinta adhesiva. Recomendamos que el profesor se anticipe y muestre cómo pegar las cuerdas: preferiblemente, ubicar primero las cuerdas que simulan las rectas transversales, marcar las medidas en una cuerda y luego en la otra, para facilitar el proceso de pegar las demás cuerdas. No obstante, aclaramos que los procedimientos de medir y plantear razones y proporciones debe ser realizado por los estudiantes. El profesor solo observa e interviene cuando los estudiantes incurran en errores. Recomendamos al profesor tener a disposición una hoja con las ayudas relacionadas con cada error.

*Evaluación*

Para la evaluación de la tarea 2.1 Cuerdas, es imprescindible disponer de las hojas de solución para revisar los procedimientos empleados por los estudiantes y verificar que se hayan superado los errores con las ayudas proporcionadas. Con el apoyo del grafo de criterios de logro, el profesor revisa el uso de los sistemas de representación, el planteamiento de las razones y proporciones, los procedimientos asociados al producto de extremos y medios o la deducción de la constante de proporcionalidad. De acuerdo con la cantidad de veces en que los estudiantes incurran en errores y la manera de abordar las ayudas para superarlos, el profesor verifica el logro de la tarea.

## 4. Tarea 2.2 Los cables

Con esta tarea, queremos que los estudiantes usen el recíproco del Teorema de Tales desde lo numérico, al verificar la proporcionalidad entre los segmentos de recta correspondientes y comprobar el paralelismo entre las rectas cortadas por dos transversales.

*Requisitos*

Para esta tarea, es necesario que los estudiantes conozcan segmentos adyacentes y correspondientes, puedan formar una razón y proporción, y comprendan qué es el paralelismo entre rectas. También se requiere que los estudiantes conozcan el procedimiento para encontrar la constante de proporcionalidad.

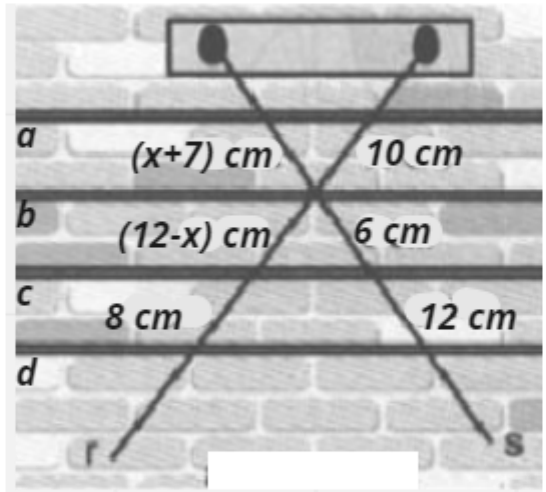
*Aportes de la tarea al objetivo de aprendizaje*

Con esta tarea, buscamos contribuir al uso del recíproco del teorema de Tales mediante situaciones cotidianas. También buscamos que los estudiantes sepan cómo pueden verificar el paralelismo entre rectas, al encontrar la constante de proporcionalidad.

*Formulación*

El profesor realiza la entrega de una hoja por grupo de estudiantes con la siguiente formulación de la tarea.

> En una calle de Bucaramanga, se dañaron unos cables eléctricos, tal y como se observa en la imagen. La empresa ESSA envió a Daniel y a Juan para arreglarlos de tal forma que los cables queden paralelos. Daniel indica que $x = 4$ y Juan indica que $x = 8$. De acuerdo con lo anterior, ¿cuál debe ser el valor de $x$ para que exista la constante de proporcionalidad y los cables sean paralelos entre sí? Escriba los procedimientos que justifican la respuesta.




*Conceptos y procedimientos*
En la tarea Los cables, los estudiantes identifican los segmentos adyacentes y correspondientes cuando las rectas transversales se intersecan; plantean las razones y proporciones de los segmentos; y verifican el paralelismo entre rectas.

*Sistemas de representación*
Para esta tarea, determinamos el sistema de representación numérico en el momento que los estudiantes plantean las razones y proporciones y encuentran la constante. También, tuvimos en cuenta el sistema de representación geométrico por si desean volver a diseñar la imagen con las rectas transversales sin intersecar y un sistema de representación tabular por si desean organizar los valores de las medidas de los segmentos en tablas.

*Materiales y recursos*
Para esta tarea, se utiliza la hoja con la formulación de la tarea, una hoja en blanco, lápiz y borrador.

*Agrupamiento e interacciones*
Esta tarea se desarrolla en parejas. Proponemos una interacción inicial entre los estudiantes de cada pareja, para incentivar la comunicación de ideas. Luego, el profesor interviene para motivar a los estudiantes a debatir e intercambiar ideas o suplir de ayudas que permitan la superación de errores. Por último, contemplamos un debate con el gran grupo para retroalimentar las estrategias de solución.

*Temporalidad*
La tarea se diseñó para ser desarrollada en 50 minutos. Primero, el profesor presenta la meta de la tarea (cinco minutos). Después, los estudiantes leen y analizan la información de la tarea (diez minutos). Luego, los estudiantes desarrollan la tarea (25 minutos). Por último, se hace la retroalimentación de las estrategias y procedimientos empleados para solucionar la tarea (diez minutos).

*Errores*

En esta tarea, los estudiantes pueden incurrir en errores como confundir el antecedente con consecuente de una razón, dado que las rectas transversales están cruzadas. Para que los estudiantes superen este error, el profesor puede usar estas ayudas: ¿cuáles son los valores correspondientes a la recta transversal? y ¿qué medidas tiene la recta transversal *r*? Otro de los errores en que pueden incurrir los estudiantes es utilizar el resultado de los productos cruzados como la constante de proporcionalidad. Para este error, el profesor propone realizar el cociente entre el antecedente y el consecuente de cada razón de la proporción. Todos los errores relacionados con los criterios de logro de la tarea Los cables y las ayudas diseñadas se encuentran en los anexos 1 y 3.

*Grafo de criterios de logro*

En el grafo de la figura 12, se observan los diferentes procedimientos que pueden utilizar los estudiantes para solucionar la tarea 2.2 Los cables.

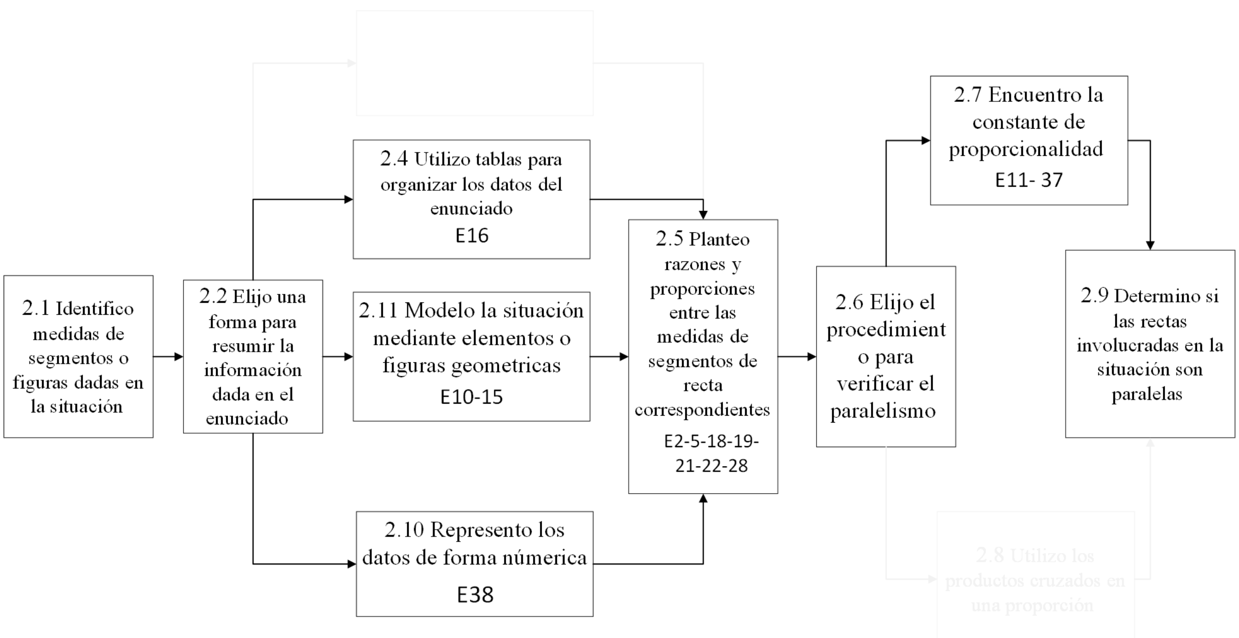



*Figura 12.* Grafo de criterios de logro tarea 2.2 Los cables

Como se muestra en el grafo, los estudiantes empiezan por hacer la lectura del enunciado de la tarea e identificar qué se solicita dentro de la situación. Después, los estudiantes reconocen las medidas de los segmentos correspondientes a cada una de las rectas transversales; eligen un sistema de representación para plantear las razones y proporciones; encuentran la constante de proporcionalidad; y verifican si existe el paralelismo entre rectas.

*Actuación del profesor*

El profesor primero debe dar a conocer la meta de la tarea. Luego, organiza a los estudiantes en parejas, y posteriormente entrega las hojas con la tarea impresa. El profesor está pendiente de las dificultades que tengan los estudiantes durante el desarrollo de la tarea y lidera la retroalimentación de las estrategias de solución. Por último, da una conclusión y recoge las hojas en las que los estudiantes registran los procedimientos.

*Sugerencias metodológicas y aclaraciones*
Sugerimos que el profesor revise los procedimientos de cada grupo, para identificar las dificultades de los estudiantes. El profesor verifica que los estudiantes registren todos los procedimientos empleados para desarrollar la tarea. Por último, el profesor revisa que todos los grupos entreguen las hojas de la solución de la tarea. También, recomendamos al profesor tener las ayudas impresas en una hoja, para facilitar su implementación si los estudiantes incurren en errores.

*Evaluación*
Para la evaluación de esta tarea, el profesor se apoya en el grafo de criterios de logro, revisa la pertinencia del sistema de representación elegido para organizar la información y los procedimientos utilizados para calcular la constante de proporcionalidad. Por otro lado, el profesor debe estar pendiente de la cantidad de errores en que incurren los estudiantes y analizar sus comportamientos al recibir e implementar una ayuda. Recomendamos al profesor recoger las hojas de evaluación para concluir respecto al aprendizaje de los estudiantes sobre el recíproco del teorema de Tales.

# EXAMEN FINAL

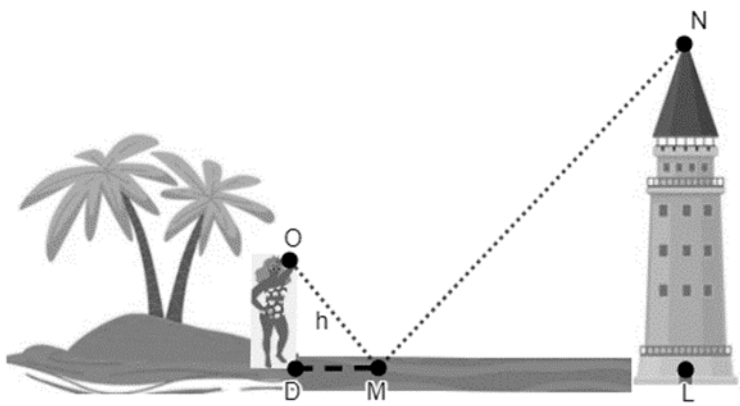
En este apartado, presentamos el diseño del examen final para evaluar el aprendizaje de los estudiantes, finalizada la implementación de las tareas de aprendizaje. Recordamos que una tarea de evaluación pretende validar el aprendizaje de los estudiantes tras implementar una secuencia de tareas de aprendizaje. No obstante, aclaramos que el sistema de evaluación de nuestra unidad didáctica conglomera la implementación tanto de las tareas de aprendizaje como el examen final que se implementa de forma individual a cada estudiante.

## 1. Diseño del examen final

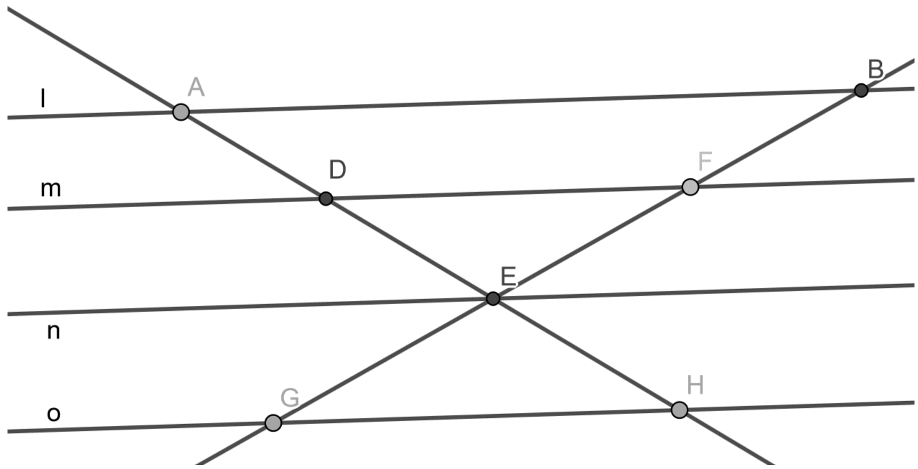
El examen final que diseñamos consta de tres ítems. Dos de ellos apuntan a verificar el logro del primer objetivo y, el tercero, al logro del segundo objetivo. El primer ítem es una situación enmarcada dentro de un contexto social. El segundo y el tercer ítem hacen referencia a un contexto científico. A continuación, presentamos el diseño del examen final.

> 1. La empresa de energía ESSA en Bucaramanga debe cambiar el cableado de alumbrado público. Los obreros encargados de la obra saben que las carreras 17, 18, y 19 son paralelas entre sí. La distancia entre los puntos B y C es de 160 metros, la distancia entre los puntos E y D es de 132 metros, y la distancia entre los puntos E y F es de 165 metros. ¿Cuánto cable se necesita desde el punto A hasta el punto C?


2. Jessica se fue de vacaciones con su familia para una Isla del caribe. Al estar allí, realizó un recorrido con un guía turístico, quien le contó que la torre que estaba al otro lado de la isla medía 25,5 metros de altura. Jessica quería saber la distancia que había entre la Isla y la torre. Para esto, midió la distancia desde su ubicación al punto M donde se reflejaba la punta de la torre en el agua, que fue de 4 metros. Si se sabe que la altura de Jessica es 1,7 metros, ¿cuál es la distancia entre la isla y la torre?




3. Dos investigadores de la NASA analizan la ubicación de seis satélites en el espacio. Raúl afirma que las rectas $l, m, n$ y $o$ son paralelas $si\ x = 7$, pero Hugo dice que se debe restar 3 al valor de Raúl. Si $mAD = 3 + x$, $mBF = 15$, $mDP = 2$, $mFP = 10 - x$, $mPG = x - 1$, $mPH = 4$, verifique en cuál de los casos existe constante de proporcionalidad y explique si las rectas son paralelas.




El primer ítem del examen final es una situación que describe la organización de calles y carreras dentro de una ciudad. Con esta pregunta, buscamos que los estudiantes asocien las carreras 17, 18 y 19 como las rectas paralelas que son intersecadas por dos transversales. Luego, los estudiantes deben identificar los segmentos adyacentes o correspondientes que se conforman, establecer razones y proporciones entre sus medidas, y calcular una distancia desconocida.

El segundo ítem del examen final es una situación que involucra el cálculo de una distancia inaccesible. La pregunta exige a los estudiantes realizar un análisis de la imagen de la tarea en la que se observan triángulos semejantes. Los estudiantes deben representar la situación, preferiblemente con el sistema de representación geométrico, para identificar si las medidas del enunciado corresponden a segmentos adyacentes o correspondientes. Luego, los estudiantes deben plantear las proporciones que permiten deducir la distancia desconocida, referente a la distancia entre la isla y la torre.

El tercer ítem del examen final describe una situación en la que se presenta la intersección de varias rectas y su objetivo es verificar el paralelismo entre las rectas *l, m, n* y *o.* Para ello, los estudiantes deben formular razones con las medidas de las distancias entre los satélites, proponer igualdades entre esas razones, y verificar la proporcionalidad mediante los productos cruzados o el cálculo de la constate de proporcionalidad. Además, consideramos que esta pregunta es un reto para los estudiantes ya que las rectas transversales se intersecan entre sí, lo que exige precisión al momento de plantear adecuadamente las razones entre segmentos adyacentes o correspondientes.

## 2. Rúbrica del examen final

En nuestra unidad didáctica, contemplamos un modelo de rúbrica que permite verificar si los estudiantes han logrado los criterios señalados en el grafo correspondiente a cada objetivo. Este modelo de rúbrica sigue el esquema propuesto en Romero y Gómez (2018) que establece cuatro niveles de logro, superior, alto, básico y bajo. A continuación, presentamos el modelo de rúbrica para evaluar los dos objetivos de la unidad didáctica Teorema de Tales.

Tabla 1
*Niveles de desempeño e indicadores de logro para los objetivos*

| Nivel de desempeño | Indicadores | Escala institucional |
|---|---|---|
| | Objetivo 1 | |
| Superior | El estudiante cumple con los criterios de logro propuestos para el objetivo 1. Es decir, el estudiante no incurre en los errores relacionados con los sistemas de representación, el planteamiento y solución de proporciones para encontrar distancias desconocidas. | 90 a 100 |
| Alto | El estudiante activa los criterios de logro que relaciona la identificación de medidas de segmentos o figuras (CdL 1.1) e identifica rectas paralelas y determina la medida de un lado a partir de otros (CdL 1.2). El estudiante logra resumir la información al elegir un sistema de representación (CdL 1.3, 1.4, 1.5, 1.6) que le permite posteriormente plantear razones y proporciones entre segmentos de recta correspondientes (CdL 1.7). En este nivel, el estudiante puede incurrir en los errores referentes a los criterios (CdL 1.8, 1.9, 1.10): intercambiar antecedente y consecuente en una sola razón, igualar el producto de antecedentes y consecuentes, o realizar suma, cociente o diferencia entre extremos y medios. | 80 a 89.9 |
| Básico | El estudiante activa los criterios de logro que relacionan la identificación de medidas de segmentos o figuras (CdL 1.1) e identifica rectas paralelas y determina la medida de un lado a partir de otros (CdL 1.2). El estudiante logra resumir la información al elegir un sistema de representación (CdL 1.3, 1.4, 1.5, 1.6). Sin embargo, al momento de activar el criterio de logro CdL 1.7, el estudiante incurre en alguno de los siguientes errores: relacionar segmentos no adyacentes ni correspondientes (E2), ubicar la medida de un segmento en otro (E5), plantear razones y proporciones entre segmentos no adyacentes ni correspondientes (E18-19-21-22) o no colocar el signo igual en una ecuación o proporción (E28). | 65 a 79.9 |
| Bajo | El estudiante tiene un nivel de desempeño bajo si luego de identificar las medidas de segmentos o figuras (CdL 1.1), incurre en alguno de los errores relacionados a los criterios CdL 1.2,1.4, 1.5 y 1.6. Por ejemplo, ubica la incógnita en un segmento con medida conocida, asigna datos del enunciado al segmento desconocido, confunde rectas paralelas con rectas transversales o ubica las medidas de los segmentos en tablas sin verificar la correspondencia entre ellos. De acuerdo con lo anterior, el | 0 a 64.9 |

Tabla 1
*Niveles de desempeño e indicadores de logro para los objetivos*

| Nivel de desempeño | Indicadores | Escala institucional |
|---|---|---|
| | estudiante tiene falencias en la organización de la información y a partir de allí realiza procedimientos que no satisfacen el criterio CdL 1.7 (plantear razones y proporciones) y los criterios CdL 1.9, 1.10 (propiedad uniforme y productos cruzados). | |
| | Objetivo 2 | |
| Superior | El estudiante cumple con los criterios de logro propuestos para el objetivo 2. Es decir, el estudiante no incurre en los errores relacionados con los sistemas de representación, el planteamiento y solución de proporciones para verificar el paralelismo entre segmentos de recta. | 90 a 100 |
| Alto | El estudiante activa el criterio de logro CdL 2.1 (leer, interpretar y extraer datos de un enunciado). Posteriormente, el estudiante elige un sistema de representación simbólico o tabular para organizar la información (CdL 2.3, 2.4). Luego, el estudiante plantea proporciones entre segmentos adyacentes o correspondientes (CdL 2.5). En este nivel de desempeño, probablemente el estudiante incurra en algún error relacionado con el criterio CdL 2.7 (determinar la constante de proporcionalidad) o, el criterio CdL 2.8 (equivalencia de los productos cruzados). El estudiante no aplica el criterio CdL 2.9 para enunciar la respuesta. | 80 a 89.9 |
| Básico | El estudiante activa el criterio de logro CdL 2.1 (leer, interpretar y extraer datos de un enunciado). Posteriormente, el estudiante elige un sistema de representación simbólico o tabular para organizar la información (CdL 2.3, 2.4). Luego, el estudiante puede incurrir en los errores E2-E19, relacionados con el criterio CdL 2.5. | 65 a 79.9 |
| Bajo | El estudiante tiene un nivel de desempeño bajo si no logra interpretar, extraer y ubicar datos del enunciado (CdL 2.1) para posteriormente, organizar la información en un sistema de representación simbólico o tabular (CdL 2.3, 2.4). El estudiante, al iniciar con las tareas, incurre en los errores E3,4, 16. | 0 a 64.9 |

# Conclusiones

Nuestra unidad didáctica sobre el teorema de Tales fue diseñada durante dos años en la Maestría en Educación Matemática de la Universidad de los Andes e implementada en una institución educativa de Bucaramanga. Luego de una cuidadosa planificación y diseño, esta unidad didáctica se convierte en una herramienta efectiva para promover el aprendizaje y el dominio de conceptos matemáticos relacionados con el tema.

Esta unidad didáctica contiene una tarea diagnóstica y cuatro tareas de aprendizaje centradas en el teorema de Tales y su recíproco, junto con un examen final, para evaluar el aprendizaje de los estudiantes. En el anexo de fichas de tareas, están las características de cada tarea y los listados de errores y ayudas que el profesor puede utilizar para facilitar la implementación efectiva de las actividades propuestas.

Es especialmente notable la elección de contextos fenomenológicos que dan sentido al tema y hacen que las tareas sean atractivas para los estudiantes. Esta conexión con la vida cotidiana resalta la importancia del teorema de Tales y su relevancia en diversos escenarios, lo que estimula el interés y la motivación de los alumnos hacia el aprendizaje de las matemáticas.

Además, el enfoque en aspectos de contenido, cognitivos y motivacionales demuestra una comprensión integral de los elementos clave para el éxito educativo. Nuestra unidad didáctica ha sido diseñada conforme a los estándares curriculares colombianos y el marco teórico de PISA, para garantizar su alineación con los objetivos nacionales e internacionales.

En resumen, esta unidad didáctica representa un ejemplo destacado de buenas prácticas en la enseñanza de las matemáticas, al ofrecer a los estudiantes una experiencia de aprendizaje enriquecedora y prepararlos para enfrentar desafíos académicos y profesionales con confianza y competencia.

# LISTADO DE ANEXOS

En la tabla 7, presentamos el listado de anexos mencionados en el documento.

Tabla 7
*Listado de anexos*

| A | Descripción |
|---|---|
| 1 | Listado de errores en los que pueden incurrir los estudiantes durante la solución de las tareas de la unidad didáctica teorema de Tales |
| 2 | Listado de criterios de logro de los objetivos de aprendizaje de la unidad didáctica teorema de Tales |
| 3 | Fichas de las tareas con las tablas de ayudas para cada tarea de aprendizaje |
| 4 | Imprimibles tares de aprendizaje y de evaluación |

Nota. A: Anexo

# REFERENCIAS


Cañadas, M. C., Gómez, P., & Pinzón, A. (2018). Análisis de contenido. En P. Gómez (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 53–112). Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes.

Gómez, P. (2018). *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares*. Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes.

Gómez, P; Mora, M. F.; Velasco, C. (2018). Análisis de instrucción. En Gómez, Pedro (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 197-268). Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes.

González, M. J., & Gómez, P. (2018). Análisis cognitivo. En P. Gómez (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 113–196). Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes.

Kaput, J. J. (1992). Technology and mathematics education. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 515–556). Nueva York: Macmillan.

Lupiañez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Granada: Universidad de Granada.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias*. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional de Colombia.

Ministerio de Educación Nacional. (2015). *Derechos Básicos de Aprendizaje en Matemáticas*. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional de Colombia

Romero, I. M., Gómez, P (2018). Análisis de actuación. En Gómez, Pedro (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 269-301). Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes.