

Razonamiento algebraico y generalizaciones

Luis Fernando Ramírez Oviedo

Universidad Estatal a Distancia,

Costa Rica

lramirez@uned.ac.cr

Eric Padilla Mora

Universidad Estatal a Distancia,

Costa Rica

epadilla@uned.ac.cr

Resumen: La enseñanza y el aprendizaje del tema relaciones y álgebra, potencia en el estudiantado el desarrollo de diversas habilidades, entre ellas: análisis y comprensión de patrones y relaciones, la capacidad para representar y analizar situaciones matemáticas, así como la capacidad para plantear, representar simbólicamente y resolver problemas en diversos contextos.

Por lo que se propone un taller con el fin de fortalecer la formación profesional de la persona docente de I y de II ciclo de la educación costarricense en esta temática. Además, se pretende que quienes participen, puedan adaptar las situaciones trabajadas y la estrategia didáctica propuesta en sus aulas.

Palabras claves: didáctica, razonamiento algebraico, generalizaciones, formación continua, álgebra.

1. Introducción

Ser conscientes de los aportes que brindan los procesos de actualización y de formación permanente, así como de la profundización del conocimiento, son aspectos deseables en todo profesional. Esto se constituye en una vía que podría contribuir con

la reflexión sobre los conocimientos, actitudes y habilidades adquiridas, además, de lograr nuevos aprendizajes que podrían propiciar la innovación como consecuencia de los cambios y avances en cualquier ámbito.

Específicamente, en el ámbito educativo, estos dos procesos son fundamentales, dado que contribuye a que el docente fortalezca sus capacidades y habilidades para asumir los retos en su ejercicio profesional y además responda a los cambios y desafíos que se producen a partir de las necesidades actuales de la sociedad, así como de los avances, descubrimientos y nuevos aportes de las diversas disciplinas, promoviendo la creación de espacios educativos actualizados, lo cual contribuirá con la calidad educativa.

En el contexto de la educación costarricense tanto el Ministerio de Educación Pública (MEP) como el Instituto de Desarrollo Profesional (IDP) (2018) señalan que La formación permanente del profesional en educación, es fundamental para responder a los desafíos educativos que plantea la sociedad actual, ya que la misma, es un factor clave para fortalecer las competencias de estos profesionales, y contribuir, de esta manera, con el mejoramiento de la calidad de la educación. (p. 9)

Además, plantean que:

El reto de la formación permanente, en primera instancia, es mantener una vinculación con la realidad del contexto, pero además que toda actividad formativa que se desarrolle, tenga elementos innovadores que promuevan el cambio, tanto de la persona que enseña, como de la persona que aprende. (MEP-IDP, 2018, p. 9)

Por tanto, ante el objetivo de fortalecer la formación profesional en docentes de I y de II ciclo de la educación costarricense respecto al tema relaciones y álgebra, en este taller el enfoque estará centrado en tres de las categorías propuestas por Shulman (2005) respecto al conocimiento del profesor, a saber: el conocimiento del contenido, el conocimiento del currículo y del conocimiento didáctico del contenido.

Según Shulman (2005):

La primera fuente del conocimiento base es el conocimiento de los contenidos: el saber, la comprensión, las habilidades y las disposiciones que deben adquirir los escolares. Este conocimiento se apoya en dos bases: la bibliografía y los estudios acumulados en cada una de las disciplinas, y el saber académico histórico y filosófico sobre la naturaleza del conocimiento en estos campos de estudio. (p. 12)

En cuanto al conocimiento del currículo, Shulman (2005), indica que está relacionado con el especial dominio que tenga el docente de los materiales y

programas que sirven de base para realizar su labor, en el ámbito nacional se podrían señalar: los Programas de Estudio, la fundamentación pedagógica de la transformación curricular y las orientaciones para la mediación pedagógica por habilidades, entre otros propuestos por el Ministerio de Educación Pública. Finalmente, respecto al conocimiento didáctico del contenido dicho autor enfatiza en la especial relación que debe existir entre materia y pedagogía, lo que constituye una esfera exclusiva del docente, así como de su propia forma especial de comprensión profesional.

2. Fundamentación en el contexto de los programas de estudio del MEP

Al abordar la línea del conocimiento curricular, en la educación costarricense, los Programas de Estudio de Matemática del Ministerio de Educación Pública, sin duda, son parte de los referentes, el cual aporta también desde el conocimiento didáctico.

En dicho documento la resolución de problemas se presenta como la estrategia metodológica principal y la contextualización activa será un componente pedagógico especial. Además, se indica que todo se debe trabajar a partir de cinco procesos centrales, los cuales son: *razonar y argumentar, plantear y resolver problemas, conectar, comunicar y representar*. Aunque todos se pueden trabajar en álgebra, de ellos, en el contexto de este taller destacan:

- *Razonar y argumentar*: sobre todo a partir de acciones que propicien la deducción, la inducción, la generalización, las justificaciones y las pruebas.
- *Plantear y resolver problemas*: a partir de estrategias que refieren al planteamiento de problemas y el diseño de estrategias para resolverlos, los cuales considerarán contextos de cotidianidad, así como propios del área de la Matemática, considerando que el usar problemas extraídos de la realidad o que se puedan imaginar como reales promueve acciones cognitivas requeridas para el aprendizaje de las Matemáticas, para lograr el desarrollo de capacidades cognitivas para identificar, formular, diseñar, desarrollar y contrastar modelos matemáticos del entorno con complejidad diversa.

Además, para el primer y segundo ciclo respecto al tema relaciones y álgebra en los dichos programas se destaca:

2. 1. Primer ciclo

Se considera necesario la introducción temprana de relaciones, patrones y manipulación simbólica con el fin de posibilitar articulación con los ciclos que siguen y desarrollar una forma de pensamiento matemático necesario para la construcción de conceptos relacionados con las funciones y la geometría. Es por esto que se indica que:

Es importante fomentar el desarrollo de las habilidades relacionadas con el reconocimiento de patrones, la comprensión del cambio, la determinación del valor faltante en una expresión, la representación y comparación de números en la recta numérica. Esto también favorece el proceso matemático de Razonar y argumentar. (MEP, 2012, p. 135)

Por tanto:

El propósito de la enseñanza en el área de Relaciones y Álgebra para este ciclo es desarrollar en cada estudiante la comprensión de patrones y relaciones, la capacidad para representar y analizar situaciones matemáticas dadas y la habilidad para utilizar estos conocimientos con el fin de resolver problemas en varios contextos. (MEP 2012, p. 135)

Así, las habilidades generales a desarrollar en Relaciones y Álgebra al finalizar el primer ciclo son:

- Construir sucesiones con números y con figuras.
- Identificar patrones en una secuencia de figuras o de números.
- Ordenar números en forma ascendente o descendente.
- Escribir e interpretar expresiones matemáticas que representan cantidades dadas.
- Identificar y sustituir el número que falta en una tabla o en una expresión matemática.

- Plantear y resolver problemas a partir de una situación dada.

(MEP 2012, p. 135)

2.2. Segundo ciclo

Para este ciclo se espera reafirmar y ampliar los conceptos y procedimientos fundamentales aprendidos en el I Ciclo, pero, además, se introducen conceptos y habilidades que conectan con la educación Secundaria. Al respecto se señala:

Relaciones y Álgebra prosigue con patrones numéricos, pero incluye representación de puntos en el plano cartesiano y de relaciones entre cantidades que varían y, algo muy importante, el razonamiento proporcional que conecta con las funciones.

Siempre debe predominar lo intuitivo y sensorial en este ciclo, pero se debe introducir más elementos matemáticos abstractos y sus relaciones, para avanzar en el desarrollo de las capacidades cognitivas de los estudiantes. La presencia de más símbolos, como modelo de situaciones, también debe abrir paso a una mayor manipulación de los mismos. (MEP 2012, p. 171)

Para este ciclo como propósito de la enseñanza se indica "... desarrollar en cada estudiante habilidades para la comprensión y utilización de expresiones matemáticas, así como su capacidad para plantear, representar simbólicamente y resolver problemas dados en diversos contextos." (MEP 2012, p. 231)

Respecto a las habilidades generales que deberá tener cada estudiante en *Relaciones y Álgebra* al finalizar el segundo ciclo se indican:

- Analizar patrones numéricos y no numéricos.
- Pasar de representaciones verbales a numéricas.
- Representar relaciones entre cantidades variables.
- Determinar el valor desconocido en una expresión numérica.
- Analizar gráficas de figuras con escala.
- Identificar distintas representaciones de una proporción numérica.
- Utilizar letras para representar cantidades variables.
- Aplicar regla de tres y porcentaje en la solución de problemas.

- Plantear y resolver problemas a partir de una situación dada.

(MEP 2012, p. 231)

3. Forma de trabajo y estrategias metodológicas

El trabajo que se propone para este taller tendrá como referente lo establecido anteriormente, por lo que será necesaria mucha disposición y colaboración de cada uno de los asistentes para así lograr los objetivos propuestos en cada una de las actividades diseñadas.

Algunos de los problemas cada persona participante lo trabajará de forma individual y otros colectivamente. Se brindará tiempo para que aporten soluciones y estrategias, luego se pide que las comuniquen, esto contribuirá con diversificar las destrezas que podrían emplearse ante la resolución de una situación problema.

Objetivo del taller: Fortalecer la formación profesional de la persona docente de I y de II ciclo de la educación costarricense respecto al tema relaciones y álgebra.

Modalidad: Taller presencial.

Público meta: Personas docentes del I y del II Ciclo de la Educación General Básica Costarricense.

Recursos brindados: guía de trabajo.

Recursos requeridos: hojas blancas, lápiz, lapicero y borrador.

Requisitos: interés en fortalecer su formación en Matemática y en didáctica específica, así como disposición para aportar y participar.

4. Actividades del taller

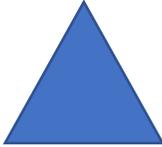
4.1. Primera parte

Los participantes de forma individual deberán seleccionar, al menos siete situaciones problemas, y resolverlos.

Tiempo estimado: 60 minutos

Situación problema 1. Jugando con figuras

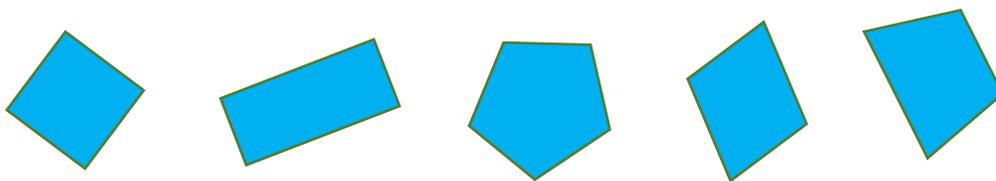
Considere la siguiente secuencia de figuras

 Figura 1	 Figura 2	 Figura 3	 Figura 4	Figura 5
Figura 6	Figura 7	Figura 8	Figura 9	Figura 10

Con base en dicha secuencia y sabiendo que el patrón se repite complete las figuras de la 5 a la 10.

Situación problema 2. Características de figuras

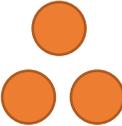
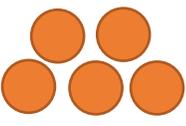
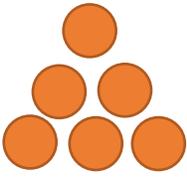
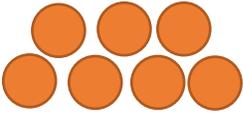
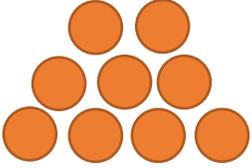
Observe y analice la siguiente secuencia de figuras



Indique ¿Cuál de ellas no tiene relación con las otras? Justifique

Situación problema 3. Patrones con círculos

Analice la siguiente secuencia de figuras

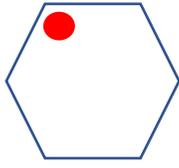
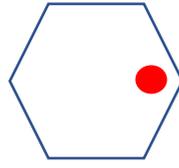
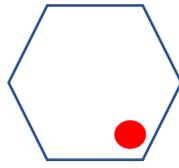
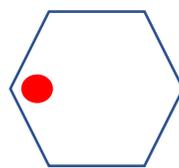
 Figura 1	 Figura 2	 Figura 3	 Figura 4	 Figura 5
 Figura 6	 Figura 7	 Figura 8	 Figura 9	 Figura 10

Complete las figuras de la 8 a la 10 colocando los círculos que le corresponde a cada una.

Si la secuencia se mantiene ¿Cuántos círculos habrá en la figura 17? Diseñe una estrategia.

Situación problema 4. Sucesiones y modelación

Analice la siguiente secuencia de figuras

 Figura 1	 Figura 2	 Figura 3	 Figura 4	...
---	---	---	--	-----

Con base en dicho modelo cuál corresponde a la imagen de la figura 5 y de la figura 8.

Situación problema 5. Patrones con círculos y sumas

Analice la siguiente secuencia de figuras

 Figura 1	 Figura 2	 Figura 3	 Figura 4	 Figura 5
 Figura 6	Figura 7	Figura 8	Figura 9	Figura 10

Si el patrón se mantiene, determine cuántos círculos hay en las figuras: 7, 8, 9 y 10.

Además, si se cuenta la cantidad de círculos que hay desde la figura 1 a la 10 ¿Cuántos hay en total?

Situación problema 6. Jugando a sumar

En la operación dada, complete los espacios en blanco de manera tal que al efectuar dicha suma el resultado sea el indicado.

$$\begin{array}{r}
 285 \\
 86 \\
 + 148 \\
 \hline
 9031
 \end{array}$$

Situación problema 7. Buscando secuencias numéricas

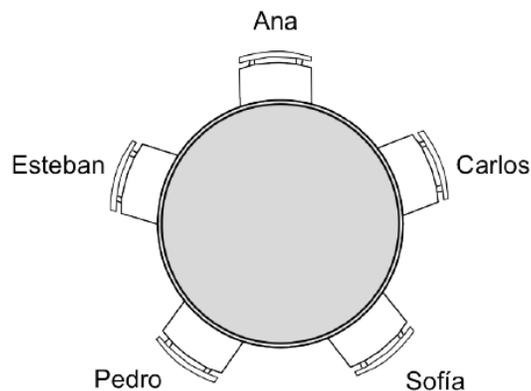
Considere la sucesión dada por $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{3}{2}$, $a_3 = \frac{4}{3}$, $a_4 = \frac{5}{4}$, $a_5 = \frac{6}{5}$, Con base en dicha información determine a_{23} , a_{40} y a_n .

Situación problema 8. Algo se repite

Considere la siguiente secuencia numérica 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, Si la secuencia o patrón se mantiene, determine el número que sigue. Además, ¿Cuál sería el número de la posición 55?

Situación problema 9. Contando de forma decreciente

Ana, Carlos, Sofía, Pedro y Esteban están sentados en una mesa circular tal como se muestra en la figura siguiente.



Tomado el orden indicado, si Ana dice el número 61, Carlos el 60, Sofía el 59, Pedro el 58, Esteban el 57, Ana el 56 y así sucesivamente ¿A quién le corresponde decir el número 35? y ¿A quién le corresponde decir el número 8?

Situación problema 10. En búsqueda del patrón

Considere la siguiente secuencia numérica $a_1 = 5 - 1$, $a_2 = 10 - 2$, $a_3 = 15 - 3$, $a_4 = 20 - 4$, Si la secuencia o patrón se mantiene, determine a_{30} , a_{234} y a_n .

Situación problema 11. Sumando números

Considere la sucesión definida por

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 1 + 3 = 4$$

$$a_3 = 1 + 3 + 5 = 9$$

$$a_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

¿Podría distinguir algún patrón en los números que se suman? ¿Cuál?

¿Podría distinguir algún patrón en el resultado de las sumas? ¿Cuál?

Determine a_5 , a_6 y a_n .

Situación problema 12. Ahorremos

Pedro decidió ahorrar, en una alcancía, parte de su salario mensual y sacarlo al día siguiente de depositada la doceava cuota.

Si el primer mes ahorra diez mil colones y a partir de ese mes decide ahorrar los cinco sextos de lo ahorrado en el mes anterior. Con base en dicha información determine

- ¿Cuánto dinero ahorraría en el segundo, tercero y cuarto mes respectivamente?
- ¿Cuánto dinero ahorraría en el sétimo mes?
- Cuánto dinero saca de su alcancía al final de periodo.

Situación problema 13. ¿Cuánto dará?

Si x , y y z son tres números naturales tales que $(x + y) + (y + z) + (x + z) = 36$ cuánto es $x + y + z$.

Situación problema 14. Un triángulo muy particular

Considere la siguiente figura

				1					
				1	1				
			1	2	1				
		1	3	3	1				
	1	4	6	4	1				
	1	5	10	10	5	1			
	1	6	15	20	15	6	1		
	1	7	21	35	35	21	7	1	
	1	8	28	56	70	56	28	8	1
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

Con base en este modelo cuál serían los valores que completan la fila que sigue. Si esta estructura puede relacionarse con los coeficientes numéricos de los términos obtenidos al desarrollar la expresión $(a+b)^n$, tal que

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Con base en esta información, determine el desarrollo de las expresiones $(a+b)^4$ y $(a+b)^6$

4.2. Segunda parte

En grupos, máximo 4 personas, compartirán las propuestas de solución que emplearon en la resolución. Además, discutirán los siguientes aspectos:

- ¿Por qué seleccionó ese problema?
- ¿Cuál fue la estrategia de solución empleada?
- ¿Es correcto el resultado o la respuesta dada?
- ¿En cuál nivel lo emplearían?
- Le realizarían alguna modificación ¿Cuál o cuáles?

Tiempo estimado: 25 minutos

5. Referencias bibliográficas

- Ministerio de Educación Pública. (2012). *Programas de Estudio de Matemáticas. I, II y III Ciclos de la Educación General Básica y Ciclo Diversificado*. <http://www.mep.go.cr/sites/default/files/programadeestudio/programas/matematica.pdf>
- Ministerio de Educación Pública (MEP)-Instituto de Desarrollo Profesional Uladislao GámezSolano (IDP). (2018). *Formación permanente requerida por el personal profesional, que labora en centros educativos del país*. https://idp.mep.go.cr/sites/all/files/idp_mep_go_cr/publicaciones/formacion_permanente_requerida_por_personal_del_mep_1.pdf
- Padilla, E. (2016). *Material complementario para séptimo año. Proyecto: fortalecimiento del Aprendizaje de la Matemática y su aplicación en la resolución de problemas y actividades de la vida cotidiana* [Material no publicado]. UNED.
- Padilla, E. y Ramírez, L. (2022). *Principios básicos de divisibilidad a través de la resolución de problemas*. XXIII y XXIV Congreso Nacional de Ciencia, Tecnología y Sociedad - XIII Festival Internacional de Matemáticas.
- Shulman, L. (2005). Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. *profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado*, 9(2). 1-30. <https://www.ugr.es/~recfpro/rev92ART1.pdf>