

Diseño de material didáctico para la enseñanza de la función lineal y la función cuadrática.

José Luis Morales Reyes¹, Marianela Alpízar Vargas², Steven Quesada Segura³ & Hazel Fernández Álvarez⁴

1. Académico, Universidad Nacional, Heredia, Costa Rica; jose.morales.reyes@una.cr
2. Académica, Universidad Nacional, Heredia, Costa Rica; marianela.alpizar.vargas@una.ac.cr
3. Profesor, Ministerio de Educación Pública, San José, Costa Rica; steven_09_11@hotmail.com
4. Profesora, Universidad Latinoamericana de Ciencia y Tecnología, San José, Costa Rica; hazelgt17@hotmail.com

ABSTRACT: This paper reports the process of design and analysis of didactic material. The design was based on qualitative design research and was supported by theoretical and methodological aspects of Didactic Analysis. Some data sources used were interviews with experts, questionnaires for teachers and students, and the Mathematics Study Programs of the Ministry of Public Education of Costa Rica. As a result, nine tasks on a linear function and eight on a quadratic function were developed and analyzed. These tasks were analyzed according to different variables, such as the systems of representation, the preferred thinking processes, the level of complexity, the difficulties and the possible mistakes that can be made in their solution. The development of teaching materials that promote mathematical skills requires an articulation between the different variables present in the tasks; particularly, it demands the presence of diverse mathematical thought processes and different levels of complexity. In addition, although the complete process of the foundations is extensive, the teachers can develop the phases separately and they can complement them in other academic courses.

Key words: didactic analysis, task analysis, curriculum, mathematical competence.

RESUMEN: Este escrito reporta el proceso de diseño y análisis de un material didáctico. El diseño se sustentó con aspectos teóricos y metodológicos del Análisis Didáctico y responde a una investigación cualitativa de diseño. Algunas fuentes de datos utilizadas fueron: entrevistas a expertos, cuestionarios al profesorado y al estudiantado y los Programas de Estudio de Matemática del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica. Como resultados se elaboraron y analizaron nueve tareas sobre función lineal y ocho para función cuadrática. Estas tareas se analizaron según distintas variables, entre ellas: sistemas de representación, procesos de pensamiento favorecidos, nivel de complejidad, dificultades y posibles errores que se pueden cometer en su resolución. La elaboración de materiales didácticos, que promuevan habilidades matemáticas, requiere de una articulación entre las distintas variables presentes en las tareas; particularmente, demandan de la presencia de los diversos procesos de pensamiento matemático y de distintos niveles de complejidad. Además, aunque el proceso completo de fundamentación es extenso, el profesorado puede ir desarrollar las fases por separado e ir complementándolas en otros cursos lectivos.

Palabras clave: análisis didáctico, análisis de tareas, currículo, competencia matemática.

INTRODUCCIÓN

Los cambios curriculares que se han experimentado, en los últimos años, en países latinoamericanos han hecho necesaria la modificación del tipo de actividades que se proponen en el aula. En Costa Rica, en 2012, se aprobó una reforma curricular de los Programas de Estudio de Matemática, en todos los niveles educativos de la educación preuniversitaria, y se planteó como una de sus directrices, para el desarrollo de la lección, el uso de estrategias metodológicas diversas, a saber: uso de la tecnología, inserción de la historia de la matemática, resolución de problemas, modelización y contextualización activa (Ministerio de Educación Pública [MEP], 2012).

Esta reforma conlleva un cambio no solo en la forma de planificar las clases, sino también en la manera en que se desarrollan y evalúan. De manera particular, en este artículo se ejemplifican parte de esos cambios, en el proceso que se llevó a cabo para el diseño de un material didáctico, para la enseñanza de la función lineal y de la función cuadrática, en décimo año de la educación pública costarricense, esto debido a la escasez de material acorde con la propuesta curricular actual, y que en pruebas nacionales estandarizadas, estas temáticas se clasifican en un nivel intermedio de dificultad, es decir que la proporción de las respuestas correctas oscila entre 40% y 60% (MEP, 2015).

Este artículo se deriva del trabajo final de graduación de Fernández, Morales y Quesada (2018). El objetivo general de este escrito es que los docentes de matemática, de educación secundaria, tengan un apoyo para desarrollar sus clases y, además, fundamentos teóricos que les orienten en la elaboración, de sus propios materiales didácticos, debido a que estos fundamentos están ausentes en los Programas de Estudio del MEP e incluso no se abordan en algunos cursos de formación inicial del profesorado.

MARCO TEÓRICO

En esta investigación se asume, como fundamentación teórica, algunas fases del Análisis Didáctico propuesto por el Grupo de Investigación Pensamiento Numérico de la Universidad de Granada, las estrategias para la valoración de tareas matemáticas de Ruiz (2017) y los Programas de Estudio de Matemática del MEP (2012). A continuación, se detallan cada uno de ellos.

El Análisis Didáctico es un método de investigación propio de la Didáctica de la Matemática, cuya finalidad radica en fundamentar, dirigir y sistematizar la planificación de materiales didácticos que organizan y transmiten conocimientos matemáticos (Rico y Fernández, 2013).

Dicho análisis trabaja de lo complejo a partes más simples, empleando un sistema cíclico de cinco categorías: análisis conceptual, análisis de contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis evaluativo. Contemplando que las primeras dos categorías son una sola, ya que ambas proponen establecer qué conocimientos se consideran dentro del currículo y en este artículo se le llamará análisis de contenido (Rico y Fernández, 2013). Adicionalmente, para efectos de esta investigación solo se detallarán los subanálisis

correspondientes al proceso de elaboración del material didáctico, a saber: análisis de contenido, análisis cognitivo y análisis de instrucción.

El análisis de contenido se centra en el contenido matemático, permite analizar, describir y establecer los diferentes significados que tienen las nociones involucradas en el tema. Es decir, este análisis se centra en el estudio detallado del concepto matemático que es objeto de planificación. Gómez (2007) considera que para el desarrollo del análisis de contenido el profesor debe hacer uso de tres organizadores del currículo: la estructura conceptual (relaciones entre conceptos y procedimientos), los sistemas de representación y el análisis fenomenológico (vinculación de los conceptos y las estructuras matemáticas con ciertos fenómenos del mundo natural, cultural, social y científico).

Por otra parte, el análisis cognitivo trata de organizar el para qué y hasta dónde aprender determinados conocimientos sobre un tópico (Rico y Fernández, 2013). Es decir, este análisis se centra en los estudiantes a los cuales se dirige el proceso de enseñanza. Se lleva a cabo a través de tres organizadores: expectativas de aprendizaje, dificultades en el aprendizaje y oportunidades de aprendizaje (tareas mediante las cuales se reta al estudiante a dar respuesta a diversas cuestiones con el propósito de lograr el aprendizaje y la superación de los errores relativos al tema).

Finalmente, el último subanálisis a considerar en la elaboración de un material didáctico es el análisis de instrucción. Gómez (2007) cita que este corresponde al “procedimiento en virtud del cual el profesor puede analizar y seleccionar las tareas disponibles para el diseño de las actividades de enseñanza y aprendizaje” (p. 75); es decir, se centra propiamente en el profesor, en el proceso que debe seguir para diseñar, seleccionar y secuenciar las tareas para la enseñanza y aprendizaje de los contenidos matemáticos.

En cuanto al análisis de tareas, se adopta, en primera instancia, el criterio de Marín (2013), quien menciona que se debe tomar en cuenta la redacción, la resolución y las demandas cognitivas. Asimismo, menciona que se deben considerar las variables de tarea que se estudian en el marco del Proyecto PISA, las cuales según Rico (2011) son: contenido matemático, el tipo de situación o contexto, las competencias específicas (denominadas procesos matemáticos dentro de los Programas de Estudio del MEP) y la complejidad cognitiva. La situación o contexto, según Rico (2011), ubica la tarea en un contexto que dependiendo del grado de cercanía de esta con el estudiantado se pueden distinguir diversas categorías, a saber: contexto personal, contexto ocupacional, contexto público o social y contexto científico.

En el contexto personal podrían ser tareas relacionadas con las compras, los juegos, el transporte, los deportes, los viajes, las propias finanzas, etc. Para el contexto ocupacional, laboral o profesional se incluyen aquellas tareas

que tienen aspectos en el cálculo de costos y pedido de materiales para la construcción, la arquitectura, optimización de recursos, compras y ventas. En los contextos públicos o sociales podrían ser: sistemas electorales, las políticas públicas, la demografía, la publicidad, los medios de comunicación, las estadísticas nacionales, la economía, etc. Finalmente, en el contexto científico, como la meteorología o el clima, la ecología, la medicina, las ciencias espaciales, la genética, las mediciones.

Asimismo, se aceptó la diferenciación que realiza Ruiz (2017) para el contexto científico. Este autor plantea que los problemas que se desarrollan enteramente en el mundo de la Matemática se excluyan de ese contexto. Por lo que, crea un nuevo contexto denominado: Contexto matemático, el cual se centra exclusivamente en conceptos y procedimientos que no salen del seno de la Matemática.

Por otro lado, Marín (2013) menciona que para establecer los procesos matemáticos (razonar y argumentar, plantear y resolver problemas, comunicar, representar y conectar) que se nutren con la resolución de cada tarea, como parte de su análisis se debe simular la resolución de la tarea como si la hiciera un o una estudiante y trabajar sobre una lista hipotética de acciones. Con esto se determinan cuáles de esas acciones corresponden con las descripciones de los procesos matemáticos. En el caso de esta investigación, se utilizó como documento de comparación la “Estructura de Intervención de los Procesos en un Problema” propuesta por Ruiz (2017), en la cual se establecen 61 indicadores para determinar a qué proceso matemático contribuye una determinada tarea, así como el grado en que se propicia. Siendo el grado uno el menos complejo y el grado tres el más complejo.

Otra de las variables que se debe considerar en el análisis de una tarea es su nivel de complejidad (reproducción, conexión o reflexión). Para determinar esta variable, Ruiz (2017) propone cinco criterios, asociados a los procesos matemáticos que se ponen en juego en la resolución de una tarea matemática. De manera general, establece que el nivel de complejidad de una tarea en la que predominan procesos matemáticos de grado uno es de reproducción, de grado dos de conexión y cuando prevalecen índices de grado tres es de reflexión.

Complementariamente, como uno de los objetivos es que el material didáctico esté acorde al currículo de matemática actual se deben conocer sus fundamentos teóricos y directrices metodológicas. Estos programas se dividen en habilidades, competencia, procesos, ejes disciplinares, actitudes y creencias.

De manera específica, para la problemática de esta investigación, en la tabla 1 se muestran las habilidades que se deben desarrollar, en décimo año, en relación con la función lineal y función cuadrática.

Tabla 1. Habilidades específicas para la función lineal y función cuadrática, en décimo año

Conocimiento	Habilidades específicas
Función lineal $f(x) = mx + b$	1) Representar gráficamente una función lineal. 2) Determinar la pendiente, la intersección con el eje de las ordenadas y de las abscisas de una recta dada, en forma gráfica o algebraica. 3) Determinar la ecuación de una recta utilizando datos relacionados con ella. 4) Plantear y resolver problemas en contextos reales utilizando la función lineal.
Función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.	1) Analizar gráfica y algebraicamente la función cuadrática con criterio $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$. 2) Plantear y resolver problemas en contextos reales utilizando la función cuadrática.

Nota: Elaboración propia con base en los Programas de Estudio de Matemática del MEP (2012).

Por otro lado, el MEP (2012) distingue dos tipos de etapas en la ejecución de una clase, las cuales se diferencian por los propósitos de enseñanza y aprendizaje. En la primera etapa se da el aprendizaje de conocimientos, mientras que en la etapa dos se da la movilización y aplicación de los conocimientos, así como un refuerzo y ampliación del papel de los aprendizajes adquiridos. Finalmente, se debe mencionar que el MEP (2012) propone un estilo de organización de la lección, que sigue cuatro pasos o momentos centrales, a saber: 1) propuesta de un problema, 2) trabajo estudiantil independiente, 3) discusión interactiva y comunicativa y 4) clausura o cierre. Estos momentos no se desarrollan, necesariamente, en un único momento, sino que pueden dividirse en varias clases.

METODOLOGÍA

Este estudio se enmarca en las investigaciones en didáctica de la matemática; es una investigación cualitativa basada en las investigaciones de diseño, considerando dentro de esta los experimentos de enseñanza, los cuales son una secuencia de actividades de aula, cuidadosamente elaboradas en relación con un contenido específico (Molina, M; Castro, Encarnación; Molina, J.L.; y Castro, Enrique; 2011).

Para la preparación del experimento se siguieron los aspectos establecidos en los análisis de contenido, cognitivo y de instrucción. Para efectos del análisis de contenido se recurrió a la revisión de libros de texto, tanto de educación secundaria como universitarios, a las habilidades propuestas en el currículo de matemática que se encuentra en vigor, materiales de capacitación del MEP, unidades didácticas relacionadas con los tópicos en

estudio e investigaciones previas. Esta fase repercutió en un listado de conceptos, notaciones, procedimientos, distintos tipos de representación y algunas aplicaciones.

Con el objetivo de ampliar la información relacionada con los usos que tienen ambas funciones (lineal y cuadrática), se recurrió a la aplicación de una entrevista semiestructurada. La entrevista se aplicó a tres integrantes del Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica, quienes cuentan con experiencia docente, uno de ellos solo a nivel universitario, y los otros dos tanto en educación secundaria como en educación universitaria, además, conocen con profundidad los Programas de Estudio de Matemática vigentes. Las preguntas versaron sobre cómo desarrollar una clase relacionada con la función lineal y la función cuadrática acorde con lo propuesto en el currículo actual de Matemática.

Para el caso del análisis cognitivo, se utilizaron dos cuestionarios, con los cuales fue posible ampliar las dificultades y errores que se reportan en la literatura, para el caso del estudiantado de Costa Rica, en el aprendizaje de la función lineal y la función cuadrática.

Los participantes a los cuales se les aplicó el primero de los cuestionarios fueron treinta docentes de Matemática de educación secundaria, de las regiones educativas Heredia y San José Central. En ese instrumento se les presentaba las habilidades específicas para cada una de las funciones y una serie de procedimientos o conocimientos requeridos para la consecución de cada habilidad, debían indicar la frecuencia (siempre, casi siempre, algunas veces, casi nunca, nunca) con que sus estudiantes lograban realizarlos.

El segundo de los cuestionarios se diseñó considerando algunas de las habilidades propuestas en el actual currículo de matemática; consistió en una serie de ejercicios y problemas, relacionados con las funciones en cuestión, y se aplicó a 76 estudiantes de décimo año, de una institución educativa de Alajuela.

Para el análisis de instrucción, se utilizaron algunas de las pautas que dieron los miembros del Proyecto Reforma de la Educación Matemática (entrevista semiestructurada), las habilidades propuestas en los Programas de Estudio de Matemática del MEP y los datos obtenidos en el análisis de contenido y en el análisis cognitivo. En el análisis de las tareas, se tomaron en cuenta diversas variables: conocimientos previos, habilidades que se incentivan con la elaboración de la tarea, contenido matemático, sistemas de representación, dificultades y errores, contexto, procesos matemáticos que se nutren, y complejidad de la tarea. Para las primeras cuatro variables se recurrió a lo determinado en el análisis de contenido y para establecer los errores y dificultades se recurrió a lo elaborado en el análisis cognitivo. Mientras que, para las tres últimas variables se utilizó lo establecido por Marín (2013) y Ruiz (2017) en el marco teórico de esta investigación.

Para la distribución del tiempo asignado a cada etapa, se tomó como referencia la distribución propuesta, en conjunto, por el MEP y Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2014), quienes sugieren que el estudio de la función lineal se realice en diez lecciones de cuarenta minutos, de las cuales se dediquen tres a la primera etapa; sin embargo, en este trabajo se dedicaron cuatro lecciones a la primera etapa, esto debido a la extensión y riqueza de las tareas propuestas. Mientras que para la función cuadrática estiman que esta temática se aborda en un total de once lecciones, de las cuales cuatro se deben utilizar en el desarrollo de la primera etapa.

Por otro lado, se elaboró una rúbrica para la valoración del material didáctico, basada en los elementos que debe tener una tarea, según Marín (2013). Los ítems de valoración versaron sobre si las tareas propiciaban el uso de distintas representaciones, si la redacción de cada tarea era clara, si se hacía un uso adecuado del lenguaje matemático, sino se inclinaban solo hacia lo algorítmico, si la secuenciación de las tareas era idónea, si el tiempo asignado en la planificación concuerda con la realidad de aula, si utilizaran el material en sus clases, qué aspectos cambiarían, entre otros. La valoración fue realizada por seis profesores de educación secundaria, con una experiencia promedio de dieciocho años, y tres integrantes del Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica. Finalmente, se hizo una puesta en escena con dos grupos de décimo año de educación secundaria y con un grupo de estudiantes universitarios. A raíz de ello, se hicieron cambios en la redacción de algunos de los ítems con el fin de que cumplieran con el objetivo planteado.

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

A continuación, se presentan algunos de los resultados obtenidos producto del análisis de contenido, análisis cognitivo y análisis de instrucción sobre la función lineal y función cuadrática. La revisión de libros de texto, como parte del análisis de contenido, evidenció que a pesar de que la mayoría de los libros de texto de Matemática utilizan dentro de la definición de función lineal la representación algebraica, estas se mostraban de forma muy diversa. En algunos casos añadían conceptos relacionados con variables dependientes e independientes; en otros casos, mencionaban dentro de la definición su representación gráfica, e incluso algunos evidenciaban falta de precisión al definir correctamente el dominio de una función lineal, al indicar que siempre debe ser \mathbb{R} .

Para el caso de la función cuadrática, se encontró que en algunas ocasiones no definían de manera adecuada el dominio y en otros casos ni se definía. Al mismo tiempo, en las definiciones de esta función recurren únicamente a la representación algebraica $f(x) = ax^2 + bx + c$, se excluye la representación algebraica que se expresa con las coordenadas del vértice o la que utiliza a las intersecciones en el eje de las abscisas (ver figura 1). En ambas funciones, se obtuvieron las diversas notaciones, representaciones, definiciones, conceptos, procedimientos y

temas que se relacionan con los tópicos estudiados. A manera de ejemplo, en la figura 1 se muestra el caso de la función cuadrática.

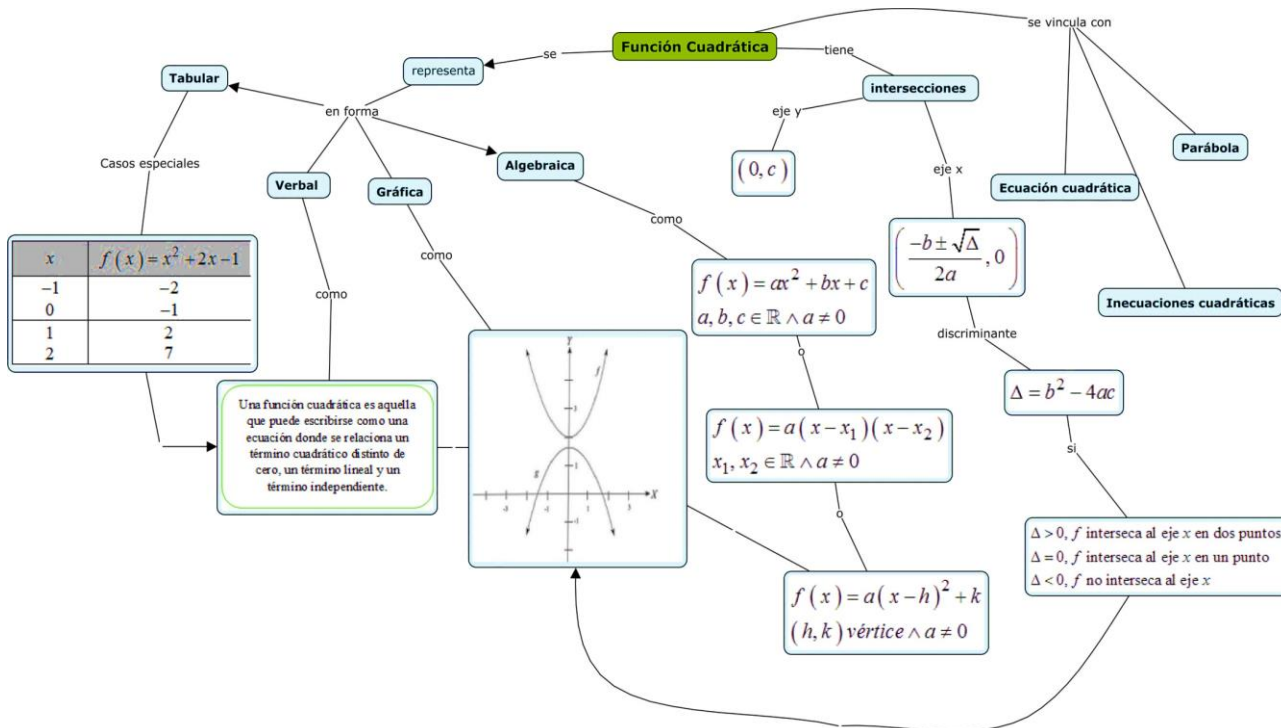


Figura 1. Esquema resumen del análisis de contenido de la función cuadrática.

Nota: Extraída de Fernández, Morales y Quesada (2018)

Por otro lado, como parte del análisis cognitivo, los resultados obtenidos en los cuestionarios aplicados tanto al profesorado como al estudiantado evidenciaron que los errores más frecuentes están relacionados con aquellos originados por deficiencias en el manejo de conceptos, contenidos y procedimientos (Alpízar, Fernández, Morales y Quesada, 2018, 2019). Algunos de ellos responden a la falta de dominio de aspectos conceptuales, como lo es la diferenciación entre los términos abscisas y ordenadas. Así como hay errores en aspectos que no pertenecen directamente a la función lineal y la función cuadrática, pero que forman parte de los conocimientos previos de acuerdo a los Programas de Estudio de Matemática del MEP; ejemplo de esta situación es errar al efectuar operaciones básicas en el conjunto de los números reales, principalmente, en la aplicación de las leyes de signos y en la jerarquización de las operaciones; en resolución de ecuaciones lineales y de ecuaciones cuadráticas, y ubicación de pares ordenados en el plano cartesiano.

Mientras que en relación con las dificultades, la mayoría de los docentes señalaron que una de las principales dificultades se presenta cuando se les solicita a los estudiantes el planteamiento de problemas que se puedan modelar con las funciones en cuestión, este tipo de habilidad es una novedad dentro del actual currículo de

matemática, por ende, si el estudiantado no se ha ejercitado en la elaboración de situaciones problema es muy difícil que al llegar al ciclo diversificado pueda plantearlas, aunque domine conocimientos relacionados.

De manera particular, en el caso de la función lineal, la mayoría de los docentes afirman que los estudiantes tienen dificultades en actividades como la identificación de modelos lineales, la interpretación del concepto de pendiente y en el planteamiento y resolución de problemas. Mientras que en la función cuadrática la principal dificultad se presenta en la determinación de los intervalos de monotonía y de su ámbito.

En cuanto al análisis de instrucción, para la función lineal se elaboraron nueve tareas. En algunos casos se requirió adaptar tareas preexistentes en libros de texto de educación secundaria y en, otros documentos como, artículos de investigación y divulgación; adaptarlas implicó realizar modificaciones para que cumplieran con las habilidades propuestas en los Programas de Estudio de Matemática, para que abarcaran los diversos sistemas de representación detectados en el análisis de contenido o para exponer a los estudiantes ante situaciones, que fueron detectadas, con gran grado de dificultad o propensas al error, según el análisis cognitivo.

De las tareas obtenidas, para la función lineal, cinco tienen un nivel de complejidad de conexión, dos de reflexión y dos de reproducción. Además, se determinó en cuál de las dos etapas, que conllevan las clases de Matemática según los Programas de Estudio del MEP, se debe utilizar cada una de ellas.

En la figura 3 se muestra una de las tareas y posteriormente su respectivo análisis. En esta tarea se puede evidenciar el rol que juegan los sub-análisis realizados. La tarea propicia el uso de distintas representaciones de la función lineal, y la interpretación de la pendiente, además muestra un ejemplo de una función lineal cuyo dominio es un conjunto discreto.

<h1 style="margin: 0;">Tarea 4</h1>	<p>TELEVISIÓN SATELITAL</p> <p>Movilización y Aplicación de los Conocimientos</p>
-------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------

¿Sabías que la función lineal $f(x) = mx + b$ tiene aplicaciones en situaciones diversas?

Algunas de ellas son:

- En la transformación de la temperatura en la escala de grados Celsius a grados Fahrenheit o a grados Kelvin, las cuales se realizan mediante funciones lineales.
- En el cálculo de la edad, aproximada, en semanas, de un feto tras medir su longitud en centímetros.
- En Física, en la cual tiene aplicación en los Movimientos Rectilíneos uniformes.

Según la Encuesta Nacional de Hogares realizada por el Instituto Nacional de Estadística y Censos (INEC) en el 2017, en Costa Rica, 69% de los hogares cuentan con televisión por cable. Santiago es uno de los costarricenses que actualmente no cuenta con dicho servicio, por lo cual se encuentra considerando la opción de contratar un servicio de televisión por cable. Él visita el sitio web de la empresa y se encuentra con la siguiente información:

La compañía televisiva entre sus servicios ofrece una tarifa base para el paquete básico en HD por un costo de ₡12 500 para un televisor y ₡3500 por cada televisor adicional.

Con base en la información anterior:

- a. Realice una representación tabular sobre el costo a pagar dependiendo de la cantidad de televisores que adquiera Santiago, hasta un máximo de 4.
- b. Escriba una función que estime el costo a pagar dependiendo de la cantidad de televisores.
- c. ¿Cuál es la pendiente de la función anterior y cómo se interpreta en este contexto?
- d. Realice un esbozo de la gráfica que relacione el costo a pagar dependiendo de la cantidad de televisores adquiridos.

Figura 2. Tarea relacionada con la función lineal.
 Nota: Extraída de Fernández, Morales y Quesada (2018)

Asimismo, para cada una de las tareas se realizaron distintas formas de solución, con el fin de obtener los diversos caminos de aprendizaje que pueden tomar los y las estudiantes en la resolución de ellas, los conocimientos previos que son necesarios y los errores o dificultades que pueden aparecer durante el camino. A manera de ejemplo, en la figura 4 se muestran las soluciones posibles a la tarea que aparece en la figura 3.

Solución 1	Solución 2	Solución 3						
<p>x: cantidad adicional de televisiones</p> <p>$c: \{0, 1, 2, 3, \dots\} \rightarrow \mathbb{R}$ con</p> <p>$c(x) = 12\,500 + 3500x$</p>	<p>x: cantidad total de televisiones</p> <p>$c: \{1, 2, 3, \dots\} \rightarrow \mathbb{R}$ con</p> <p>$C(x) = 12\,500 + 3500(x-1)$</p> <p>$= 12\,500 + 3500x - 3500$</p> <p>$= 9000 + 3500x$</p>	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin-bottom: 10px;"> <tr> <th style="width: 50%;">Cantidad de televisores</th> <th style="width: 50%;">Costo</th> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">1</td> <td style="text-align: center;">12 500</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">2</td> <td style="text-align: center;">16 000</td> </tr> </table> <p>$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{16000 - 12500}{2 - 1} = 3500$</p> <p>Cálculo de b</p> <p>$12500 = 3500 \cdot 1 + b$</p> <p>$\Rightarrow b = 12500 - 3500 \cdot 1 = 9000$</p> <p>$c: \{1, 2, 3, \dots\} \rightarrow \mathbb{R}$ con</p> <p>$C(x) = 3500x + 9000$</p>	Cantidad de televisores	Costo	1	12 500	2	16 000
Cantidad de televisores	Costo							
1	12 500							
2	16 000							

Figura 3. Posibles soluciones a la tarea “Televisión Satelital”.
 Nota: Extraída de Fernández, Morales y Quesada (2018)

A continuación, se presenta una tabla con el estudio de las variables (Rico, 2011) que estuvieron inmersas en la tarea presentada, estas fueron definidas en el marco teórico de este artículo. En esta tabla también se evidencia el uso de las fases del análisis didáctico. Para las variables de conocimientos previos, habilidades específicas, otras habilidades y dificultades, se requiere del análisis de cognitivo; mientras que, para las variables contenido matemático y sistemas de representación se requiere el análisis de contenido. Finalmente, para los contextos, procesos y complejidad se requiere del análisis de instrucción.

Tabla 2. Análisis de las variables involucradas en la resolución de la tarea “Televisión satelital”.

Variables analizadas	Aspectos determinados
Conocimientos previos	<ul style="list-style-type: none"> a. Ubicación de pares ordenados. b. Resolución de ecuaciones lineales. c. Funciones con dominio discreto o continuo. d. Concepto de pendiente.
Habilidades específicas de la función lineal en décimo año.	<ul style="list-style-type: none"> a. Representar gráficamente una función lineal. b. Determinar la pendiente, la intersección con el eje de las ordenadas y de las abscisas de una recta dada, en forma gráfica o algebraica.
Sistemas de representación	Verbal, tabular, algebraica y gráfica
Situación/contexto	Personal
Procesos	<ul style="list-style-type: none"> a. Representar – Grado 2 – Involucra pasar de una representación Matemática a otra en la resolución de problemas. b. Razonar y argumentar – Grado 2 – Debe brindar información que no está dada de manera explícita en la resolución del problema. c. Plantear y resolver problemas – Grado 1 – En la resolución del problema se involucra la utilización de algoritmos de resolución de ecuaciones lineales y la fórmula de la pendiente.
Dificultades/ Errores	<ul style="list-style-type: none"> a. Mal empleo de la ley de signos en la realización de operaciones básicas en el conjunto de los números reales. b. Error al efectuar operaciones básicas en el conjunto de los números reales. c. Error al aplicar algoritmos relacionados con la resolución de ecuaciones lineales. d. Aplica incorrectamente la fórmula de la pendiente al hacer $m = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$ ó $m = \frac{y_2 - x_2}{y_1 - x_1}$ e. Ubicación incorrecta de pares ordenados. f. Dada la representación algebraica de una función lineal traza una parábola como su representación gráfica. g. Error al expresar en forma gráfica una situación dada al no tomar en cuenta el dominio de esta.
Complejidad	Conexión

Nota: Extraída de Fernández, Morales y Quesada (2018)

De manera similar al caso de la función lineal, para la función cuadrática se elaboraron ocho tareas. Tres de las tareas son del nivel de complejidad de conexión, dos de reproducción y tres de reflexión. Para las cuales también se realizó el análisis de las variables involucradas en cada una de ellas.

Para efectos del material didáctico se elaboraron descripciones de cómo debe abordarse cada tarea en el aula, de acuerdo con la etapa a la que pertenezcan. Además, cuál debe ser su secuenciación y el tiempo aproximado requerido en ellas, así como los recursos necesarios para su ejecución. Como ejemplo, en la tabla 3 se ilustran estos aspectos para el desarrollo de las primeras lecciones relacionadas con el estudio de la función cuadrática.

Tabla 3. Planificación de la etapa uno de la función cuadrática

Etapa 1: Aprendizaje de conocimientos	Tiempo estimado: 2 lecciones
Contenidos matemáticos	Ecuaciones cuadráticas Análisis algebraico de la función cuadrática
Relación con conocimientos previos	Es la primera etapa relacionada con la función cuadrática, se plantea una tarea de modelación matemática, con la que se busca, a través de una hoja de cálculo, un criterio algebraico que sirva de modelo de la situación dada. Se requiere de conocimientos previos relacionados con el análisis de información presente en una representación tabular, del cálculo de imágenes y preimágenes y de la resolución de ecuaciones cuadráticas.
Tareas asociadas	Tarea 1
Interacción	En parejas, estudiante- estudiante, en la etapa final estudiantes – docente. Se sugiere que sea el docente el que forme las parejas para que no haya estudiantes excluidos.
Momentos de clase	En concordancia con lo establecido en el Programa de Estudios de Matemática, la organización de la lección estará dividida en cuatro momentos centrales. En el primero de ellos se propondrá a los estudiantes la resolución de la tarea 1, posteriormente se dará un espacio para el trabajo estudiantil independiente. Se espera que al final de la clase se realice una discusión de los resultados obtenidos en la resolución de la tarea, que comente aplicaciones que tiene la función cuadrática en diversos contextos y defina formalmente la función cuadrática. Una propuesta de definición es la siguiente: “Si $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función, se dice que f es una función cuadrática si existen constantes a, b , y $c \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$ tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$ ”.

Nota: Extraída de Fernández, Morales y Quesada (2018)

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este estudio se muestra una articulación entre los elementos teóricos del análisis didáctico, las estrategias para la valoración de tareas de Ruiz (2017) y las indicaciones metodológicas de los Programas de Estudio de

Matemática (PEM) del MEP (2012). Esta articulación permitió la elaboración de un material didáctico, conformado por 17 tareas para la enseñanza de la función lineal y de la función cuadrática, acorde con las directrices metodológicas del MEP.

El proceso de elaboración de este material didáctico se puede sintetizar en una serie de pasos a seguir para su consecución, los cuales se pueden generalizar para el diseño de tareas relacionadas con las habilidades de otras áreas de los PEM. Estos pasos se consideran como un insumo importante de la investigación realizada y por ende se describen a continuación las pautas a seguir para la elaboración de un material didáctico fundamentado teóricamente y acorde con el currículo actual.

El primer paso es efectuar una revisión exhaustiva de los PEM, una lectura sobre las habilidades específicas que forman parte del tema a desarrollar, aquellas que se desarrollaron de manera previa (en temas o niveles anteriores), los procesos cognitivos que se deben propiciar y las sugerencias de evaluación, con el fin de conocer cómo se va a desarrollar dicha temática.

Una segunda fase tiene como objetivo determinar todos los conceptos, procedimientos, sistemas de representación y situaciones en los que se utilizan los temas a desarrollar, con el objetivo de que estos sean utilizados en los distintos ítems que compondrán las tareas. Este aspecto responde al análisis de contenido, y se puede llevar a cabo con la búsqueda en diversas fuentes como libros de textos, tanto de educación secundaria como universitarios, en tesis, actas de congresos, y revistas científicas, con el fin de determinar las definiciones y desarrollo del tema en estudio. Por último, se recomienda hacer un esquema (mapa conceptual) con la información encontrada, con el fin de visualizar de forma general aspectos relacionados con los conceptos, representaciones, aplicaciones, esto con el fin de ordenar las ideas. Con la puesta en escena del material didáctico este esquema se irá nutriendo de otros objetos, debido a que podrían aparecer elementos que no se consideraron desde la planificación, por ello se menciona que este tipo de análisis es cíclico.

Además, se debe dotar de sentido a los contenidos matemáticos; es decir, relacionarlos con situaciones en las que tiene utilidad el contenido matemático, en la medida de lo posible en la vida cotidiana. Este punto es señalado tanto en el análisis didáctico como el currículo que está en vigor, por lo cual requiere de especial atención. Se recomienda buscar en artículos de investigación sobre modelación matemática, en tesis, en sitios web confiables, libros de textos de diferentes niveles educativos, etc. En las fuentes mencionadas, no siempre se encontrará una situación problema como tal, pero el docente debe utilizar la información, que podría ser simplemente una fórmula o un conjunto de datos, y con base en ella plantear las situaciones.

No obstante, la persona docente puede utilizar algunos contextos con fines meramente didácticos; es decir, que el problema plantee ítems con los que se busca determinar la comprensión de un concepto o se propicia el desarrollo de algún proceso cognitivo, pero sin que necesariamente respondan a la solución de un problema real.

Por otra parte, el análisis cognitivo establece que se deben determinar, de manera hipotética o empírica, cuáles son los errores y dificultades que podrían enfrentar los estudiantes en la resolución de tareas matemáticas. En contraste con esta parte teórica, considerando que la determinación hipotética de los errores y dificultades pueden depender de la experiencia docente, se recomienda complementarlos con una búsqueda en sitios web de investigaciones relacionadas con este aspecto. La importancia de este punto radica en que se tendrá una idea del tipo de ítems que se deben incluir en las tareas, con el fin de exponer a los estudiantes ante esas situaciones consideradas como limitaciones de aprendizaje.

Finalmente, se puede destacar que si bien el proceso de elaboración del material didáctico que se reporta en este escrito fue extenso, y que quizá en la realidad de aula, de algunos y algunas docentes de educación secundaria, no sea posible realizar todas las fases en cada temática, los elementos descritos brindan orientaciones que podrían permitirles la realización de algunas de las fases comentadas, y con la puesta en práctica de ellas ir mejorándolas y ampliándolas, y así estar en concordancia con los requerimientos metodológicos que se solicitan en el currículo actual de Matemática del MEP y contribuir con el proceso de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes en educación secundaria.

REFERENCIAS

- Alpízar, M., Fernández, H., Morales, J.L. y Quesada, S. (2018). Dificultades y errores presentes en estudiantes de educación secundaria en el aprendizaje de la función lineal. *Revista de Investigación y Divulgación en Matemática Educativa (RIDEME)*, 9(1), 6-19.
- Alpízar, M., Fernández, H., Morales, J.L. y Quesada, S. (2019). Limitaciones de aprendizaje que evidencian estudiantes de educación secundaria en el estudio de la función cuadrática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (ALME)*, 32(1), 121-130.
- Fernández, H., Morales, J.L. y Quesada S. (2018). *Análisis didáctico, como fundamentación teórica, en la elaboración de materiales didácticos coherentes con el Programa de Estudios de Matemática de Costa Rica: el caso de la función lineal y de la función cuadrática*. (Tesis de licenciatura). Universidad Nacional, Heredia, Costa Rica.
- Marín, A. (2013). El análisis de instrucción: Instrumento para la formación inicial de procesos de secundaria. En L. Rico, J.L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática: Metodología en investigación, formación de profesores e invención curricular* (pp. 103-120). Granada, España: Editorial Comares, S.L.
- Ministerio de Educación Pública (2012). *Programas de Estudio en Matemática para la Educación general Básica y el Ciclo Diversificado*. San José, Costa Rica: autor.

- Ministerio de Educación Pública de Costa Rica y Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2014). *Documento de integración de habilidades para Décimo año*. San José, Costa Rica: autor.
- Ministerio de Educación Pública (2015). *Informe Nacional de Bachillerato de la Educación Formal 2014*. San José, Costa Rica: autor.
- Molina, M., Castro, E., Molina, J.L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(1), 75-88. <https://doi.org/10.5565/rev/ec/v29n1.435>
- Rico, L. (2011). El estudio PISA y la evaluación de la competencia Matemática. *Matematicalia Revista Digital de Divulgación Matemática*, 7(1), 1-12.
- Rico, L. y Fernández, A. (2013). Análisis Didáctico y Metodología de Investigación. En L. Rico, J.L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática: Metodología en investigación, formación de profesores e invención curricular* (pp. 1-22). Granada, España: Editorial Comares, S.L.
- Ruiz, A. (2017). Evaluación y Pruebas Nacionales para un Currículo de Matemática que enfatiza capacidades superiores. *Cuadernos de investigación y formación en Educación Matemática*, 12(1), 1-245.