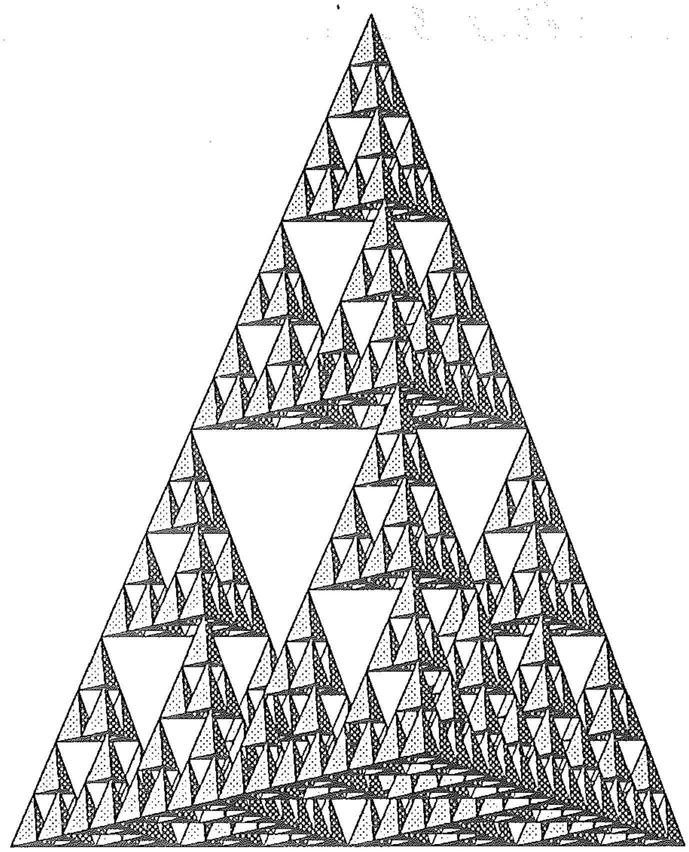
La belleza y el alcance de lo elemental



MateBáSica / MateMáTica

Pedro Gómez

una empresa docente®

Universidad de los Andes

Bogotá, diciembre de 1993. Primera edición revisada.

Departamento de Matemáticas

Universidad de los Andes

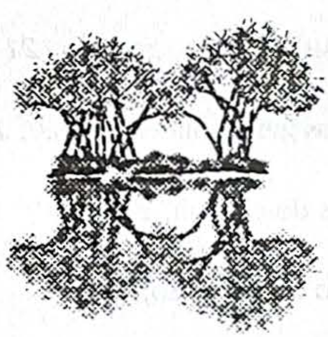
Diseño carátula: Alef Publicidad, Fred Pinto y Lucía Duque

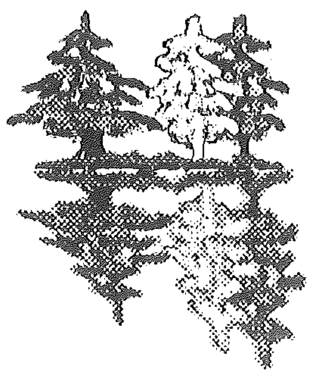
Ilustración: Carolina Villamil

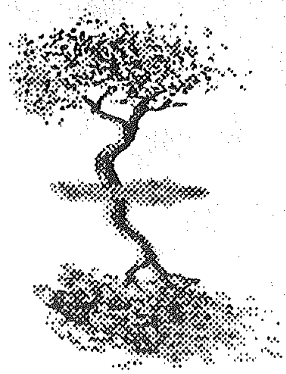
Diagramación: Interlínea Editores y una empresa docente®

Impresión: PANAMERICANA Formas e Impresos S.A., Colombia

Contenido

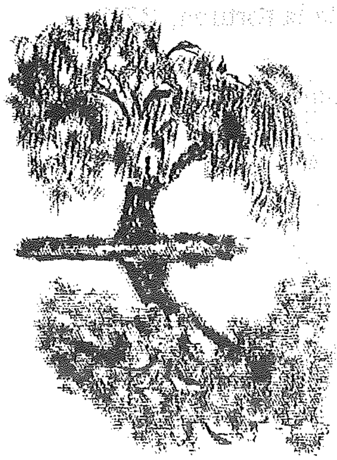






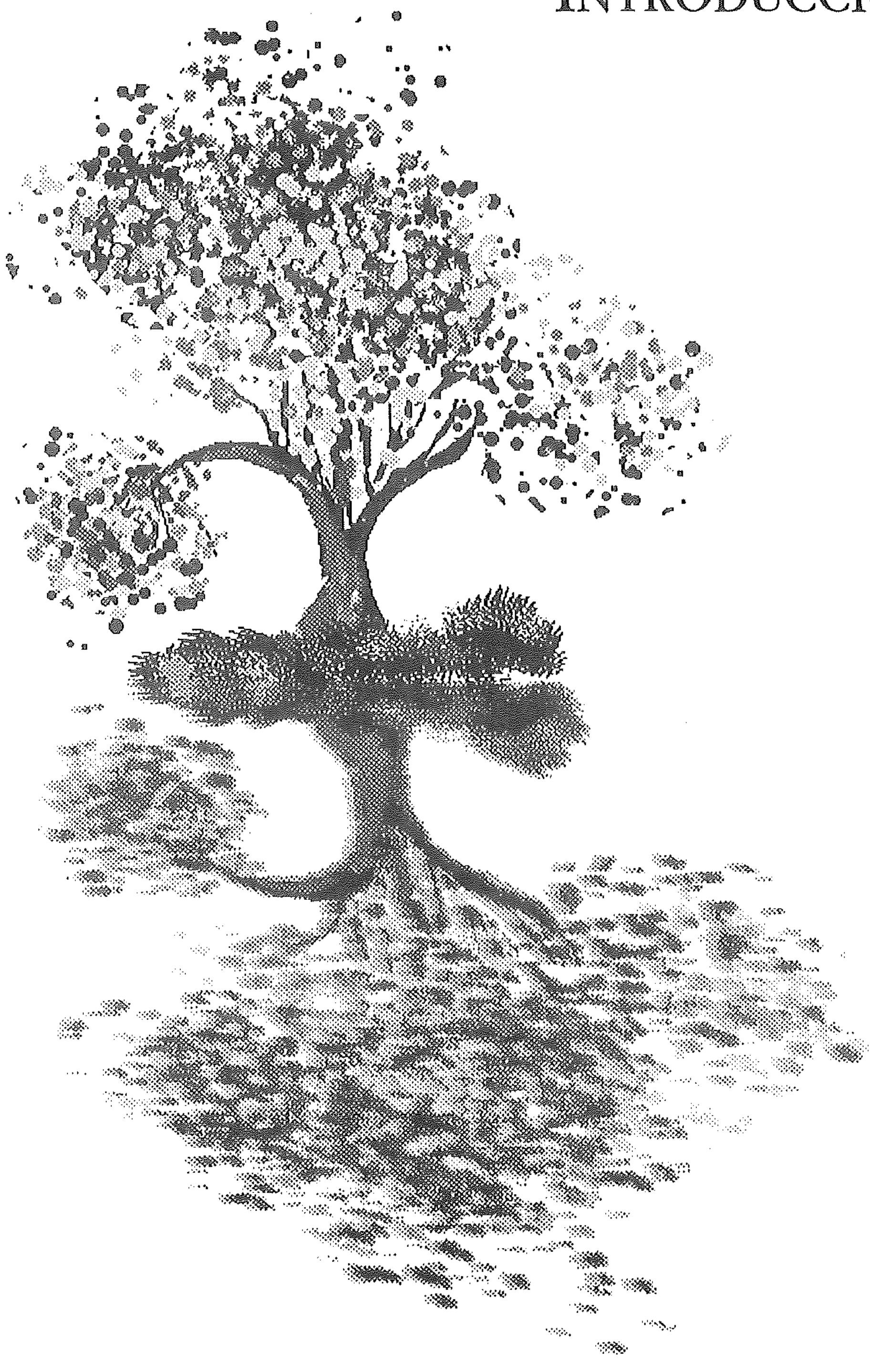
4. Los numeros

5. ACERTIJOS



1.

INTRODUCCION



1. Introducción

Mate$^{B}_{M}$á$^{S}_{T}$ica es el resultado de tres años y medio de investigación en la docencia de las matemáticas por parte del autor y de sus colaboradores. El libro presenta una visión no tradicional de las matemáticas y de la ciencia que busca, partiendo de bases elementales y sin suponer ninguna preparación matemática, abrir el camino para el desarrollo de las capacidades necesarias para la identificación, la definición, el análisis, la simplificación y la solución de problemas. Los temas se desarrollan dentro de un ambiente que pretende ser atractivo y ameno, bajo la suposición de que toda persona, independientemente de su formación y de sus intereses, puede llegar a disfrutar las matemáticas.

El libro se divide en cuatro partes claramente definidas. La parte de *Sistemas Formales* presenta el concepto de sistema formal a manera de juego. Se busca que el lector descubra y maneje naturalmente los conceptos de axioma, regla de deducción, teorema y demostración. Se proponen entonces una serie de realidades que es posible modelar gracias a los sistemas formales. Entre ellas se cuentan los fractales, el lenguaje y los números. Una vez que se ha experimentado con estos temas, se propone una herramienta general de modelaje con la cual se pretende que el lector pueda simplificar problemas complejos para analizarlos.

La parte de *Ciencia y Sociedad* se basa principalmente en guías de lectura del libro **Cosmos** de Carl Sagan a través de las cuales se busca que el lector descubra la naturaleza y el alcance del método científico. También se analizan textos de Platón, René Descartes y Bertrand Russell con el propósito de reflexionar acerca de la naturaleza del conocimiento humano.

En la parte de *Números* no se pretende "hacer" matemáticas. Se busca, más bien, que el lector reflexione acerca de los conceptos abstractos de número e infinito con el propósito de que desarrolle su capacidad de abstracción y se acostumbre a trabajar al interior del mundo de las ideas. En esta parte se analizan textos de Gabriel García Márquez, Bertrand Russell, Raymond Queneau y Jorge Luis Borges.

Finalmente, la parte de *Acertijos* es un conjunto de problemas de diversos tipos diseñados para que el lector descubra y desarrolle métodos de resolución de problemas.

Este libro hace parte de un proyecto de investigación en docencia y es el texto del curso *Matemáticas, Ciencia, Sociedad* que se dicta actualmente a los estudiantes de primer semestre de Ciencias Sociales en la Universidad de los Andes. El libro está acompañado de dos herramientas metodológicas complementarias. Por una parte, existe una guía del profesor en la que se presentan los objetivos pedagógicos particulares a cada uno de los temas y se dan sugerencias metodológicas para el manejo de los mismos dentro del salón de clase. Por otra parte, una empresa docente ha desarrollado un conjunto de programas de computador, llamados *Didactigramas Matemáticos*, con los cuales se espera que el lector viva experiencias complementarias a los temas del libro.

El libro contiene dos textos de Bertrand Russell y un texto de Raymond Queneau traducidos por el autor y sus colaboradores. También contiene una conferencia poco conocida de Gabriel García Márquez.

Tengo que hacer un comentario particular acerca del "fantasmita de la letra pequeña". El es el responsable de aquellas frases que esporádicamente aparecen en el texto enmarcadas entre dos tréboles. He recibido comentarios diversos acerca de este personaje. Sin embargo, y aunque muchos estudiantes opinan que los chistes son muy malos, ellos mismos me han pedido que los mantenga dentro del libro. ♣*Saludos del fantasmita de la letra pequeña*♣

El proyecto **Mate$^{B}_{M}$á$^{S}_{T}$ica** continúa siendo un proyecto en evolución. Es así como me encuentro preparando dos materiales que son producto de la experiencia de **Mate$^{B}_{M}$á$^{S}_{T}$ica**. El primero es *Sistemas formales, informalmente*, con el cual se dictará un curso experimental durante el segundo semestre de 1990 en la Universidad de los Andes. El segundo es un material de trabajo, titulado *Profesor: no entiendo* que pretende recoger la experiencia docente producto de estos tres años y medio de trabajo.

Finalmente, quiero agradecer a tres instituciones que han colaborado financieramente con el proyecto. El Presupuesto Nacional, a través del Icfes, que hizo una donación al proyecto Matemáticas y Sociedad, del cual este proyecto hace parte. La corporación Apple Computer, Inc. que donó un computador con el cual hemos podido desarrollar la mayor parte del contenido gráfico del libro y en el cual estamos

desarrollando los didactigramas matemáticos. Y el *comité de investigaciones de la Facultad de Ciencias* que financió parcialmente la tercera versión del libro.

2. Prólogo a la sétima versión

Esta es la sétima versión y la primera edición de **$\text{Mate}^{B}_{M}\text{á}^{S}_{T}\text{ica}$**. Como ha sido costumbre en todas las versiones, ésta es diferente de la anterior en múltiples aspectos y quisiera reconocer el trabajo de las personas que hicieron esto posible.

María Alicia Angel y Marta Ayerbe, de *Interlínea Editores*, nos colaboraron en el diseño de la nueva diagramación.

Cristina Gómez, directora del proyecto *Matemáticas, Ciencia, Sociedad* y principal motor del proyecto y María del Mar Farello, estudiante de Lenguas Modernas y continua colaboradora, hicieron una revisión exhaustiva de los textos.

La parte de *Sistemas Formales* ha sido revisada por completo. La mayor parte de los textos han sido escritos nuevamente. En particular, el capítulo "Sistemas formales y el lenguaje" del cual es autora Cristina Gómez y en el que tuvimos la colaboración del profesor Aquiles Páramo, fue completamente renovado. Aparecen también nuevos textos al comienzo y al final de esta parte.

Amanda Molina, estudiante de primer semestre de Ciencia Política, produjo la mayor parte de los fractales que aparecen en el libro.

Carolina Villamil, estudiante de Artes de sétimo semestre, produjo la serie de nuevos dibujos por computador, dentro del marco de un proyecto especial de investigación. Ha sido tal entusiasmo y el interés de Carolina que, en algún momento pensé que el libro sería más un libro de ilustración acompañado de algunos textos, que lo contrario.

Finalmente quiero agradecer a Felipe Fernández por su cuidadoso trabajo de armado y preparación de artes y a todos los miembros de "una empresa docente" por sus comentarios y su continuo apoyo y entusiasmo.

Bogotá, 19 de mayo de 1990

3. Prólogo a la sexta versión

Esta es la sexta versión del libro **MateBáSica** texto del curso **01103 - Matemáticas, Ciencia, Sociedad** que dicta el Departamento de Matemáticas de la Universidad de los Andes a los estudiantes de ciencias sociales.

Este libro es una expresión de la filosofía de *libro vivo* dentro de la cual se enmarcan los proyectos de "una empresa docente". Es así como en dos años y medio de vida del proyecto, se han producido seis versiones diferentes del texto, cada una aprovechando las experiencias vividas con las versiones anteriores. En este caso, es necesario mencionar los cambios que tuvieron lugar durante el último semestre y que diferencian esta versión de la anterior.

Para comenzar, se ha cambiado el formato del libro. Se ha pasado de un formato tamaño carta a un formato medio oficio que esperamos sea más cómodo para los estudiantes. Se eliminaron los capítulos "Aritmética" y "¿No es cierto?" cuyos objetivos se cumplen ahora a través de otros temas del curso. Se han introducido nuevos capítulos y correcciones a textos que ya existían.

Alfonso Meléndez es el autor del capítulo "Fractales y recursión", Este texto pretender introducir al estudiante a los conceptos de recursión y transformación a través de los fractales y los sistemas formales. Tengo que mencionar también a mi amigo Carlos Puente quien me introdujo hace ya tiempo al tema de los fractales cuando éste era prácticamente desconocido en nuestro medio y con quien he tenido innumerables discusiones al respecto. Este capítulo es un pálido reflejo de estas comunicaciones.

Bernardo Recamán es el autor del capítulo "Elecciones en Alfagonia" en el cual se pretende que el estudiante analice, con las herramientas desarrolladas dentro del curso, una situación social compleja. Bernardo es también el autor de múltiples acertijos que hacen parte del manual del profesor.

Diego Cardona revisó todo lo correspondiente a "Acertijos", eliminando algunos e introduciendo unos nuevos de su propia cosecha. El también ha trabajado en la mejora del manual del profesor.

Guillermo Cardozo hizo una revisión detallada del capítulo "El método axiomático" que tuvo como consecuencia la producción de un texto completamente nuevo en el que se aprovechan las experiencias del semestre anterior.

Finalmente, quisiera agradecer a Cristina Gómez responsable del proyecto MateBáSica, quien revisó y editó detalladamente cada uno de los nuevos textos.

París, junio de 1989

4. Prólogo a la quinta versión

1. Una nueva versión

Esta es la quinta versión del libro **MatebásicaMática**, texto del curso **Matemáticas, Ciencia, Sociedad** en la Universidad de los Andes. Es la segunda versión encuadernada y la tercera versión producida con las técnicas de autoedición e impresa con la tecnología láser.

Esta quinta versión trae algunas cosas nuevas con respecto a la versión anterior.

En el tema de los sistemas formales, se ha revisado y mejorado el capítulo sobre producir los números; se ha escrito una introducción al método axiomático con especial referencia a la geometría euclidiana; y se ha introducido un nuevo capítulo sobre las teorías de Chomsky acerca de un modelo axiomático del lenguaje natural. Estos cambios buscan atacar el principal defecto del *Acertijo de MU* elemento central de esta parte del curso: su carencia de una semántica. Este trabajo fue realizado por el profesor Guillermo Cardozo y la estudiante de segundo semestre de sicología, Adriana Mogollón, dentro del marco de un proyecto especial de investigación, con la colaboración del Departamento de Psicología y de la Facultad de Humanidades.

La profesora Cristina Gómez produjo las hojas de trabajo adicionales en el tema de Cosmos. Estas hojas buscan profundizar en aspectos matemáticos de algunos temas específicos tratados en cada uno de los capítulos del libro de Sagan. Pretenden servir de base para el trabajo de exposición que se hace dentro del curso.

Fred Pinto produjo unos nuevos fractales para esta versión. Con ellos se construyó el capítulo correspondiente que busca introducir los conceptos de transformación y recursión. Este es un tema que aparece por primera vez en el texto.

El profesor Carlos Aya produjo una parte de la bibliografía comentada que aparece por primera vez en el texto.

2. Un curso y un libro vivo

El curso de **MatebásicaMática** es un curso que evoluciona. Se pretende que los profesores se comprometan con el curso al reflexionar sobre diversos temas y producir textos que mejoren y apoyen temas que ya existen o al introducir temas nuevos que parecen interesantes en el logro de los objetivos.

De la misma manera, el texto de **MatebásicaMática** también evoluciona. Es así como este libro es expresión de un término acuñado por el doctor Arturo Infante, rector de la Universidad de los Andes: el de **MatebásicaMática** es un *libro vivo*. Un libro que cambia cada semestre, gracias a las experiencias vividas con la versión anterior y que busca permanentemente el ideal de presentar los temas que de manera más eficiente permitan lograr los objetivos del curso.

El concepto de *libro vivo* en busca de la excelencia en la docencia no sería posible sin la existencia de "una empresa docente," la recién creada organización editorial del Departamento de Matemáticas de la Universidad. "una empresa docente" nació durante el segundo semestre de 1988, gracias al apoyo incondicional de las directivas de la Universidad y del jefe del Departamento de Matemáticas, como respuesta a la constante preocupación que tanto unos como otros tienen por el avance de la docencia dentro de la Universidad. La Universidad ha querido hacer una nueva inversión en este tema al apoyar una organización que pretende dar una vía de expresión apropiada a aquellos profesores que dentro de su preocupación por la docencia requieren de un medio editorial para lograr sus objetivos.

Esta versión del libro fue completamente revisada y realizada por "una empresa docente" y quisiera agradecer a sus miembros, Vilma María Mesa, Patricia Inés Perry, Felipe Fernández y Sergio Bernal.

5. ¿MatebásicaMática?

1. Introducción

La Universidad de los Andes ha mantenido, desde su fundación, una posición particular con respecto al valor formativo de las matemáticas. Es así, como la totalidad de los estudiantes de la universidad se ven obligados a ver por lo menos un curso de matemáticas durante su carrera.

Este texto hace parte de una experiencia pedagógica que se ha desarrollado en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de los Andes y que pretende cumplir con los propósitos de formación integral del estudiante que hacen parte de la misión de la universidad.

Este es el texto del curso **Matemáticas, Ciencia, Sociedad**, conocido en los corredores de la Universidad como **MatebásicaMática**. Es el primer curso de matemáticas que deben ver los estudiantes de psicología, bacteriología, ciencia política, derecho, antropología, lenguas modernas, artes y textiles.

2. La historia

El curso de **MatebásicaMática**, "antiguamente" conocido como el "cero-tres", tiene una larga historia. Es una historia que no ha sido necesariamente la más agradable para el estudiante. Durante mucho tiempo (y hasta hace unos seis años) éste era el curso "fucú" de los estudiantes de ciencias sociales. Se pretendía hacer un repaso de las matemáticas del colegio, utilizando textos americanos, metodologías cercanas al terrorismo* y profesores para quienes dictar el curso era más bien un castigo.

La característica principal de este gran período de la historia del "cero-tres" era la falta de motivación del estudiante. Para él, el curso no era más que un requisito que debía cumplir para poder culminar su carrera. El tema era el mismo tema que lo hizo sufrir en el colegio y que, por lo menos en algunos casos, le hizo pensar que él era más "humanístico" o "literario" que "científico" o "matemático" y que lo indujo a escoger una carrera en la que "no hubiese matemáticas".

* Esto, obviamente, desde el punto de vista del estudiante.

El estudiante, con gran esfuerzo, en algunos casos, lograba aprenderse de memoria las principales fórmulas, con las cuales, después de varios intentos, lograba tener el éxito mínimo que se requería para pasar el curso.

Nos gusta pensar que esta historia ha cambiado* El curso de MatebásicaMática pretende solucionar estos problemas de motivación y lograr objetivos que estén acordes con los propósitos de formación integral que hacen parte de la misión de la universidad.

Este texto hace parte y es expresión de esta estrategia pedagógica. Este no es un texto para leer; es un texto para hacer. El texto no se puede mirar independientemente de la estrategia de la cual hace parte. Es por ello, que hacemos, a continuación, una presentación de los diversos aspectos del curso **Matemáticas, Ciencia, Sociedad**.

3. El curso

La mejor manera de describir brevemente el curso **Matemáticas, Ciencia, Sociedad** consiste en presentar los objetivos que se definieron al comienzo del mismo. Aunque es evidente que los objetivos han evolucionado a medida que el curso se ha dictado los objetivos iniciales determinaron la mayor parte de las características del mismo. En particular, estos objetivos han sido la guía principal del *contenido del curso* y de la *metodología* utilizada.

A continuación se presentan estos objetivos tal y como se definieron inicialmente.

4. Los objetivos

Los objetivos se definen determinando el "estado" del estudiante al comienzo del curso y el "estado" que se desea que el estudiante tenga al final del curso. En la discusión que se presenta a continuación, se hace para cada uno de los objetivos, una *caricaturización* del estado del estudiante al comienzo del curso. El estado final del estudiante no se expone explícitamente, pero se deduce de la caricaturización presentada. Se pueden identificar los siguientes aspectos:

* Es muy difícil aún evaluar este punto. Hay que esperar a que los estudiantes que vieron el curso en su nueva "forma" estén próximos a terminar su carrera y que, a partir de una visión global de la experiencia docente que hayan vivido, puedan dar sus opiniones acerca de este curso.

Actitud hacia las matemáticas

- No les ve ninguna utilidad dentro de su actividad profesional.

Conocimiento de las herramientas matemáticas básicas

- Tiene "huecos".
- No conoce el *por qué* ni el *para qué.*
- No comprende la relación entre los diferentes temas.

Manera de pensar

- Es desordenado en su pensar.
- No sabe cómo piensa.
- No conoce cómo puede pensar
- No es capaz de proponer adecuadamente un argumento válido para sustentar una tesis.
- No es capaz de criticar un argumento que le es propuesto.

Problemas de comunicación

- No "piensa" lo que está diciendo.
- No comprende el sentido (significado) de lo que está diciendo.
- No comprende y no piensa sobre lo que se le dice.
- No es capaz de hacer una *evaluación semántica* correcta.
- Quiere en todo momento responder.
- No conoce el sentido ni el empleo de los conectivos lógicos.

- No comprende por qué se requiere un empleo formal del lenguaje.

Desconocimiento de historia y filosofía de la ciencia y de las matemáticas

- No ha tratado estos temas y nunca los tratará.
- No ha gozado del *placer intelectual.*
- No ha desarrollado el sentido de la "estética".

Es un primíparo

- No comprende su papel dentro de la universidad.
- No sabe bien por qué escogió estudiar su carrera.
- No comprende el papel de su carrera dentro de la universidad.
- No comprende el papel de la universidad en la sociedad.

5. La metodología

Para lograr los objetivos, se han desarrollado herramientas metodológicas que se presentan a continuación. Como es de esperarse, estas herramientas han evolucionado a través del tiempo.

Despertar inquietudes

El curso busca *despertar inquietudes* en el estudiante y ayudarlo a resolverlas. Por esta razón, el curso *no* es un curso de transmisión de información. El propósito del texto y del profesor *no* es informar al estudiante acerca de un tema particular. Por el contrario, lo que se busca es aprovechar las *intuiciones* que todo estudiante tiene acerca de un tema, para ayudarlo en el proceso de razonamiento que le puede permitir *descubrir* nuevas aproximaciones al tema y definir una posición personal con respecto al mismo.

La importancia de la discusión en clase

Es así como se busca que una proporción importante de las clases se desarrollen a manera de discusión entre los estudiantes. En esta discusión, el profesor y el texto sirven principalmente como moderadores y guías.

En algunos casos, el texto se desarrolla en la clase y las opiniones que los estudiantes van proponiendo a los estímulos del texto y del profesor dan lugar a la discusión. En otros casos, el estudiante ha trabajado el tema en la casa y la discusión en clase parte de las opiniones y los descubrimientos que el estudiante ha obtenido con ese trabajo.

Las lecturas

Una buena proporción del trabajo en la casa consta de lecturas. Estas lecturas son de diversos tipos. En algunos casos son de carácter literario (por ejemplo, cuentos de Borges), en otros, de carácter científico (por ejemplo, las lecturas de Cosmos y las de Russell), en otros, de carácter histórico (por ejemplo, las lecturas sobre la evolución del concepto de número) y en otros, de carácter filosófico (por ejemplo, las lecturas de Platón y las de Descartes).

Todas estas lecturas se apoyan en guías de lectura que el estudiante debe resolver con anterioridad a la clase y que pueden utilizarse como patrones para la discusión. Estas guías de lectura tienen una mínima parte de comprobación de lectura, siendo su propósito principal el de incitar al estudiante a la reflexión y al descubrimiento.

Los acertijos

Los *acertijos* son un elemento metodológico que aparece sistemática y periódicamente en el curso. Estos acertijos son, en su mayoría, problemas con una *trampita* o, sencillamente, problemas para los cuales la solución no es evidente. El propósito de estos acertijos es el de incitar al estudiante a descubrir métodos de razonamiento y de solución de problemas. Una buena proporción de estos acertijos son de carácter verbal y lógico. En otros casos, son de carácter aritmético y pretenden obligar al estudiante a desarrollar su capacidad de análisis.

El trabajo de investigación

Cada una de las lecturas es presentada en clase por una pareja de estudiantes. El propósito de la presentación **no** es hacer un resumen de la lectura que los demás estudiantes han hecho, sino presentar las reflexiones y opiniones personales para incitar a la discusión y profundizar en algunos de los temas tratados en la lectura. La presentación es acompañada por un trabajo escrito. Este trabajo de investigación se hace en conjunto con el profesor quien guía al estudiante en las lecturas adicionales y los temas en los que puede profundizar.

Los comités de trabajo

La constitución de *comités de trabajo* es otra de las herramientas metodológicas utilizadas en el curso. Estos comités, compuestos por estudiantes interesados en un tema particular, investigan sobre el tema y se encargan de presentarlo en clase y de moderar la discusión.

6. El texto

El texto es una expresión de los objetivos y la metodología anteriores y del contenido que se deduce de ellos. Contiene diversos tipos de herramientas metodológicas que se presentan a continuación.

La hoja de trabajo

La primera versión del texto se construyó alrededor de una posición metodológica particular, copiada de aquella que fue desarrollada para el curso de 01-108. La base de esta metodología es la *hoja de trabajo.* Esta hoja de trabajo se hace durante la clase y este trabajo suscita una cierta discusión acerca del tema considerado.

La experiencia vivida inicialmente demostró que, aunque esta metodología podía ser apropiada para algunos de los temas que se tratan en el curso, no debe ser aplicada de manera general. Buena parte del curso requiere de una metodología más abierta que cree el espacio de discusión apropiado al tema y que permita al profesor expresar su posición y su actitud personal con respecto a los puntos en discusión y al curso en general.

Es así como, aunque el texto continúa teniendo una cierta proporción de hojas de trabajo, éstas se utilizan, en su gran mayoría, de manera diferente, y el texto introduce un nuevo material constituído principalmente por guías de lectura y problemas especiales (los acertijos).

La idea de la hoja de trabajo es ahora la de que sirva de guía para el trabajo del estudiante en su casa. Pretende incitarlo a la reflexión sobre temas acerca de los cuales él tiene una cierta posición intuitiva e intenta inducirlo a descubrir por su propia cuenta algunos resultados particulares. Las opiniones y los resultados que el estudiante obtiene en su casa a partir de la hoja de trabajo son la base de la discusión que se lleva a cabo durante la clase. Existen, sin embargo, algunas hojas de trabajo diseñadas para que sean utilizadas durante la clase. La mayoría de estas hojas de trabajo pretenden llevar al estudiante a una posición contradictoria, buscando con esto sorprenderlo y hacerle reflexionar sobre le tema tratado.

La guía de lectura

La nueva versión del texto contiene una herramienta metodológica inexistente en la versión anterior: *la guía de lectura.* Esta herramienta se hizo necesaria a raíz de la aparición de una gran proporción de lecturas que el estudiante debe hacer durante el semestre.

La *guía de lectura* **no** pretende ser simple y exclusivamente una comprobación de lectura. Por el contrario, la guía de lectura se puede mirar como un conjunto de *estímulos* para que el estudiante, a partir de la experiencia que ha tenido al hacer la lectura, reflexione sobre temas desconocidos para él, abstraiga y descubra principios generales a partir de casos particulares e intente aplicar métodos y leyes descubiertas en un entorno particular a otros entornos aparentemente sin relación.

La guía de lectura no es restrictiva. Aunque puede utilizarse como parámetro de la discusión en clase, el profesor o los estudiantes pueden proponer temas de discusión que se encuentren por fuera de aquellos considerados dentro de la guía de lectura.

Las lecturas

En los párrafos anteriores se comentó acerca de la *guía de lectura* como herramienta metodológica. Sin embargo, cabe mencionar el significado metodológico y pedagógico de las lecturas mismas.

El primer aspecto obvio tiene que ver con la actitud del estudiante y del profesor. Para el estudiante es una sorpresa llegar a un curso de matemáticas en el que se le pida que haga lecturas que aparentemente no tienen nada que ver con su concepción tradicional de lo que es un curso de este tipo. Esto tiene consecuencias directas sobre la actitud del estudiante hacia las matemáticas en general y hacia el curso mismo en particular.

En segunda instancia, las lecturas abren un espacio de características particulares con respecto a buena parte de los objetivos del curso. Dentro de este espacio, el estudiante se ve obligado a desarrollar su capacidad de análisis, de síntesis y de abstracción. El tiene que encontrar y mejorar las maneras como debe comunicar lo que sabe y lo que piensa. El tiene que definir tan claramente como le sea posible una posición personal acerca de un tema. Se ve obligado a defenderla racionalmente y a criticar las posiciones de sus compañeros.

En tercer lugar, el estudiante descubre el placer de comprender temas aparentemente alejados de su vida diaria y la importancia de poder aplicar sus descubrimientos en entornos diferentes de aquellos en los que los obtuvo.

En cuarto lugar, el estudiante (por lo menos en algunos casos) se ve abocado a reflexionar sobre la *estética*. Esto es, se ve obligado a preguntarse *"¿Por qué disfruto esta lectura?"* y, luego se ve obligado a tratar de responder esa pregunta.

Finalmente, el estudiante se sorprende al descubrir cómo escritos que él consideraba puramente literarios pueden utilizarse para aproximarse a temas matemáticos.

Los acertijos

Los acertijos constituyen una herramienta metodológica inexistente en la primera versión del texto. Los acertijos son, en su mayoría, problemas con características particulares.

En primer lugar, son problemas simpáticos. La mayor parte de ellos los viven los personajes del curso: Mate, Mático, Ari, Mética, Mótico, Mítico y Mútico.

En segundo lugar, los acertijos pretenden sorprender al estudiante e incitarlo a encontrar su solución.

Tercero, la mayor parte de los acertijos contienen una trampita. Para el estudiante desprevenido, el acertijo tiene una solución obvia. Normalmente, no es la solución adecuada. La trampita puede ser de naturaleza lógica, verbal o aritmética.

Cuarto, los acertijos no tienen una única manera de ser resueltos. En general, hay múltiples maneras y, al final, el estudiante debe criticar y escoger el mejor método de solución.

Los acertijos cumplen con varios objetivos metodológicos y pedagógicos. Algunos de ellos son los siguientes:

- El estudiante debe aprender a leer. Una proporción de las trampas son de carácter semántico. El estudiante desprevenido tiende a dar su propia interpretación del texto.
- El estudiante debe descubrir un método de solución o tratar de aplicar un método general al caso particular.
- El estudiante debe desarrollar su capacidad de argumentación, puesto que se ve obligado a defender la solución que dé a los problemas y además a criticar la de sus compañeros.
- El estudiante debe expresarse correctamente.
- El estudiante debe divertirse y compartir sus experiencias.

Aprender a definir

A través de múltiples temas se obliga al estudiante a definir conceptos abstractos. Es el caso, por ejemplo, del concepto de ciencia, el concepto de número o el concepto de color. Este proceso es esencial para ayudar al estudiante a desarrollar sus capacidades de abstracción, de síntesis, de análisis y de expresión.

Sistemas formales

Este tema ocupa un lugar destacado porque ataca uno de los principales objetivos del curso: desarrollar la capacidad de modelaje para analizar problemas complejos.

A través de problemas complejos se presenta una herramienta inicial que ayuda al análisis de algunos de estos problemas. Esta primera herramienta es restrictiva pero sirve para mostrar lo que se quiere lograr en este capítulo. Luego se hace un trabajo en sistemas formales para establecer un lenguaje y un método de trabajo con problemas de otro tipo. Estudiando temas como *el acertijo de MU*, *adivine la regla*, *fractales*, *lenguaje*, *producir los números* y *método axiomático*, se logra desarrollar la capacidad de modelar situaciones especiales y analizar la realidad a través de modelos.

Finalmente se vuelve al problema de analizar una situación real, haciendo un paralelo con los sistemas formales que se estudiaron inicialmente.

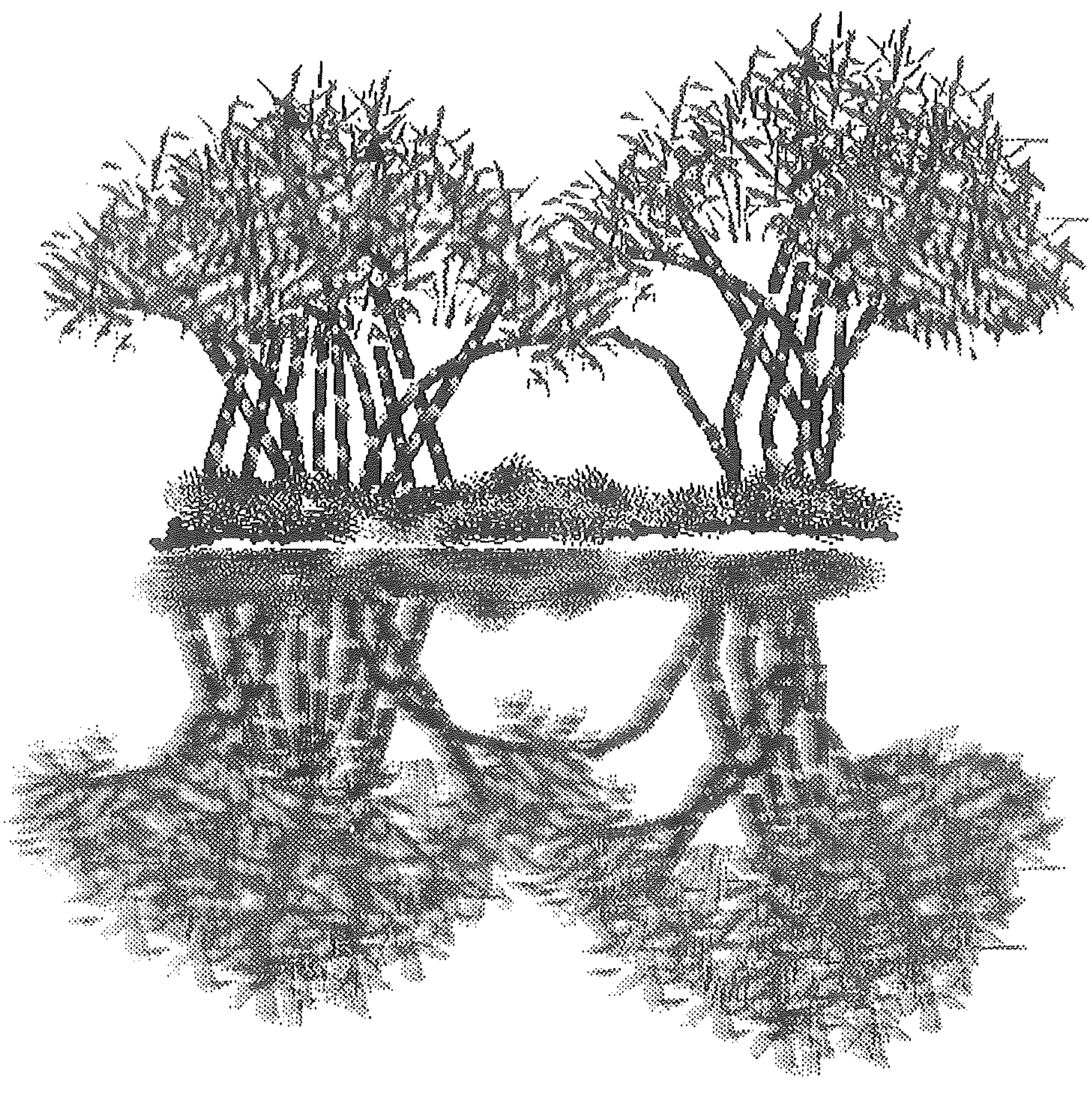
Didactigramas

Luego de varios semestres de estar implementando este diseño del curso, nos hemos dado cuenta de que, en algunos temas, los objetivos no se logran totalmente y que es necesario desarrollar nuevas herramientas que complementen el trabajo del profesor, de los alumnos y del texto.

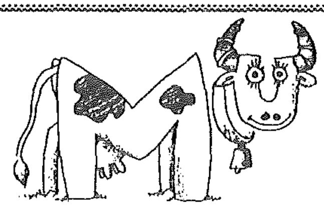
Esta nueva herramienta es un programa de computador que el estudiante utiliza fuera de clase para ejercitarse y vivir una nueva experiencia con algunos de los temas del curso. Tales programas, conocidos como **Didactigramas**, se han diseñado pensando en ofrecer herramientas metodológicas adicionales para temas cuyos objetivos no se logran completamente con las herramientas tradicionales. Estos programas se han desarrollado para algunos temas de sistemas formales en los que se requiere que el estudiante viva experiencias complementarias que pueda compartir dentro del marco de una discusión en clase.

2.

Sistemas formales



1. El acertijo de MU



> *Yo creo en las reglas del juego. Mire usted los niños cuando juegan. Para ellos el juego es una cosa muy seria. En mis cuentos hay muchas reglas del juego, una de ellas sucede en el Metro de París. Un hombre establece unas reglas del juego para seguir a una mujer. Es terrible puesto que las reglas deben ser respetadas. Son cosas que chicos y grandes se imponen y no se puede hacer una trampa porque si se hace una trampa se pierde todo el placer, excepto si se es tramposo. El juego es una estructura, una construcción mental en la que se tiene toda la libertad de actuar sin que se sobrepasen o se violen las reglas.*
>
> *Julio Cortázar*

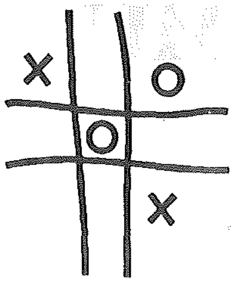
1. ¿Qué es un juego?

Durante las próximas semanas vamos a jugar. El juego se llama *el acertijo de MU.* Tendremos, por consiguiente, que aprender a jugar el juego y, para ello, a usted se le presentarán los *ingredientes* del juego, las *reglas* del juego y el *propósito* del juego. Sin embargo, antes de presentarle el juego, es conveniente que usted reflexione un poco acerca de la naturaleza de los juegos.

a. Intente explicar, en sus propias palabras, el concepto general de juego. Esto es, responda a la pregunta: ¿qué es un juego?

Usted debe haberse dado cuenta que todo juego tiene ciertos *elementos.* Para comenzar, todo juego debe tener unos *ingredientes.* Uno debe poder jugar con "algo". ✤*Esto es válido aún para los juegos mentales. Porque, al fin y al cabo, la mente es "algo". ¿O no?*✤ Por otro lado, todo juego debe tener unas *reglas.* Si no hay reglas, no hay juego. Porque si no, ¿cómo podemos jugar? Finalmente, todo juego tiene un *propósito.* En la mayoría de los juegos en que participan dos o más personas, el propósito es el de *ganar.* Y para ganar hay que lograr un objetivo.

b. ¿Podría usted exponer brevemente cuáles son los ingredientes, las reglas y el propósito del juego de *trique*? Tenga en cuenta que usted debe explicar el juego de tal manera que cualquier persona suficientemente inteligente que no conozca el juego lo entienda y pueda jugar. Por si usted no se acuerda cuál es el juego de trique, le presentamos un dibujito.



Ahora que usted ha sentido un poco la dificultad que implica definir y explicar un nuevo juego, podemos contarle un poco acerca del acertijo de MU. La idea del acertijo de MU aparece en el libro de Douglas B. Hofstadter, Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid. *Londres: Penguin Books, 1979. Si alguna vez, usted se estrella con este libro, no lo deje pasar de largo. Puede llegar a ser la oportunidad de su vida para disfrutar del verdadero placer intelectual.*

2. Los ingredientes del juego

Los siguientes son los ingredientes del acertijo de **MU**:

Sólo está permitido usar las letras **M**, **U** e **I** para formar palabras.

El sentido de la palabra palabra aquí es sencillamente una hilera o sucesión de letras. Una palabra del juego no tiene que ser una palabra con *significado* para que sea aceptada. Por ejemplo, **MI** y **MUI** son palabras del juego, mientras que **PAB** y **SOL** no son palabras del juego.

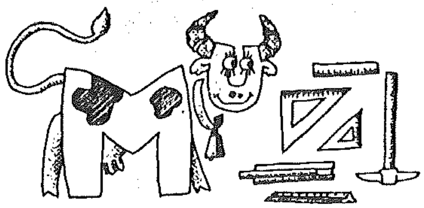
a. Dé dos ejemplos de palabras del juego y dos ejemplos de palabras que no son del juego.

b. Dé un ejemplo de:

- Una palabra en el sentido del juego, que no tenga significado.
- Una palabra con significado que no sea palabra en el sentido del juego.
- Una palabra en el sentido del juego que sí tenga significado.

3. Las reglas del juego

El juego tiene las siguientes *cinco* reglas:



1. Toda palabra se puede triplicar.

Por ejemplo, a partir de **MU** se obtiene **MUMUMU**.

a. ¿Qué se obtiene a partir de **MI**?

b. Y, ¿a partir de **MIU**?

2. Una **U** se puede reemplazar por **II**.

Por ejemplo, a partir de **IU** se obtiene **III**.

c. Aplicando la regla 2, ¿qué se obtiene a partir de **MUI**?

d. Y, ¿aplicándola dos veces? ♣ *¿Se da cuenta de que hay una diferencia?* ♣

e. ¿Qué se obtiene a partir de **MI**?

Usted debe ver que no puede aplicarse la regla 2 a algunas palabras. Si todavía no lo ve, vuelva a responder las preguntas. ¿Estamos de acuerdo?

f. Dé dos ejemplos de palabras a las cuales no se les puede aplicar la regla 2.

g. Resumiendo, ¿a cuáles palabras se puede aplicar la regla 2? ♣ *¡Esperamos que usted no vaya a hacer una lista!* ♣

3. Cuatro **I**es seguidas se pueden eliminar.

Por ejemplo, de **UIIIIM** se obtiene **UM**.

h. ¿Qué se obtiene a partir de **UIIII**?

i. ¿Qué se obtiene a partir de **MIU**?

j. Dé un ejemplo de una palabra a la que no sea aplicable la regla 3.

k. ¿Cuándo es aplicable la regla 3?

4. Después de una **M** se puede insertar una **U**.

Por ejemplo, de **MI** se obtiene **MUI**.

l. ¿Qué se obtiene a partir de **MUI**?

m. Si se aplica dos veces la regla 4 a **MI**, ¿qué se obtiene?

n. ¿Qué se obtiene de **MI** aplicando tres veces la regla 4?

o. Dado que usted ya ha experimentado con la regla 4, ¿tiene usted necesidad de aplicarla siete veces más para saber cuál es el resultado de aplicarla diez veces a **MI**? En otras palabras, ¿puede usted decir cuál es el resultado de aplicar diez veces la regla 4 a **MI**, sin necesidad de aplicarla? Trate de justificar su respuesta.

p. ¿Qué se obtiene a partir **UI** con la regla 4?

q. ¿Cuándo *no* se puede aplicar la regla 4?

5. Si en una palabra aparece **IMU** puede quitarse la **M**.

Por ejemplo, de **MIMUM** se obtiene **MIUM**.

r. ¿Qué se obtiene a partir de **IMUU**?

s. ¿Qué se obtiene a partir de **MUIM**?

t. ¿A cuáles palabras es aplicable la regla 5?

u. Dé un ejemplo de una palabra a la cual no es aplicable la regla 5.

4. Reglas acerca de las reglas

Usted debe haberse dado cuenta que la regla 1 es diferente de las demás reglas. La regla 1 se puede aplicar a *cualquier* palabra. Para poder aplicar las otras reglas, la palabra en cuestión tiene que cumplir ciertas condiciones.

a. ¿Cuáles son las condiciones para las reglas 3 y 4?

Utilizaremos las letras NA para indicar que la regla *No se Aplica.*

Otra característica de las reglas 2, 3, 4 y 5 es que existen palabras para las cuales la regla se puede aplicar de más de una forma.

Por ejemplo en la palabra **UMIU**, la regla 2 se puede aplicar a la primera **U** (obteniéndose **IIMIU**) o a la segunda **U** (obteniéndose **UMIII**). En estos casos, quien esté jugando tiene que decidir dónde aplica la regla.

b. Para cada una de las reglas 3, 4, y 5 dé un ejemplo de una palabra en la que la regla se puede aplicar de más de una forma. ¿Qué se obtiene en cada caso para cada palabra?

5. Transformando palabras

o "cogiéndole el tiro" a las reglas

Resumimos las reglas del acertijo de **MU** en la siguiente tabla:

1. Toda palabra se puede triplicar.
2. Una **U** se puede reemplazar por **II**.
3. Cuatro **I**es seguidas se pueden eliminar.
4. Después de una **M** se puede insertar una **U**.
5. Si en una palabra aparece **IMU** puede quitarse la **M**.

Ahora a trabajar: como usted habrá podido imaginarse, la idea es partir de una palabra y llegar a otra, aplicando las reglas adecuadas tantas veces como sea necesario. Por ejemplo, Si se parte de **MI**, se puede llegar a **MMI** con la siguiente sucesión de aplicaciones de las reglas:

$$\mathbf{MI} \xrightarrow{1} \mathbf{MIMIMI} \xrightarrow{4} \mathbf{MIMUIMI} \xrightarrow{5} \mathbf{MIUIMI} \xrightarrow{2} \mathbf{MIIIIMI} \xrightarrow{3} \mathbf{MMI}$$

Note que hemos introducido una notación que permite explicar el proceso por medio del cual, partiendo de una palabra, se llega a otra.

Esta notación consiste en dibujar una flechita entre cada par de palabras y escribir encima de la flechita la regla que permite transformar la primera palabra en la segunda.

a. Complete el siguiente proceso, que parte de **MI** y llega a **MUIUIIII** dibujando las flechitas e indicando las reglas correspondientes:

MI   MUI   MUIMUIMUI   MUIUIMUI   MUIUIUI   MUIUIIII

b. Utilizando la notación que se acaba de proponer escriba el proceso que permite obtener, a partir de **MI**, cada una de las siguientes palabras:

MUIUIIIMUI	MUUIMIUI	MUUIUIMIII
MIM	MMI	MIIMUI
MIMMIMMIM	MIMU	MMUI
MUIM	MUMI	MIIIM
MIIIMII	MIIMI	MIIMIII
MIIMUUI	MIMII	MIMUU
MIU	MMIII	MMUUI

6. ¿Hay que partir de la palabra inicial?

Supongamos que usted ha logrado producir la palabra **MIII**. Y que nosotros ya le hemos aceptado que esta palabra es una palabra válida. Y ahora usted produce la palabra **MIIIII**. Además se da cuenta de que esta segunda palabra se puede obtener a partir de **MIII**.

a. ¿Cómo se puede obtener?

b. ¿Hay necesidad que usted nos diga cómo se obtiene **MIIIII** a partir de la palabra inicial?

Supongamos que ▲ representa una palabra que se ha obtenido a partir de **MI**, aplicando las reglas. De otro lado, se ha logrado obtener otra palabra, la identificamos por ❑, a partir de la palabra anterior, ▲.

c. ¿Hay necesidad de mostrar cómo se podría obtener ❑ a partir de **MI**, para asegurarnos de que la segunda palabra, ❑, es una palabra válida?

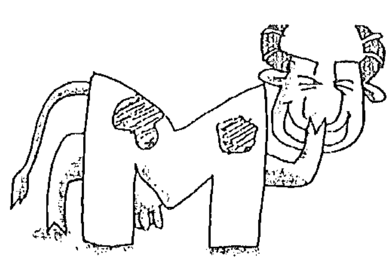
d. ¿Cómo se aplica el razonamiento anterior al ejemplo de las palabras **MIII** y **MIIIII** con que comienza esta sección?

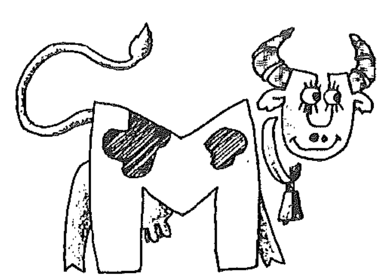
e. Encuentre otras dos palabras a las cuales se aplique este razonamiento.

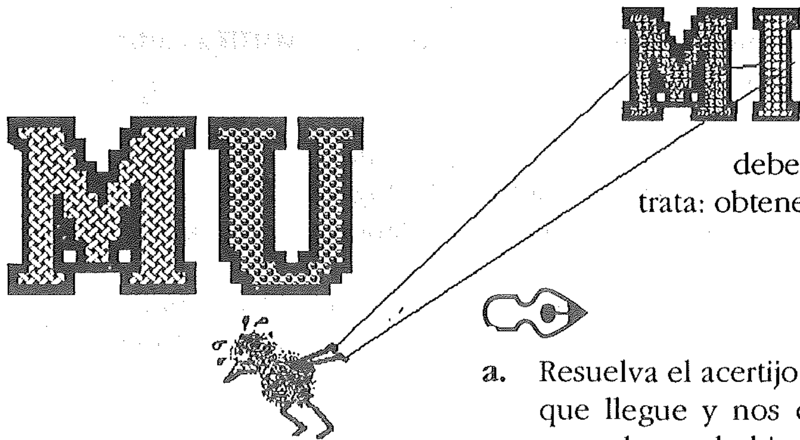
Para resolver los problemas que se le van a proponer a continuación, usted debe tener dos herramientas:

- una hoja que será su **bolsa**, donde usted escribirá la lista de las palabras válidas que ha logrado producir hasta el momento;

- la **hoja de pruebas**, donde usted tendrá escritas, de acuerdo al método propuesto anteriormente, las pruebas de cada una de las palabras de su bolsa.







7. Ahora sí hay que encontrar al MU

Ahora sí: el acertijo de **MU**. Usted debe ya haberse imaginado de qué se trata: obtener **MU** a partir de **MI**.

a. Resuelva el acertijo de **MU**. Recuerde que no basta con que llegue y nos diga que logró hacerlo. Tiene que convencernos de que lo hizo. Y para ello tiene que traernos una prueba.

8. El vocabulario

Suponga que estamos hablando de fútbol y que no tenemos una palabra para el hecho de que un defensor toque con la mano la pelota dentro del área. Dependiendo de quién mire la situación, la gente podría decir *el defensor la embarró*, *gol*, *vamos a ganar*, *el defensor no tiene la culpa*, etc. ¿Se imagina usted un pobre árbitro para quien la palabra *penalti* no existe? Sin duda, sería muy difícil jugar al fútbol de esta manera. En el acertijo de **MU** pasa algo similar. A menos de que tengamos un vocabulario claro para designar lo que pasa en el juego, llegará un momento en el que no podremos comprendernos. Es por ello que vamos a introducir unas nuevas palabras dentro de nuestro juego.

Los nuevos términos que vamos a introducir son muy sencillos. Usted los debe haber oído nombrar en otro contexto muy diferente. En el caso del acertijo de **MU** estos términos tienen un significado particular que vamos a definir a continuación.

- En cambio de hablar de *palabra válida* vamos a hablar de **teorema**.
- En cambio de hablar de *palabra inicial* vamos a hablar de **axioma**.
- En cambio de hablar de *prueba* vamos a hablar de **demostración**.

- En cambio de hablar de *reglas* vamos a hablar de **reglas de deducción**.

Tranquilo, tranquilo: ¡no se asuste! Que usted haya oído mencionar estas palabras en algún lugar y que ellas le traigan malos recuerdos, no tiene nada que ver con el acertijo de **MU**.

a. Utilizando los términos axioma y reglas de deducción, defina teorema y demostración.

En términos de nuestro vocabulario podemos entonces decir que la primera hoja es la hoja de teoremas y la segunda hoja es la hoja de las demostraciones.

Ahora que ya sabemos cómo tenemos que organizarnos, organícese. De ahora en adelante usted tendrá su hoja de teoremas y su hoja de demostraciones. (Es obvio que usted necesita una hoja de borrador: usted no podrá agregar un teorema y una demostración si no está seguro de que ella está bien hecha; es decir, que su nueva palabra es verdaderamente un teorema).

9. Detenerse un poco

Como siempre que uno tiene un problema complicado que no logra resolver, es bueno tal vez que ahora nos detengamos un poco. La idea es pensar un poquito. Pensar sobre lo que hemos hecho hasta ahora; y, pensar sobre lo que podemos y debemos hacer de aquí en adelante para poder demostrar el **MU**.

a. Para simplificar: en nuestra búsqueda del **MU**, ¿qué método hemos utilizado? ¿Hemos utilizado algún método?

De hecho sí hemos utilizado un método en nuestra búsqueda del **MU**. Es el método al que una persona recurre de forma natural. Tal vez nos hemos dicho algo así:

> Si queremos encontrar el **MU**, produzcamos tantos nuevos teoremas como podamos aplicando las reglas a las palabras que van apareciendo. En algún momento aparecerá el **MU** dentro de nuestros teoremas. En ese momento habremos resuelto el acertijo de **MU**.

Este es el método que hemos estado utilizando.

b. ¿Cree usted que es un buen método? ¿Por qué?

c. Si usted piensa que no necesariamente es el mejor método, ¿qué método (o métodos) diferente(s) se le ocurre que podríamos utilizar?

Espero que, por lo menos, estemos de acuerdo en que el método que hemos estado utilizando hasta ahora ♣*que podríamos bautizar como el método de trabajar a "la loca"*♣ no es el más eficiente para lograr los objetivos del juego.

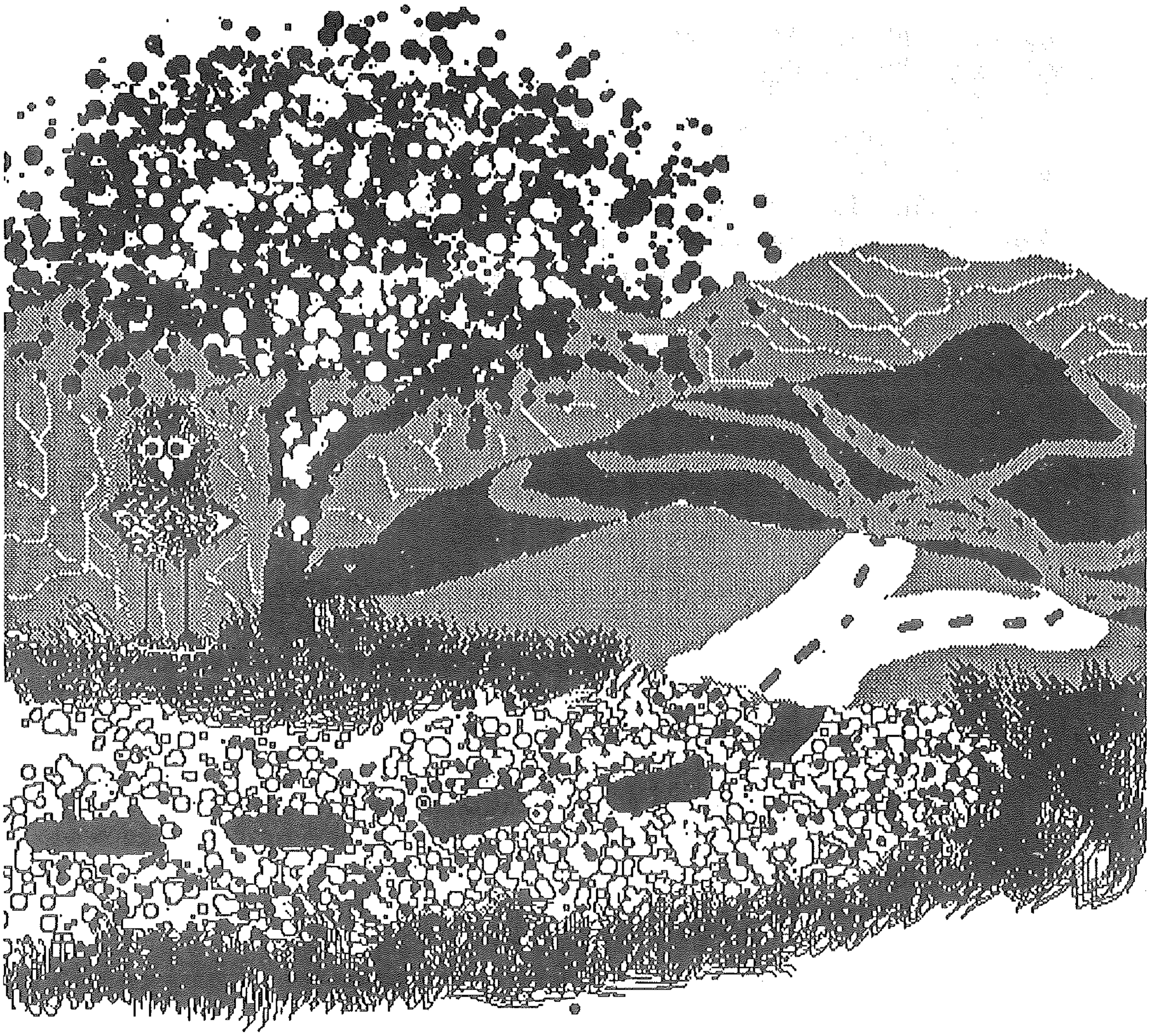
d. ¿Qué otra cosa podríamos hacer?

10. Y, ¿si nos salimos del sistema?

El acertijo de **MU** es un juego. Un juego con reglas. Hemos estado utilizando estas reglas para lograr un objetivo al que todavía no hemos podido llegar. Pero hasta ahora, lo único que hemos estado haciendo es jugar el juego. Y, ¿si nos preguntáramos un poco acerca del juego mismo?

Una manera de reflexionar acerca del juego que hemos estado jugando consiste en mirar los teoremas que tenemos hasta ahora. Coja su hoja de teoremas y obsérvela. ¿Qué ve? Por supuesto que lo que usted ve es una lista de palabras compuestas de letras.

Pero, ¿qué puede usted decir acerca de estas palabras? ¿No ve nada? La siguiente sugerencia puede ayudarle. Por ejemplo, en su lista de teoremas hay unos teoremas que son largos (tienen muchas letras) y



otros que son cortos (tienen pocas letras). ¿Qué otra cosa ve? ¿Existe algo que usted crea que es común a todos los teoremas que hay en su hoja de teoremas? Mírela de nuevo.

Con seguridad, usted se dió cuenta de que:

Todos sus teoremas comienzan por **M**.

Continuemos interrogando su curiosidad. Tal vez usted se ha dado cuenta de que los teoremas que tiene en su hoja de teoremas no son *todos* los que existen. Es decir, es posible que usted se haya dado cuenta de que, además de los teoremas que ha logrado descubrir, hay otros que, aunque no los haya descubierto, podría (trabajando un poco más) descubrirlos.

a. Hemos visto que todos sus teoremas comienzan por **M**. ¿Nos basta con esto para afirmar que todos los teoremas (es decir, los que usted ha descubierto y los que usted podría descubrir si se pasara toda la vida jugando al acertijo de **MU** y usted fuera inmortal) comienzan por **M**? ¿Por qué?

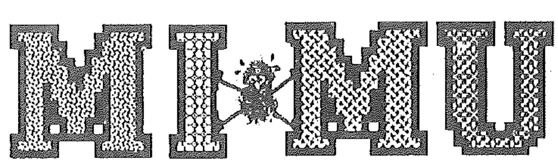
b. ¿Podemos entonces decir simplemente, a partir de lo que hemos descubierto, que los teoremas que nos quedan por descubrir van a tener las mismas características de los que hemos descubierto hasta ahora? ¿Por qué?

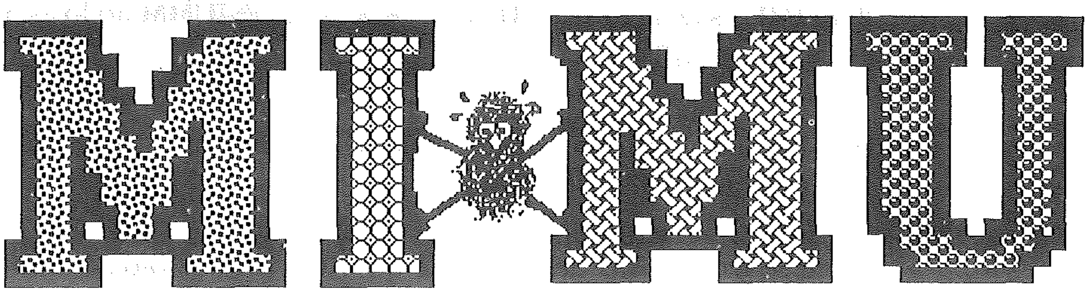
Si todos los cisnes que usted ha visto hasta ahora ♣ *los que usted ha visto en persona, en películas o en fotografías* ♣ son blancos, ¿puede usted decir que *todos* los cisnes que han existido, existen y existirán son blancos? De manera similar, el hecho de que usted crea que todos los teoremas comienzan por **M**, no significa que esto sea cierto.

Hay que *demostrar* la verdad de esta afirmación y, para ello, hay que encontrar un argumento que la sustente. ¿Dónde buscar este argumento? La respuesta debería ser obvia: en aquel lugar donde se producen los teoremas. Es decir, en el axioma y las reglas de deducción.

Entonces aquí tiene un problemita interesante:

c. Construya un argumento, a partir del axioma y de las reglas que demuestre que todos los teoremas del acertijo de **MU** comienzan por **M**. Una ayudita: considere cada regla separadamente y demuestre la afirmación para cada una de ellas.





11. Muchas palabras en una sola

Considere el problema de encontrar una forma cortica para describir

Todas las palabras que comienzan con **M**

Uno podría decir que son todas las palabras **M**—*algo*, donde *algo* representa una palabra cualquiera. Aquí *algo* sólo es un símbolo, o sea como un dibujito que representa un concepto.

Vamos a usar otro dibujito en vez de *algo*.

El dibujito es □ (cuadradito).

Así que **M**□ (M—cuadradito) es un símbolo (otro dibujito) que representa todas las palabras que comienzan con **M**.

a. Cómo se representa, es decir, qué símbolo se utiliza para

Todas las palabras que terminan con **U**

Digamos que se usa **I**□ para representar todas las palabras que comienzan con **I**.

Aceptemos que se dice que una palabra que comienza con **I** es de la forma **I**□.

Por ejemplo, **IMU** es de la forma **I**□; **IUMM** también.

Pero **IMU** es de la forma ❏**U** ♣*¿perdón?*♣ aunque **IUMM** no lo es, pues es de la forma ❏**M**.

b. Escriba dos formas diferentes de representar con dibujitos la palabra **MIU**.

Usted se dará cuenta del hecho de que ❏ es un símbolo arbitrario, es decir que se podría escoger cualquier otro, por ejemplo ▲ (triangulito).

Ahora observe para qué sirven estos dos símbolos juntos: las palabras que tienen alguna **M** son las de la forma ❏**M**▲. Hablado sería algo como: unas letras al principio, después una **M** y después reunión de "unas letras" al final, o: una palabra al principio, después una **M** y después una palabra al final. Al fin y al cabo una palabra es sólo unas letras para nuestros propósitos aquí.

Le presentamos algunos ejemplos.

- **IMUI** y **MIU** son ambas de la forma ❏**M**▲
- En el caso de **IMUI**, el ❏ es **I**, y el ▲ es **UI**
- Raro es el caso de **MIU**: aquí el ▲ es **IU** y el ❏ es nada o una palabra sin letras

Me imagino que a usted le puede molestar que se hable de una palabra sin letras. Aunque le moleste, acepte por ahora que sí hay en el mundo una tal "palabra sin letras". Fíjese que nos conviene.

Por ejemplo, entre las palabras de la forma **M**❏ está la misma **M**.

Ahora supongamos que queremos representar las palabras que tienen por lo menos una **M**. Habíamos usado ❏**M**▲. Con seguridad uno quiere que no importe si la **M** está al comienzo, en la mitad, o al final de la palabra.

12. ¿Entendió?

Vamos a ver si entendió la historia de los cuadraditos y los triangulitos. Responda las siguientes preguntas:

a. ¿Qué forma tienen las palabras que:

- comienzan por **U**
- terminan en **I**
- tienen alguna **U**
- tienen **MI** en alguna parte
- comienzan por **MI**
- tienen por lo menos dos **emes**

♣ Ojo: las emes pueden no ser seguidas. Además ▲ y ❒ *no son los únicos símbolos bonitos en el mundo♣*

13. Las reglas del acertijo de MU

¿Se acuerda del acertijo de **MU**? vamos a retomar las reglas de ese juego y vamos a escribirlas con nuestro nuevo método de dibujitos. Las reglas eran las siguientes:

1. Toda palabra se puede triplicar.
2. Una **U** se puede reemplazar por **II**.
3. Cuatro **I**es seguidas se pueden eliminar.
4. Después de una **M** se puede insertar una **U**.
5. Si aparece **IMU** puede quitarse la **M**.

Con nuestro método de dibujitos, las dos primeras reglas se pueden escribir de la siguiente manera:

1. Si usted tiene una palabra de la forma ▲, entonces usted puede obtener la palabra ▲▲▲.

> 2. Si usted tiene una palabra de la forma □U▲, entonces usted puede obtener la palabra □II▲.

a. Escriba las otras reglas del acertijo de MU con nuestro nuevo método de dibujitos.

14. La flechita

El último ingrediente que queremos introducir es la flechita: →. Como los cuadraditos y los triangulitos, la flechita nos sirve para condensar (abreviar) en sólo un símbolo varias palabras. Si volvemos a considerar las reglas del acertijo de MU, con la flechita, la primera regla se puede escribir:

> ▲ → ▲▲▲

a. Escriba con flechitas y con dibujitos las otras reglas del acertijo de MU.

Bonito, ¿o no? Usted puede leer la → como: *se convierte en* o *se transforma en.*

Considere la nueva regla:

> Si una palabra termina en U, entonces a partir de ella se puede obtener otra palabra agregando I al final.

b. ¿Cómo es el dibujito de esta regla?

c. ¿Cuál es el error de escribir esta regla en la forma: □U → ▲UI?

15. Hasta que estemos de acuerdo

Vamos a hacer unos cuantos ejercicios más, hasta que todos estemos de acuerdo en qué consiste nuestro nuevo método de los dibujitos.

a. Escriba en castellano la regla:

> □I▲ → □U▲

b. Invéntese una regla, escríbala en castellano y luego haga el dibujo.

c. Haga el dibujo de la regla:

> Si una palabra comienza por **M** y termina en **U**, entonces puede suprimirse la **U** final.

d. Haga el dibujo de esta otra regla:

> Si una palabra contiene **MI**, entonces puede agregarse **U** después de la **I**.

Hagamos dos aclaraciones acerca del método de dibujitos para expresar de manera general una regla:

- No todas las reglas se pueden expresar con este método. Por ejemplo, la regla: Toda palabra con tres letras se puede duplicar, no es expresable en dibujitos.

- Un dibujito no puede aparecer a la derecha de la flechita sino ha aparecido a la izquierda. Por ejemplo, la regla **M□ → ▲I** no es una expresión válida de: si una palabra comienza por **M**, entonces la **M** se puede eliminar y poner una **I** al final. Esta expresión no tiene sentido, puesto que **▲** no aparece a la izquierda de **→**.

16. ¿Y, el MU?

Retomemos el problema de "Todas las palabras que comienzan con M". Suponga que, de alguna manera, hemos descubierto y demostrado una afirmación que dice que no hay ningún teorema cuya segunda letra sea **U**. ¿Qué podría usted concluir acerca del acertijo de **MU**?

¿Ve para dónde vamos? La cuestión es un poco cuestión de desesperación. Hemos estado trabajando arduamente sobre el acertijo de **MU** y no hemos podido dar con el bendito **MU**.

a. ¿Será que, de pronto, el **MU** no es un teorema? ¿Qué significado tendría decir que el **MU** no es un teorema? Trate de explicar con tanto detalle como pueda.

Esperamos que usted haya dicho algo del estilo: que el **MU** no es un teorema significa que no se puede producir la palabra **MU** a partir del axioma **MI** y de las reglas que fueron definidas al comienzo. Y, ¿si tratáramos de demostrar esta afirmación? ¡Esta sería una manera de resolver el acertijo de **MU**!

Le sugerimos dos cosas que pueden ayudarlo en este trabajo:

- Observe todos los teoremas que usted tiene y descubra una propiedad de ellos (como la de que todos comienzan por **M**) que no sea una propiedad de la palabra **MU**.

- Analice todas y cada una de las reglas, demuestre que esa propiedad es una propiedad de *todos* los teoremas que se pueden producir a partir de **MI**.

- Analice el axioma.

Debemos analizar el axioma y cada una de las reglas para poder llegar a la conclusión. En este caso nos interesa analizar el número de Ies que tiene un teorema en este sistema formal. El número de Ies que tiene el axioma es impar, es 1. Todos los teoremas se producen aplicando las reglas al axioma o a los teoremas ya demostrados, así que veamos cómo cada regla afecta la paridad del número de Ies de los teoremas.

Regla 1: Toda palabra se puede triplicar. Esta regla se puede expresar en símbolos de la siguiente manera: ❑➔❑❑❑, donde ❑ representa cualquier teorema ya demostrado. El número de Ies que hay en el teorema o se triplica al aplicar esta regla, pero si era impar, sigue siendo impar.

Regla 2: Una U se puede cambiar por II. Esta regla se puede representar en símbolos así: ❑U▲➔❑ I I▲, donde ❑ y ▲ representan cualquier combinación de M, I, U, incluyendo la posibilidad de ser vacíos. El número de Ies que tiene el teorema ❑U▲ se aumenta en 2 al aplicarle esta regla, pero si inicialmente el número era impar, al agregarle 2 sigue siendo impar.

Regla 3: Cuatro Ies seguidas se pueden eliminar. En símbolos se representaría así: ❑ I I I I▲➔❑▲. En este caso el número de Ies que tiene el teorema ❑ I I I I▲ se reduce en cuatro al aplicarle la regla, pero si este número era impar sigue siendo impar.

Regla 4: Después de M se puede insertar U. En símbolos: ❑M▲➔❑ MU▲, en este caso el número de Ies del teorema al cual se va a aplicar la regla ❑M▲, y el del teorema resultante o MU▲, es el mismo.

Regla 5: Si en una palabra aparece IMU, la M se puede quitar. Esta regla se representa así: ❑IMU▲➔❑IU▲. De nuevo, el número de Ies de la palabra a la cual se va a aplicar la regla y el de la que resulta luego de aplicarla, son iguales.

Hasta ahora hemos visto que las reglas no cambian la paridad del número de Ies de una palabra a la cual se aplican. Todos los teoremas se producen, como ya dijimos, a partir del axioma. Así que si comenzamos con un número impar de Ies (las del axioma, es decir 1) y aplicamos cualquier cantidad de reglas, el número de Ies de todos los teoremas que se produzcan seguirá siendo impar. El número de Ies del MU es par (es 0), luego no puede producirse a partir de este axioma y con estas reglas.

17. Cambiando el sistema

Después de mucho trabajar usted ha podido concluir que no hay manera de deducir **MU** a partir de **MI** usando las reglas propuestas al principio. Pero, ¿qué pasa si se cambian las reglas? Por ejemplo, si la regla 2 se cambia por 2'(se lee "dos prima"):

2'. **U** puede cambiarse por **III**.

a. Con esta nueva regla, ¿puede producirse **MU** a partir de **MI**? Justifique su respuesta.

b. Analice qué sucede si la nueva regla es:

2''. **U** puede cambiarse por **I**.

Cualquiera de las reglas 2'o 2''permite obtener **MU** a partir de **MI**.

c. Sugiera otra regla 2''' diferente de 2'y 2'' que también lo permita.

d. Muestre que su 2''' sí funciona; es decir, obtenga **MU** a partir de **MI**.

e. Sugiera ahora una regla 3' que reemplace la regla 3 y permita obtener **MU** a partir de **MI**, dejando la regla 2 original. Muestre que funciona.

f. Encuentre una palabra inicial distinta de **MI** a partir de la cual sí se pueda obtener **MU** con las reglas del principio. Escriba su demostración.

g. Dé su opinión acerca de la siguiente afirmación:

No tiene sentido hablar de la imposibilidad de obtener una palabra partiendo de otra sin especificar las reglas.

2. Adivine la regla

En *este capítulo presentamos un nuevo juego:* adivine la regla. *Este juego surge de los conceptos y las herramientas que se desarrollaron en el acertijo de MU. Aunque, desde la superficie, este juego tiene algunas similitudes con el juego de guerra que los niños juegan en el colegio, el capítulo pretende mostrar la potencia y la utilidad del método científico en la resolución de problemas.*

Las reglas y los ingredientes del juego son las siguientes:

1. Juegan dos personas.

2. Se necesita papel y lápiz.

3. Cada jugador se inventa una regla que permita transformar una palabra que contenga solamente las letras **M, U** e **I**, en otra palabra del mismo tipo y la escribe en su papel sin que el contrincante la vea.

4. La regla debe escribirse en castellano y debajo se debe hacer el dibujo de la misma.

5. La regla tendrá un dibujito (el □ o el ▲, pero no ambos en la misma regla) que al lado izquierdo de → puede aparecer una vez y el número de símbolos que expresan la regla (incluyendo los dibujitos, cada letra y la flechita) no podrá ser mayor que 6. Esta combinación la llamaremos el nivel de juego 1-6 (1 variable y 6 símbolos).

6. Se escoge el jugador que comienza el juego. Este le propone una palabra a su contrincante. El contrincante dice si su regla se puede aplicar a la palabra y, si se puede aplicar, qué resultado se obtiene.

7. Los jugadores se alternan en el proceso explicado en el último párrafo.

8. Gana aquel jugador que adivine primero la regla del contrincante.

9. El jugador que proponga una regla sin que ésta sea correcta, pierde un turno. El jugador que pierda el turno por tercera vez, pierde el juego.

10. Cada jugador debe anotar tanto las respuestas que le da su contrincante a sus preguntas, como las preguntas que le hace su contrincante para efectos de poder verificar todo el proceso.

1. Un ejemplo

Miremos un juego entre Rocío y Carlo (un italiano). Lo miramos desde el punto de vista de cómo Rocío trata de adivinar la regla de Carlo.

Carlo se inventa la regla:

Castellano:	Si una palabra comienza por **M**, entonces puede agregarse **U** al final de la palabra
Dibujo:	**M□** → M□U

Rocío no sabe cual es la regla.

El juego se desarrolla de la siguiente manera:

Rocío: Su regla, ¿en qué transforma la palabra **MII**?

Carlo: En **MIIU**.

Rocío: ¿y la palabra **IMU**?

Carlo: Mi regla no se puede aplicar a esa palabra.

♣ *IMU no comienza por M; Rocío no sabe todavía que las palabras de la forma M□ son las únicas que se modifican*♣

Rocío: ¿Y **UMI**?

Carlo: Tampoco se puede aplicar a esa palabra.

♣Aquí Rocío comienza a tratar de ver qué es lo que tiene MII que no tienen IMU y UMI; se le ocurre que puede ser la terminación II♣

Rocío: ¿Y **UMII**?

Carlo: Tampoco se puede aplicar. *♣Jijiji....♣*

♣Carlo se equivoca al reirse, porque la pregunta de Rocío fue buena; si hubiera preguntado por MUII, la respuesta habría sido MUIIU y, ¿entonces? Rocío ya sabe que no es la terminación II; se le ocurre que es la M inicial.♣

Rocío: ¿Y **MIII**?

Carlo: La transforma en **MIIIU**.

Rocío: ¿Y **M**?

Carlo: En **MU**.

♣Rocío ya se está imaginando que la regla de Carlo tiene que ver con la M inicial.

Ahora Rocío revisa las respuestas para no perder un turno o perder el juego por equivocarse:

MII ➔ MIIU

MIII ➔ MIIIU

M ➔ MU

Y "se la pilla". Tiene que pensar un momento para poder hacer el dibujo. Lo hace y, además, para asegurarse le propone a Carlo otra palabra que comienza por M para estar segura.♣

Rocío: ¿Y **MIIUUUIIIIUUUIIIUUIIIIII**?

♣Carlo se rasca la cabeza. ¿Por qué le propondrá Rocío semejante palabrota?♣

Carlo: En **MIIUUUIIIIUUUIIIUUIIIIIIU**

♣Ahora Rocío está segura. Se lanza y le da la regla a Carlo♣

Rocío: Su regla es **M□ ➔ M□U**?

Carlo: ¿Maaaaaa, qué come que adivina?

2. ¿Le gustó el juego?

Esperamos que le guste el juego. Juéguelo con sus compañeros en clase y entrénese por fuera de clase.

Para efectos de organización, antes de comenzar a jugar, prepare una hoja que tenga las siguientes características:

- En la parte superior de su hoja está escrita su regla en castellano y en dibujitos.
- En el costado izquierdo, usted escribirá las palabras que le propone a su contrincante y, al lado, las respuestas que corresponden a estas palabras.
- En el costado derecho de la hoja escribirá las preguntas de su compañero y, al lado, las respuestas que usted le da.

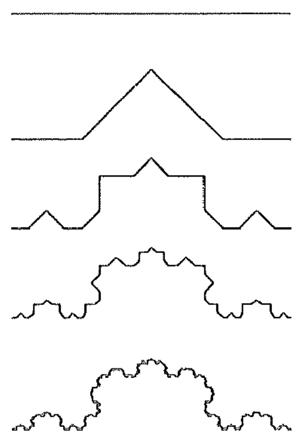
¡A jugar!

3. Fractales

La noción de recursión, formalizada a finales del siglo pasado, juega, hoy en día, un papel importante en el desarrollo de disciplinas tan variadas y aparentemente disímiles como las matemáticas (Geometría fractal), las ciencias de computación (Heurística), la pintura (Fractales), la música (Ruido Blanco), la Física (Sistemas Dinámicos) y la biología (Modelos Neuronales). El objetivo de este capítulo es utilizar el tema de los fractales para presentar una introducción de las nociones básicas del concepto de Recursión y de Transformación. Antes de intentar dar una definición comenzaremos con un ejemplo.

1. El ejemplo

Observe las siguientes figuras:

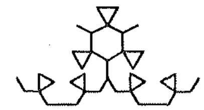


Estas figuras están relacionadas.

Si usted examina cuidadosamente las figuras, puede descubrir que cada figura se construye usando como base la figura anterior y transformándola de alguna manera.

Observe el paso de la primera figura a la segunda. Considere que este segundo paso es el resultado de una transformación del segmento de recta, que es la primera figura, en un conjunto de cuatro segmentos de recta. Ahora, si usted observa la tercera figura, verá que ésta se obtiene de la segunda efectuando la misma transformación a *cada uno* de los cuatro segmentos que la componen. La cuarta figura es producto de hacer este mismo proceso de transformación a *cada uno* de los segmentos de recta que componen la tercera figura.

Vamos a adoptar dos convenciones:



- La primera figura siempre es un segmento de recta. Esto nos facilita las cosas porque entonces la segunda figura representa la transformación

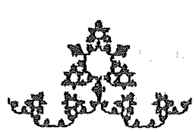
- La transformación estará siempre constituida por segmentos de recta

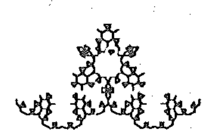
a. Volviendo al dibujo, ¿puede usted imaginarse como sería la siguiente figura? ¿Podría dibujarla? Si usted sigue y sigue dibujando figuras cada vez más complicadas, llegará un momento en el que la longitud de cada línea va a ser muy pequeña. El límite al que tienden estas figuras de líneas cada vez más pequeñas es llamada una **figura fractal.**

2. La tarea

a. Usted va a inventarse dos figuras fractales. La idea es que usted experimente hasta encontrar transformaciones que produzcan figuras interesantes. Para dibujar los fractales, usted necesita dos hojas de papel milimetrado y unas diez hojas de papel mantequilla o papel transparente. Tome la hoja de papel milimetrado y cinco hojas de papel mantequilla y júntelas con un clip o una grapa. La hoja de papel milimetrado quedará abajo y será la última. En la primera hoja transparente (la que está después del papel milimetrado) dibuje el segmento de recta inicial, siguiendo la idea del ejemplo. En la siguiente, dibuje lo que resulta de aplicarle la transformación a este objeto. En la siguiente, haga lo mismo y *así sucesivamente.*

b. Trate de explicar qué quiere decir el *así sucesivamente* del párrafo anterior. (Ayuda: usted está repitiendo cada vez el mismo proceso)





3. Sistemas formales

Los fractales (como el ejemplo visto antes) tienen una propiedad muy importante: pueden ser generados usando sistemas formales.

De hecho hay una analogía muy profunda entre estas figuras recursivas y los sistemas formales. Consideremos el siguiente sistema formal:

Lenguaje: A, + y —.

Axioma: A

Regla: A ⇒ A—A++A—A

La diferencia entre los sistemas formales que vamos a estudiar en este capítulo y los que hemos trabajado antes *consiste en que hay que aplicar la regla a todas y cada una de las* A*es que aparecen en la hilera a la que se está aplicando la regla.*

Por ejemplo, el primer teorema que podemos obtener es sencillamente:

- A—A++A—A

El segundo teorema, que se deduce de éste, es:

- A—A++A—A—A—A++A—A++A—A++A—
  A—A—A++A—A

a. Trate de escribir el tercer teorema.

b. ¿Cuántas Aes tiene el tercer teorema? ¿Tiene usted necesidad de contarlas, o se imagina alguna manera automática de encontrar ese número sin necesidad de contar? Explique.

c. ¿Cuántos signos + tiene el tercer teorema?

d. El número de signos + en el tercer teorema es igual al número de signos + en el primero, multiplicado por el número de Aes en el segundo teorema, más el número de signos + en el segundo teorema. Verifique que esta fórmula es correcta. Explique la razón de ser de esta fórmula.

e. Observe que el número de signos + en el primer teorema es igual al número de signos — en ese teorema. Lo mismo sucede en el segundo teorema. ¿Es esto también válido en el tercer teorema? ¿Por qué?

El sistema formal que acabamos de considerar tiene una relación estrecha con los dibujos del ejemplo que se hizo al comienzo de este capítulo, en el sentido que a cada teorema del sistema le corresponde un dibujo.

A continuación vamos a introducir un proceso que permite *interpretar* los elementos que constituyen un teorema para producir, a partir de él, un dibujo fractal.

4. Interpretación del sistema formal

Cada teorema de este sistema va a ser interpretado como un dibujo en el plano. Este dibujo lo va a efectuar una *tortuga* que colocaremos en nuestro papel de dibujo. Ella va a moverse de acuerdo a ciertas instrucciones y, al moverse, dejará tinta por cada sitio que pase. Convengamos además que la tortuga siempre comienza mirando hacia la derecha.

Démosle ahora a los símbolos de nuestro sistema la siguiente *interpretación*:

A: Dibuje una línea recta de 1 centímetro hacia adelante (o sea en la dirección en la cual esté apuntando nuestra tortuga)

+: Gire la tortuga hacia la derecha 45° (En el sentido de las manecillas del reloj)

—: Gire la tortuga hacia la izquierda 45°

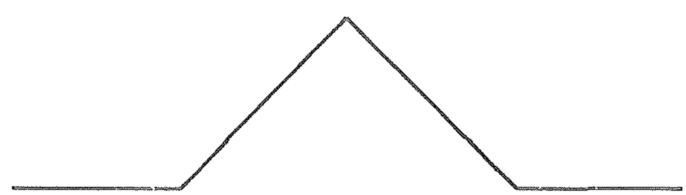
Miremos ahora algunos teoremas e interpretémoslos:

Por ejemplo el axioma interpretado sería: muévase 1 centímetro hacia adelante:

Y el teorema A—A++A—A sería :

- Muévase 1 centímetro
- Gire 45° a la izquierda
- Muévase 1 centímetro
- Gire 45° a la derecha
- Gire 45° a la derecha
- Muévase 1 centímetro
- Gire 45° a la izquierda
- Muévase 1 centímetro

Lo cual da la siguiente figura:



Observe que cada teorema de nuestro sistema corresponde a cierta figura en el plano.

Aclaremos que, cuando se dibujan los fractales, cada uno a partir del anterior, aplicando la transformación, todos los dibujos tienen el mismo tamaño en el sentido horizontal. Sin embargo, cuando interpretamos los teoremas, los dibujos que resultan tienen diferentes tamaños, dado que la tortuga siempre avanza 1 cm cada vez que dibuja un segmento de recta.

Para cada uno de los sistemas formales que se proponen a continuación deduzca los primeros dos teoremas y, de acuerdo a la interpretación propuesta, dibújelos.

a. Primer sistema:

Lenguaje: **A, +, —**

Axioma: **A**

Regla: **A → A+A—A—AAA+A+A—A**

Interpretación: + representa 90°

b. Segundo sistema:

Lenguaje: **A**, +, —

Axioma: **A**

Regla: **A** → — — **A** + + + **A** — **A**

Interpretación: + representa 45°

c. Tercer sistema:

Lenguaje: **A**, +, —

Axioma: **A**

Regla: **A** → — **A** + **A** + **A** —

Interpretación: + representa 90°

5. Ampliando el proceso

Hasta ahora ha dado la impresión de que a cada conjunto de fractales le corresponde un sistema formal y a cada sistema formal, le corresponde un conjunto de fractales. Sin embargo, esto no es cierto, puesto que lo que conecta el uno con el otro es la interpretación. Si cambiamos la interpretación, las cosas cambiarán.

Esto es particularmente importante cuando cambiamos la interpretación del ángulo.

a. Para cada uno de los ejercicios de la sección anterior interprete los teoremas de acuerdo a las siguientes interpretaciones:

- +: 60°
- +: 90°
- +: 45°

Otra manera de ampliar el proceso consiste en que el axioma no sea necesariamente **A**. (Desde el punto de vista los fractales, esto significa que no comenzamos con un segmento de recta)

b. Deduzca los dos primeros teoremas del siguiente sistema formal.

Lenguaje: Símbolos **A**, +, —

Axioma: **AA—AA—AA**

Regla: **A → —AA++AA++AA—**

La interpretación de este sistema es la siguiente:

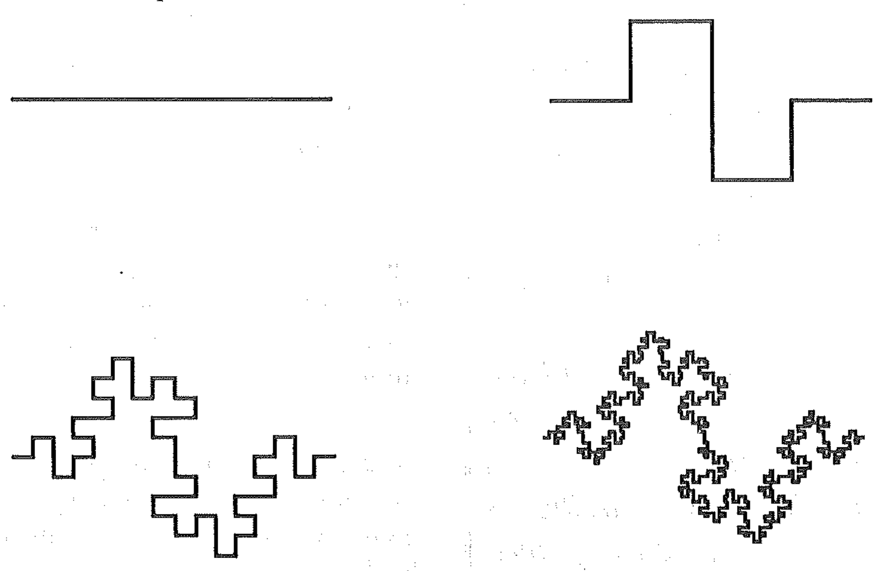
A: Dibuje una línea recta de 1 centímetro hacia adelante

+*:* Gire la tortuga 60° hacia la derecha

—*:* Gire la tortuga 60° hacia la izquierda

c. Interprete y dibuje los teoremas que acaba de deducir.

d. Para la siguiente figura determine el sistema formal y la interpretación que la produce. Es decir, diga cuál es el *lenguaje*, el axioma, la *regla* y la *interpretación* de los símbolos del lenguaje. Compruebe su respuesta.



4. Producir los números

En este capítulo aplicaremos lo que conocemos de sistemas formales para producir un modelo de una nueva realidad: la aritmética de los números enteros. El sistema formal que vamos a construir es un reflejo superficial de aquel que Peano y Frege construyeron a principios de siglo y con el que se presentó, por primera vez, un fundamento aritmético para las matemáticas. Veremos cómo, a partir de un conjunto de axiomas relativamente sencillo, es posible demostrar afirmaciones aritméticas del tipo $2+3=4+1$.

1. El sistema formal

Para poder construir el sistema formal que estamos buscando, tenemos que comenzar por hacernos una pregunta:

- ¿Cuáles son las características de los números naturales que los hacen especiales?

1 es el primer número natural y los demás se pueden construir a partir de él agregando una unidad cada vez. Este proceso nos permite obtener *todos* los naturales y nos da la clave para construir el sistema formal. Ya debe ser clara la forma que tendrán el axioma y la regla. Falta escoger los símbolos adecuados y la forma como los vamos a interpretar.

A continuación le proponemos un sistema formal que, en principio, permite generar el conjunto de los números naturales. Este sistema formal se basa obviamente en la idea de *sucesor* sugerida anteriormente.

Recordemos que, para presentar un sistema formal, debemos presentar los símbolos, el axioma o los axiomas, las reglas de transformación y la interpretación que se le quiere dar a los símbolos. En este caso, el sistema formal es el siguiente:

Lenguaje: |

Axioma: |

Regla: □ → □|

Interpretación: | representa una unidad.

Recordemos que □ representa, al interior del sistema formal, cualquier hilera del símbolo |.

a. Repita lo anterior con la palabra cuya interpretación es 2.

b. Repita lo anterior con la palabra cuya interpretación es 5.

c. Si usted quiere deducir la palabra que representa al 43, ¿cuántas veces tendrá que aplicar la regla? Explique su respuesta.

d. Si quiere deducir la palabra que representa a un número natural **n**, ¿cuántas veces tendrá que aplicar la regla? Justifique su respuesta.

Recordemos que la realidad que es modelada por un sistema formal depende de la interpretación que se le dé a los símbolos del lenguaje de ese sistema.

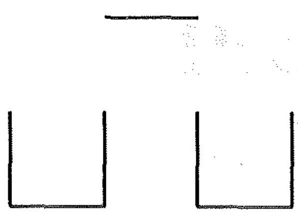
Por ejemplo, si en cambio de interpretar | como una unidad, lo interpretamos como dos unidades, entonces el sistema formal que acabamos de proponer modela una realidad diferente: los números pares positivos.

e. ¿Con qué interpretación, el sistema formal propuesto anteriormente modela el conjunto de los números múltiplos de 3?

Otra forma de modelar otras realidades se obtiene cambiando la regla o el axioma.

f. ¿Con qué axioma y qué interpretación se pueden modelar los números naturales mayores que 4?

g. ¿Con qué axioma y qué interpretación se pueden modelar los números pares mayores que 6?



h. ¿Cómo habría que cambiar la regla y qué interpretación habría que tener para modelar los números impares?

i. Interpretando ▮ como una unidad, ¿qué axioma y qué regla podría modelar los números múltiplos de 3?

j. Identifique una realidad diferente de las anteriores y construya un sistema formal y una interpretación que permita modelarla.

2. Otro sistema formal

El problema que tenemos ahora consiste en encontrar un sistema formal que no solamente nos permita modelar los enteros positivos, sino que también modele los negativos y el cero. Para ello vamos a introducir un nuevo símbolo y una nueva interpretación.

El nuevo símbolo es —. Y ahora las palabras válidas de nuestro sistema serán de la forma —❑ o ▲—, ❑ donde ❑ y ▲ representan cualquier conjunto de palitos, incluido el conjunto vacío.

La interpretación que vamos a introducir es la siguiente:

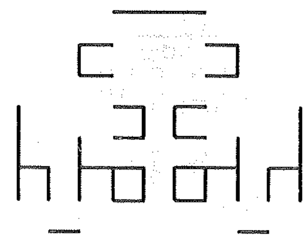
- — representa el cero
- —❑ representa el número positivo correspondiente al número de palitos (▮) en ❑
- ▲— representa el número negativo correspondiente al número de palitos (▮) en ▲

—▮▮▮ representa el 3. ▮▮▮▮▮— representa el —5. Esta interpretación se debe a que los positivos están a la derecha del cero y los negativos a la izquierda. Ahora nos falta introducir el sistema formal.

Axioma: —

Regla 1: —❑ → —❑▮

Regla 2: ▲— → ▮▲—



Ahora hagamos unos ejemplos. Si aplicamos la regla 1 dos veces seguidas al axioma, obtenemos el teorema —||. De la misma forma, si aplicamos 3 veces seguidas la regla 2 al axioma obtenemos el teorema |||—.

a. Haga la deducción del teorema que representa el número 5.

b. Haga la deducción del teorema que representa el número —4.

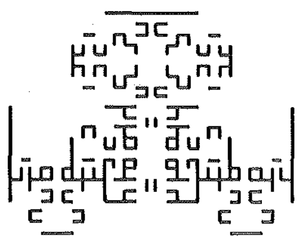
c. Explique cómo sería la deducción del teorema que representa el número —23.

d. Explique por qué este sistema formal, con su interpretación, permite modelar *todos* los números enteros.

3. La suma

Hasta ahora hemos producido sistemas formales que nos han permitido modelar todos los números enteros. Sin embargo, la realidad de los números enteros es más amplia, puesto que con los números enteros podemos hacer operaciones. En particular, la adición es la operación más importante puesto que, a partir de ella, podemos definir las demás operaciones.

Queremos ahora identificar un sistema formal que no solamente nos permita producir los números, sino que también tenga en cuenta la operación de adición y las verdades que con esta operación tenemos. Un sistema formal similar a éste fue descrito a comienzos de siglo por los matemáticos Peano y Frege cuando, después de veinticinco siglos, se intentó formalizar apropiadamente la aritmética y, a través de ella, todas las matemáticas.



El sistema formal que vamos a producir va a ser similar. El axioma es más complejo, pero veremos que nos sirve para producir todas las sumas de enteros posibles. No presentaremos el sistema formal completo sino hasta el final. Veremos más bien el sentido y necesidad de cada regla y luego podremos estar seguros de que tenemos un sistema completo. Es importante ver que las verdades que vamos a producir son del estilo 2+3=5 y lo que trataremos de obtener es una serie de reglas que a partir de una suma inicial (0 + 0 = 0), nos permitan producir todas las demás. Ya vemos que es necesario aumentar nuestro lenguaje para poder usar un símbolo para la suma(⊕) y uno para el igual(≈).

Lenguaje: –, ❚, ⊕, ≈

Como dijimos antes el axioma debe representar una suma inicial, tomaremos 0 + 0 = 0.

Axioma: – ⊕ – ≈ –

Las reglas nos deben permitir obtener todas las sumas posibles: dos enteros positivos, dos enteros negativos, uno positivo con uno negativo cuya respuesta es positiva, uno positivo con uno negativo cuya respuesta es negativa, uno negativo con uno positivo cuya respuesta es positiva y uno negativo con uno positivo cuya respuesta es negativa. Comenzaremos por las suma de dos enteros positivos.

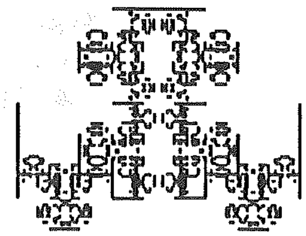
El sentido de esta primera regla es poder obtener en el primer sumando el entero positivo que uno desea, es decir nos debe permitir producir sumas del estilo 3 + 0 = 3, 5 + 0 = 5, 10 + 0 = 10,...

Regla 1 (suma de enteros positivos):
– ▲ ⊕ – ❒ ≈ – ▲ ❒ → – ▲ ❚ ⊕ – ❒ ≈ – ▲ ❒ ❚

Recordemos que ❒ y ▲ representan cualquier combinación de ❚. La segunda regla nos debe permitir obtener lo que necesitamos en el segundo sumando. Sería así:

Regla 2 (suma de enteros positivos):
– ▲ ⊕ – ❒ ≈ – ▲ ❒ → – ▲ ⊕ – ❒ ❚ ≈ – ▲ ❒ ❚

La tercera y cuarta nos permitirán producir sumas de enteros negativos, aumentando en el primer sumando (regla3) y en el segundo (regla 4).



Regla 3 (suma de enteros negativos):
▲ – ⊕ ❒ – ≈ ▲ ❒ – ➔ ▌▲ – ⊕ ❒ – ≈ ▌▲ ❒ –

Regla 4 (suma de enteros negativos):
▲ – ⊕ ❒ – ≈ ▲ ❒ – ➔ ▲ – ⊕ ▌❒ – ≈ ▌▲ ❒ –

Nos queda todavía el trabajo más difícil: producir sumas de enteros positivos y negativos. Veamos primero qué sucede si el primer sumando es positivo y el segundo negativo. Debemos considerar varios casos, ya que el proceso no es el mismo si tenemos una suma como 3 + (-2) cuyo resultado es positivo, es 1, o una como 3 + (-7), en que nos da negativo, -4. Para el primer caso tenemos dos posibilidades: obtener lo que necesitamos en el primer sumando, obtenerlo en el segundo. Si agregamos una unidad en el primer sumando, 4 + (-2), la respuesta se aumentará en una unidad, 2.

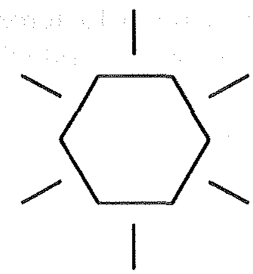
Regla 5 (suma de positivo con negativo):
– ▲ ❒ ⊕ ▲ – ≈ – ❒ ➔ – ▲ ❒ ▌⊕ ▲ – ≈ – ❒ ▌

Pero si agregamos una unidad en el segundo sumando, 3 + (-3), la respuesta se disminuirá en una unidad, 0. Tenemos un problema adicional, si ❒ representa el número de unidades de la respuesta, ¿cómo representar que esta cantidad se ha disminuido en una unidad? Hemos resuelto el problema poniendo, desde el principio, esta unidad que después vamos a quitar. Así, si ❒ ▌ representa el número de unidades de la respuesta, ❒ representará este número disminuido en una unidad, que es lo que deseábamos.

Regla 6 (suma de positivo con negativo):
– ▲ ❒ ▌⊕ ▲ – ≈ – ❒ ▌➔– ▲ ❒ ▌⊕ ▌▲– ≈ – ❒

Para el segundo caso tenemos otras dos reglas equivalentes, agregar una unidad en el segundo sumando:

Regla 7 (suma de positivo con negativo):
– ▲ ⊕ ▲ ❒ – ≈ ❒ – ➔ – ▲ ⊕ ▌▲ ❒ – ≈ ▌❒ –



Regla 8 (suma de positivo con negativo):
– ▲ ⊕ ▌▲ ▢ – ≈ ▌▢ – ➔ – ▲ ▌⊕ ▌▲ ▢ – ≈ ▢ –

Todavía nos queda el caso de una suma de un negativo con un positivo, que nos dará otras cuatro reglas que actúan de manera similar.

Regla 9 (suma de negativo con positivo):
▲ ▢ – ⊕ – ▲ ≈ ▢ – ➔ ▌▲ ▢ – ⊕ –▲ ≈ ▌▢ –

Regla 10: ▌▲ ▢ – ⊕ – ▲ ≈ ▌▢ – ➔ ▌▲ ▢ – ⊕ – ▲ ▌≈ ▢ –

Regla 11: ▲ – ⊕ – ▲ ▢ ≈ – ▢ ➔ ▲ – ⊕ –▲ ▢ ▌≈ – ▢ ▌

Regla 12: ▲ – ⊕ – ▲ ▢ ▌≈ – ▢ ▌➔ ▌▲ – ⊕ – ▲ ▢ ▌≈ – ▢

Aunque son muchas reglas, el sistema no es difícil de usar. Para producir una suma cualquiera usaremos máximo tres de estas reglas. Por ejemplo si queremos producir el teorema correspondiente a (-2) + 3 = 1, debemos identificar que corresponde a una suma de negativo con positivo, es decir vamos a usar la regla 11 para obtener 3 en el segundo sumando y luego la regla 12 para obtener -2 en el primero, así:

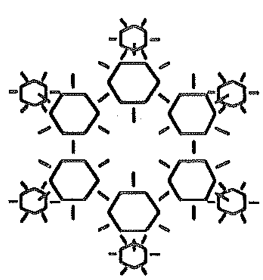
– ⊕ – ≈ – ➔ – ⊕ – ▌≈ – ▌usando la regla 11

– ⊕ – ▌≈ – ▌➔ – ⊕ – ▌▌≈ – ▌▌usando la regla 11

– ⊕ – ▌▌≈ – ▌▌➔ – ⊕ – ▌▌▌≈ – ▌▌▌ usando la regla 11

– ⊕ – ▌▌▌ ≈ – ▌▌▌➔ ▌– ⊕ – ▌▌▌≈ – ▌▌usando la regla 12

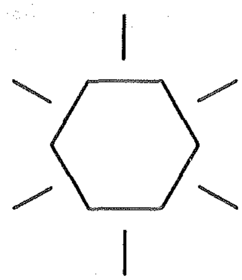
▌– ⊕ – ▌▌▌≈ – ▌▌➔ ▌▌– ⊕ – ▌▌▌≈ – ▌usando la regla 12

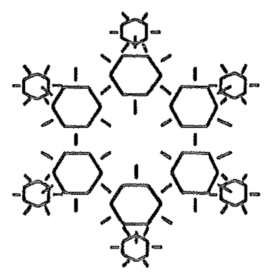


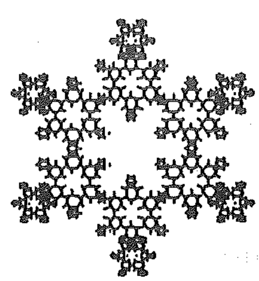
Si interpretamos estos símbolos, el proceso anterior se podría traducir así:

0 + 0 = 0 ➔ 0 + 1 = 1 ➔ 0 + 2 = 2 ➔ 0 + 3 = 3 ➔ (-1) + 3 = 2 ➔ (-2) + 3 = 1

a. Amplíe el sistema formal para poder modelar el producto de naturales. Luego trate de hacerlo para el producto de enteros.







5. El método axiomático

En capítulos anteriores hemos visto algunos ejemplos de sistemas formales. En particular, con el acertijo de MU trabajamos con cuidado uno de ellos. Nuestras herramientas se resumían, en este caso, a un axioma y cinco reglas de deducción, que empleábamos en la generación de teoremas. En este capítulo trabajaremos un nuevo ejemplo de lo que es un sistema formal, aparentemente diferente a los que hemos visto hasta ahora. El objetivo principal, además de incluir un caso más en el que se utilizan dichos formalismos, es descubrir que la manera como se trabaja con sistemas formales, es siempre la misma.

1. ¿Otro tipo de axiomas?

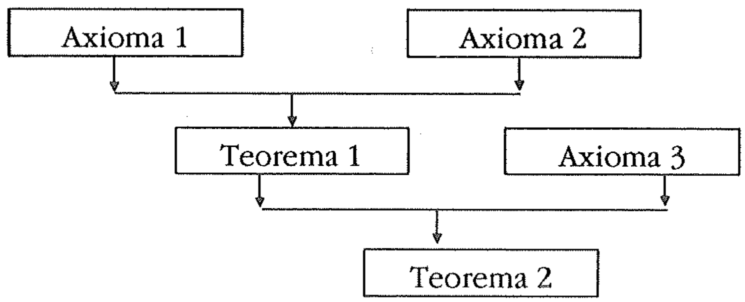
Para lograr este objetivo, es necesario que se tenga clara la manera en que se ha trabajado en los capítulos anteriores. Deberíamos poder responder sin dudar:

- ¿Qué es un axioma?
- ¿Para qué sirven las reglas de deducción?
- ¿Qué es un teorema?
- ¿Qué proceso se lleva a cabo al demostrar un teorema?

Hasta el momento, en todos los ejemplos acerca de sistemas formales, contábamos con un axioma. Esto hacía que nuestras demostraciones se vieran como una línea. Por ejemplo, en el acertijo de **MU**, la demostración de que **MIM** es un teorema, se puede presentar gráficamente de la forma:

MI → MIMIMI → MIMIMUI → MIMIUI → MIMIIII → MIM

Si en vez de uno, el sistema formal tuviera más axiomas y otro tipo de reglas de deducción, probablemente las demostraciones no tendrían una apariencia tan sencilla. En vez de una línea de deducción tendríamos un árbol parecido al dibujado a continuación:



En donde en cada paso, además de las reglas de deducción, se pueden ver envueltos uno o varios de los axiomas.

Un ejemplo de esta situación lo tendríamos si los axiomas de nuestro sistema fueran los siguientes:

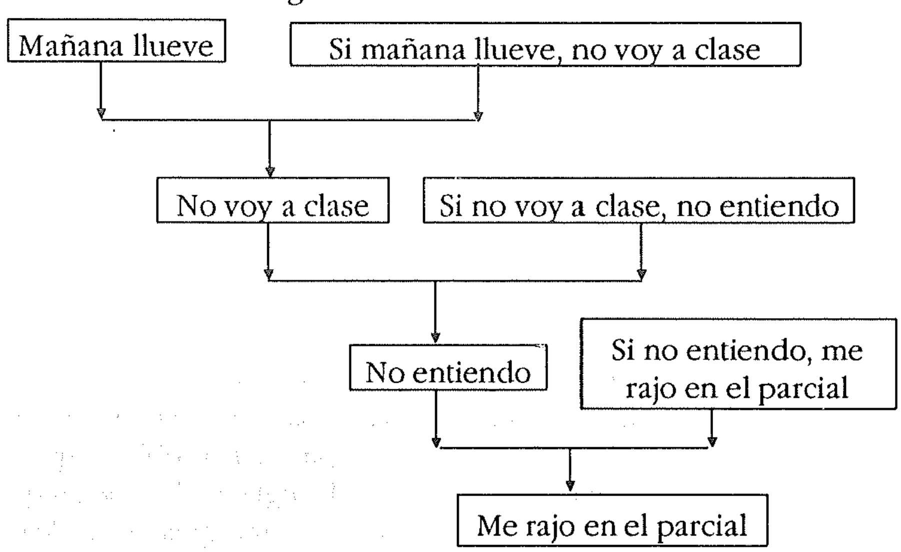
Axioma 1: *Mañana llueve*

Axioma 2: *Si mañana llueve, no voy a clase*

Axioma 3: *Si no voy a clase, no entiendo*

Axioma 4: *Si no entiendo, me rajo en el parcial*

La presentación gráfica de la demostración de que *Me rajo en el parcial* es un teorema sería la siguiente:



En todo sistema formal, los axiomas son uno de los factores determinantes de los teoremas que se pueden deducir. Por ejemplo, en el caso del acertijo de **MU**, bastaba cambiar el axioma para hacer posible el teorema imposible **MU**.

Los axiomas en el resto de esta sección van a seguir mandando el juego. Siempre impondrán restricciones y darán libertades en el sistema que estemos trabajando. No obstante, su estructura será diferente: un axioma será una frase, en español, que afirma algo sobre los elementos que nos interesa modelar. Por ejemplo, podrían ser axiomas:

- *Juan es alumno de Matebásica.*
- *Si mañana llueve, entonces Beatriz no va a clase.*
- *Todos los estudiantes de Psicología ven Matebásica.*

2. El Modus Ponens

En el ejemplo de la sección anterior, teníamos cuatro axiomas. De esos cuatro, los tres últimos tienen una forma común, del estilo **si** *una afirmación*, **entonces** *otra afirmación.*

Fue gracias a que los tres últimos axiomas tenían esta forma que pudimos hacer la demostración del teorema a partir de los axiomas.

Pero, ¿cuál es la regla de deducción que nos permite hacer este proceso? Observemos el primer paso de la demostración anterior. En él utilizamos los axiomas.

Mañana llueve y *si mañana llueve, entonces no voy a clase*

para obtener el teorema, *No voy a clase.*

Esta deducción parece ser obvia. Sin embargo, y como lo vimos en el acertijo de MU, para hacer deducciones, no basta tener los axiomas: hay que tener por lo menos una regla de deducción que se encuentre expresada de manera explícita. El problema que tenemos aquí consiste en expresar claramente la regla de deducción que nos permite utilizar los axiomas para obtener el teorema. Y la idea es que esta regla sea *general.* Esto es, que cuando tengamos cualquier par de axiomas que tengan *formas* similares a los axiomas anteriores, podamos aplicar la regla y obtener el teorema. De aquí se deduce, como sucedía con las reglas del acertijo de **MU**, que la regla que estamos buscando no debe depender de las palabras contenidas en los axiomas, sino de la forma misma de estos. En *Adivine la regla* utilizamos □ y ▲ para representar cualquier palabra, de tal manera que podíamos expresar una regla con estos símbolos. Por ejemplo, la primera regla se expresaba de la forma □ → □□□. En el caso que nos interesa ahora, los *objetos* que manejamos no son afirmaciones del estilo *mañana llueve.* Para representar estas afirmaciones de manera general, vamos a utilizar unos nuevos símbolos. Estos son *Tatatá* y *Tatatí,* donde cada uno de ellos representa una afirmación cualquiera. En el caso anterior, Tatatá representaba la afirmación: *mañana llueve* y Tatatí, la afirmación: *no voy a clase.* La regla que estamos buscando, se puede entonces expresar de la manera siguiente:

Si tenemos que *Tatatá* y también tenemos que *si Tatatá, entonces Tatatí,* podemos deducir el teorema *Tatatí.*

Para efectos de que usted recuerde claramente la forma y el funcionamiento de esta regla le sugerimos la siguiente "canción":

Si Tatatá y *si Tatatá, entonces Tatatí,* entonces *Tatatí.*

Esta regla tiene un nombre; se llama la regla **Modus Ponens**.

Veamos unos ejemplos. Volviendo de nuevo a la demostración de la sección anterior, una vez que hemos deducido el teorema *No voy a clase,* podemos utilizarlo, junto con el axioma *Si no voy a clase, entonces no entiendo* para deducir un nuevo teorema aplicando la regla Modus Ponens. En este caso, Tatatá representa la afirmación *no voy a clase* y Tatatí la afirmación *no entiendo.* La regla nos permite deducir el teorema Tatatí, o sea la afirmación *no entiendo.*

De la misma forma, si nosotros tenemos que *Juan va a clase* y que *si Juan va a clase, entonces Juan toma notas,* podemos deducir el teorema *Juan toma notas.*

a. Le dejamos el trabajo de identificar que afirmaciones representan *Tatatá* y *Tatatí* dentro de esta deducción.

3. Los problemas de Modus Ponens

Aunque todo lo que hemos hecho hasta ahora parece evidente, no lo es. Sucede que hay situaciones en que se tienen afirmaciones con formas similares a las anteriores, pero para las cuales no se puede aplicar la regla Modus Ponens. Por ejemplo, ¿qué teorema podría usted deducir de los dos axiomas siguientes:

- *Si hoy es domingo, entonces hoy no hay clase de Matebásica* y *Hoy no hay clase de Matebásica*?

Usted podría estar tentado a decir que, a partir de los dos axiomas anteriores, es posible deducir el teorema *Hoy es domingo*. Sin embargo, dése cuenta que la regla Modus Ponens *no* le permite hacer esta deducción. Para los dos axiomas en cuestión, Tatatá representaría la afirmación *Hoy es domingo* y Tatatí la afirmación *hoy no hay clase de Matebásica* y lo que usted tiene como axiomas tiene la forma, si Tatatá, entonces Tatatí y Tatatí. La regla Modus Ponens *no* se puede aplicar a este tipo de axiomas.

Otro error que se comete muy frecuentemente es suponer que porque uno ya tiene el axioma *Si Tatatá, entonces Tatatí*, se puede obtener el teorema Tatatí. Sin embargo, la regla Modus Ponens *tampoco* permite hacer esta deducción. Es necesario tener *también* el axioma Tatatá para ello. Por ejemplo si yo tengo que *Si hoy es domingo, entonces hay fútbol*, no puedo deducir que *hay fútbol*; necesito también el axioma *hoy es domingo*.

Finalmente, tenemos otro error que comete mucha gente relacionado con las afirmaciones del tipo *si Tatatá, entonces Tatatí*. Consideremos un ejemplo. Suponga que usted tiene los dos axiomas siguientes:

Axioma 1: *Si hoy es domingo, entonces hoy hay fútbol*

Axioma 2: *Hoy no es domingo*

Mucha gente diría que se puede entonces deducir el teorema *hoy no hay fútbol.* Pero esto no es posible a partir de la regla Modus Ponens. Le dejamos a usted la tarea de justificar por qué.

a. Justifique por qué no se puede hacer la deducción anterior.

Deduzca los teoremas y haga la representación gráfica de la deducción que se obtiene a partir de los siguientes axiomas. En cada paso, diga qué representan *Tatatá* y *Tatatí.*

b. Primer grupo:

Axioma 1: *El sol calienta la tierra.*

Axioma 2: *Si el sol calienta la tierra, entonces las plantas crecen.*

Axioma 3: *Si las plantas crecen, entonces hay alimento para todos.*

c. Segundo grupo:

Axioma 1: *Me gano la lotería.*

Axioma 2: *Si me gano la lotería, entonces compro un carro.*

4. La regla de los cuantificadores

Junto con la regla Modus Ponens, hay otra regla de deducción que se utiliza muy frecuentemente; es la regla de los cuantificadores.

Como usted ya sabe manejar la idea de Tatatá y Tatatí, vamos a expresarla en esos términos. La regla dice lo siguiente:

Si tenemos que *Este es Tatatá* y que *Todos los Tatatá son Tatatí,* entonces podemos deducir: *Este es Tatatí.*

Dentro de la expresión de esta regla, estamos introduciendo un nuevo término: *Este.* Este término pretende representar cualquier objeto que pueda tener la característica de ser Tatatá. Veamos unos ejemplos para aclarar la idea.

Si tenemos los axiomas:

- *Martha es alumna de esta sección* y *Todos los alumnos de esta sección son estudiantes de derecho*

La regla de los cuantificadores nos permite deducir el teorema

- *Martha es estudiante de derecho*

Observemos que, para estos axiomas, Tatatá representa *los alumnos de esta sección*, Tatatí, *estudiantes de derecho* y *Este* está representado por *Martha*.

En el caso de los dos axiomas *Carlos es estudiante de antropología*, y *Todos los estudiantes de antropología son estudiantes pilos*, Tatatá representa *estudiantes de antropología*, Tatatí *estudiantes pilos* y *Este* representa a *Carlos*. La regla de los cuantificadores nos permite deducir el teorema Este es Tatatí, o sea *Carlos es estudiante pilo*.

Deduzca los teoremas y haga la representación gráfica de la deducción que se obtiene a partir de los siguientes axiomas. En cada paso, diga qué representan Tatatá, Tatatí y Este.

a. Primer grupo:

Axioma 1: *Todos los números pares son divisibles por 2.*

Axioma 2: *48 es un número par.*

b. Segundo grupo:

Axioma 1: **MI** *es una palabra que tiene* **M** *al comienzo.*

Axioma 2: *Todas las palabras que tienen* **M** *al comienzo son palabras del acertijo de* **MU**.

Axioma 3: *Todas las palabras del acertijo de* **MU** *son palabras que tienen un número impar de* **I***es.*

5. Un nuevo sistema formal

Las dos reglas de deducción que acabamos de descubrir son muy potentes. Con ellas y con cualquier conjunto de axiomas que tengan la forma apropiada para aplicar las reglas podemos construir nuevos sistemas dentro de los cuales podemos hacer deducciones y obtener teoremas. Veamos un ejemplo. Supongamos que tenemos los siguientes axiomas:

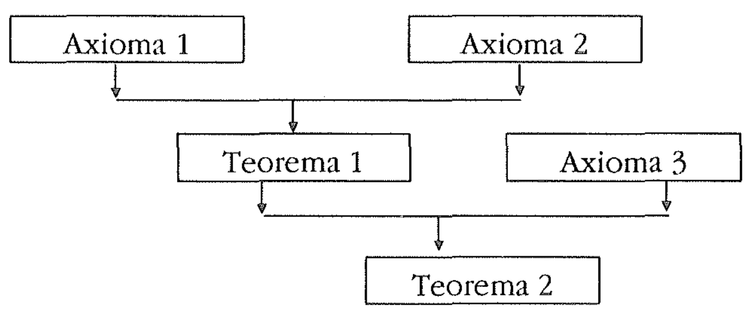
Axioma 1: *Calisto es un satélite galileano.*

Axioma 2: *Todos los satélites galileanos son cuerpos que giran alrededor de Júpiter.*

Axioma 3: *Si Calisto es un cuerpo que gira alrededor de Júpiter, entonces Calisto es una luna de Júpiter.*

Aplicando la regla de los cuantificadores a los dos primeros axiomas, podemos deducir el teorema 1: *Calisto es un cuerpo que gira alrededor de Júpiter.* Con este teorema, el tercer axioma y la regla Modus Ponens, podemos entonces deducir el teorema 2: *Calisto es una luna de Júpiter.*

Gráficamente esta deducción se puede representar de la siguiente manera:



Ahora consideremos los siguientes axiomas:

Axioma 1: *Si hay escasez de gasolina, entonces se produce un aumento en el precio de la gasolina.*

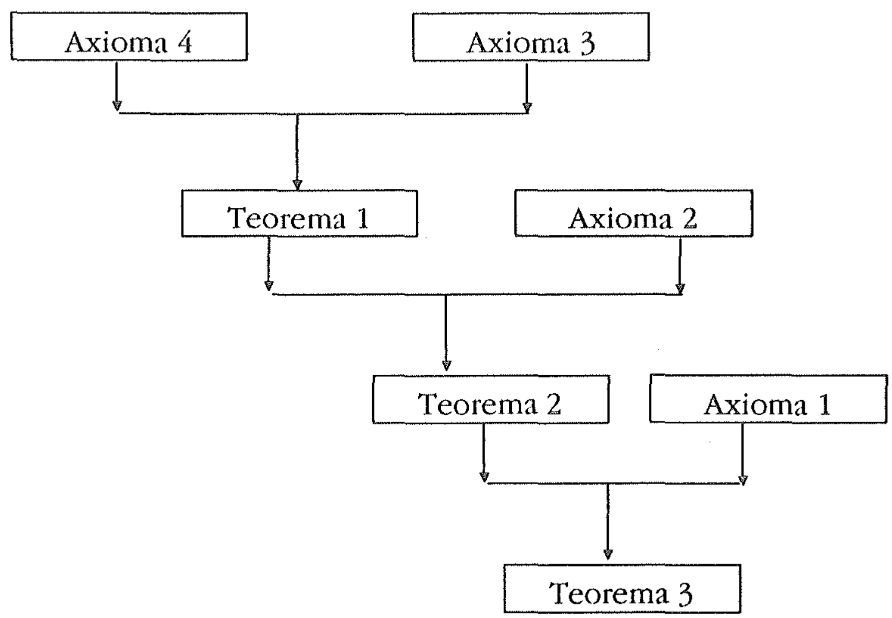
Axioma 2: *Si hoy es un día en que hay problemas en la refinería, entonces hay escasez de gasolina.*

Axioma 3: *Todos los días en que se rompe el oleoducto son días en que hay problemas en la refinería.*

Axioma 4: *Hoy es un día en que se rompe el oleoducto.*

A partir del axioma 4, el axioma 3 y la regla de cuantificadores, podemos deducir el teorema 1: *Hoy es un día en que hay problemas en la refinería.* Con este teorema, el axioma 2 y la regla Modus Ponens, podemos deducir el teorema 2: *hay escasez de gasolina.* Finalmente con este teorema, el axioma 1 y la regla Modus Ponens, podemos deducir el teorema 3: *se produce aumento en el precio de la gasolina.*

Gráficamente esta deducción se puede presentar de la siguiente manera:



Obtenga los teoremas que se deducen de los axiomas que se proponen a continuación. Para cada problema diga cuáles son las reglas de deducción que utiliza en cada paso y haga la presentación gráfica de la deducción.

a. Primer grupo:

Axioma 1: *Si mañana es un día en que bailo la danza de la lluvia, entonces mañana habrá luna llena.*

Axioma 2: *Si hoy es un día en que aprendo la danza de la lluvia entonces mañana es un día en que bailo la danza de la lluvia.*

Axioma 3: *Todos los días en que voy a clase son días en que aprendo la danza de la lluvia.*

Axioma 4: *Hoy es un día en que voy a clase.*

b. Segundo grupo:

Axioma 1: *Si Matebásica tiene fórmulas, entonces Matebásica es aburrido.*

Axioma 2: *Todos los libros pesados son libros de matemáticas.*

Axioma 3: *Matebásica es un libro de más de 300 páginas.*

Axioma 4: *Todos los libros de más de 300 páginas son libros pesados.*

Axioma 5: *Si Matebásica es un libro de matemáticas, entonces Matebásica tiene fórmulas.*

6. El problema de las palabras

Usted debe haberse dado cuenta de que la forma en que está expresada la regla de los cuantificadores es muy restrictiva, en el sentido de que solamente se puede aplicar a axiomas que tengan exactamente esa forma. Sin embargo, podemos imaginar muchas afirmaciones a las cuales quisiéramos aplicar la regla de los cuantificadores y no lo podemos hacer porque estas afirmaciones no tienen la forma correcta. Por ejemplo, nosotros quisiéramos deducir el teorema: *Juan está en primer semestre*, de los axiomas: *Juan está en Matebásica* y *Todos los estudiantes de Matebásica están en primer semestre.*

Debería ser claro que no podemos aplicar la regla de los cuantificadores a estos dos axiomas para obtener el teorema. Sin embargo, el teorema se puede deducir de los axiomas, si se encuentra la manera de transformar los axiomas para que tengan la forma adecuada. En este caso, podríamos transformarlos de la siguiente manera:

- *Todos los estudiantes de Matebásica son estudiantes que están en primer semestre.*

- *Juan es estudiante de Matebásica.*

A estos dos axiomas sí podemos aplicarles la regla de los cuantificadores y obtenemos el teorema:

- *Juan es un estudiante que está en primer semestre.*

Usted pensará que lo anterior es una manera de complicar las cosas, dado que la deducción era aparentemente evidente a partir de los axiomas iniciales. Sin embargo, el problema es que no tenemos ninguna regla de deducción que nos permita hacerlo. La única regla que conocemos para este efecto es la regla de los cuantificadores y para aplicarla es necesario que los axiomas estén expresados en la forma apropiada.

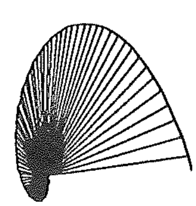
Aunque este proceso complique las cosas, también nos evita muchos errores porque si logramos transformar los axiomas apropiadamente y podemos aplicar la regla de los cuantificadores, entonces podemos estar seguros que no hemos cometido ningún error.

Consideremos otro ejemplo. La frase: *Los perros que ladran no muerden,* no tiene la forma apropiada. Sin embargo, se puede transformar en una frase que tenga el mismo significado de la frase que buscamos. Podemos transformarla en: *Todos los perros que ladran son perros que no muerden.* Hay que darse cuenta que esta segunda frase tiene el mismo significado que la primera. El riesgo que corremos al transformar afirmaciones consiste en producir nuevas frases con significados diferentes o más restrictivos que los de las frases originales.

Transforme las siguientes frases en frases que tengan la forma apropiada para aplicar la regla de los cuantificadores:

a. Los estudiantes vagos se rajan.

b. Los fumadores tienen riesgo de morir.



c. Las plantas verdes tienen clorofila.

d. Los planetas del sistema solar giran alrededor del sol.

7. Problemas

Para los siguientes grupos de axiomas usted tiene que:

- Transformar los axiomas a axiomas que tengan la forma apropiada para aplicar las reglas de deducción.
- Hacer la deducción y obtener los teoremas correspondientes.
- Para cada teorema, decir qué regla de deducción aplicó.
- Hacer la representación gráfica de la deducción.

a. **Primer grupo**:

Axioma 1: *Los estudiantes vagos se rajan.*

Axioma 2: *Los estudiantes que se rajan salen de la Universidad.*

Axioma 3: *Si María Helena no va clase, entonces María Helena no estudia.*

Axioma 4: *Si María Helena no estudia, entonces María Helena es una estudiante que es vaga.*

Axioma 5: *María Helena no va a clase.*

b. **Segundo grupo**:

Axioma 1: *Las plantas verdes tienen clorofila.*

Axioma 2: *Las plantas que tienen clorofila producen glucosa.*

Axioma 3: *La lechuga es una planta que es verde.*

Axioma 4: *Si la lechuga produce glucosa, entonces la lechuga es alimenticia.*

Axioma 5: *Si la lechuga es alimenticia, entonces Cristina come lechuga.*

Axioma 6: *Si Cristina come lechuga, entonces Cristina es vegetariana.*

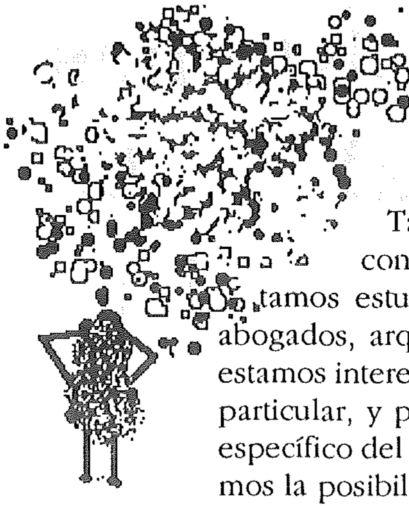
Axioma 7: *Los vegetarianos no comen carne.*

Tal vez una buena manera de imaginarse un sistema social consistiría en subirse al piso cuarenta del edificio de Avianca y mirar por una ventana. Dada la complejidad de lo que se vería y la distancia a la cual lo estaríamos haciendo, podríamos pensar que lo que está allí abajo es algún tipo de gran máquina. Afortunadamente, nosotros sabemos que lo que está allá abajo es algo que comúnmente se conoce como un sistema social. Lo importante de realizar esta experiencia es darnos cuenta de la complejidad, variedad y variabilidad del sistema. Todo sistema social involucra, por definición, al ser humano. Por tanto, todo sistema social tiende a ser complicado. Sin embargo, nosotros nos encontramos en la obligación o, por lo menos, en la necesidad de estudiar y comprender tal sistema. Nuestro problema consiste, por tanto, en encontrar alguna manera eficiente de analizar y comprender los sistemas sociales.

6. Los sistemas sociales y las matemáticas

Tal vez una buena manera de ver un sistema social consistiría en subirse al piso cuarenta de un edificio y mirar por una ventana. Dada la complejidad de lo que se vería y la distancia a la cual lo estaríamos haciendo, podríamos pensar que lo que está allí abajo es algún tipo de gran máquina. Afortunadamente, nosotros sabemos que lo que está allá abajo es algo que comúnmente se conoce como un sistema social. Lo importante de realizar esta experiencia es darnos cuenta de la complejidad, variedad y variabilidad del sistema. Todo sistema social involucra, por definición, al ser humano. Por tanto, todo sistema social tiende a ser complicado. Sin embargo, nos encontramos en la obligación o, por lo menos, en la necesidad de estudiar y comprender tal sistema. Nuestro problema consiste, por tanto, en encontrar alguna manera eficiente de analizar y comprender los sistemas sociales.

Seguramente, la primera idea que se nos ocurriría sería la de quedarnos allá arriba y estudiar el sistema en toda su complejidad. No obstante, un sistema social está compuesto por tal número de elementos e interrelaciones diversas, que intentar comprender y analizar el sistema real es una tarea de titanes. Por otro lado, en el sistema real no es posible experimentar. Esto quiere decir que, si tomamos esta po-

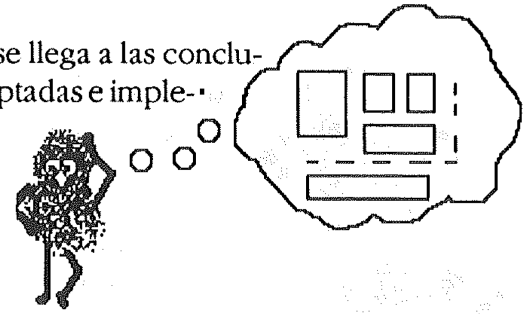


sición para su estudio, la única manera de conocer las implicaciones de una política es implementarla en el sistema; y esto puede llegar a ser muy costoso desde el punto de vista social.

Tal vez todo lo anterior sea más fácil de comprender si consideramos un ejemplo específico. Supongamos que estamos estudiando la situación de una pequeña ciudad. Somos abogados, arquitectos, o, de manera general, científicos sociales, y estamos interesados en el estudio del sistema que se nos presenta. En particular, y por alguna razón, estamos interesados en el problema específico del ancho de las calles. Alguien nos ha pedido que estudiemos la posibilidad de cambiar el ancho de las mismas. El tamaño de las calles está regulado por un conjunto de leyes y por tanto tenemos necesidad de conocer las opiniones de los abogados. Pero, obviamente tendremos que conocer las opiniones de los arquitectos, los científicos políticos, los antropólogos y varios otros más. Nuestro problema consiste en evaluar las consecuencias que, dentro del sistema, tendría la implementación de una ley que cambiase el ancho de las calles, haciéndolas más angostas.

Es más o menos claro que una política tal tendrá multitud de implicaciones dentro del sistema. Por ejemplo, es posible que el sistema de transporte público se vuelva muy ineficiente; que aparezcan problemas en los servicios públicos; y, también que, por razón del tamaño diferente de los andenes, la gente se sienta mucho más cómoda. Lo que nos debe interesar en última instancia es la gente, y en general el bienestar de la comunidad. Nuestro objetivo final es saber qué implicaciones podría llegar a tener la política que estamos estudiando desde el punto de vista del bienestar social. Y, ¿cómo podemos saberlo?

Al comienzo consideramos una posibilidad: podemos sencillamente estudiar el sistema real en toda su complejidad y, a partir de nuestra experiencia e intuición, tratar de predecir (o, mejor, adivinar) las consecuencias que la implementación de la política tendría desde el punto de vista del bienestar social. Sin embargo, no es difícil darse cuenta que tal actitud puede llegar a ser extremadamente ineficiente y muy costosa socialmente. En particular, es claro que sería una aproximación basada en gran parte en los sentimientos y la intuición y muy poco en la razón. Pero hemos de aceptar que para llevar a cabo una decisión apropiada, que sea comprendida y aceptada por los demás, ésta debe ser una decisión racional. Es decir una decisión donde queden claras las suposiciones de donde se parte y la manera como, a partir de esas suposiciones, se llega a las conclusiones que se desea sean aceptadas e implementadas.



1. Hay que lograr una simplificación

Un proceso racional para el caso que se está considerando sólo se puede llevar a cabo si tenemos una idea clara del sistema social que se está estudiando. Recordemos que nuestro problema consiste esencialmente en poder determinar cuáles van a ser los efectos que, desde el punto de vista del bienestar social, se obtendrán en caso de que se implemente la política. Esto será posible únicamente si logramos definir una simplificación del sistema real donde se encuentren especificados todos los elementos e interrelaciones que son relevantes con respecto a la política en cuestión. Necesitamos que sea una simplificación del sistema real pues, como ya vimos, en el sistema real no es posible ensayar posibles soluciones. Y debe ser una simplificación tal que contenga todos aquellos elementos que necesitaremos dentro de nuestro análisis racional. En otras palabras debemos construir un modelo del sistema real.

Una vez que hayamos logrado construir un modelo del sistema, nuestro problema estará muy cerca de su solución. Porque, en ese momento, lo que tenemos que hacer es implementar la política dentro del modelo y estudiar allí sus consecuencias. Esto será posible porque habremos construido un modelo donde los elementos e interrelaciones relevantes estarán claramente especificadas. El proceso que llevaremos a cabo será algo como lo siguiente: consideramos el elemento donde específicamente se va a implementar la política (por ejemplo el conjunto de leyes que regulan el ancho de las calles) y hacemos el cambio correspondiente en ese elemento; nuestro modelo nos mostrará que ese elemento está interrelacionado con varios más dentro del sistema. Dado que hemos hecho un cambio en el primero, esto implicará cambios en los segundos (por ejemplo, el transporte público y los servicios públicos); el modelo nos dirá cuáles serán los cambios que ocurrirán en los demás elementos del sistema pues éste nos presenta una simplificación de sus elementos e interrelaciones. Seguiremos, por lo tanto, un proceso en cadena consistente en sucesivos cambios en los elementos del sistema que estarán regulados y determinados por las interrelaciones entre esos elementos; llegará el momento en que habremos podido determinar, dentro de nuestro modelo, todos los efectos de nuestra política. En ese momento nos quedará faltando solamente un último paso: dados los efectos que dentro del modelo ha implicado la política, ¿cuál es el valor social de estos cambios? Aquí tendremos que hacer algunas suposiciones pero, al final, habremos logrado nuestro objetivo: tener una idea, basada en un proceso racional, de las consecuencias que la política implica desde el punto de vista del bienestar social.

Para poder analizar este tipo de problemas debemos entonces desarrollar herramientas que permitan llevar a cabo por lo menos los siguientes pasos:

- Definir el problema
- Identificar las alternativas de solución
- Identificar los criterios de selección de las alternativas de solución
- Analizar, dentro del problema, las alternativas de solución de acuerdo a los criterios de selección
- Una vez escogida una solución, generar un discurso que permita defender esta solución como aquella que mejor satisface los criterios de selección

En este texto proponemos un tipo de aproximación al análisis de problemas. Esta aproximación no será una herramienta de solución al estilo de las sugeridas para los problemas matemáticos, sino más bien un conjunto de pautas a partir de las cuales cada quien podrá construir su método personal para analizar problemas desde un punto de vista formal.

7. La herramienta

El curso de matemáticas en que usted se encuentra puede ser considerado como un ejemplo de un sistema social complejo. En lo que sigue, se presentará un ejemplo de la manera cómo la filosofía del capítulo anterior se puede aplicar para resolver un problema.

Presentaremos a continuación una herramienta que nos permite analizar este tipo de problemas. Veámosla primero en un ejemplo:

Resulta que las directivas de una Universidad desean evaluar la bondad de una nueva política con respecto a la manera como se califica a los estudiantes de los cursos de matemáticas. Ellos desean saber si sería bueno introducir la siguiente política:

La nota definitiva del curso dependerá únicamente de las notas de los parciales y de la nota del examen final.

El problema propone, desde un comienzo, solamente dos alternativas de solución:

- Introducir la política anterior
- No introducirla y mantener el status quo

1. Los criterios de selección

Con el fin de decidir qué es mejor, si implementar o no la política, es necesario analizar sus consecuencias. Los criterios de selección son las condiciones que permitirán comparar las implicaciones de cada una de las alternativas de solución, para así, poder escoger la mejor.

Estos criterios de selección los definen las personas interesadas en el problema; en este caso, las directivas de la Universidad. Ellos han determinado que el principal criterio de selección es:

La calidad de la formación académica del estudiante

2. Los elementos del sistema

Evidentemente, no existe una "fórmula mágica" que nos permita identificar automáticamente los elementos relevantes del problema. Qué elementos identifica una persona depende, por lo menos parcialmente, de su posición ideológica y de su visión personal del problema. Sin embargo, la mayor parte de los elementos relevantes debería ser clara.

En el caso del problema que estamos considerando, la alternativa analizada involucra ya dos elementos:

- las notas definitivas de los estudiantes
- las notas de los exámenes y parciales

Por otra parte, el criterio de selección determina un tercer elemento:

- la formación académica del estudiante

Finalmente, identificamos un cuarto elemento, como aquel que pensamos que es determinante en la formación del estudiante:

- el trabajo sistemático y permanente durante el semestre

Aunque sería posible identificar más elementos dentro del problema (por ejemplo, en la lista anterior, no se está teniendo en cuenta al profesor), es esencial que el número de elementos que se determine sea reducido, puesto que, en caso contrario, no se estaría haciendo una simplificación del problema.

3. Las interrelaciones

El propósito ahora es identificar las interrelaciones entre estos elementos. No buscamos presentar todas las interrelaciones posibles, sino solamente aquellas que nos parecen relevantes en relación con las alternativas de solución y los criterios de selección.

En primera instancia, presentamos estas interrelaciones de manera informal, para después expresarlas dentro de un esquema que permita la evaluación de la alternativa de solución a partir de los criterios de selección.

La identificación de las interrelaciones es un proceso subjetivo. Esto no presenta un problema por ahora, puesto que lo importante es hacer explícita esta subjetividad. Podemos identificar dos interrelaciones entre los elementos:

- Los estudiantes le dan más importancia a las notas que a su trabajo en clase.
- El trabajo sistemático y permanente durante el semestre es el elemento que más aporta a la formación del estudiante.

Esta es una descripción extremadamente simplificada de la psicología del estudiante y de la situación que generalmente se encuentra en un salón de clase. Sin embargo, como primer ejemplo, nos permite darnos cuenta de la manera en que es posible expresar interrelaciones entre elementos que se hayan definido con anterioridad.

La forma superficial como se han expresado las interrelaciones no nos permite analizar el problema. Para ello es necesario expresar las interrelaciones de una manera explícita y formal que permita conectarlas unas a otras. Para ello basta notar que, en este caso particular, es posible hacerlo pensando únicamente en el aumento o la disminución de los elementos que se identificaron en un comienzo. Podemos expresar estas interrelaciones así:

- Si se aumenta la importancia de las notas en la evaluación del estudiante, entonces el estudiante disminuirá su trabajo sistemático y permanente durante el semestre.
- Si el estudiante disminuye su trabajo sistemático y permanente durante el semestre, entonces se disminuirá la calidad de su formación.

4. Los hechos

¿Qué tenemos hasta ahora? Tenemos un modelo que consta de cuatro elementos y dos interrelaciones. Y no tiene en cuenta ninguna alternativa de solución. La alternativa de solución es un "dato" externo al modelo, o lo que llamaremos un "hecho", en este caso se puede expresar así:

- aumentar importancia de las notas en la evaluación del estudiante

Una vez introducida la alternativa de solución dentro del modelo, podemos "evaluar" esta alternativa (o sea la política), en el sentido de que el modelo nos permite deducir las implicaciones de la misma.

5. La evaluación

Para hacer esta evaluación se hace necesario llevar a cabo el proceso lógico que permita llegar a una conclusión. Este proceso contiene únicamente dos pasos:

- el estudiante disminuye su trabajo sistemático y permanente durante el semestre (a partir del hecho y a)

- disminuir la calidad de la formación del estudiante (a partir de b y la conclusión anterior)

Esto quiere decir que, con base en el modelo, podemos concluir que, si se aumenta la importancia de las notas en la evaluación del estudiante (como lo propone la alternativa de solución), entonces se disminuye la calidad de la formación del estudiante. Esta es nuestra conclusión. Ahora que hemos deducido la implicación de implementar la alternativa de solución en el modelo, podemos evaluarla, dado que lo que se deduce del modelo (disminuir la calidad de la formación del estudiante) no satisface el criterio de selección.

La esencia de este proceso se resume en los siguientes aspectos:

- Se hizo una simplificación de un problema complejo (a esta simplificación la llamamos un modelo)

- El modelo presenta de manera explícita las opiniones del investigador acerca de la realidad que está considerando.

- Si se aceptan las suposiciones propuestas por el modelo, el modelo permite llegar a una conclusión evidente desde el punto de vista lógico.

- Dado lo anterior, la única manera en la cual es posible no estar de acuerdo con la conclusión que se obtiene del modelo, es no estando de acuerdo con las suposiciones expresadas en las interrelaciones que éste propone.

6. La definición del problema

Normalmente la persona que presenta el problema no es la misma persona que lo resuelve. Sin embargo, si somos nosotros quienes debemos resolver un problema, el primer paso que tenemos que hacer es asegurarnos de que el problema esté bien definido. Para ello, tenemos que verificar que se cumplan tres condiciones principales:

Primera. Que el sistema o situación general donde se desarrolla el problema esté suficientemente bien identificado. Si éste no es el caso, nosotros no podremos construir el modelo de la situación o, lo que puede ser peor, resolveremos el mismo problema, pero para una circunstancia diferente.

Segunda. Que exista por lo menos una alternativa de solución. Es importante darse cuenta que la herramienta que aquí se expone no tiene como propósito encontrar una solución al problema. Su propósito es el de evaluar una alternativa de solución. Esta alternativa de solución se expresa generalmente en la forma de una política que se desea instaurar dentro del sistema en consideración. Hay que notar que si somos capaces de evaluar varias alternativas de solución, de cierta manera estamos siendo capaces de encontrar una solución. Sin embargo, hay que tener en cuenta que, dentro de la definición del problema que se nos da para resolver, deben estar contenidas las alternativas de solución que nosotros debemos evaluar.

Tercera. Que exista un criterio de selección. Los criterios de selección los debemos recibir de quien define el problema. Debemos tener una expresión clara de estos criterios de selección para poder atacar el problema y evaluar las alternativas de solución.

7. La construcción del modelo

Si el problema está bien definido, podemos entonces construir el modelo o el sistema formal. La construcción del modelo consta de los siguientes pasos:

- Identificación del lenguaje o elementos relevantes
- Identificación de las interrelaciones

Identificación del lenguaje

Cuando hablamos del lenguaje del modelo, queremos decir el conjunto de símbolos que vamos a usar para su construcción. En el ejemplo del capítulo anterior, este lenguaje estaba constituido sencillamente por las palabras o frases que identificaban elementos del sistema real. Aunque ésta no va a ser la única situación posible, podemos entonces pensar por ahora que la identificación del lenguaje consiste en la identificación de los elementos de la situación real que son relevantes para la alternativa de solución propuesta de acuerdo a los criterios de selección establecidos.

Es trascendental darse cuenta de que un problema no está definido únicamente por la situación real o sistema dentro del cual éste sucede. Un mismo sistema puede dar lugar a diferentes problemas, dependiendo de cuáles sean las alternativas de solución y cuáles sean los criterios de selección. Por consiguiente, la identificación de los elementos relevantes del problema depende directamente de cuál sea la alternativa de solución que se quiere evaluar y cuál sea el criterio de selección que se haya establecido.

Esta etapa de identificación de los elementos del modelo debe cumplir con otra condición trascendental: el número de elementos del modelo debe ser reducido. El secreto de la herramienta consiste en su sencillez. Nuestra herramienta nos permite solucionar problemas porque, a través de ella, construimos una simplificación del problema. Pero, para que nuestra herramienta sea sencilla, el modelo debe tener un número reducido de elementos.

La identificación de las interrelaciones

Una vez que se han identificado los elementos relevantes del sistema, es necesario identificar las interrelaciones entre estos elementos. Una interrelación es una afirmación que expresa la relación existente entre dos elementos y que representa una característica relevante del sistema con respecto a la alternativa de solución y al criterio de selección.

Por las mismas razones que se consideraron en el caso de la identificación de los elementos del sistema, en este caso nos interesa identificar únicamente las interrelaciones entre elementos que sean relevantes al problema en cuestión. En este sentido hay que hacer una selección de todas las posibilidades.

Las interrelaciones expresan características del sistema real. Es trabajo de quien resuelve el problema descubrir o identificar estas características. Ya hemos mencionado que este paso introduce visos de subjetividad en la solución del problema, pero que ésta no es una deficiencia de la herramienta sino, por el contrario, una ventaja, pues obliga a quien resuelve el problema a expresar explícitamente sus opiniones acerca del sistema real dentro del cual se está evaluando la solución.

En primera instancia, y con el propósito de simplificar esta etapa del proceso, la herramienta requiere que expresemos estas relaciones de manera informal. Podremos expresarlas en nuestro lenguaje corriente, siempre que la relación entre los elementos sea clara.

8. Deducción de la conclusión

Si hemos construido bien nuestro modelo en el sentido de que hemos identificado los elementos verdaderamente relevantes al problema y hemos determinado las interrelaciones relevantes al problema teniendo en cuenta el criterio de selección, podemos entonces introducir la alternativa de solución dentro del modelo y, a partir de ella, conectar las interrelaciones para deducir una conclusión que nos debe conducir a una afirmación acerca de la alternativa de solución de acuerdo al criterio de selección.

El proceso para conectar las interrelaciones hace uso de características fundamentales de la lógica elemental que vimos en el capítulo de método axiomático: las reglas Modus Ponens y cuantificadores.

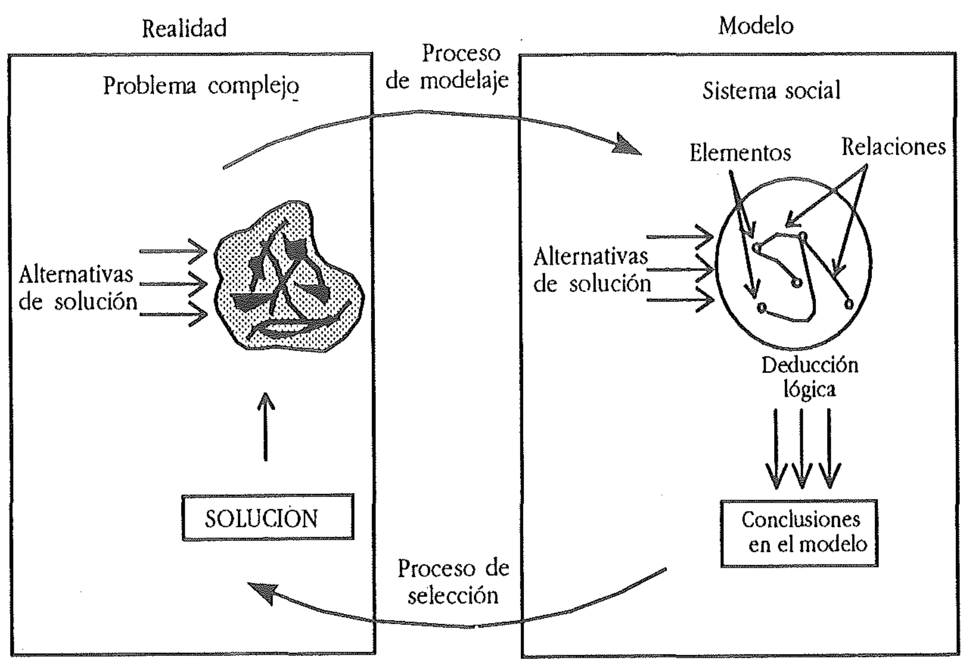
A través de este proceso de conexión de las interrelaciones podremos entonces llegar a nuestra conclusión.

9. La defensa de la tesis

En general se piensa que lo difícil no es llegar a la conclusión, sino ser capaz de defender racionalmente esta conclusión. Gracias a la herramienta, este problema desaparece por completo.

Si el modelo ha sido bien construido, la defensa de la validez de la conclusión a la que llegamos gracias a él es evidente. Basta mostrar el proceso por medio del cual hemos conectado las interrelaciones para llegar a la conclusión a partir de la alternativa de solución. Como este proceso hace uso de la lógica elemental, quien acepte las suposiciones involucradas en el modelo no tendrá más alternativa que aceptar la conclusión.

Todo este proceso puede verse en la ilustración siguiente.:



10. Los problemas de la herramienta

Nuestra herramienta no es infalible. Ella tiene varias desventajas y posibles problemas de los cuales hay que ser consciente. Entre ellos, se pueden mencionar los siguientes:

Que no sea posible llegar a una conclusión.

Esto sucede si, al construir el modelo, no hemos tenido en cuenta que es necesario introducir la alternativa de solución y por lo menos una interrelación que contenga el criterio de selección. Aún más, es posible que, habiendo cumplido con la condición anterior, no sea posible conectar las interrelaciones para llegar a una conclusión. En este caso, el defecto no es de la herramienta, sino de la construcción misma del modelo. Nosotros no habremos sido capaces de identificar las interrelaciones relevantes al problema.

Que nuestro interlocutor no acepte la conclusión.

Este es en realidad un problema menor, puesto que, como ya se mencionó, esta situación solamente se puede producir si nuestro interlocutor no acepta la validez de alguna de nuestras interrelaciones. Este ya es un punto subjetivo del proceso y requeriría ya sea de la construcción de un nuevo modelo o de la decisión de que existen posiciones de opinión entre nosotros y nuestro interlocutor acerca de las características del sistema real que se está considerando.

a. Las directivas de la Universidad han decidido asignarle un trabajo para que usted lo resuelva. Dentro del espacio mismo de la Universidad, las directivas quieren que usted analice la siguiente política:

> Reducir en clase las explicaciones magistrales del profesor y fomentar la participación activa del alumno mediante la discusión a partir de hojas de trabajo que se han hecho en la casa.

El criterio de selección que le interesa a la Universidad es la calidad de la formación del estudiante.

Usted deberá construir un modelo de este problema aplicando cada uno de los pasos expuestos en el capítulo anterior para llegar a una conclusión acerca de la política de acuerdo al criterio de selección. Suponga que la Universidad se acaba de ganar la lotería y tiene recursos ilimitados.

b. Invéntese un problema y resuélvalo de acuerdo a las pautas de la herramienta que se expusieron en el capítulo anterior. Recuerde que, en este caso, usted debe proponer una alternativa de solución al problema y evaluarla de acuerdo a un criterio de selección que usted habrá determinado.

8. Sistemas formales y el lenguaje

Nuestro interés en este capítulo es estudiar algo de la gramática generativa de nuestro idioma. Esto significa mirar la organización o sistema del español como un mecanismo que produce o genera oraciones. Por supuesto, esto sólo lo lograremos en una pequeña parte. En 1957, Noam Chomsky realizó sus primeros trabajos en gramática generativa y desde entonces se ha convertido en una rama importante de la lingüística. En la Universidad de los Andes, el profesor Jorge Páramo ha desarrollado también su gramática generativa, y es en ella en la que nos hemos basado para este capítulo.

1. Del lenguaje al sistema formal

Aunque diariamente usamos el lenguaje con el fin de expresar nuestras ideas, conocer las de los demás, intercambiar informaciones, hacer relaciones sociales, etc., casi nunca pensamos en el lenguaje en sí mismo debido a la dificultad que surge al tratar de explicarlo. En realidad, pensar en el lenguaje, no como un instrumento que manejamos inconscientemente, sino como un sistema complejo que no funciona al azar, es una tarea difícil pero que resulta muy interesante.

El objetivo de este capítulo es mostrar cómo se pueden emplear los sistemas formales para modelar la gramática de una lengua natural como el español; esto es, cómo funciona una *gramática generativa*. Pero, a diferencia de otros sistemas formales, lo construiremos poco a poco, ampliando cada vez la realidad que deseamos modelar. Identificaremos un axioma, unas reglas de deducción y una interpretación que nos permitan producir (o generar) las frases de nuestro lenguaje. Naturalmente, no podemos examinar todas las frases españolas posibles, pues esto resultaría excesivamente laborioso para nuestro propósito. En realidad, vamos a limitarnos a considerar un subconjunto de ellas: en primera instancia, las que se conocen comúnmente como *sintagmas nominales* y, más adelante, cierto grupo de *oraciones* muy sencillas.

2. Sintagmas nominales

Expresiones como:

- *Carlos*
- *mi casa*
- *Pedro y el lobo*
- *Sistemas formales y el lenguaje*
- *tres libras de azúcar en polvo*
- *Departamento de Matemáticas de la Universidad de los Andes*

se llaman todas sintagmas nominales. Como puede verse, son expresiones que giran en torno a los sustantivos y no tienen verbos. Se emplean básicamente para nombrar las cosas, entidades, personas, etc. de que hablamos. Generalmente aparecen haciendo parte de oraciones completas, como en *Ayer, Pedro y el lobo dejaron en mi casa tres libras de azúcar en polvo.* Sin embargo, también es frecuente encontrarlas solas, en forma independiente, como en una lista de compras, en los títulos y subtítulos de los libros, o en otras circunstancias.

Los sintagmas nominales más simples son los sustantivos, ya sean nombres propios (*Carlos, Juan, María, ...*) o nombres comunes (*mesa, perro, luz, ...*). Tratemos de construir un sistema formal que nos sirva para modelar un sintagma nominal de este tipo.

Aclaremos primero los símbolos que vamos a usar.

$\mathbb{X}_S$ representará un sintagma nominal cualquiera

$\mathbb{S}$ representará un sustantivo en particular. Cuando lleguemos a este símbolo debemos interpretarlo.

La *interpretación* en este caso consistirá en escoger el sustantivo de un *conjunto de interpretación*, $\mathbf{S}$, que tendremos dispuesto para ello.

Si tenemos el conjunto de interpretación de sustantivos

$\mathbf{S}$ = {*Carlos, Pedro, María, mesa, niño,*
lobo, luz, libertad, departamento,... }

comenzaremos a construir nuestro sistema formal dando un axioma y una regla que nos permita escoger de esta lista un sustantivo en especial.

Axioma: X_S

Regla 1: $X_S \rightarrow S$

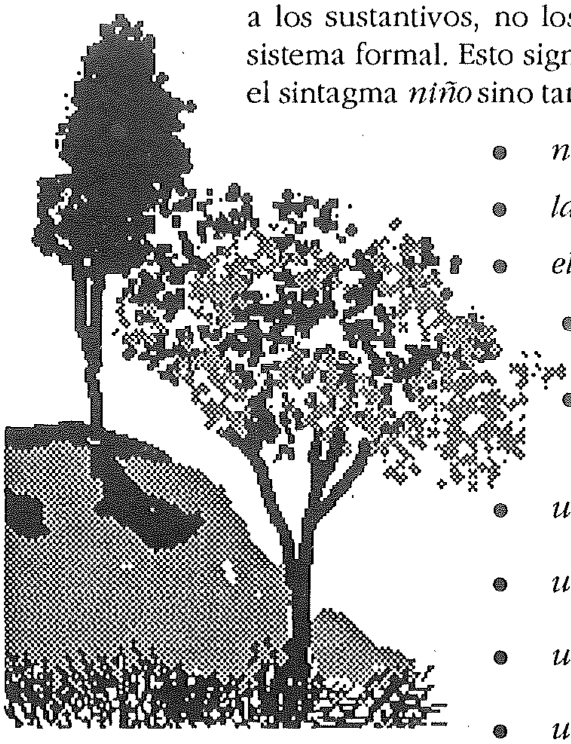
Explicación: $\rightarrow$ se interpreta como *está compuesto por* y la regla se leería:

- el sintagma nominal está compuesto por un sustantivo.

Interpretación: sólo debemos interpretar S. Lo interpretamos como cualquier elemento del conjunto de interpretación de sustantivos. Esto significa que este sistema formal modela cualquiera de los sintagmas:

- *Carlos*
- *mesa*
- *niño*

Pero podemos interpretarlo de otras maneras. El género (masculino o femenino), el número (singular o plural) o los artículos que acompañen a los sustantivos, no los tendremos en cuenta como elementos del sistema formal. Esto significa que este sistema formal no sólo modela el sintagma *niño* sino también:



- *niña*
- *la niña*
- *el niño*
- *las niñas*
- *los niños*
- *una niña*
- *un niño*
- *unas niñas*
- *unos niños*

3. Ampliando el sistema

Este sistema formal es muy reducido y sólo permite modelar sintagmas muy simples. Por ejemplo *Carlos y el niño* no se podría modelar porque consta de dos sustantivos coordinados por la conjunción *y*. Así que necesitamos una nueva regla que nos permita ampliar nuestro sistema.

Axioma: X_S

Regla 1: $X_S \rightarrow S$

Regla 2: $X_S \rightarrow X_S + X_S$

Esta nueva regla hace posible que el sintagma nominal esté compuesto por dos sintagmas nominales o más, si se aplica varias veces sobre ella misma. El signo + se interpreta como *y*, *o*, *pero*, como una *coma* (,) o como cualquier otra conjunción.

Ahora sí podemos generar el sintagma nominal *Carlos y el niño*. Veamos como sería su deducción.

Paso 1.	$X_S \rightarrow X_S + X_S$
Paso 2.	$X_S \rightarrow S_1$
Paso 3.	$X_S \rightarrow S_2$

Interpretación: + se interpreta como *y*, S_1 como *Carlos* y S_2 como *el niño*.

Siempre haremos la deducción de un sintagma de izquierda a derecha. En el caso del ejemplo, primero debemos llegar a detallar completamente *Carlos* antes de pasar a detallar *el niño*.

Además, en cada paso de la deducción debemos indicar en qué paso anterior aparecían los elementos a los cuales nos estamos refiriendo. En el ejemplo sería así: el primer paso no proviene de nada anterior, entonces le corresponderá (0). En el segundo y tercer paso nos referimos a los Xs que aparecían en el primer paso, así que les corresponderá (1). La deducción completa es:

Paso1.	$\mathbf{X_s \to X_s + X_s}$	(0)
Paso2.	$\mathbf{X_s \to S_1}$	(1)
Paso3.	$\mathbf{X_s \to S_2}$	(1)

a. Escriba un sintagma nominal que use tres elementos del conjunto de interpretación de sustantivos y haga la deducción correspondiente.

b. Construya la deducción que le corresponde al sintagma nominal *Caín y Abel, Adán y Eva.*

4. Adjetivos

Analizar el sintagma *el buen Carlos* no sería posible con las herramientas que tenemos, ya que *buen* no aparece en nuestro conjunto de interpretación de sustantivos (no es uno de ellos: es un adjetivo). Necesitamos ahora un conjunto de palabras que califiquen a las que ya tenemos. Simbolicémoslo por **Q** y definámoslo como un conjunto de adjetivos españoles. Por ejemplo:

Q = {*bueno, dos, estos,ese, tres, mi,*
neutro, feroz, rojo, libre...}

Además necesitamos unas reglas que nos permitan relacionarlos con los sustantivos y otra que nos permita escogerlos de la lista. Ampliemos pues el sistema.

Axioma: $\mathbf{X_s}$

Regla 1: $\mathbf{X_s \to S}$

Regla 2: $\mathbf{X_s \to X_s + X_s}$

Regla 3: $\mathbf{X_s \to X_q X_s}$

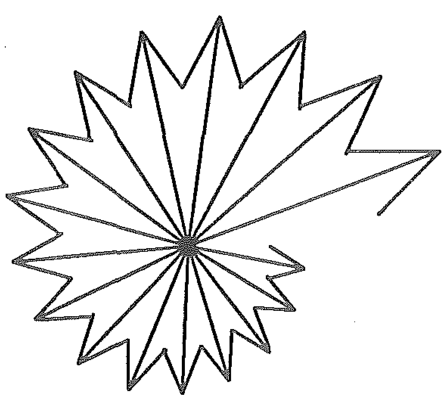
Regla 4: $\mathbf{X_q \to Q}$

$\mathbf{X}_q$ representa un sintagma que califica al sustantivo y $\mathbf{Q}$ un adjetivo particular. Ahora sí, *el buen Carlos* se analizaría de la siguiente manera:

Paso 1.	$\mathbf{X}_s \to \mathbf{X}_q\mathbf{X}_s$	(0)
Paso 2.	$\mathbf{X}_q \to \mathbf{Q}$	(1)
Paso 3.	$\mathbf{X}_s \to \mathbf{S}$	(1)

Interpretación: $\mathbf{Q}$ se interpretaría como *buen* y $\mathbf{S}$ como *Carlos.* Por lo que dijimos atrás, no nos ocupamos del artículo *el.*

Los sintagmas *estos niños, dos niños* y *buenas mesas* corresponden todos a la misma deducción pero con diferentes interpretaciones.



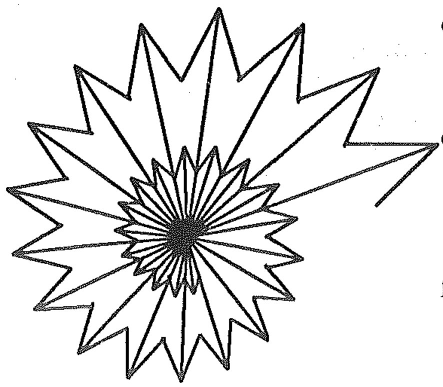
a. Identifique en cada sintagma anterior la interpretación correspondiente.

b. Escriba otros tres sintagmas que correspondan a la misma deducción.

A un sintagma como *el lobo feroz* no le corresponde la misma deducción, porque tenemos que generar los elementos del sintagma de izquierda a derecha. La deducción de *el lobo feroz* sería ligeramente distinta:

Paso 1.	$\mathbf{X}_s \to \mathbf{X}_q\mathbf{X}_s$	(0)
Paso 2.	$\mathbf{X}_s \to \mathbf{S}$	(1)
Paso 3.	$\mathbf{X}_q \to \mathbf{Q}$	(1)

c. Haga la deducción que corresponde al sintagma *esas hermosas palabras.*



d. Invente tres sintagmas que tengan la misma deducción.

e. Construya la deducción que corresponde al sintagma nominal que figura como título de este capítulo: *Sistemas formales y el len- guaje.*

f. ¿Qué regla habría que agregarle al sistema para que se pudiera generar también los sintagmas: *un hombre alto y gordo, una idea incorrecta pero interesante, una ovejita flaca, pequeña y coja*?

5. Una nueva ampliación

Si examinamos los sintagmas nominales *un hueso de hombre, el presupuesto del municipio, hospital para infantes* y los comparamos con *un hueso humano, el presupuesto municipal, hospital infantil* nos damos cuenta de que es posible hacer que un sustantivo, y más en general un sintagma nominal, funcione como un adjetivo, en el sentido de que califique a un sustantivo. Esto se puede lograr gracias a las partículas *de, para* y otras semejantes, que se intercalan entre un sustantivo y otro.

Ampliemos, pues, el sistema para que pueda generar este nuevo tipo de sintagmas nominales:

Axioma: $\mathbf{X_s}$

Reglas 1: $\mathbf{X_s \rightarrow S}$

Regla 2: $\mathbf{X_s \rightarrow X_s + X_s}$

Regla 3: $\mathbf{X_s \rightarrow X_q X_s}$

Regla 4: $\mathbf{X_q \rightarrow Q}$

Regla 5: $\mathbf{X_q \rightarrow X_s}$

Con esta nueva regla estamos permitiendo que un sintagma que califica a un sustantivo ($\mathbf{X_q}$) esté compuesto precisamente por un sintagma nominal ($\mathbf{X_s}$) . Veamos la deducción que le corresponde a *un hueso de hombre.*

Paso 1.	$\mathbf{X_s \rightarrow X_q X_s}$	(0)
Paso 2.	$\mathbf{X_s \rightarrow S_1}$	(1)
Paso 3.	$\mathbf{X_q \rightarrow X_s}$	(1)
Paso 4.	$\mathbf{X_s \rightarrow S_2}$	(3)

Interpretación: S_1 es *un hueso*, S_2 es *hombre* y *de* se intercala entre dos sustantivos como indicador del paso 3.

Hagamos el mismo proceso para la siguiente frase:

- *el color de esas montañas*

Paso 1.	$\mathbf{X_s \rightarrow X_q X_s}$	(0)
Paso 2.	$\mathbf{X_s \rightarrow S_1}$	(1)
Paso 3.	$\mathbf{X_q \rightarrow X_s}$	(1)
Paso 4.	$\mathbf{X_s \rightarrow X_q X_s}$	(3)
Paso 5.	$\mathbf{X_q \rightarrow Q}$	(4)
Paso 6.	$\mathbf{X_s \rightarrow S_2}$	(4)

Interpretación: S_1 es *el color*, **Q** es *esas*, S_2 es *montañas.*

a. Analizar *las canciones de Iván y Lucía.*

b. Trate de hacer la deducción correspondiente al siguiente sintagma nominal: *la llave de la chapa de la puerta de la casa de mi tía.*

6. Gráficas

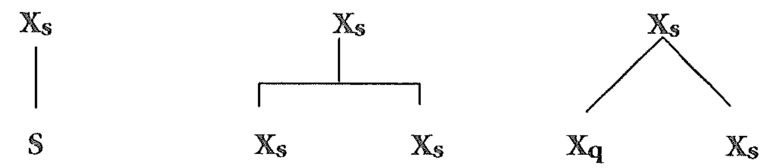
Hemos visto cómo hacer las deducciones e interpretar los elementos finales a los que llegamos (**Q** y **S**). Pero también podemos representar gráficamente esta deducción y su interpretación.

De acuerdo a la clase de operación que presentan, tenemos básicamente tres tipos de reglas:

- $X_s \rightarrow S$
- $X_s \rightarrow X_s + X_s$
- $X_s \rightarrow X_q X_s$

Cada una tiene una representación gráfica distinta:

Combinando estas tres representaciones podemos hacer la gráfica de



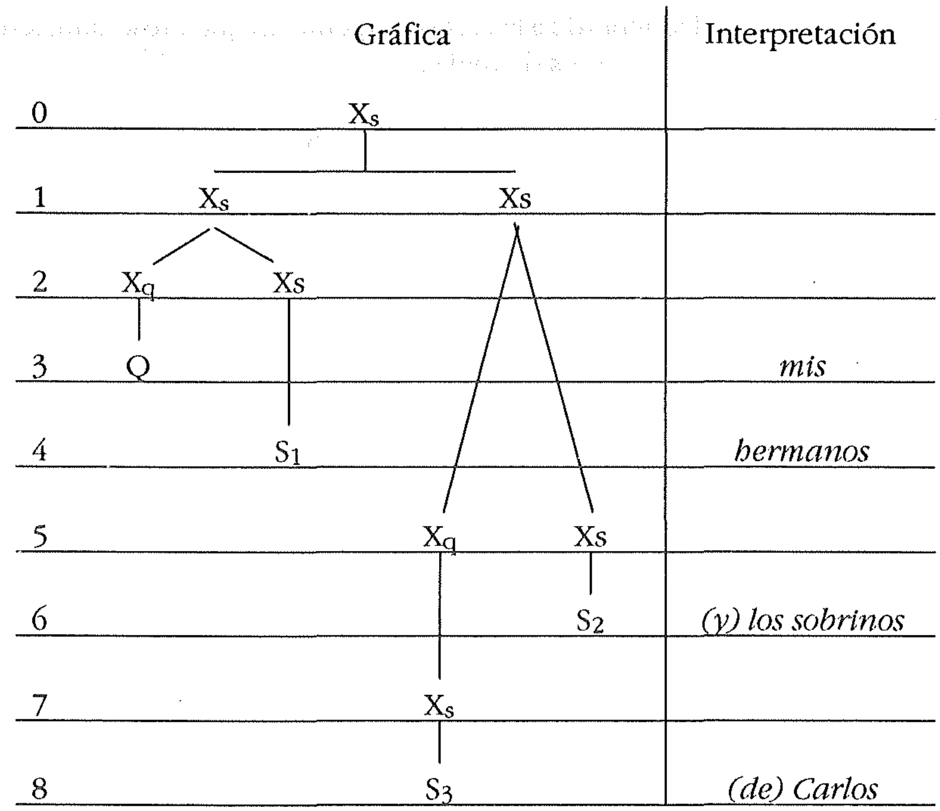
cualquier deducción de un sintagma nominal. Veámoslo con un ejemplo.

La deducción correspondiente al sintagma nominal *mis hermanos y los sobrinos de Carlos* es :

Paso 1.	$X_s \rightarrow X_s + X_s$	(0)
Paso 2.	$X_s \rightarrow X_q X_s$	(1)
Paso 3.	$X_q \rightarrow Q$	(2)
Paso 4.	$X_s \rightarrow S_1$	(2)
Paso 5.	$X_s \rightarrow X_q X_s$	(1)
Paso 6.	$X_s \rightarrow S_2$	(5)
Paso 7.	$X_q \rightarrow X_s$	(5)
Paso 8.	$X_s \rightarrow S_3$	(7)

Interpretación: **Q** es *mis*, S_1 es *hermanos*, S_2 es *sobrinos* y S_3 es *Carlos*.

La gráfica de esta deducción sería la siguiente:



a. Hacer las gráficas de las deducciones del ejercicio anterior.

7. Oraciones

Hasta ahora no hemos analizado oraciones completas, pero lo que hemos hecho nos facilitará este trabajo. Una oración tiene dos partes fundamentales:

sintagma nominal: de lo que se habla. Se llama también *sujeto.*

sintagma verbal: lo que se habla. Se llama también *predicado.*

En las secciones anteriores hemos aprendido a analizar los sintagmas nominales. Veremos ahora cómo debemos ampliar nuestro sistema para los sintagmas verbales.

Para los propósitos de esta exposición, un *sintagma verbal* estará compuesto básicamente por un *verbo* y un *complemento directo.*

Analizaremos entonces cada una de estas partes y agregaremos reglas a nuestro sistema que nos permitan hacer este análisis. También debemos cambiar el axioma porque ahora vamos a analizar oraciones completas. El nuevo sistema es el siguiente:

Axioma: X_o

Regla 1: $X_s \rightarrow S$

Regla 2: $X_s \rightarrow X_s + X_s$

Regla 3: $X_s \rightarrow X_q X_s$

Regla 4: $X_q \rightarrow Q$

Regla 5: $X_q \rightarrow X_s$

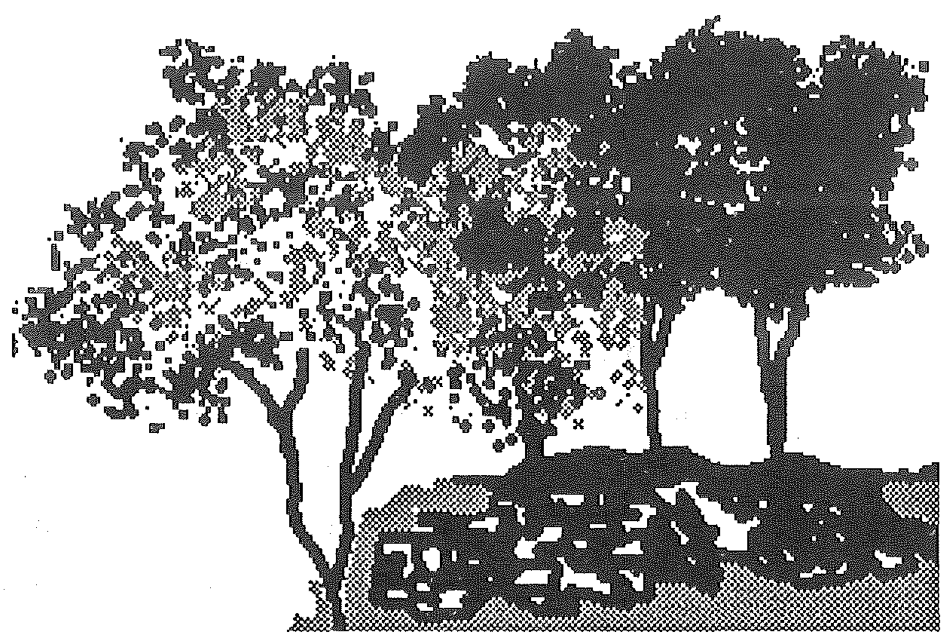
Regla 6: $X_o \rightarrow X_s Y_v$

Regla 7: $Y_v \rightarrow Y_v + Y_v$

Regla 8: $Y_v \rightarrow X_c Y_v$

Regla 9: $Y_v \rightarrow V$

Regla 10: $X_c \rightarrow X_s$



Explicación: $\mathbf{X_O}$ es cualquier oración, $\mathbf{Y_V}$ representa un sintagma verbal, $\mathbf{X_C}$ el complemento del verbo (que es un sintagma nominal), $\mathbf{V}$ es el verbo. Las nuevas reglas incluyen nuevos símbolos, pero son del mismo tipo de las anteriores.

La regla 10 es del mismo tipo de la regla $\mathbf{X_q} \rightarrow \mathbf{X_S}$ y cuando se aplica también pueden aparecer las palabras *de, para, a.*

La regla 9 es una nueva regla que permite escoger de un conjunto de interpretaciones. El *conjunto de interpretación de verbos* es

$$\mathbf{V} = \{\textit{pintar, venir, aullar, fabricar, ladrar, tejer, examinar...}\}$$

Analicemos la oración *Carlos pinta las dos mesas*:

Paso 1.	$\mathbf{X_O} \rightarrow \mathbf{X_S Y_V}$	(0)
Paso 2.	$\mathbf{X_S} \rightarrow \mathbf{S_1}$	(1)
Paso 3.	$\mathbf{Y_V} \rightarrow \mathbf{X_C Y_V}$	(1)
Paso 4.	$\mathbf{Y_V} \rightarrow \mathbf{V}$	(3)
Paso 5.	$\mathbf{X_C} \rightarrow \mathbf{X_S}$	(3)
Paso 6.	$\mathbf{X_S} \rightarrow \mathbf{X_q X_S}$	(5)
Paso 7.	$\mathbf{X_q} \rightarrow \mathbf{Q}$	(6)
Paso 8.	$\mathbf{X_S} \rightarrow \mathbf{S_2}$	(6)

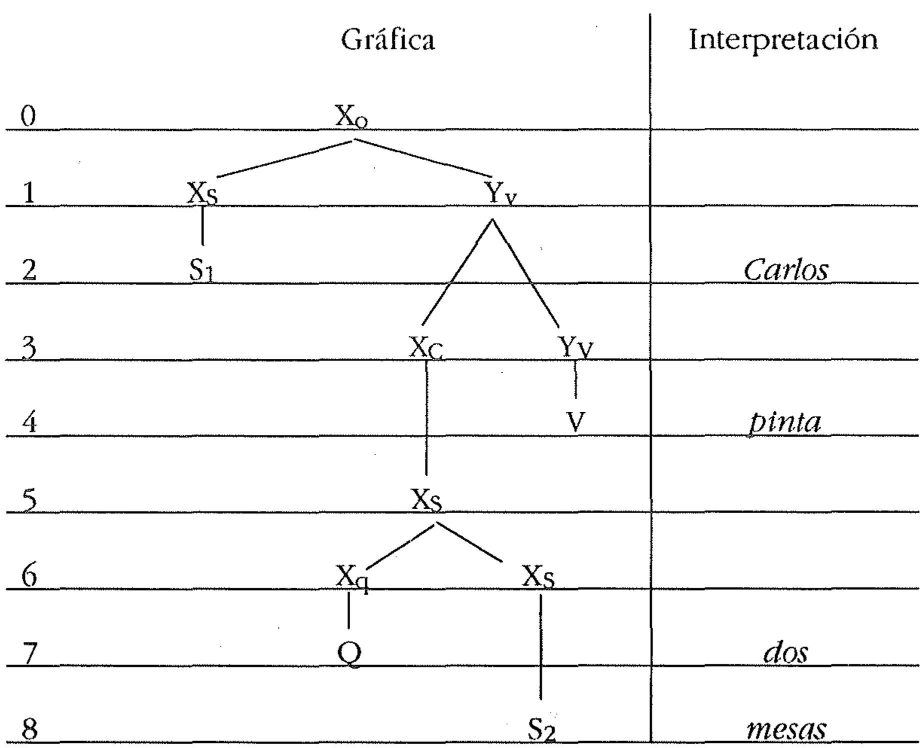
Interpretación: $\mathbf{S_1}$ es *Carlos*, $\mathbf{V}$ es *pinta*, $\mathbf{Q}$ es *dos*, $\mathbf{S_2}$ es *mesas.*

La gráfica de esta deducción se muestra en la página siguiente.

a. Haga la deducción y la gráfica de las oraciones:

- *El elefante barrita*
- *El profesor explica la palabra anterior*
- *El departamento de Matemáticas editó tres libros novedosos*

- *Carlos y María sostienen una agradable conversación*
- *Lanza rayos el cielo*
- *El ágil y veloz gato de mi tía*
- *La guerra santa según los templarios*
- *El muchacho insistió e insistió*
- *Los axiomas y las reglas conforman el sistema formal*
- *Ese asunto complicó la extracción*
- *Usó el teléfono rojo y declaró la última guerra*



b. Escriba, en cada caso, dos sintagmas nominales o dos oraciones que correspondan a la deducción presentada.

Paso 1.	$X_s \rightarrow X_s + X_s$	(0)
Paso 2.	$X_s \rightarrow S_1$	(1)
Paso 3.	$X_s \rightarrow X_q X_s$	(1)
Paso 4.	$X_q \rightarrow Q_1$	(3)
Paso 5.	$X_s \rightarrow X_q X_s$	(3)
Paso 6.	$X_q \rightarrow Q_2$	(5)
Paso 7.	$X_s \rightarrow S_2$	(5)

Paso 1.	$X_o \rightarrow X_s Y_v$	(0)
Paso 2.	$X_s \rightarrow S_1$	(1)
Paso 3.	$Y_v \rightarrow X_c Y_v$	(1)
Paso 4.	$Y_v \rightarrow V$	(3)
Paso 5.	$X_c \rightarrow X_s$	(3)
Paso 6.	$X_s \rightarrow S_2$	(5)

Paso 1.	$X_o \rightarrow X_s Y_v$	(0)
Paso 2.	$X_s \rightarrow X_q X_s$	(1)
Paso 3.	$X_s \rightarrow S_1$	(2)
Paso 4.	$X_q \rightarrow X_s$	(2)
Paso 5.	$X_s \rightarrow S_2$	(4)
Paso 6.	$Y_v \rightarrow X_c Y_v$	(1)
Paso 7.	$Y_v \rightarrow V$	(6)
Paso 8.	$X_c \rightarrow X_s$	(6)
Paso 9.	$X_s \rightarrow X_q X_s$	(8)
Paso 10.	$X_s \rightarrow S_3$	(9)
Paso 11.	$X_q \rightarrow X_s$	(9)
Paso 12.	$X_s \rightarrow S_4$	(11)

9. Ejercítese en sistemas formales

1. Hechiceros

En la época de los poderosos y maléficos magos y hechiceros, el más temible de ellos era el misteriosos **BB**, famoso porque poseía un gran secreto. Escondidos en el bosque de los pinos verzules ♣*los que en la noche son negros y en el día también* ♣, se encontraban Axiomático y Práctica, su amada; ellos sabían que en el bosque estaban seguros, ya que eso les había dicho su tía Sabiduría. ♣*Ella hablaba dormida*♣

Pero un día Práctica, que había salido a caminar, se perdió y salió a un claro del bosque, con tan mala fortuna que fue capturada por el temible **BB**. Apenas Axiomático se enteró de esto, fue a rescatarle. Debía derrotar al malvado **BB** y para esto contaba con las siguientes armas: ♣*en otras épocas dieron por llamarlas reglas del juego*♣

1. □ AB ▲ → □ BA ▲
2. □ AA ▲ → □ AB ▲
3. □ A ▲ → □ AA ▲
4. □ B ▲ → □ BA ▲

Y como todos los demás en el planeta, debía siempre comenzar el ataque por **ABBA** el portero del castillo de **BB**. ♣*Otro sueño de la tía Sabiduría*♣

a. Para derrotar al maléfico **BB**, Axiomático debía pasar por todos sus lugartenientes, siempre partiendo de **ABBA**. La lista de los secuaces de **BB** era la siguiente:

- **BBBBA**

- **AABBAA**
- **ABABA**
- **ABBBBA**

b. Además se debía explicar el secreto del terrorrífico **BB**. ¿Podría ayudarle a Axiomático?

2. Otro con letras

El sistema **ABC** tiene las siguientes reglas:

1. Si en una palabra hay **AA**, se puede anteponer una **B** a la palabra.
2. Toda palabra se puede duplicar.
3. Después de **A** se puede insertar una **C**.
4. Si en una palabra aparece **AC** se puede eliminar esa **A**.

a. ¿Qué resulta de aplicar la tercera regla a **AB**?

b. ¿Qué resulta de aplicar la primera regla a **AB**?

c. ¿Qué resulta de aplicar la primera regla a **CAAB**?

d. Muestre que a partir de **A** se deduce **BAC**.

e. Muestre que a partir de **A** se deduce **BCBC**.

3. Uno sobre MU

a. Refiriéndose al acertijo de **MU**, encuentre dos hileras que comiencen por **M**, —distintas de **MI**—, de las que no se pueda deducir **MU**. Explique claramente por qué no se deduce **MU**.

b. Exprese en buen romance (o sea en palabras) la siguiente regla:

$\mathrm{U}\blacktriangle \rightarrow \blacktriangle$

c. Aplique la anterior regla a la hilera **UUM**.

d. ¿A qué hileras no se les puede aplicar la regla?

e. Exprese simbólicamente (con variables y flechitas) la regla:

Si una hilera tiene una **I**, se puede agregar una **M** al comienzo de la hilera

4. Adivine la regla

a. Adivine la regla respondiendo en orden las siguientes preguntas y teniendo en cuenta cada vez, la información que se da:

MI no se puede aplicar la regla
UMI no se puede aplicar la regla
MUU $\rightarrow$ **UM**

b. ¿Es suficiente que la palabra comience por **M** para poder aplicar la regla? ¿Por qué?

c. Escriba cinco hipótesis sobre las condiciones que requiere una palabra para que sobre ella pueda aplicarse la regla.

MUUU no se puede aplicar la regla
MUUUU $\rightarrow$ **UUM**

d. Con la información que tiene hasta ahora, ¿puede asegurar que para que a una palabra se pueda aplicar la regla, ella debe comenzar por **M**? Explique. En caso de que no esté seguro, ¿qué palabras le interesaría proponer?

IUU	no se puede aplicar la regla
UUU	no se puede aplicar la regla
M → **M**	

e. ¿Puede dar las características para que a una palabra se le pueda aplicar la regla? Explique.

MIMI	no se puede aplicar la regla
MIMIM → **IMM**	

f. ¿Adivinó la regla? Escríbala.

5. Adivine la regla

Usted está jugando a Adivine la regla y su contrincante le ha respondido lo siguiente:

MM	no se puede aplicar la regla
MI	no se puede aplicar la regla
MU	no se puede aplicar la regla
IM	no se puede aplicar la regla
U	no se puede aplicar la regla

a. ¿Puede la regla de su contrincante condicionar el comienzo de la palabra a **M** o a **U**? ¿Puede terminar en **U**, en **M** o en **I**? Explique sus respuestas a partir de la información que le dan las palabras que usted sabe que no son aplicables.

Por otro lado usted sabe lo siguiente:

IUMII →MMII

b. Proponga tres reglas que cumplan con todas las condiciones.

Finalmente usted descubre:

IUMUU →MMUU

c. ¿Qué reglas, de las que usted propuso en el último punto, quedan eliminadas? Explique su respuesta.

d. ¿Qué regla intuye usted que sea? ¿Por qué?

e. ¿Qué palabra propondría usted para estar seguro que sí es la regla que está pensando? ¿Qué resultado espera usted que le den cuando proponga esa palabra?

6. Generalidades

Represente simbólicamente las siguientes reglas:

a. Si una palabra comienza y termina por **M** se puede eliminar la **M** inicial.

b. Si una palabra tiene una **U** entonces la palabra se puede triplicar.

c. Si una palabra tiene una **I** se pueden eliminar los símbolos que hay antes de la **I**.

d. Si una palabra tiene una **M** y una **I**, se pueden intercambiar las posiciones de estas dos letras.

7. Más sobre reglas

Con el lenguaje {A, B, C, D}

a. Invéntese una regla que haga:

ABC →ABCAB

b. Escríbala en dibujos y en palabras.

c. Invéntese otra regla que haga:

ACB →ABCA

d. Escríbala en dibujos y en palabras.

e. Invéntese una regla que al aplicarla a **ABC** y a **ACB** nos produzca **ABCAB** y **ABCA** respectivamente.

f. Escríbala en dibujos y en palabras.

8. El tinterillo

Considere el sistema formal que tiene los siguientes axiomas:

Axioma 1: *Si hay actividad personal del trabajador y hay dependencia del trabajador hacia el patrono y el patrono le paga al trabajador, entonces hay contrato de trabajo.*

Axioma 2: *Si hay contrato de trabajo y se pactó por escrito el contrato de trabajo entonces hay contrato de trabajo a término fijo.*

Axioma 3: *Si el patrono exige horario al trabajador entonces hay dependencia del trabajador hacia el patrono.*

Axioma 4: *El patrono exige horario al trabajador.*

Axioma 5: *Hay actividad personal del trabajador.*

Axioma 6: *El patrono le paga al trabajador.*

a. Demuestre el teorema:

Hay dependencia del trabajador hacia el patrono.

b. Demuestre el teorema:

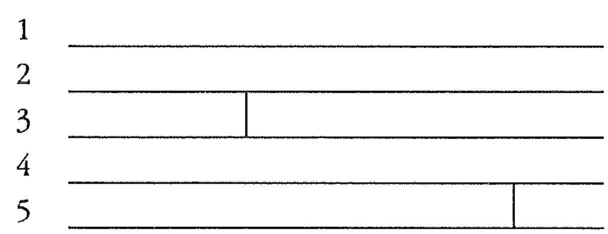
Hay contrato de trabajo.

9. Siga la pista

Considere el siguiente juego:

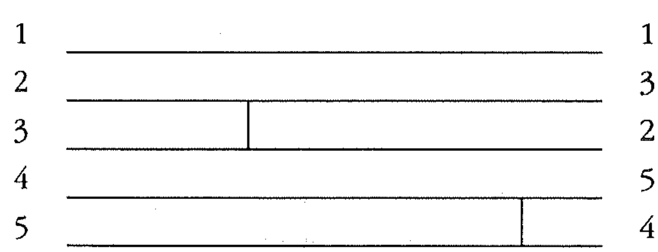
El juego consiste en elegir alguno de los números de la izquierda y seguirle la pista a través del laberinto para descubrir por cual línea sale. Después de seleccionar algún número nos desplazamos de izquierda a derecha sobre las líneas horizontales; si en el camino tropezamos con una línea vertical estamos obligados a subir o a bajar según sea el caso.

Veamos un ejemplo:



Si partimos de cinco, en la trayectoria nos encontramos con un palo vertical que nos obliga a subir a la línea del cuatro y continuar por ésta hasta el final.

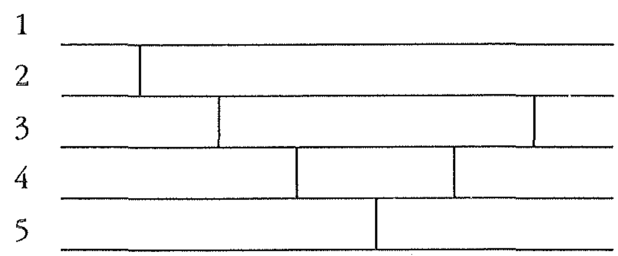
Siguiendo la pista de todos obtenemos la siguiente solución:

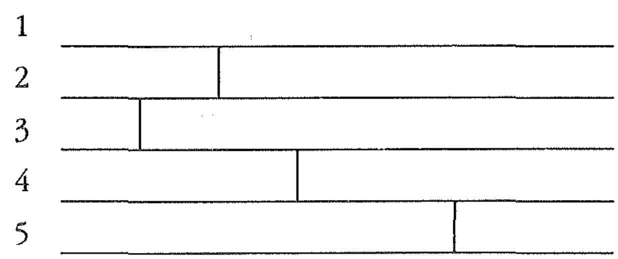


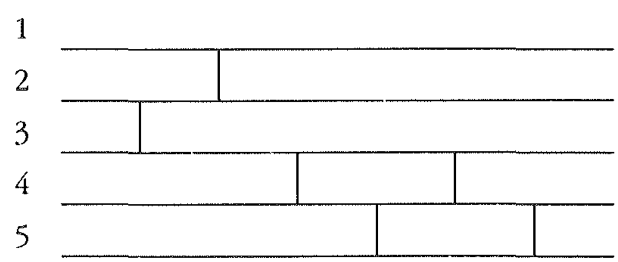
Llamaremos **regla** al conjunto de las 5 líneas horizontales y al conjunto de todos los palos verticales.

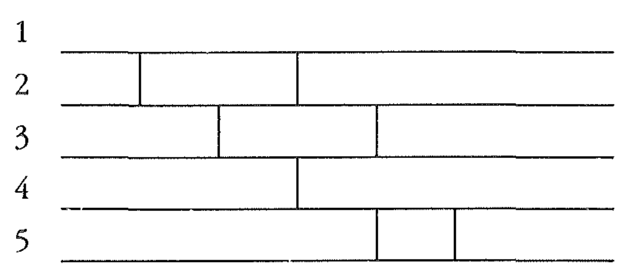
Estas reglas son aplicadas sobre los números 1, 2, 3, 4 y 5.

a. Calcule el resultado de aplicar las siguientes reglas para los cuatro casos mostrados a continuación:









b. Produzca las reglas de tal manera que pueda obtener los siguientes 4 resultados:

1	1
2	2
3	4
4	3
5	5

1	2
2	3
3	1
4	4
5	5

1	5
2	1
3	2
4	3
5	4

1	2
2	4
3	1
4	3
5	5

c. En este juego identifique lenguaje, axioma, reglas y toere

10. Y el último de números

Considere el sistema formal que tiene la siguiente descripción:

Hileras válidas (o números válidos): **1**, **2**, **3**,...

Axioma: **1**

Regla 1: A una hilera válida se le puede agregar un cinco al final.

Regla 2: $\blacktriangle 5 \rightarrow \blacktriangle 7$

a. Exprese la primera regla con variables y la segunda en palabras.

b. Considere las cuatro hileras siguientes: **1755**, **1557**, **17775**, **7775**. Algunas pueden deducirse, otras no. Para las que puedan deducirse, dé la secuencia de producción de la hilera. Para las que no, explique la razón.

c. Dé dos ejemplos de hileras válidas que no se puedan deducir.

d. ¿A qué operación aritmética corresponde la regla 1?

e. Cambie la regla dos para que junto con la regla 1 y el axioma permita generar todos los naturales.

11. Sistemas sociales

El gobierno deseaba analizar la política de liberar las importaciones. Pidió a un asesor realizar este análisis y éste fue el resultado: "Si se disminuye el impuesto a las importaciones, aumenta la cantidad de artículos extranjeros, lo cual produciría mayor competencia con los artículos de la industria colombiana.

La disminución en las ventas de artículos colombianos producirá detrimento en la industria, lo que nos llevará a un periodo de recesión y por lo tanto no se debe implementar la política."

a. En este argumento identifique los elementos, las interrelaciones y el criterio de selección.

b. Analice el proceso de deducción por medio del cual se obtuvo la conclusión.

12. Sistemas formales y lenguaje

a. Elabore la deducción y la gráfica de los siguientes sintagmas:

"La invasión a Kuwait según los aliados"

"El carnaval de Barranquilla sin la guerra de las flores."

"La subida tremenda a la iglesia"

"El ágil y veloz gato de mi tía"

"El muro de Berlín en la actualidad"

"Preguntas correctas pero argumentos erróneos."

"El exigente e interesante curso de matebásica."

13. Método axiomático

Axioma 1: Alicia miente

Axioma 2: Si alicia miente entonces el conejo miente.

Axioma 3: La tortuga no miente.

Axioma 4: Si el conejo miente y la tortuga no miente, entonces el conejo se robó los pasteles.

Axioma 5: Todo el que se haya robado los pasteles se robó la pimienta.

Axioma 6: Si el conejo se robó los pasteles o Alicia miente entonces la Reina inicia un juicio.

Axioma 7: Todo el que inicia un juicio está loco.

Axioma 8: Si la tortuga no miente entonces la tortuga se robó los pasteles.

a. Deduzca todos los posibles teoremas

14. Método axiomático

Axioma 1: Si el conejo mira el reloj entonces el conejo está retrasado.

Axioma 2: Si el conejo está retrasado entonces el conejo corre.

Axioma 3: Si el conejo corre entonces el conejo no mira a la gente que pasa a su lado.

Axioma 4: Todos los que no miran a la gente que pasa a su lado, son antipáticos.

Axioma 5: Todos lo que persiguen al conejo, no son invitados a la fiesta del no cumpleaños.

Axioma 6: Si Alicia vé al conejo corriendo entonces Alicia persigue al conejo.

Axioma 7: Alicia vé al conejo corriendo.

Axioma 8: Todos los que son antipáticos no son invitados a la fiesta del no cumpleaños.

Axioma 9: Si Alicia persigue al conejo entonces el conejo mira el reloj.

Axioma 10: Si Alicia no es invitada a la fiesta del no cumpleaños o el conejo no es invitado a la fiesta del no cumpleaños, entonces nadie va a la fiesta del no cumpleaños.

Axioma 11: Si Alicia vé al conejo corriendo, entonces el conejo persigue a Alicia.

Axioma 12: Todos los que ven al conejo corriendo son antipáticos.

a. Demuestre los siguientes teoremas:

Alicia es antipática.

Nadie va a la fiesta del no cumpleaños.

15. Sistemas formales

Vamos a trabajar con el siguiente sistema formal.

Las palabras se compondrán de las letras A, J y U.

El axioma: JA

Las reglas son:

R1:Toda palabra se puede triplicar.

R2: Dentro de una palabra, la secuencia JA se puede cambiar por JUA.

R3: Dentro de una palabra, de la secuencia AJA puede eliminarse la J.

a. Demuestre que JAJUA y que JUAJAJA son teoremas del sistema.

b. Escriba las reglas de manera gráfica.

c. ¿Qué puede observar del número de Aes en los teoremas del sistema? Justifique con detalles su afirmación.

d. Muestre por qué AJA no es un teorema del sistema.

16. Adivine la regla

Estamos jugando ADIVINE LA REGLA en el nivel 5-1 (5 símbolos y 1 variable)

Proponemos IM: IM ➔ No se aplica

Proponemos MM: MM ➔ MM

Proponga seis hipótesis sobre cuál es la regla.

Proponemos UU: UU ➔ No se aplica

a. ¿Qué hipótesis puede falsificar con esta última información?

Proponemos MI:MI ➔ IM

b. ¿Qué hipótesis puede falsificar con esta última información?

c. ¿Cuál es la regla?

17. Sistemas formales

Alfabeto: A,B,T.

Axioma: ■TB, donde ■ es cualquier combinación de A y/o B.

a. ABAATB es un axioma de este sistema formal? Explique

b. Dé otros dos axiomas del sistema formal

Reglas: ■BTB▲ → ■TBA▲

■BTA▲ → ■B▲

■ATA▲ → ■A▲

■ATB▲ → ■B▲

Por ejemplo, si aplicamos la cuarta regla a BBAATBAB, se transforma en BBABAB.

c. Aplique la segunda regla a BBBTAAB

d. Aplique a BBABBTB las reglas, todas las veces que sea posible.

Si intepretamos A como O, B como 1 y T como +

e. ¿Cómo se interpreta BBABAB?

f. ¿Cómo se interpreta BBABBTB?

g. En base dos realice la operación $10101_{(2)} + 1_{(2)}$

h. Esta operación corresponde a un axioma del sistema formal, escríbalo.

i. Aplique a este axioma las reglas del sistema formal, todas las veces que sea posible.

j. ¿Qué relación hay entre el resultado que obtuvo en la pregunta g y el teorema que obtuvo en la pregunta i?

k. ¿Qué modela este sistema formal?

18. Fractales

Se tiene el siguiente sistema formal:

Lenguaje: X, Y, F, +, -

Axioma: X

Regla 1: X/Æ -X F + + F Y -

Regla 2: Y/Æ -Y F + + F X -

En este sistema formal hay que aplicar las reglas a todas y cada una de las X's o Y's que aparecen en la hilera a la que se está aplicando la regla. Además, cada teorema es el resultado de la aplicación de las dos reglas, siempre que sean aplicables, al teorema anterior.

a. Deduzca el primer teorema. Utilizó las dos reglas? Explique.

b. Deduzca el segundo teorema. Utilizó las dos reglas? Explique.

c. Deduzca el tercer teorema. Utilizó las dos reglas? Explique.

Interpretación:

X, Y: No tienen interpretación.

F: dibujar un segmento recto de una unidad.

+: Girar 45 grados en el sentido de las agujas del reloj.

-: Girar 45 grados en el sentido contrario a las agujas del reloj.

d. Interprete el axioma.

e. Interprete el primer teorema.

f. Interprete el segundo teorema.

g. Interprete el tercer teorema.

h. ¿Cuántas F's tendría el cuarto teorema?

19. Sistemas formales

Lenguaje: |, p, i

Variables: Se utilizan símbolos como n, s, ¿ para representar cualquier combinación de |'s.

Axioma: | p | i |

Regla 1: ■ p | i▲ → ■ | p | i▲ |

Regla 2: ■ p◆i▲ → ■ p◆ | i▲■

a. Aplicar la regla 1 al axioma tres veces.

b. Explicar cómo demostrar el teorema | | | | | | | | | p | i | | | | | | | | |

c. Explicar cómo obtener el teorema ■ p | i ■ donde ■ es cualquier combinación de |.

d. Aplicar la regla 2 al axioma, tres veces.

e. Existen teoremas a los que no se les pueda aplicar la regla 1? Si es así, dé un ejemplo explicando por qué.

f. Demuestre, a partir del axioma, los teoremas :

| | p | | i | | | |

| | | p | | i | | | | | |

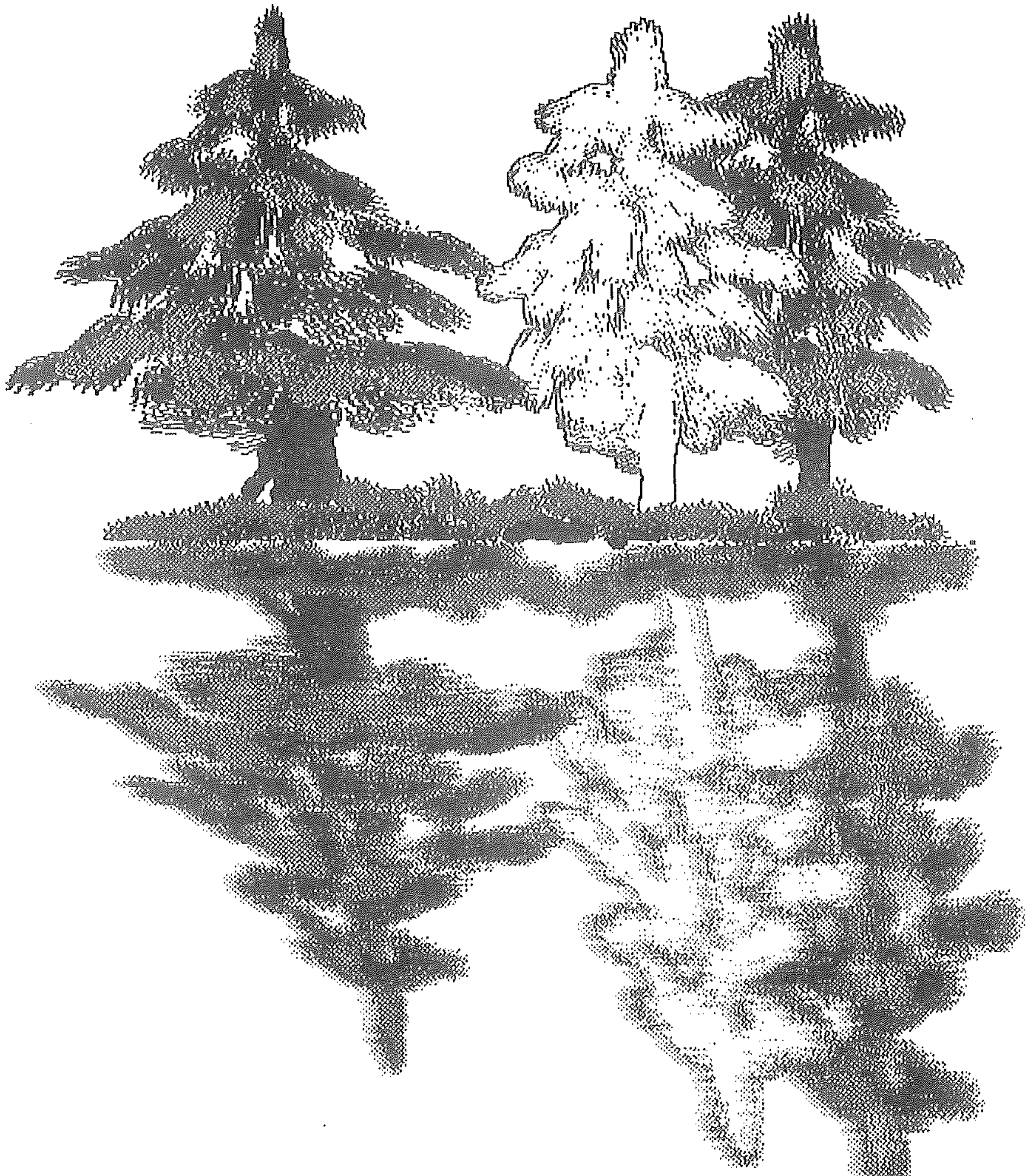
g. Cada teorema de este sistema formal está formado por tres grupos de | separados por p e i, qué relación hay entre la cantidad de | de estos tres grupos?

h. De acuerdo a su respuesta anterior, qué interpretación le daría a los símbolos p, i, |? ¿Qué significa el axioma? ¿Qué significa cada regla? ¿Qué está modelando este sistema formal?

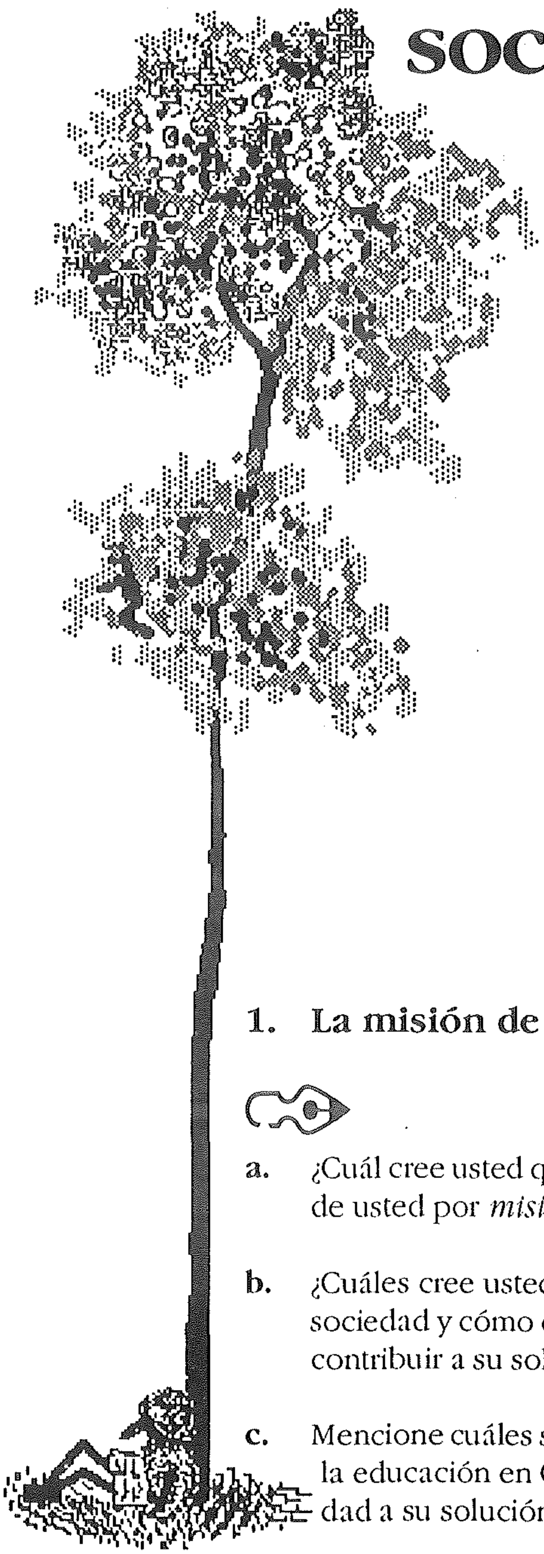
i. Dé dos ejemplos de hileras de esta forma (tres grupos de | separadas por p e i) que no sean teoremas de este sistema formal.

3.

CIENCIA



1. La universidad y la sociedad



1. La misión de la universidad

a. ¿Cuál cree usted que sea la misión de la universidad? ¿Qué entiende usted por *misión* de una universidad?

b. ¿Cuáles cree usted que son los principales problemas de nuestra sociedad y cómo cree usted que la educación universitaria puede contribuir a su solución?

c. Mencione cuáles son, en su opinión, los principales problemas de la educación en Colombia y cómo podría contribuir la Universidad a su solución.

2. Su carrera

a. ¿Cree usted que exista o deba existir una relación entre su carrera y la misión de la Universidad?

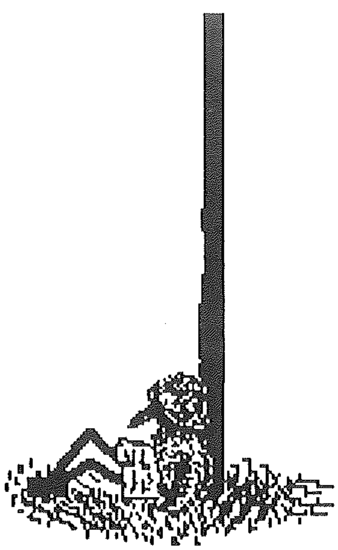
b. ¿Cómo cree usted que su carrera pueda aportar algo a la sociedad? (Dé unos cuantos ejemplos)

3. ¿Y usted?

a. ¿Cómo ve usted su actividad profesional? Aunque es un poco anticipado, explique qué tipo de actividad le gustaría a usted tener dentro de su ejercicio profesional.

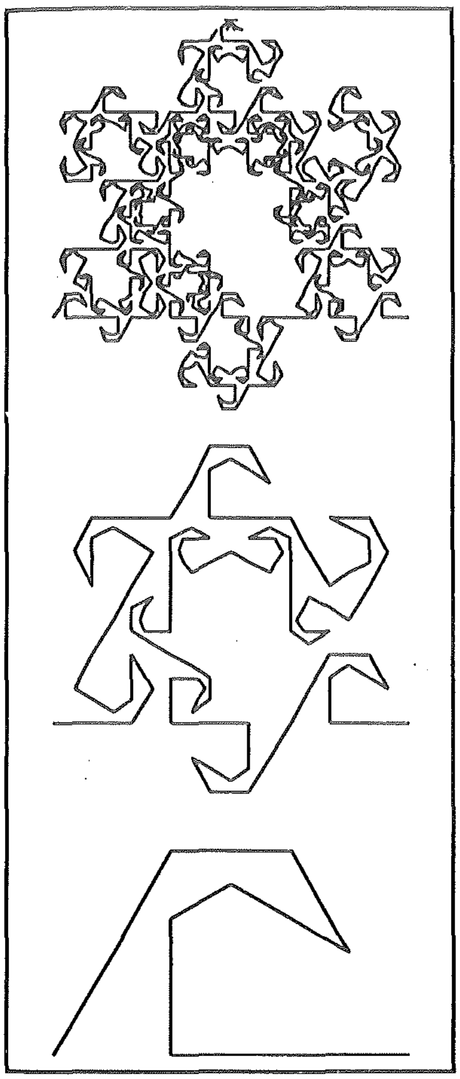
b. Califique de 1 a 5 la importancia de los siguientes objetivos posibles de su actividad profesional futura:

- Mejorar mi situación financiera
- Mejorar mi situación social*
- Llegar a progresar intelectualmente
- Participar en el desarrollo del país



* Si usted sabe qué quiere decir esa frase y la considera importante, ¡explíquela!

2. ¿Existen los genes matemáticos?



1. Mi relación con las matemáticas

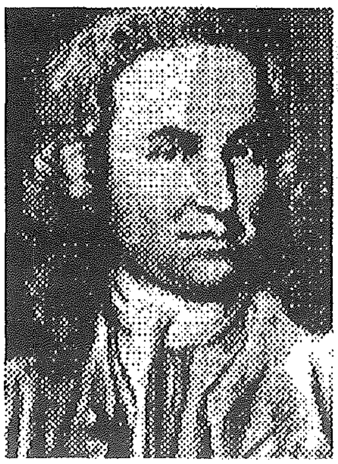
a. ¿Qué es lo que más le disgusta, o lo que más le gusta, de las matemáticas?

b. ¿Considera que los genes que a usted le repartieron, determinan totalmente sus capacidades? ¿Por qué?

c. ¿Todas sus capacidades son innatas? O, ¿existen algunas que usted haya logrado desarrollar con base en su propio esfuerzo? Si existen, menciónelas.

d. Haga un comentario acerca de la siguiente frase de J. S. Bach:

> "Cualquiera que hubiese trabajado tanto como yo lo hice, hubiese realizado la obra que yo he realizado."



Juan Sebastián Bach (1685 — 1750) Nacido en Eisenbach, de una célebre familia de músicos alemanes y huérfano a la edad de 10 años, Bach logró, a temprana edad, una plaza como corista en la escuela de San Miguel. Sus obras de música religiosa, vocal e instrumental son admirables por la riqueza y sublimidad de la inspiración y la ciencia de la armonía. Entre sus obras se cuentan Cantatas, Pasiones, Misas, Obras para órgano, Tocatas y El clave bien temperado. Tres de sus hijos, Guillermo Friedemann, Carlos Felipe Manuel y Juan Cristián, alcanzaron la celebridad.

e. ¿Hay algún tema de matemáticas, de los que usted recuerde haber visto en el colegio, que usted considere importante para su formación? ¿Por qué?

f. ¿Considera que la preparación matemática que recibió en el colegio fue adecuada? Explique.

3. Problemas de ciencia

♣ O, ¿ciencia de problemas?♣

1. Ciencia y pseudociencia

¿Qué es la ciencia? ¿Qué son las ciencias sociales? Estas no son preguntas fáciles. Comencemos por tratar de distinguir lo que es ciencia de lo que no es ciencia.*

a. Enumere cuatro actividades (mejor que sean intelectuales) que usted no considere científicas. Escoja una de ellas y explique las razones por las cuales usted no la considera científica.

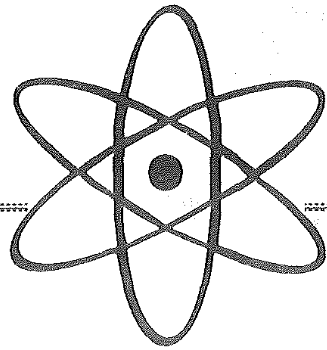
b. Ahora haga una lista de las actividades que usted considera que sí son ciencia. Escoja una de ellas y explique por qué cree que es una ciencia.

c. Mencione algunas características comunes que comparten las actividades que usted mencionó como ciencia.

d. ¿Qué diferencias encuentra entre la actividad que usted escogió en **b** como ciencia y la que eligió en **a** como no científica?

e. ♣*Resumiendo*♣ ¿Cuál considera usted que es el criterio (o criterios) que permite(n) distinguir la ciencia de la pseudociencia?

* A aquello que parece ciencia, pero que no lo es, se le llama pseudociencia.



En aquel Imperio, el arte de la cartografía logró tal perfección que el mapa de una sola provincia ocupaba toda una ciudad, y el mapa del Imperio, toda una provincia. Con el tiempo, esos mapas desmesurados no satisficieron y los colegios de cartógrafos levantaron un mapa del Imperio, que tenía el tamaño del Imperio y coincidía puntualmente con él. Menos adictas al estudio de la cartografía, las generaciones siguientes entendieron que ese dilatado mapa era inútil y no sin impiedad lo entregaron a las inclemencias del sol y de los inviernos. En los desiertos del oeste perduran despedazadas ruinas del mapa, habitadas por animales y por mendigos; en todo el país no hay otra reliquia de las disciplinas geográficas.

Suárez Miranda. Viajes de varones prudentes. Libro cuarto, cap. XLV, Herida, 1658.

Consideremos ahora la **astrología** y la **astronomía**.

f. Según la respuesta anterior: ¿es la astrología una ciencia? Explique.

g. ¿Es la astronomía una ciencia? ¿Por qué?

2. Algunas características

a. De las siguientes características: 1- subraye las que usted considera *necesarias* dentro de una ciencia; 2- marque con una **X** las que usted considera *exclusivas* de una ciencia particular; y, 3- encierre en un *óvalo*, aquellas que usted usó explícita o tácitamente en la respuesta **g**. Las otras déjelas quieticas. *Como si me las pudiera llevar para alguna parte...*

—observación	—predecir	—explicar
—matemáticas	—complicados	—método
—comprender	—artículos	—calcular
—microscopio	—generalizar	—prueba
—computador	—verificación	—hipótesis
—refutación	—experimentación	

b. Si hay otras características no incluidas aquí que usted cree que son *necesarias* dentro de una ciencia, menciónelas.

c. Explique lo que usted entiende por **método**.

d. Explique lo que usted entiende por **método científico**.

e. ¿Cuál es el papel que juega la *observación* dentro de una ciencia?

f. ¿Qué es una *hipótesis*? Dé un ejemplo.

g. ¿Qué es una hipótesis científica? Dé un ejemplo.

h. ¿Qué quiere decir *verificar* una hipótesis? Dé un ejemplo.

i. ¿Qué quiere decir *refutar* una hipótesis ? Dé un ejemplo.

j. ¿Cómo se puede verificar o refutar una hipótesis científica?

k. ¿Cuál es el papel que juega la *predicción* dentro de una ciencia?

3. ¿Para qué la ciencia?

O el valor práctico de la ciencia

a. ¿Cree usted que la ciencia nos puede servir para algo? Explique. Dé ejemplos en los que usted crea que la ciencia ha sido útil.

b. ¿Qué relación hay entre ciencia y tecnología?

c. ¿Qué relación hay entre ciencia y matemáticas?

d. En su opinión, ¿cuál es el fin último de la ciencia?

4. Las ciencias sociales

a. Dé unos cuantos ejemplos de ciencias naturales y otros de ciencias sociales. ¿Cuáles son las diferencias más importantes entre estos dos tipos de ciencia?

b. Las ciencias naturales son a menudo consideradas como más exactas que las ciencias sociales. ¿A qué se puede deber esto?

c. ¿Qué papel pueden jugar las matemáticas dentro de las ciencias sociales?

5. Del rigor en la ciencia

a. ¿Debe obtener la ciencia un conocimiento totalmente detallado de la naturaleza?

6. Pero al fin de cuentas, ¿qué es la ciencia?

Es probable que después del recorrido que hemos realizado en este capítulo tengamos más dudas que antes acerca de lo que es la ciencia. (Si es así, ¡tanto mejor! No se trata de dar una respuesta definitiva y absoluta acerca de este problema.) Pero, al mismo tiempo, es probable que nuestra comprensión de lo que es la actividad científica se haya enriquecido. (¡Aunque sólo sea con nuevas preguntas!)

a. Luego del desarrollo de esta hoja, ¿se han suscitado en usted opiniones nuevas (o nuevos interrogantes) acerca de la ciencia? ¿Cuáles?

4. El discurso del método

Las siguientes preguntas tienen por objeto guiarlo en la lectura del Discurso del método. La idea es que usted las responda justificando, **en sus propias palabras**, sus respuestas.

1. Primera parte

a. ¿Qué piensa Descartes de las matemáticas de su tiempo?

b. ¿Considera usted que esta opinión es válida en nuestro tiempo?

c. ¿Qué busca mostrarnos en esta primera parte?

d. ¿Cuál es el **objetivo** del Discurso?

2. Segunda parte

a. ¿Por qué piensa Descartes que le es necesario eliminar todas las opiniones que él había recibido hasta entonces en su creencia?

b. Imagínese y proponga una situación o un problema que le concierna a usted ♣*puede ser personal; puede ser académico*♣ para el cual considera que es necesario o, al menos, adecuado seguir la máxima anterior. Explique.

c. ¿Qué piensa Descartes de la lógica de su tiempo?

*René Descartes (1596 — 1650) Filósofo, matemático y físico francés nacido en la Haye (Turena). Fue militar y combatió bajo las órdenes de Guillermo de Orange. Retirado después y dedicado al estudio, creó la geometría analítica y descubrió los fundamentos de la óptica geométrica. Descartes se muestra, en sus obras de carácter científico, partidario del materialismo; mientras que en sus estudios metafísicos, aparece como idealista. Creó la Metafísica moderna, atacó los principios escolásticos e impuso un nuevo método de raciocinio (el cartesianismo). Elaboró su teoría de la duda metódica y llegó al conocimiento de su propia existencia por medio del pensamiento (*Cogito, ergo sum, *pienso luego existo). Pasó sus últimos años al servicio de la reina Cristina de Suecia, quien le hizo ir a Estocolmo, donde murió. En la obra de Descartes se destacan el famosísimo* Discurso del método *(1637) y* Las pasiones del alma *(1650).*

d. A partir de lo que seguramente usted ha oído hablar por los corredores de la universidad acerca de Peano, Russell y Gödel, ♣*¿Qué es eso? ¿Un trío de guitarristas?*♣ ¿puede usted afirmar que la lógica está en la misma situación que en la época de Descartes? Trate de justificar su respuesta. No importa que no esté seguro de la validez de su respuesta, proponga una. Imagínesela.

e. ¿Cuáles son los cuatro preceptos que Descartes propone para regir sus investigaciones? Póngase en la situación de él y justifique la validez y la *bondad* de estos preceptos para los propósitos que él tenía.

f. Trate de imaginarse una situación o un problema que usted quiere resolver. Explique cómo aplicaría usted los preceptos propuestos por Descartes y qué beneficios podría traerle aplicarlos.

g. ¿Qué relación ve él entre estos preceptos y la geometría y el álgebra de la época?

3. Tercera parte

a. ¿Cuáles son las máximas de la moral que él siguió mientras realizaba sus investigaciones?

b. ¿Seguiría usted estas máximas si tuviese que hacer una investigación en este momento? ¿Por qué?

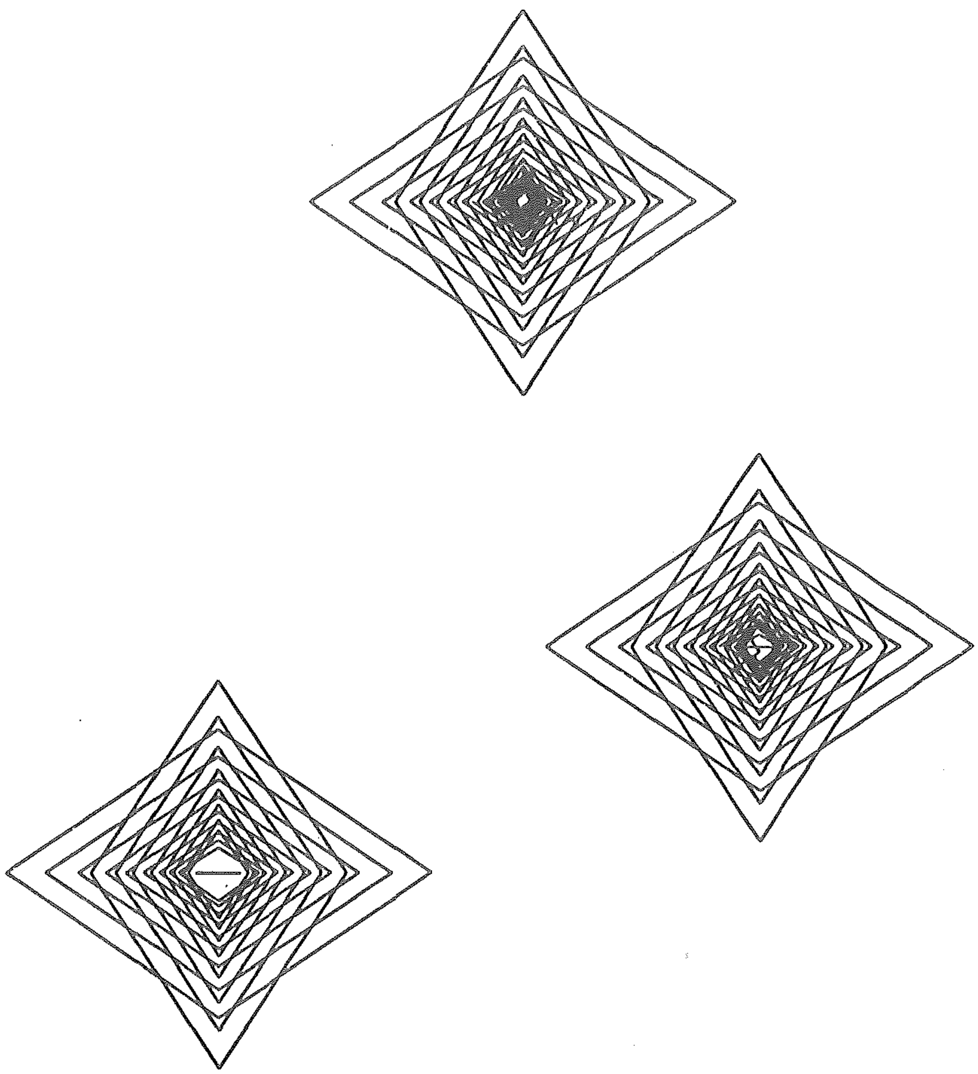
4. Cuarta parte

a. ¿Cómo pretende Descartes buscar la verdad?

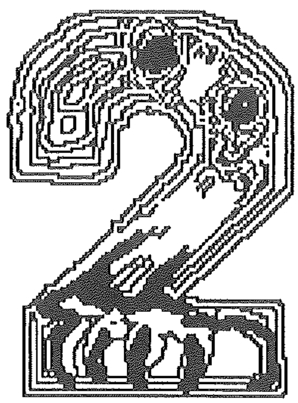
b. Explique la frasecita:

"Yo pienso , luego yo existo"

c. ¿Qué tiene que ver Dios con la existencia y la posible perfección de las cosas?



5. El número 2



En esta ocasión vamos a pensar un poco acerca del número 2 en particular, y en los números, en general. Comencemos por una pregunta muy sencilla: ¿Ha pensado usted alguna vez acerca del número 2?

♣Cuando se le pregunta "pensado", es de verdad "pensado"♣ Si lo ha hecho, ¿qué ha pensado usted?

1. Pintemos el número 2

No es muy común ponerse a pensar acerca del **número 2**, pues este número nos parece muy familiar. Sin embargo, vamos a ver que este número nos puede traer bastantes sorpresas. Tratemos de comenzar bien despacio.

a. La primera tarea consiste en **representar** gráficamente el número 2. Dibuje entonces el número 2 en una hoja.

b. El dibujo (conjunto de letras, garabato) que usted acaba de hacer tiene una cierta **forma**. Con un amigo o familiar, compare el dibujo que usted acaba de hacer con el que él hace si usted se lo pide. ¿Es el mismo?

c. Supongamos que parecen el mismo dibujo. ¿Está usted seguro que es el mismo? Es decir, ¿que son idénticos? La verdad es que es imposible que su número 2 sea idéntico al de su amigo o familiar. Para comenzar, están en dos papeles diferentes, escritos con dos lápices diferentes. Pero, ¿son similares? Es posible que se parezcan tanto como se pueden parecer dos dibujos de una misma silla.

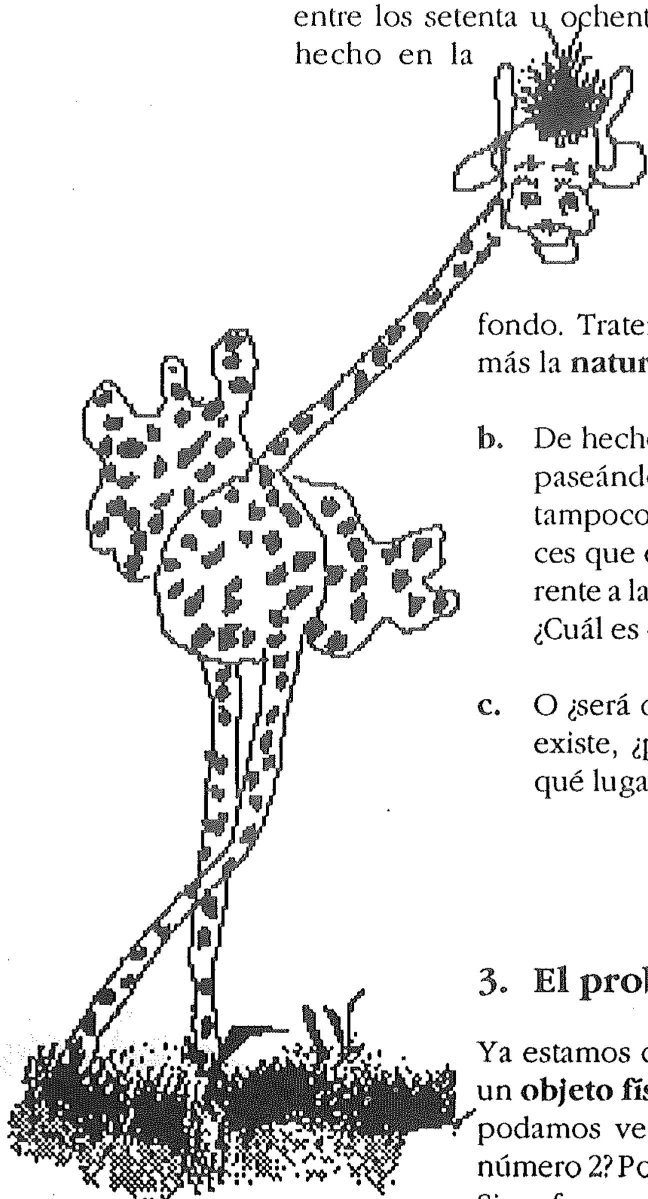
A continuación le propongo otras representaciones: **two, deux, zwei, två**.

d. Represente el número 2 de tres maneras diferentes que no hayan aparecido hasta ahora.

2. Pero, ¿qué es el número 2?

Vamos viendo que las preguntas acerca del número 2 pueden ser preguntas complicadas.

a. Con la experiencia que tuvimos en el párrafo anterior, podemos atacar una pregunta más sencilla: ¿cree usted que el número 2 sea un símbolo (un garabato) sobre una hoja de papel? Espero que usted haya respondido que no. Porque si usted cree que el número 2 es una señal de tinta (o de carbón) sobre un papel, ¿cuál, entre los setenta u ochenta garabatos que, entre todos, hemos hecho en la tarea, es el verdadero número 2? O, ¿será que usted piensa que hay tantos números 2 como garabatos se han hecho y se harán?



Concluyamos con los garabatos y hagamos preguntas con un poco más de fondo. Tratemos entonces de identificar un poco más la **naturaleza** del número 2.

b. De hecho, no hemos visto nunca un número 2 paseándose por la universidad; ni hemos visto tampoco alguna vez un árbol de 2. ¿Será entonces que el número 2 tiene una naturaleza diferente a la de la silla en la que usted está sentado? ¿Cuál es esa naturaleza?

c. O ¿será que el número 2 no existe? Pero, si no existe, ¿por qué hablamos de él? ¿Dónde (en qué lugar) está el número 2?

3. El problemita de los conceptos

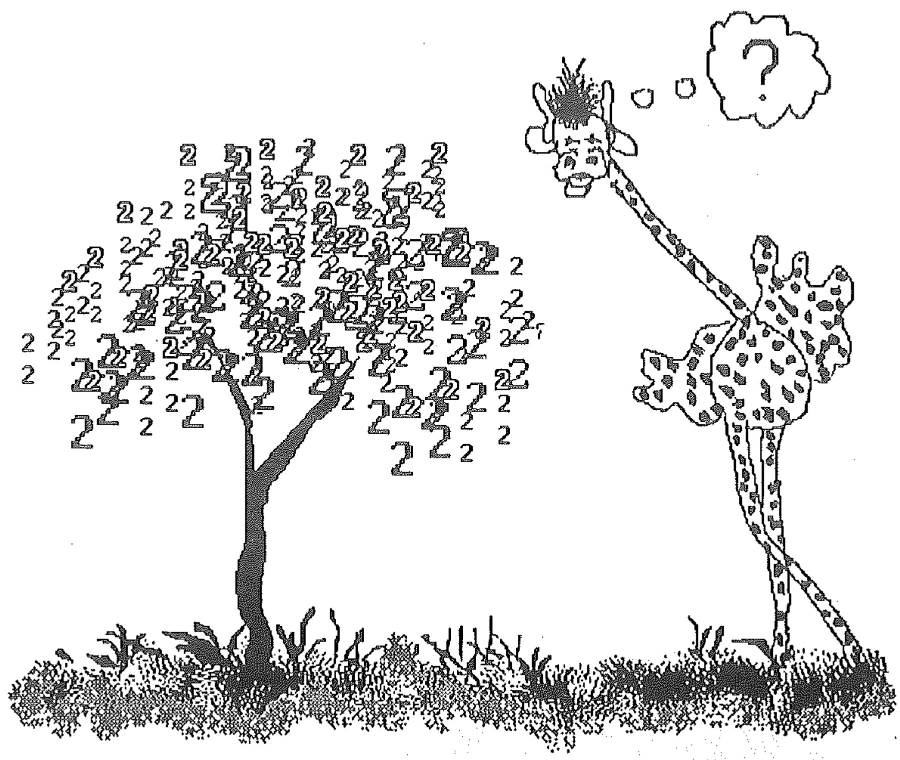
Ya estamos de acuerdo en que el número 2 no es un **objeto físico**. El número 2 no es un objeto que podamos ver, tocar u oler. Entonces, ¿qué es el número 2? Porque el número 2 es algo, ¿no es cierto? Si no fuese *algo*, no podríamos hablar de él.

Lo que sí es un hecho es que usted cree conocer el número 2. ¿De dónde le sale ese conocimiento? De hecho, lo que sucede es que usted tiene una idea acerca del número 2. Y esa idea está en su cabeza. Muy seguramente existen en su cerebro un conjunto de neuronas que reaccionan de una cierta manera en el momento en que otras neuronas (por ejemplo, las que están comunicadas con su oído) le *mencionan* el número 2. Concluyamos entonces que el número 2 es un concepto.

Supongamos que un concepto es una idea. * Una idea que usted tiene en la cabeza. Pero, entonces nos surge otro problemita.

a. Si el número 2 es una idea que usted tiene en la cabeza, ¿qué tiene que ver su idea con la que tienen las demás personas de él?

b. ¿Será que su idea (la que usted tiene en su cabeza) es el verdadero número 2 y que la idea que hay en la cabeza de esa otra persona



* Esta última afirmación es obviamente circular puesto que si un concepto es una idea, entonces ¿qué es un idea?

es un plagio? O, ¿será más bien que hay tantos números 2 como mentes han existido, existen y existirán? *Vaya problemita, ¿no es cierto?*

4. Un poco de historia para terminar

El problema que tenemos ahora es que, por un lado, creemos que el número 2 es uno solo, pero por otro lado parece haber muchos números 2. El problema de una multitud de números 2 es que no podemos estar seguros que todos sean iguales. Y si comenzamos a pelear porque el mío es el **verdadero**, no podríamos entendernos en absoluto.

Durante mucho tiempo (de hecho hasta comienzos de este siglo) nadie se preocupó por este problema. Fue Bertrand Russell y otro señor llamado Peano junto con G. Frege quienes se enfrentaron por primera vez con seriedad a este problema. Y decidieron que si las matemáticas habían de tener sentido, era necesario identificar qué era el número 2 (y el número 3 y el número 4, etcétera).

Ellos notaron que era necesario ir al origen de las cosas y que para identificar el número 2, era necesario partir de algo en el que todos estuviésemos de acuerdo. Y ese algo es el proceso de contar.

Todos sabemos contar (¡por lo menos hasta 2!) y la mayoría de nosotros podemos ponernos de acuerdo al respecto. A menos que tengamos alguna problema de percepción, podemos decir si en una caja hay 2 o 3 objetos. En cualquier caja que nos presenten, para cualquier conjunto de objetos, nosotros podemos decir si este conjunto tiene 2 objetos o no. La genialidad de Peano y Russell fue entonces definir el número 2 a partir de este proceso de contar. ¿Cómo lo hicieron?

Fácil.* Bastó considerar todos los conjuntos con dos elementos y formar un conjunto que los contuviera. A ese conjunto, el de todos los conjuntos de dos elementos, lo llamaron el número 2.

* Uno siempre dice que las cosas son fáciles una vez que las cosas están hechas. ¡Pero vaya uno a hacerlas!

Definición del número 2 en el
Principia Mathematica de Russell

(*55 and *50). It is necessary, however, to prove some of the properties of cardinal couples, and this will be done in the present number. Some properties of cardinal couples which have been already proved are here repeated for convenience of reference. The definitions of 0 and 2 are:

*54·01. $0 = \iota'\Lambda$ Df

*54·02. $2 = \hat{\alpha}\{(\exists x, y) . x \neq y . \alpha = \iota'x \cup \iota'y\}$ Df

Most of the propositions of the present number, except those that merely embody the definitions (*54·1·101·102), are used very seldom. The following are among the most important.

*54·26. $\vdash :. \iota'x \cup \iota'y \in 2 . \equiv . x \neq y$

*54·3. $\vdash . 2 = \hat{\alpha}\{(\exists x) . x \in \alpha . \alpha - \iota'x \in 1\}$

*54·4. $\vdash :: \beta \subset \iota'x \cup \iota'y . \equiv :. \beta = \Lambda . \vee . \beta = \iota'x . \vee . \beta = \iota'y . \vee . \beta = \iota'x \cup \iota'y$

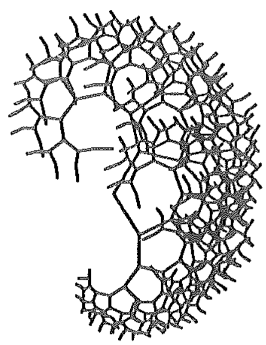
*54·53. $\vdash : \alpha \in 2 . x, y \in \alpha . x \neq y . \supset . \alpha = \iota'x \cup \iota'y$

*54·56. $\vdash : \alpha \sim\in 0 \cup 1 \cup 2 . \equiv . (\exists x, y, z) . x, y, z \in \alpha . x \neq y . x \neq z . y \neq z$

5. La tarea

a. Identifique un *concepto* que *no* sea matemático. Trate de definirlo de tal manera que pueda diferenciarlo de cualquier otro concepto. Compare su concepto con el concepto del número 2. Exponga cuáles son las similitudes entre los dos conceptos y cuáles son las diferencias.

6. El mito de la caverna



Las preguntas que siguen pretenden guiarlo a usted en la lectura del libro sétimo de La República *de Platón. Usted debe leer primero esta guía y responderla después de haber leído por lo menos una vez el texto.*

1. Contexto histórico

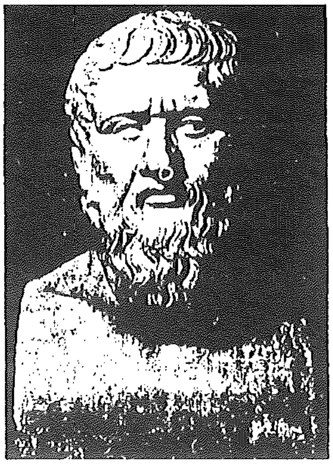
a. Haga una breve exposición de la importancia de Platón en el desarrollo del conocimiento que la humanidad tiene de su entorno y de ella misma.

2. El cuentico

a. El mito de la caverna es tan sólo una parte del libro sétimo de *La República.* Sin embargo, es la parte más conocida. Este mito es un **cuentico**. Haga un dibujo que con un poco de explicación que ahora no se le pide, represente el cuentico.

b. Aunque es un **cuentico**, lo importante del mito de la caverna no es el cuento mismo, sino lo que se *deduce* de él. Haga una **interpretación** de su dibujo que explique las tesis que Platón quería transmitir con el cuentico.

c. ¿Por qué cree usted que el mito de la caverna es tan conocido? ¿Cuál cree usted que es su importancia dentro de la historia de las ideas?



Platón (428 -- 347 o 348 a. de J.C.) fue maestro de Aristóteles. Escribió poesías antes de los 20 años y en 407 se hizo discípulo de Sócrates a quien acompañó hasta la muerte. Emigró entonces de Atenas, estudió en Megara con Euclides y viajó por Egipto, Cirenaica, Sicilia y la Magna Grecia. Regresó a Atenas en 387 y fundó su escuela filosófica, la Academia, que exaltó el idealismo. Platón escribió sus obras en forma de diálogos en los que toma parte Sócrates. Sus obras más importantes son: Fedón (sobre la inmortalidad del alma), Fedro (ataque a los retóricos), La República (lo que debe ser un Estado ideal), Simposium (del amor ideal), Apología (defensa de Sócrates), Gorgias, Critis, Protágoras, Parménides, Critón y Cratilo.

3. Algunas ideas

a. ¿Cuáles son las tesis de Platón acerca de la **idea de bien**?

b. Según Platón, ¿quiénes son los que deben gobernar?

c. ¿Qué relación encuentra Platón entre su concepción de *ciencia* y los *números*?

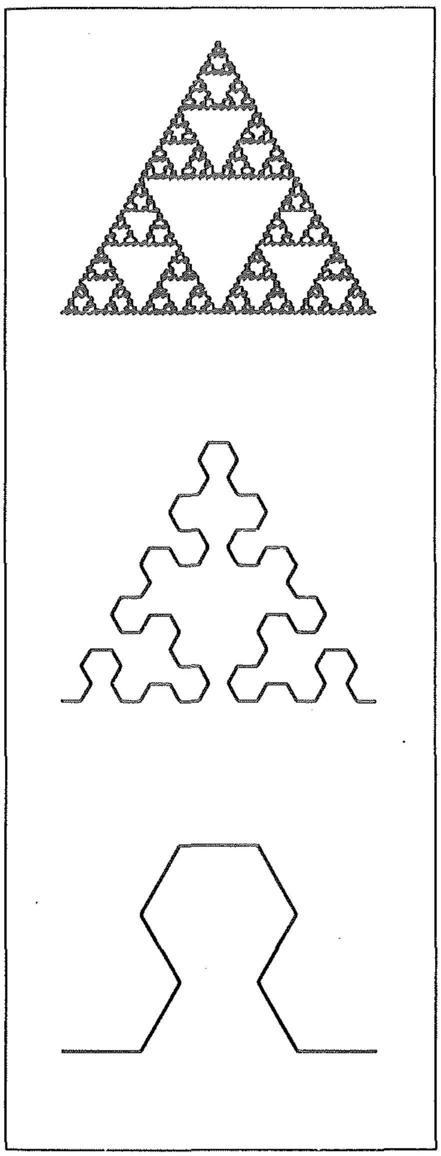
d. ¿Qué es lo que siempre existe; lo que no nace ni perece?

e. Para Platón, ¿cuáles son las *ciencias* y cuáles son sus funciones?

f. ¿Qué es la matemática para Platón? ¿Cuál es su importancia y su misión?*

* Se dice que a la entrada de la academia de Platón había este aviso: "Que no entre aquí quien no conozca la geometría"

7. Funes el memorioso



1. Guía de lectura

a. ¿Opina usted que el cuento es verosímil?

b. Dé dos ejemplos de las asombrosas capacidades de Funes.

c. Explique por qué Funes tuvo la necesidad de inventar un sistema de numeración propio. ¿Cómo era dicho sistema?

d. ¿Por qué Funes era incapaz de comprender la palabra *perro*?

e. Comente la siguiente frase:

> "Pensar es abstraer, generalizar, olvidar diferencias."

f. ¿Cree usted que la memoria y la percepción infalibles de Funes le permitían poseer un conocimiento del mundo más exacto que el que posee un hombre normal y olvidadizo?

¿Existe algún conocimiento en el mundo que sea tan cierto que ningún hombre razonable pueda dudar de él? Esta pregunta, que a primera vista podría no parecer difícil, es realmente una de las más difíciles que se pueda formular. Cuando nos hemos dado cuenta de los obstáculos presentes en el camino de una respuesta directa y confiable, es cuando hemos desembocado en el estudio de la filosofía —pues la filosofía es simplemente el intento de responder a estas preguntas fundamentales, no de una manera descuidada ni dogmática, como solemos hacerlo en la vida ordinaria y aun en las ciencias, sino críticamente, después de explorar todo aquello que hace que tales preguntas nos desconcierten, y después de darnos cuenta de toda la vaguedad y confusión que subyacen a nuestras ideas ordinarias.

8. Apariencia y realidad*

Por Bertrand Russell

En la vida cotidiana, damos por ciertas muchas cosas que vistas más de cerca, se encuentran tan llenas de contradicciones aparentes que sólo pensándolo mucho podemos llegar a saber qué es aquello en lo que realmente podemos creer. En la búsqueda de la certeza, es natural comenzar con nuestras experiencias presentes, y en algún sentido, sin duda, se obtiene conocimiento a partir de ellas. Pero cualquier enunciado que se formule con respecto a nuestras experiencias inmediatas, es probablemente incorrecto. Me parece que estoy sentado ahora en una silla ante una mesa de cierta forma, sobre la cual veo hojas de papel impresas. Girando mi cabeza veo por la ventana edificios, nubes y el sol. Creo que el sol está aproximadamente a 93 millones de millas de la tierra; creo que es un candente globo muchas veces más grande que la tierra; que debido a la rotación de la tierra, sale cada mañana, y continuará haciéndolo por un tiempo indefinido en el futuro. Creo que, si cualquier otra persona normal entra en mi cuarto, verá las mismas sillas, mesas, libros y papeles que yo veo y que la mesa que yo veo es la misma que siento bajo mi brazo. Todo esto parece tan evidente que a duras penas vale la pena mencionarlo, excepto si se trata de responder a un hombre que duda de si yo efectivamente sé algo. No obstante, todo esto puede ser razonablemente puesto en duda, y todo requiere cuidadosa discusión antes de estar seguros de poder enunciarlo en una forma que sea completamente cierta.

* Russell, Bertrand. *The Problems of Philosophy*. Oxford University Press, 1912.

Para simplificar nuestras dificultades, concentremos nuestra atención en la mesa. La percibimos oblonga, de color café, brillante, suave al tacto, fría y sólida; cuando la golpeo con la punta de los dedos, da el sonido característico de la madera. Cualquiera que realice esta experiencia estará de acuerdo con esta descripción, de modo que parece que no puede surgir dificultad alguna; pero tan pronto tratamos de ser más precisos, comienzan nuestros problemas. Aunque creo que la mesa es **realmente** toda del mismo color, las partes que reflejan la luz parecen más brillantes que las otras y algunas partes parecen blancas debido a la luz reflejada. Sé que si me muevo, las partes que reflejan la luz serán diferentes, de modo que la distribución aparente de los colores sobre la mesa cambiará. Se deduce que si varias personas están mirando la mesa en el mismo momento no habrá dos de ellas que vean exactamente la misma distribución de colores, porque no hay dos de ellas que puedan verla desde el mismo punto exactamente, y cualquier cambio en el punto de vista ocasiona algún cambio en la forma en que se refleja la luz.

Para la mayoría de los propósitos prácticos estas diferencias carecen de importancia, pero para el pintor todas ellas son importantes: el pintor tiene que desprenderse del hábito de pensar que las cosas parecen tener el color que el sentido común dice que tienen **realmente**, y tiene que aprender el hábito de ver las cosas como ellas aparecen. Aquí tenemos ya el comienzo de una de las distinciones que causan más problemas en la filosofía: la distinción entre **apariencia** y **realidad**; entre lo que las cosas parecen ser y lo que son. El pintor quiere saber, lo que las cosas parecen; el hombre práctico y el filósofo quieren saber lo que ellas son; pero el deseo de saber esto es más fuerte para el filósofo que para el hombre práctico y además el filósofo está más problematizado tanto por el conocimiento como por las dificultades para llegar a una respuesta.

Regresemos a la mesa. A partir de la discusión anterior, es evidente que no hay color que parezca predominar como el color de la mesa o de alguna parte de ella; parece de diferentes colores desde distintos puntos de vista y no hay razón para considerar algunos de ellos como más reales que otros. Además sabemos que, aun desde un punto de vista dado, el color parecerá diferente bajo una luz artificial o para un hombre con ceguera cromática, o para uno que lleve lentes de color azul, en tanto que en la oscuridad simplemente no habrá color, aunque al tacto y al oído la mesa no habrá cambiado. Este color no es algo que sea inherente a la mesa, sino algo que depende de la mesa, del espectador y del modo en que la luz incide sobre la mesa. Cuando hablamos, en la vida diaria del color de la mesa, sólo nos referimos a

la clase de color que parece tener para un espectador normal desde un punto de vista ordinario bajo condiciones usuales de luz. Pero los otros colores que aparecen bajo otras condiciones tienen el mismo derecho de ser considerados reales; por consiguiente, para evitar favoritismos nos vemos forzados a negar que la mesa en sí misma tenga algún color particular.

Lo mismo se aplica a la textura. A simple vista, podemos apreciar las vetas de la madera; sin embargo, la mesa parece lisa y pareja. Si la miraramos a través de un microscopio, veríamos las rugosidades, los altibajos y toda clase de diferencias imperceptibles a simple vista. ¿Cuál de éstas es la mesa real? Naturalmente estamos tentados a decir que lo que vemos a través del microscopio es más real; pero esto, a su vez, podría cambiar si se usa un microscopio más poderoso. Entonces, si no podemos confiar en lo que vemos a simple vista, ¿por qué deberíamos confiar en lo que vemos a través de un microscopio? De modo que la confianza que inicialmente habíamos depositado en nuestros sentidos nos abandona de nuevo.

Con la percepción de la *forma* de la mesa no ocurre nada mejor. Tenemos el hábito de juzgar cómo es la forma real de las cosas y lo hacemos tan irreflexivamente que llegamos a creer que de verdad vemos las formas reales. Pero, de hecho, como tenemos que aprenderlo si intentamos dibujar, un objeto dado parece de forma diferente desde cada punto de vista distinto. Si nuestra mesa es **realmente** rectangular, parecerá desde casi todos los puntos de vista, como si tuviera dos ángulos agudos y dos obtusos. Si los lados opuestos son paralelos, parecerá que estos convergen en un punto lejano del espectador; si son de igual longitud, se verán como si el lado más cercano fuera más largo. Todo esto no se observa comúnmente al mirar una mesa, porque la experiencia nos ha enseñado a construir la forma **real** a partir de la forma aparente y la forma **real** es lo que nos interesa como hombres prácticos. Pero la forma **real** no es lo que vemos; es algo que se infiere de lo que vemos. Y lo que vemos está cambiando constantemente de forma, mientras nos movemos por la sala; así que, de nuevo, los sentidos no parecen decirnos la verdad sobre la mesa misma sino solamente sobre la apariencia de la mesa.

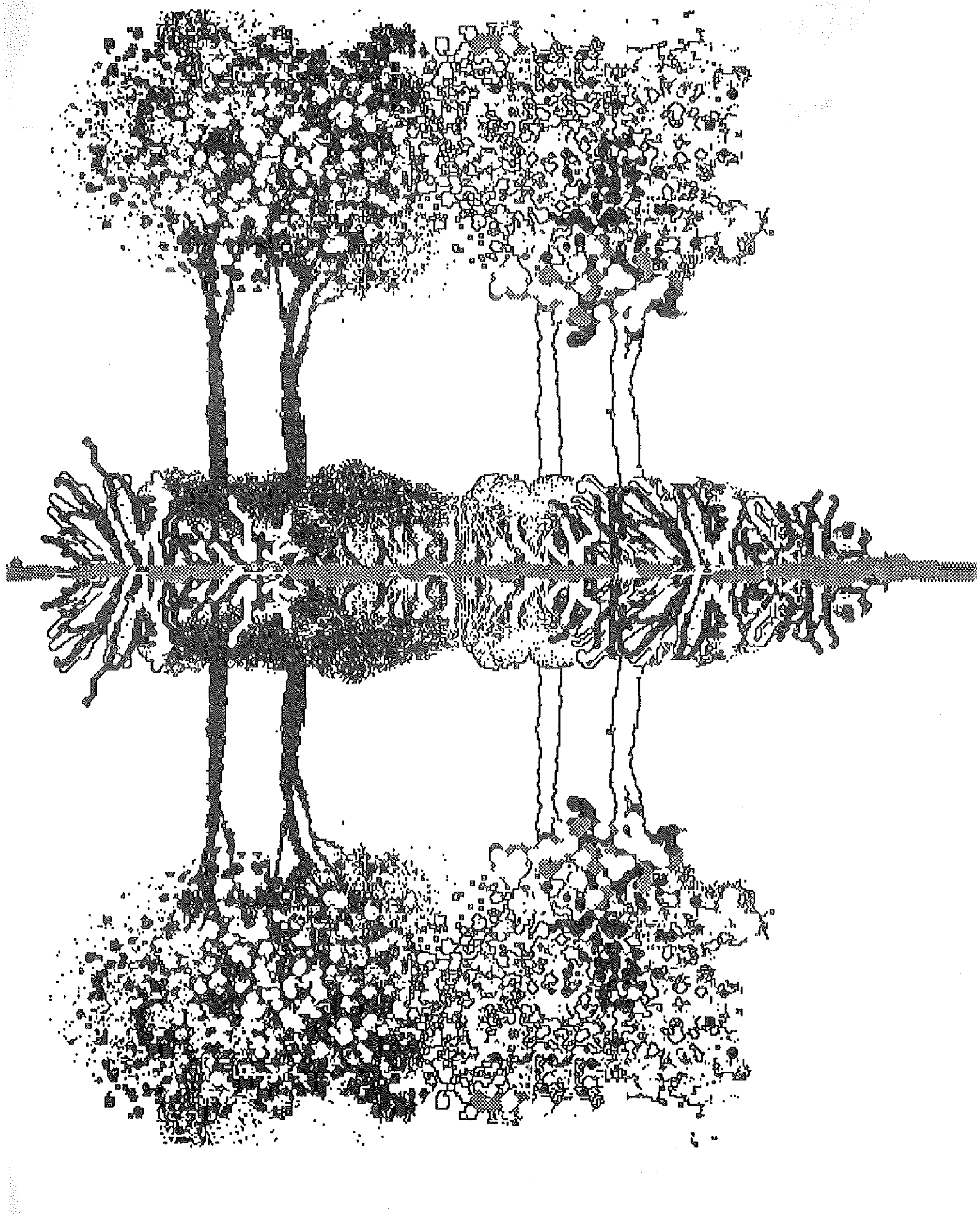
Surgen dificultades similares cuando consideramos el sentido del tacto. Es cierto que la mesa siempre nos da una sensación de dureza y sentimos que resiste la presión. Pero la sensación que obtenemos depende de con cuánta fuerza hagamos presión sobre la mesa y también de la parte del cuerpo con la que la hagamos; así que no podemos suponer que la variedad de sensaciones debida a la variedad de las presiones o a la variedad de las partes del cuerpo empleadas, revele *directamente* alguna propiedad definida de la mesa, sino a lo más *signos* de alguna propiedad que quizás *cause* todas las sensaciones, pero que no aparece realmente en ninguna de ellas. Lo mismo se aplica de manera aún más obvia a los sonidos que se pueden producir al golpear la mesa.

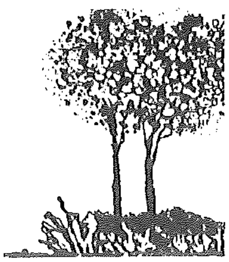
De modo que llega a ser evidente que la mesa real, si es que hay alguna, no es la misma que percibimos por la vista, el oído o el tacto. Nuestro conocimiento de la mesa real, si es que hay alguna, no puede ser en manera alguna inmediato, sino que debe ser una inferencia de lo que se conoce de manera *inmediata*. Surgen al mismo tiempo dos preguntas muy difíciles; a saber:

- ¿Existe de verdad, alguna mesa real?
- Si es así, ¿qué clase de objeto puede ser?

Al considerar estas preguntas será útil tener unos pocos términos simples cuyo significado sea claro y definido. Llamaremos **datos sensoriales** a los objetos que son conocidos de manera inmediata en la sensación, cosas tales como colores, sonidos, olores, grados de dureza, textura, etc. Llamaremos **sensación** a la experiencia de ser conscientes de manera inmediata de estos objetos. Así, siempre que vemos un color, tenemos una sensación del color, pero el color mismo es un dato sensorial, no una sensación. El color es aquello de lo cual somos conscientes de manera inmediata y la conciencia misma es la sensación. Es claro que si podemos saber algo acerca de la mesa, debe ser por medio de los datos sensoriales: color café, forma oblonga, suave al tacto, etc., los cuales asociamos con la mesa; pero, por las razones que hemos dado no podemos decir que la mesa es el dato sensorial, ni que los datos sensoriales sean directamente propiedades de la mesa. Surge entonces un problema en cuanto a la relación entre los datos sensoriales y la mesa real, suponiendo que existe tal objeto.

Llamaremos a la mesa real, si es que existe, un **objeto físico**. Así que tenemos que considerar la relación entre los datos sensoriales y los objetos físicos. La colección de todos los objetos físicos, se llama



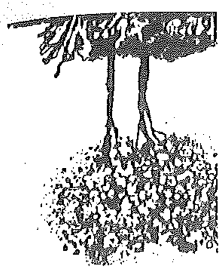


materia. De modo que nuestras dos preguntas se pueden reformular como sigue:

- ¿Existe algo que podamos considerar como materia?
- Si existe, ¿cuál es su naturaleza?

Fue George Berkeley (1685 — 1753) el primer filósofo que destacó las razones para considerar los objetos inmediatos a nuestros sentidos como no existentes independientemente de nosotros. Sus *Tres diálogos entre Hylas y Philonous, en oposición a escépticos y ateos*, se propone probar que no existe nada que sea materia y que el mundo no está constituido sino por mentes y sus ideas. Hasta ahora, Hylas ha creído en la materia, pero Philonous no está de acuerdo con él y lo conduce de manera despiadada hacia contradicciones y paradojas; y hace parecer su propia negación de la materia, al final, como si ésta fuera casi de sentido común. Los argumentos empleados son de muy diferente valor: algunos son importantes y sólidos, otros, confusos o sofísticos. Pero Berkeley tiene el mérito de haber mostrado que la existencia de la materia es susceptible de ser negada sin que eso se considerara un absurdo y que si hay objetos que existan independientemente de nosotros, ellos no pueden ser los objetos inmediatos de nuestras sensaciones.

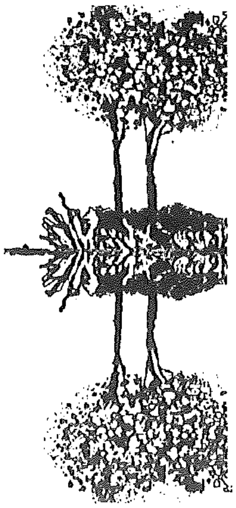
Hay dos cuestiones involucradas cuando preguntamos si la materia existe y es importante que sean claras. Comúnmente entendemos por **materia** algo que se opone a **mente**, algo que creemos ocupa espacio y es radicalmente incapaz de cualquier clase de pensamiento o conciencia. Es principalmente en ese sentido en el que Berkeley niega la materia; es decir, que él no niega que los datos sensoriales, que comúnmente tomamos como signos de existencia de la mesa, sean realmente signos de la existencia de algo independiente de nosotros, sino que niega que este algo sea no mental, es decir, que no sean ni mente ni ideas concebidas por alguna mente. El admite que debe haber algo que sigue existiendo cuando salimos de la habitación o cerramos nuestros ojos y que lo que llamamos ver la mesa realmente nos da razón para creer en algo que persiste aunque no lo estemos viendo. Pero él cree que este algo no puede ser radicalmente diferente en naturaleza de lo que vemos y que no puede ser independiente de la visión colectiva, aunque deba ser independiente de nuestra visión. El se ve obligado a considerar la mesa real como una idea en la mente de Dios. Tal idea satisface el requisito de permanencia e independencia con respecto a nosotros, sin ser como sería la materia de otra manera algo completamente inconocible, en el sentido de que sólo podamos inferirla y nunca tener conciencia directa e inmediata de ella.



Otros filósofos posteriores a Berkeley han sostenido también que, aunque la existencia de la mesa no dependa de ser vista por mí, depende de ser vista (o de alguna manera aprehendida en sensación) por *alguna* mente, no necesariamente la mente de Dios, sino, de manera más general, la mente colectiva del universo. Ellos, como Berkeley, sostienen esto principalmente porque creen que no puede haber nada real, o por lo menos, nada que pueda ser conocido como real excepto las mentes, sus pensamientos y sensaciones. Podríamos expresar el argumento que sustenta su punto de vista de alguna manera como la siguiente: "cualquier cosa de la cual se pueda pensar es una idea en la mente de la persona que la piensa, por consiguiente nada se puede concebir excepto ideas en mentes; por consiguiente, cualquier otra cosa es inconcebible y lo que es inconcebible no puede existir". Tal argumento, en mi opinión, es falaz; desde luego que aquellos que lo respaldan no lo exponen de manera tan breve ni tan cruda. Pero, válido o no, el argumento ha sido ampliamente respaldado en una forma o en otra y muchos filósofos, quizás una mayoría, han sostenido que no hay nada real excepto las mentes y sus ideas. Tales filósofos son llamados **idealistas**. Cuando ellos intentan explicar la materia, o bien dicen, como Berkeley que la materia no es sino una colección de ideas, o afirman, como Leibniz (1646 — 1716), que lo que aparece como materia es realmente una colección de mentes más o menos rudimentarias. Pero aunque estos filósofos niegan la materia como opuesta a la mente, no obstante, en otro sentido, admiten la materia. Se recordará que formulamos dos preguntas; a saber,

- ¿Existe una mesa real?
- Si es así, ¿que clase de objeto puede ser?

Berkeley y Leibniz admiten que existe una mesa real, pero Berkeley afirma que es una idea en la mente de Dios, mientras que Leibniz afirma que es una colonia de almas. De manera que ambos responden nuestra primera pregunta afirmativamente y sólo divergen de los puntos de vista de los mortales corrientes en su respuesta a nuestra segunda pregunta. En efecto, casi todos los filósofos parecen estar de acuerdo en que hay una mesa real: casi todos ellos están de acuerdo en que a pesar de que muchos de nuestros datos sensoriales: color, forma, textura, etc., pueden depender de nosotros, sin embargo su ocurrencia

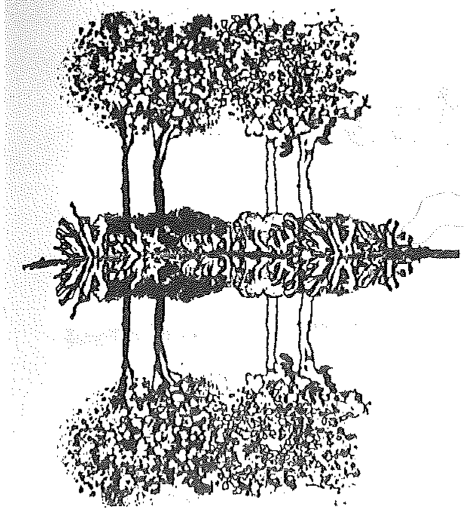


es un signo de algo que existe independientemente de nosotros, algo que difiere, quizás, completamente de nuestros datos sensoriales, y sin embargo, debe considerarse como causante de estos datos sensoriales cuando quiera que estemos en una relación apropiada con respecto a la mesa real.

Obviamente, este punto, en el cual los filósofos están de acuerdo la aceptación de que *existe* una mesa real, cualquiera sea su naturaleza es de vital importancia, y valdrá la pena considerar las razones que hay para aceptar este punto de vista antes de que pasemos a considerar la otra pregunta concerniente a la naturaleza de la mesa real. [...]

Antes de avanzar más, será bueno considerar por un momento lo que hemos descubierto hasta ahora. Hemos visto que si tomamos cualquier objeto común de la clase de los que se suponen conocidos por los sentidos, lo que los sentidos nos dicen *inmediatamente* no es la verdad acerca del objeto tal como es independien- temente de nosotros, sino solamente la verdad acerca de ciertos datos sensoriales que, hasta donde podemos ver, dependen de las relaciones entre nosotros y el objeto. Así que lo que podemos ver y sentir directamente es mera **apariencia**, la cual creemos que es un signo de alguna **realidad** subyacente. Pero, si la realidad no es lo que aparece, ¿tenemos algún medio para saber si existe alguna realidad? Y si esto es así, ¿tenemos algún medio para encontrar cómo es? Tales cuestiones son motivo de perplejidad y es difícil saber si aun las más extrañas hipótesis pueden no ser ciertas. Así que nuestra conocida mesa hasta el momento podría no haber despertado en nosotros más que triviales pensamientos, se ha convertido en un problema lleno de sorprendentes posibilidades. Lo que sabemos de ella es que no es lo que parece. Más allá de este modesto resultado, tenemos la más completa libertad para conjeturar. Leibniz nos dice que es una comunidad de almas; Berkeley nos dice que es una idea en la mente de Dios; la sobria ciencia, en forma casi tan maravillosa como los anteriores, nos dice que es una vasta reunión de cargas eléctricas en violento movimiento.

Entre estas sorprendentes posibilidades, la duda sugiere que quizás no hay mesa alguna. La filosofía, si no puede *responder* tantas preguntas como quisiéramos, tiene al menos el poder de *formular* preguntas que acrecientan el interés del mundo, y muestra lo extraño y lo maravilloso que yace bajo la superficie de las cosas más comunes de la vida diaria.



1. Guía de lectura

a. ¿Es posible que todos estemos de acuerdo sobre las impresiones que nos dan nuestros sentidos? ¿Por qué? Justifique su respuesta.

b. ¿Nos sirven los sentidos para conocer nuestro entorno con certeza?

c. Si no nos sirven los sentidos, ¿tiene usted alguna idea de cómo podríamos hacer ciencia?

d. Defina en sus propias palabras los conceptos de apariencia y realidad.

e. Considere el lápiz o el esfero con el que está escribiendo en este momento. ¿Qué puede decir acerca de la apariencia o de la realidad de ese lápiz? Haga referencia a la respuesta que dió a la pregunta anterior.

f. ¿Qué tanta confianza podemos tener en la información que nos dan los sentidos?

g. ¿Por qué tenemos que hablar de un **lápiz real** y de un **lápiz aparente**?

h. ¿Existe la materia? Compare su respuesta con la posición de Berkeley.

i. A partir de la posición que Russell expone en esta lectura, ¿cómo cree usted que podemos hacer ciencia si no estamos en capacidad de conocer con certeza el entorno con la ayuda de nuestros sentidos?

9. Las esmeraldas verzules

1. Un problema en clase

En el salón de clases se da un diálogo entre el profesor y Pedro, acerca de lo que es la ciencia.

Profesor: ¿Qué debe cumplir una ley general para que pueda ser aceptada como científica?

Pedro: Pues... que la tal ley sea confirmada por los hechos observados. Le puedo dar un ejemplo: las innumerables esmeraldas que se han encontrado hasta hoy son verdes, entonces podríamos conjeturar que la ley general *Todas las esmeraldas son verdes* es válida. A partir de muchos casos particulares hemos generalizado y llegado a una ley general válida. Esto es *razonar inductivamente* y así se procede en la ciencia.

(Pedro esboza una sonrisa de triunfo.)

Profesor: Muy bien Pedrito. Pero, ¿no podríamos aceptar que las esmeraldas fuesen verzules en lugar de verdes?

(La sonrisa de Pedro se desdibuja y es reemplazada por un gesto de asombro.)

Pedro: ¿Verzules? ¿Cómo así, profe?

Profesor: ¿No sabes qué es una esmeralda verzul?

(Absoluto silencio en el salón. Todos los alumnos clavan sus cabezas en los pupitres.)

Profesor: Pues una esmeralda verzul es una esmeralda que es verde antes del primero de enero del año 2001 y azul a partir de esa fecha. Las leyes *todas las esmeraldas son verdes* y *todas las esmeraldas son verzules* han sido igualmente corroboradas, hastaahora por la observación empírica. Parece, entonces que la observación por sí sola no es suficiente para decidirnos en favor de una afirmación o de la otra. ¿Cuál habremos de aceptar como válida y por qué?

(Las caras se vuelven de nuevo hacia los pupitres.)

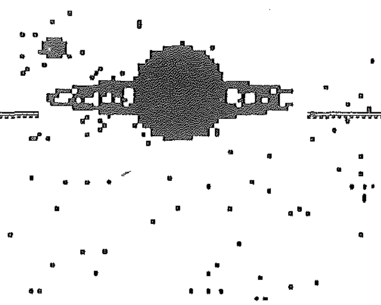
Profesor: Pedro, ¿qué opinas?

(La cabeza de Pedro se levanta.)

Pedro: Bueno... eh... pues yo creo que... eh...

a. Asuma el papel de Pedro o, si lo prefiere, el del profesor, para concluir el diálogo, expresando su opinión acerca de la cuestión que se debate.

10. En la orilla del océano cósmico



Las preguntas y sugerencias siguientes pretenden guiarlo en la lectura de los capítulos de COSMOS. *Además del libro, existe una serie de televisión sobre el tema. Vale la pena que usted busque las cintas de video correspondientes. Estas cintas le ayudarán a resolver estas guías de lectura. Sin embargo, aun si usted tiene la oportunidad de ver las cintas, es aconsejable que tenga cerca de usted el texto del capítulo en cuestión.*

1. De la introducción

a. ¿Qué relación identifica usted entre los siguientes conceptos?

Nosotros los humanos	Evolución
Sobrevivir	Comprender

b. Resuma, comente y critique la visión de Carl Sagan sobre la ciencia.

2. Las leyes de la naturaleza

a. Comente la siguiente frase:

Las leyes de la naturaleza son las mismas en todo el cosmos.

b. ¿Qué significa *cosmos*? ¿Qué relación tiene ese significado con lo que usted respondió en **a**?

3. El descubrimiento de Eratóstenes

Las siguientes son preguntas con respecto a la manera como Eratóstenes logró medir la circunferencia de la tierra.

a. ¿Qué hecho incitó la curiosidad de Eratóstenes y dió origen a la idea?

b. ¿Cuál era la teoría que existía en la época con respecto a la tierra y qué relación tiene esta suposición con el hecho que usted mencionó en **a**? *Justifique* su respuesta.

c. ¿Qué concluyó Eratóstenes, como idea inicial, a partir de la contradicción que usted mencionó en **b**?

d. Explique en sus propias palabras ♣*no intente hacerlo en las de Eratóstenes porque él está muerto*♣ el método que Eratóstenes utilizó para medir la circunferencia de la tierra (Haga unos dibujitos; eso no le hace mal a nadie).

e. Explique, *de manera general*, la relación entre un ángulo, la porción de circunferencia que éste soporta ♣*esto tiene un nombre, pero no importa*♣ y el radio de la circunferencia. ¿Tiene uno que ser un genio como Eratóstenes para comprender la importancia de este hecho? ¿Será que tiene que hacer otro dibujito?

4. Alejandría

a. Comente la siguiente frase de Euclides y trate de relacionarla con el curso de MatebásicaMática.

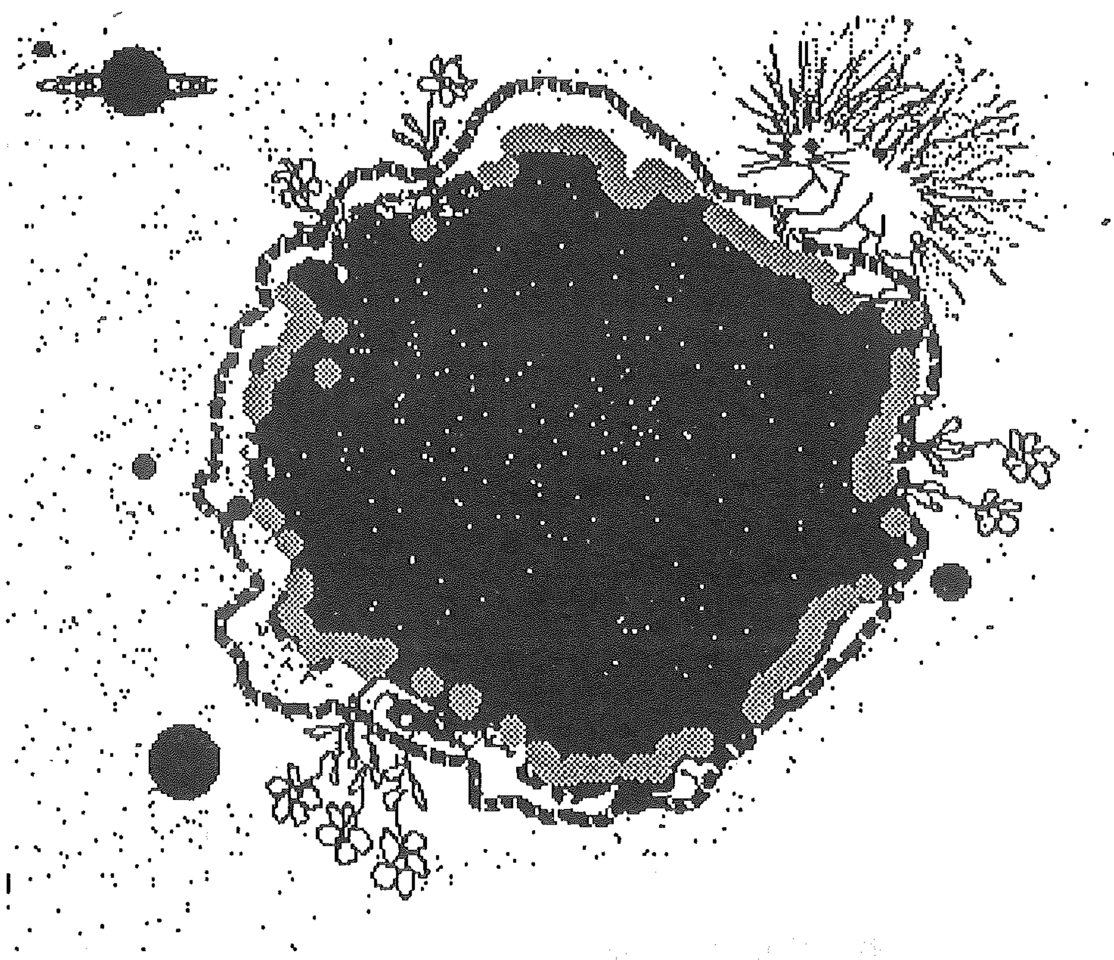
No existe un camino real a la matemática.

b. Haga una pequeña investigación en la historia de la ciencia e identifique los cinco momentos más importantes en la historia de la ciencia desde los griegos hasta nuestros días. Haga un dibujito. ♣*¡si se le ocurre!*♣

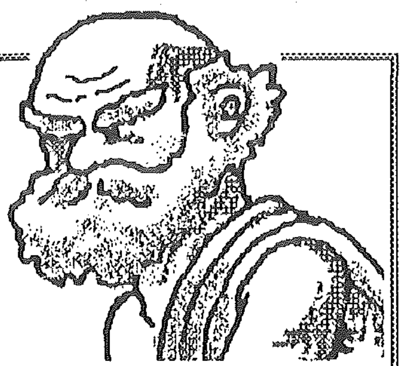
c. Escriba un pequeño cuento de **ciencia ficción**. Parta de la siguiente suposición:

La biblioteca de Alejandría no fue destruida. Todavía existe.

Trate de imaginarse cómo sería el mundo en este momento y cómo habría sido en cada uno de los momentos que usted identificó en **b**. ¿En qué época puede usted ubicar, dentro de su cuento, el nivel de desarrollo que tiene la ciencia en nuestros días?



11. Eratóstenes y los molinos

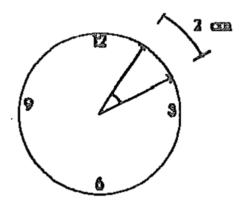


El propósito de este ejercicio es que usted profundice en el método que utilizó Eratóstenes para medir la circunferencia de la tierra y lo aproveche para medir la circunferencia de un molino de agua.

1. El método

Un reloj

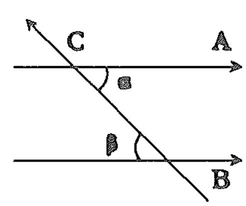
Considere un reloj como el mostrado en la gráfica. Suponga que la longitud del **arco de circunferencia** *♣¡Ojo con las flechas!♣* mide 2 centímetros.



a. Halle la longitud total de la circunferencia del reloj y explique claramente el procedimiento que utilizó para hacerlo.

El ángulo

Considere ahora el ángulo de la gráfica. *♣Claro que sí: yo lo considero; pobrecito♣.*



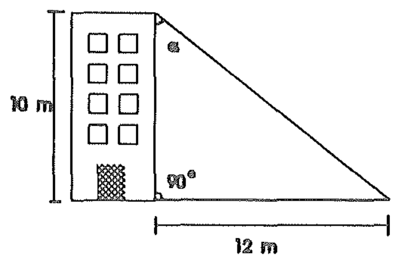
a. Si se toman dos rectas paralelas **A** y **B** y trazamos una recta diagonal **C** que las corta a las dos, explique **por qué** los ángulos $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ son iguales.

b. Compruébelo en la práctica con un transportador y trate de hallar el **argumento formal**

que permita justificar este resultado para cualquier **tripla** de rectas organizadas de esta manera.

El edificio

Ahora tenemos un problema clásico de trigonometría. En la gráfica hay un edificio de 10 metros de alto que proyecta una sombra de 12 metros sobre el piso. Sabemos que el edificio está bien hecho y que, por consiguiente, el ángulo entre el edificio y el piso es de noventa grados.

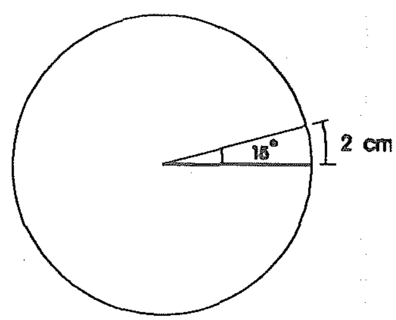


a. Halle el valor del ángulo $\angle\alpha$ en la gráfica. Justifique el procedimiento.

La circunferencia

Finalmente miremos la circunferencia de la gráfica.

a. Si sabemos que el arco de circunferencia marcado allí mide 2 centímetros y que el ángulo que lo *sostiene* ♣*¿Si ve la fuerza que está haciendo?*♣ tiene un valor de 15°, ¿cuánto mide la circunferencia? Justifique su respuesta, haciendo referencia a sus respuestas de los puntos anteriores.

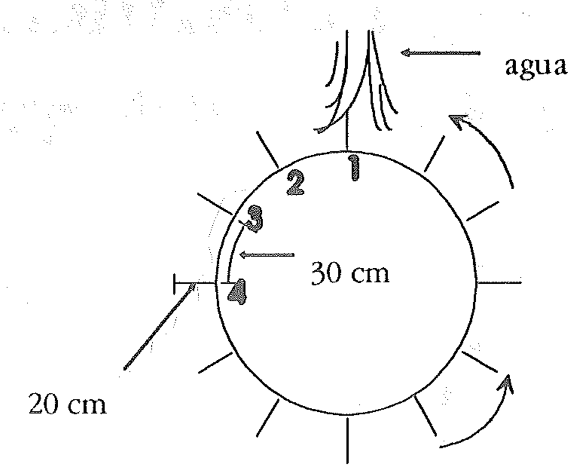


2. El molino

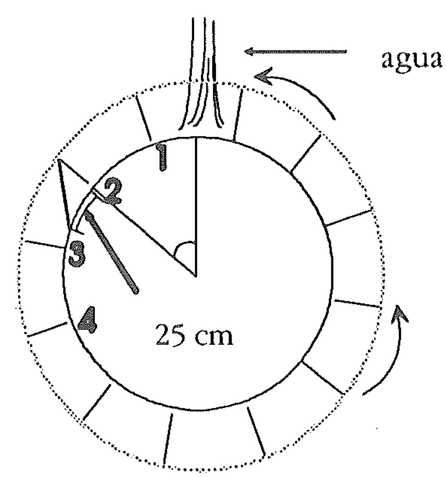
Y ahora sí llegamos al molino de Eratóstenes. ♣*¿Está seguro de que en esa época había molinos de agua?*♣ En las dos gráficas que presentamos vemos un molino de agua en **dos tiempos diferentes**.

Queremos ♣*¿Adivine qué?*♣ averiguar cuál es la longitud de la circunferencia que forman los extremos de los palos, como se muestra en la última figura.

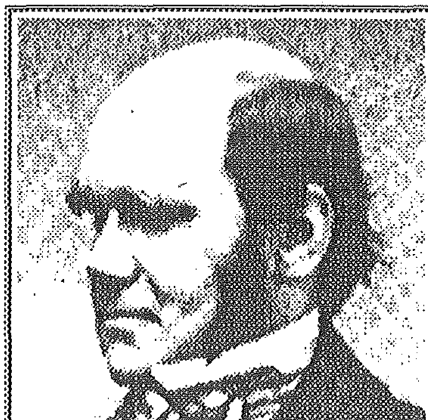
Sabemos que el agua, al caer del segundo palo (última figura) cae a una distancia de 25 centímetros de dicho palo, que la altura de cada palo es de 20 centímetros y que la distancia que hay entre cada palo es de 30 centímetros.



a. Halle la longitud de la circunferencia en cuestión, justificando cada uno de los pasos.



12. Una voz en la fuga cósmica



Charles Robert Darwin. (1809— 1882) Naturalista y biólogo inglés. En 1831 viajó alrededor del mundo a bordo del "Beagle". Esta expedición duró 5 años y, durante ella, realizó estudios hidrográficos y acumuló material para fundamentar su célebre obra, On the Origin of Species by Means of Natural Selection *(1859), que suscitó ardientes controversias. Autor también de* Zoology of the Voyage of the Beagle *(1840),* Variation of Animals and Plants under Domestication *(1868),* The Descent of Man *(1871) y otros trabajos. Fue enterrado en la Abadía de Westminster.*

1. Vida extraterrestre

a. ¿Existe la vida extraterrestre?

b. Si la vida extraterrestre existe, ¿qué forma tiene?
Todos son verdes y tienen dos antenas

c. ¿De **qué** estaría hecha la vida extraterrestre?

d. ¿Cómo apareció la vida en la tierra?

e. ¿Cómo evolucionó la vida en la tierra?

2. Los cangrejos

a. ¿Qué pretende mostrar la historia de los cangrejos? ¿Cómo relaciona usted esta historia con la evolución de la vida en la tierra?

3. La teoría de Darwin

a. ¿Cuáles son las dos *ideas básicas* de la teoría de Darwin? Explique qué significan y cómo se interrelacionan para explicar la evolución de la vida en la tierra.

b. Comente la siguiente frase:

"Los secretos de la evolución son la muerte y el tiempo."

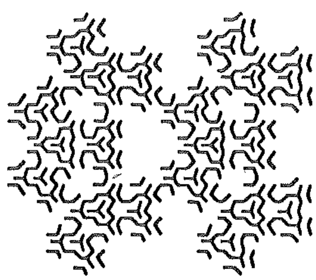
c. Encuentre un ejemplo que ilustre lo que es la selección natural y otro que ilustre lo que es la selección artificial.

4. El ADN

a. ¿Cuál es la naturaleza y la función del **ADN**?

b. ¿Qué papel juega el **ADN** en la explicación de la evolución en la tierra?

13. Desintegración y crecimiento

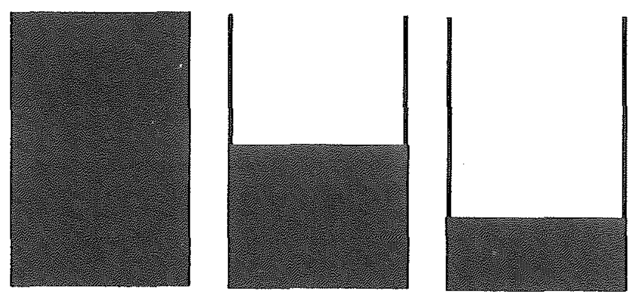


Este capítulo tiene como objetivo conocer el método del carbono 14 (C-14) y su relación con la desintegración radioactiva para fechar restos arqueológicos y antropológicos. Se utilizará este método para solucionar un problema de creci- miento de poblaciones.

1. Vida media

La vida media de un elemento radiactivo es el tiempo requerido para que se desintegre la mitad de átomos radiactivos presentes en cualquier muestra.

La vida media del Uranio 235 es de 713.000.000 años. Es decir:



713.000.000 años 713.000.000 años

La vida media del carbono 14 (C-14) es de 5.730 años.

a. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que se reduzcan veinticuatro átomos de C-14 a tres?

2. Prueba C-14

Cuando un organismo muere todo su carbono se aparta del "ciclo del carbono" que se da en la naturaleza, por lo que se va agotando su contenido en C-14 conforme a la ley de vida media, ya que no entra carbono nuevo al sistema. Para una muestra cualquiera las mediciones de C-14 pueden darnos la edad desde que se cerró el ciclo del carbono, ya que la cantidad de C-14 de la biósfera ha permanecido extraordinariamente constante durante largo tiempo.

Se han encontrado fragmentos de puntas de proyectiles y arpones de hueso de los que se espera suministren pistas en la reconstrucción de la expansión hacia el norte de la especie humana en la Europa del último período glaciar. En las muestras se ha reducido de 80 a 5 el número de átomos de C-14.

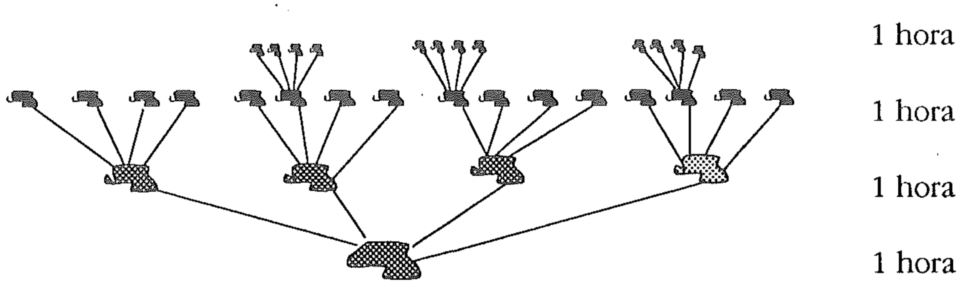
a. ¿Cuál es la edad de la muestra?

b. Si un organismo muere hoy y tiene 128 átomos de C-14, ¿cuántos átomos tendrá dentro de 22920 años?

3. Crecimiento

Un problema similar al anterior es el del crecimiento de poblaciones.

a. Supongamos que una colonia de bacterias se cuadruplica cada hora y comienza con una bacteria. ¿Cuántas bacterias hay al cabo de tres horas? ¿Al cabo de cinco horas?

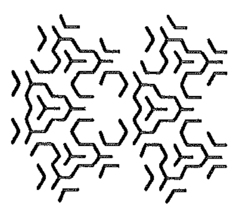


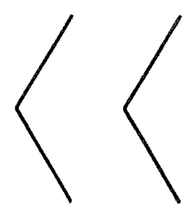
b. Si se cuadruplica cada hora, ¿cómo varía la población cada media hora? (Si respondió bien, dos medias horas deben cuadruplicar la población).

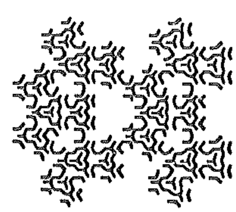
c. ¿Qué población hay al cabo de dos horas? ¿De tres? ¿De dos horas y media? ¿Al cabo de 24 horas?

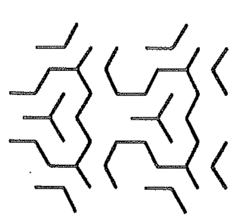
d. ¿Cuánto tiempo se necesita para obtener una población de 16.384 bacterias?

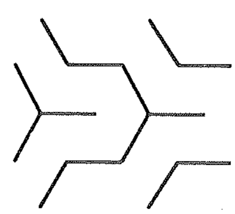
e. Una persona es inoculada por la mañana con una de estas bacterias que transmite cierta enfermedad, ¿cuál sería su estado por la tarde?



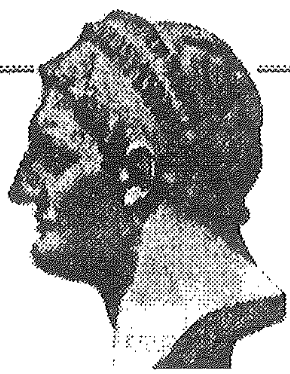








14. La armonía de los mundos



Claudio Ptolomeo (s.II. d. de J.C.) Matemático y astrónomo de Alejandría que vivió en el siglo II. Ptolomeo rectificó el catálogo de estrellas fijas de Hiparco, elaboró unas tablas para medir el movimiento de los astros, construyó el astrolabio de su nombre e impulsó la cartografía. Su Geografía ofrece un cálculo del tamaño de la Tierra, describe su superficie y señala los lugares por su longitud y latitud. Su sistema, que consistía en colocar la Tierra en el centro del mundo y considerarla como un cuerpo fijo, fue reemplazado por el de Copérnico. En su obra Megale Syntaxis, *cuya versión árabe se denominó Almagesto, expone la teoría del sistema astronómico geocéntrico que lleva su nombre.*

1. La ciencia, de nuevo

a. Vivimos en un mundo en donde todo cambia con el transcurso del tiempo. ¿Qué sentido tiene la ciencia si lo que analizamos hoy, mañana puede ser distinto? ¿O será que hay cosas que no cambian?

b. ¿A qué se refiere Sagan cuando dice que "las estrellas tienen un comportamiento tranquilizador"?

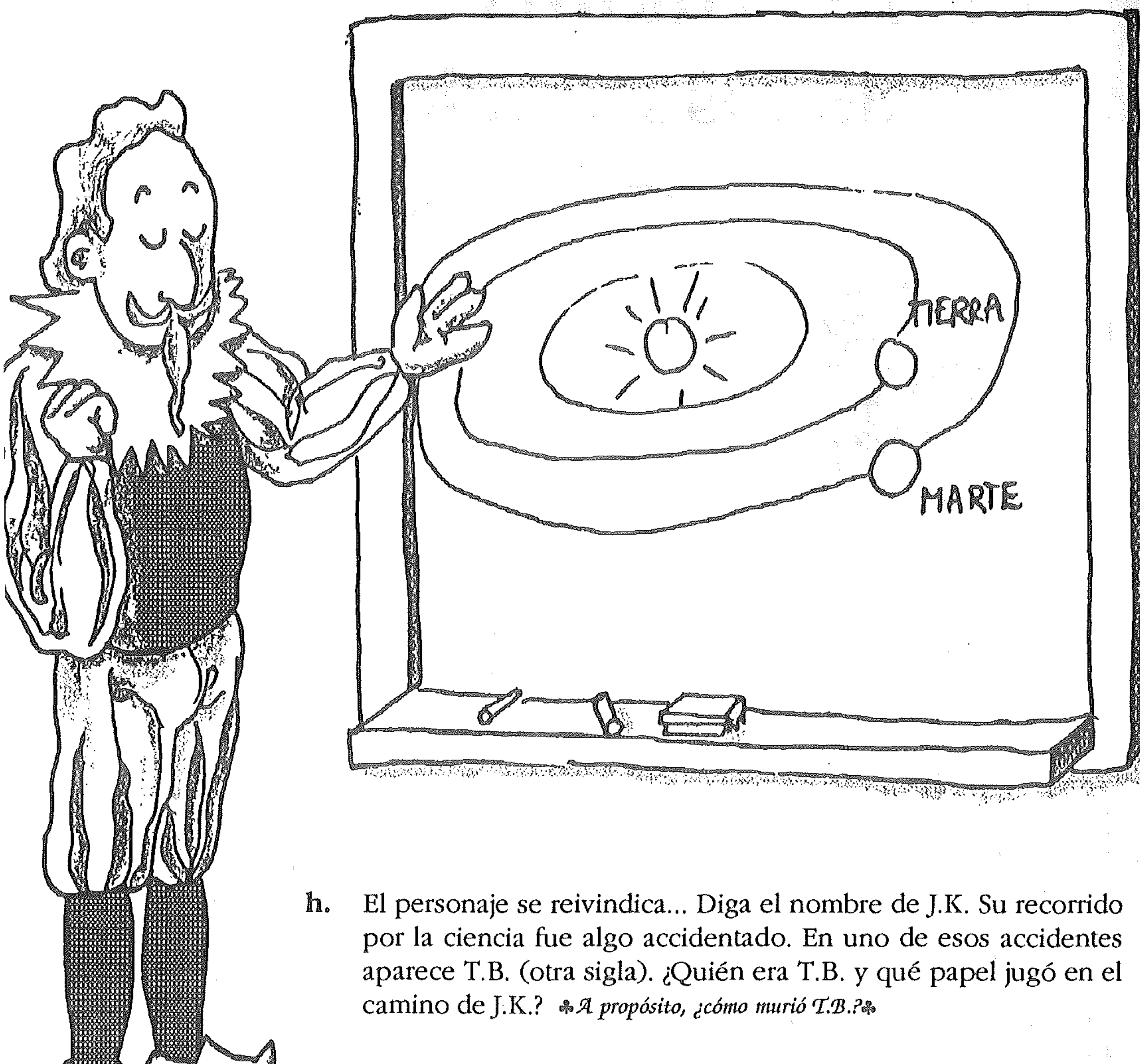
c. Enumere algunas razones por las que era práctico estudiar astronomía en aquella época.

d. ¿Cómo nace la *astrología*? ¿Qué relación tenía con la *astronomía*? ¿Qué factor las fue separando?

e. ¿Qué tipo de *astrología* hacía Claudio Tolomeo?

f. ¿Por qué se consideró a Nicolás Copérnico un *hereje*?

g. Antes de que se aburra, esta persona de iniciales J.K. hizo horóscopos y trabajaba en sus ratos libres en astrología... ¿Por qué hacía esto? ♣*la vida es muy dura*♣



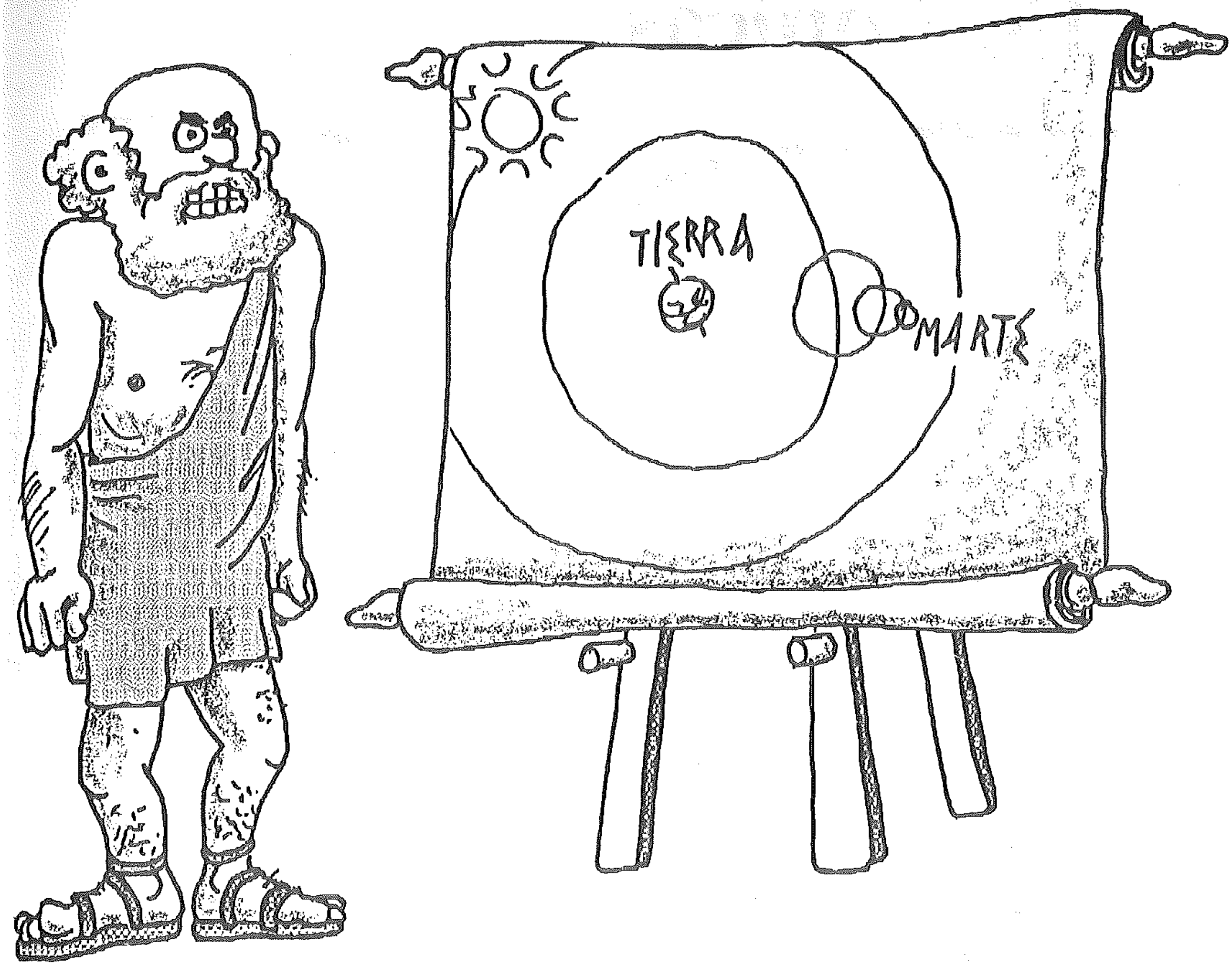
h. El personaje se reivindica... Diga el nombre de J.K. Su recorrido por la ciencia fue algo accidentado. En uno de esos accidentes aparece T.B. (otra sigla). ¿Quién era T.B. y qué papel jugó en el camino de J.K.? ♣*A propósito, ¿cómo murió T.B.?*♣

i. ¿Qué relación creía Kepler que había entre los sólidos geométricos y la órbita de los planetas? ¿Qué refutó esta hipótesis?

j. ¿Qué entendía Kepler por *armonía de las esferas*?

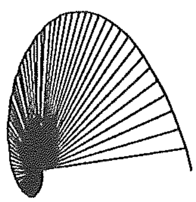
k. Bueno, ahora le toca a Isaac Newton. ¿De qué época era Newton?

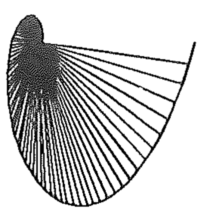
l. Dicen que inventó el *cálculo diferencial* mientras estaba enfermo... ♣*¿Qué habría inventado estando alentado?*♣ Mencione otros dos *inventos* de Newton.



m. Para terminar, a Kepler y a Newton se les debe un descubrimiento importante fuera de sus leyes mismas. ¿Cuál fue este aporte a la humanidad?

15. Cónicas



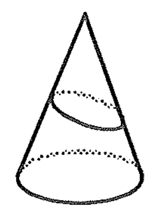


Como haremos un poco de trabajo manual, necesitamos los siguientes materiales: plastilina, cuchilla, lápiz, regla, compás, chinches, hilo y colores.

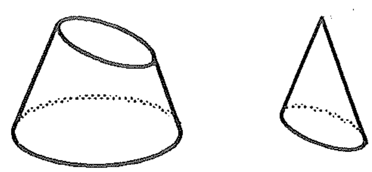
1. La elipse, una cónica

Los griegos conocían las propiedades de las figuras que se formaban al cortar un cono; figuras a las que denominaron *cónicas*. Procedamos:

a. Moldee en plastilina un cono recto, como se muestra en la figura.

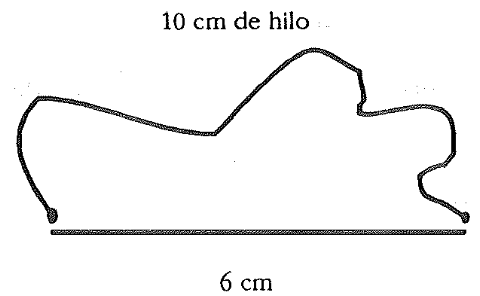


b. Ahora vamos a cortarlo, con la cuchilla, en dos partes. El corte debe ser un poco inclinado.



c. Deben quedar dos pedazos más o menos como se muestra en la figura.
Mire el lugar por donde hizo el corte; en cualquiera de los pedazos, esa figura es una elipse. Veremos ahora, cómo pintarla con regla y compás.

d. Sobre un papel pinte dos puntos separados por 6 cms; en cada uno clave un chinche, a los cuales debe haber amarrado un hilo de 10 cms de longitud. Debe tener algo como en la primera figura de la página siguiente.



e. Usando la punta del lápiz, tiemple el hilo y, apoyándolo en el papel, deje deslizar suavemente el lápiz por el hilo mientras pinta. ¿Le está dando como un huevo? Complételo, cuidando que el hilo no se enrede en los chinches, ni en el lápiz.

Ese huevo resulta ser ni más ni menos que una elipse, la misma figura del cono de plastilina. Fíjese que la distancia chinche—lápiz—chinche es siempre la misma. ¿Cuánto mide esa distancia? Esta propiedad distingue a la elipse de otras figuras. *La suma de las distancias de un punto de la elipse a dos puntos fijos es siempre la misma constante.*

Tratemos de encontrar ahora la distancia entre los puntos más alejados de la elipse.

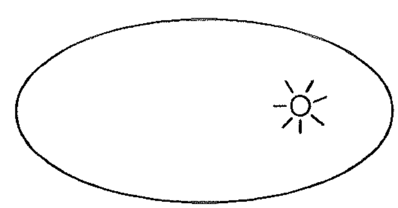
f. Tiemple el hilo con el lápiz hacia uno de los extremos; los dos pedazos de hilo, el que va hasta el punto desde un foco y el que regresa al otro foco deben coincidir (los focos son los chinches).

g. Suponga que usted sale de un foco y se va caminando por el hilo hasta ese punto extremo y se regresa hasta el otro foco. ¿Cuánta distancia recorrió?

h. Haga lo mismo con el otro punto extremo, ¿qué distancia recorrió ahora?

i. Una los puntos extremos de la elipse con una recta (esta debe pasar por los focos), ¿cuánto mide el segmento que une estos puntos extremos?

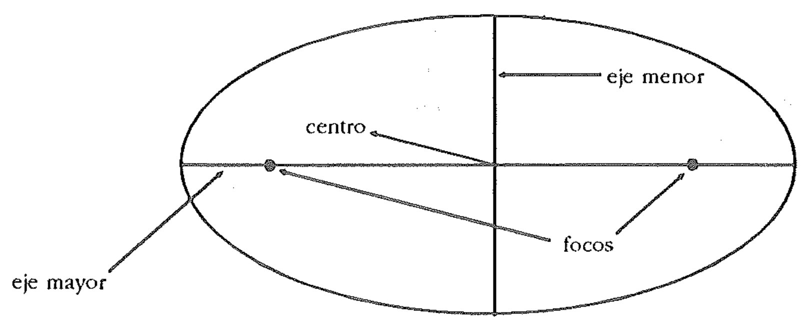
j. La órbita de un planeta alrededor del sol es una elipse, con el sol en uno de los focos. ¿Cuál es la distancia más cercana entre el sol y el planeta? Esa distancia se llama *afelio.* ¿Y la más lejana? Esa se llama *peribelio.*



2. La elipse, una aproximación

Vamos a aprender ahora cómo pintar una elipse aproximada con regla y compás. En la sección anterior hablamos de los puntos más alejados de la elipse, los que se encuentran sobre la misma línea que une los focos. Esa línea que pasa por los focos y va de un extremo a otro de la elipse se llama **eje mayor**. Lo que hicimos fue calcular la longitud de este eje. Si hay un eje mayor, debe haber uno menor. El **eje menor** es el que va de un extremo a otro de la elipse pero perpendicular al eje mayor, justo en medio de los focos. El método que vamos a desarrollar se basa en las longitudes de los dos ejes.

a. Fije dos longitudes de ejes, por ejemplo 8 y 10 cms. y dibuje los ejes como deben quedar, mirando el dibujo. Llamaremos centro al punto donde se cortan los ejes.

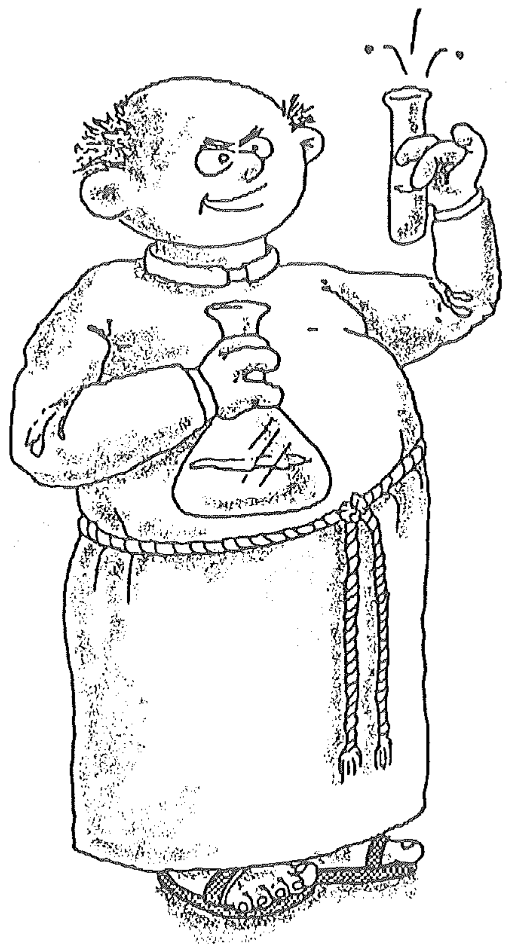


b. Sobre el eje menor pinte dos puntos F y O, cuya distancia al centro sea igual a la diferencia entre las longitudes de los ejes, en este caso 2 cms. Sobre el eje mayor pinte también dos puntos, E y L, cuya distancia al centro sea 3/4 de la diferencia entre los ejes, en este caso 1.5 cms. Una estos cuatro puntos formando un diamante.

c. Prolongue más las líneas hacia E y L. Con centro en E y radio la distancia de E hasta el final más cercano del eje, trace una porción de círculo, hasta las rectas (la prolongación de OE y FE). Haga lo mismo haciendo centro en L. Repetiremos eso haciendo centro en F y O pero tomando como radio la distancia de F al final del eje menor (al final más lejano).

Esto que hemos obtenido es una aproximación bastante buena de esa elipse.

16. El espinazo de la noche



1. La guía

a. Comente la siguiente frase:

El hombre primitivo que habla es Carl Sagan.

b. Mencione un par de temas que son *recurrentes* a través del libro y que son *importantes* en el "monólogo cavernícola".

c. ¿Qué relación ve usted entre los conceptos de *Cosmos, Caos* y *Dios*? Critique la posición de Sagan al respecto.

d. ¿Es contradictorio creer en Dios y ser un científico? ¿Qué tiene que ver esto con la *visión* que uno tenga del mundo?

e. Sagan discute la influencia del contexto geográfico, económico y político sobre el nacimiento de la ciencia. ¿Cree usted que se pueda hacer ciencia en Colombia? Justifique su respuesta.

Isaac Newton (1642 -- 1727) Matemático, físico y astrónomo inglés. Newton fue una personalidad multifacética y genio de primer orden. Formuló el llamado binomio de Newton, el método de tangentes y el cálculo de las funciones (que Leibnitz encontró once años después, presentándolo con el nombre de cálculo diferencial). Se dice que concibió la fuerza de gravedad, al observar la caída de una manzana en el jardín (1665). Estudió la luz y el color, enunció la teoría corpuscular de la luz e ideó el telescopio reflector, entre otros. Se ocupó también de la acústica, el calor, la electricidad, la mecánica, la filosofía y la religión. Su obra principal es Philophiae Naturalis Principia Mathematica *(1687). Otras obras:* De analysi per aequationes numero terminorum infinitas, Arithmetica universalis, New theory about Light and Colours, Optics or a Treatise of the Reflexionts, Regraxions, Inflexions, and Colours of Light.

f. ¿Qué cree usted que diría Sagan sobre la siguiente frase:

El modelo pitagórico—platónico de investigación es perfecto.

g. ¿Cuál es la relación entre la ciencia en Grecia en la antigüedad y la ciencia renacentista posterior que *aparentemente* ha logrado construir modelos *decentes* de algunos aspectos del Cosmos?

h. Isaac Newton dijo una vez que "se sentía como un niño que juega en la playa, buscando y ocasionalmente encontrando una concha o una piedra *bonita*, sin imaginar siquiera lo que podría haber en el vasto océano inexplorado". ¿Qué tiene que ver esto con las opiniones de Sagan? Y, usted, ¿qué opina?

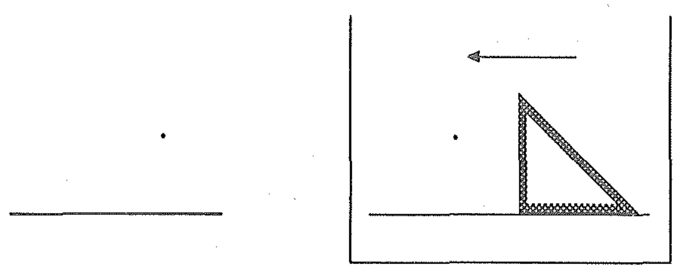
17. Construir números

Vamos a aprender a construir números tal como lo hacían los pitagóricos en la antigua Grecia. Pero, ¿qué significa construir un número? Primero que todo necesitaremos un segmento de recta al que llamaremos unidad y también necesitaremos regla y compás para "trazar" los números. Construir un número significará dibujar un segmento cuya longitud sea ese número de veces la unidad. Es decir, si usted llama a su unidad "mi unidad", construir el 4 sería pintar un segmento que mida 4 mi-unidades. A pintar. Primero haremos algunas construcciones especiales que se pueden realizar con regla y compás; pero veremos el método "práctico" y rápido. El método sólo usa escuadras; en ambos casos queremos trazar la paralela o perpendicular a una recta por un punto exterior.

1. Construcciones necesarias

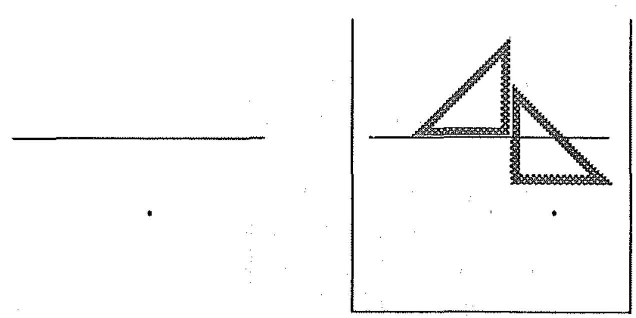
Perpendicular

Hacemos coincidir un cateto (lado que forma el ángulo recto) de la escuadra, con la recta, y sobre ella, deslizamos la escuadra hasta encontrar el punto con el otro cateto, nos detenemos y trazamos la perpendicular.



Paralela

En este caso necesitamos dos escuadras; la primera la colocamos con un cateto sobre la recta y al otro lado del punto. La segunda la colocamos de modo que un cateto quede coincidiendo con el otro cateto de la primera escuadra (ver figura) y la primera se desplaza hasta encontrar el punto, paramos y trazamos la recta sobre el cateto de la primera.

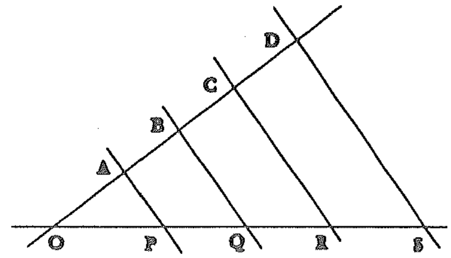


2. Los teoremas

Ahora necesitamos dos propiedades sobre proporciones que usaremos en las construcciones.

Teorema de Thales

Si dos rectas transversales (que se cortan) son partidas por un haz de paralelas, los segmentos resultantes son proporcionales. En el dibujo:

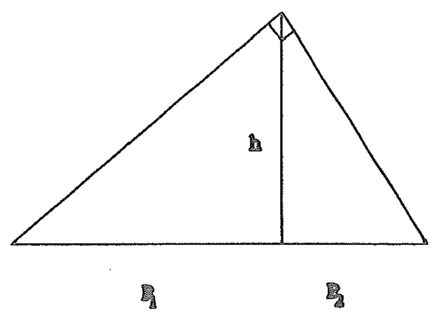


$$\frac{AB}{PQ}=\frac{BC}{QR}=\frac{OB}{OQ}=\frac{CD}{RS}=\frac{AC}{??}=\frac{??}{QS}=\frac{A?}{?S}=\frac{??}{??}$$

a. Complete los espacios.

Teorema de las alturas

Si tenemos un triángulo rectángulo y trazamos la altura sobre la hipotenusa, tenemos que: $P_1/h = h/P_2$. En el dibujo sería:

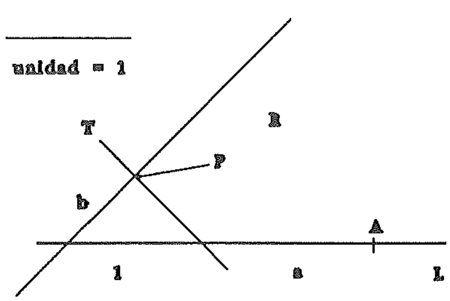


Ahora sí estamos listos para empezar a construir.

3. Las operaciones

La multiplicación

Suponga que tiene dos números a y b construidos. Si los pintamos como muestra la figura, proceda así:

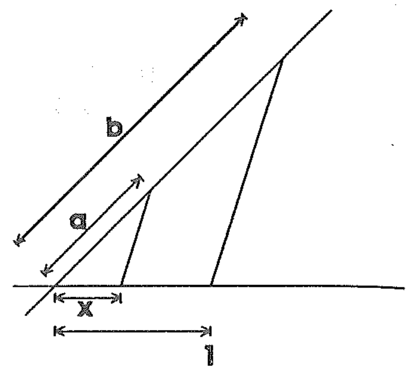


- Trace la paralela a T que pasa por A, llámela R.

Ahora tenemos un dibujo parecido al del teorema de Thales y podemos hacer unas proporciones parecidas.

a. ¿Cuánto mide, entonces, el segmento sobre R que determinan P y la paralela?

La división

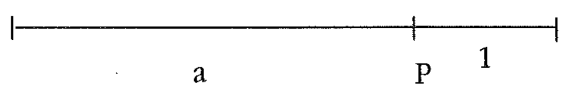


b. Haciendo de nuevo proporciones (Thales), ¿cuánto mide x en el dibujo?

c. Construya, sin hacer operaciones y con nuestra unidad:
$3/4$, $4/3$, $1/5 + 2/3$,
$(4/3 - 1/5)/2$

La raíz cuadrada

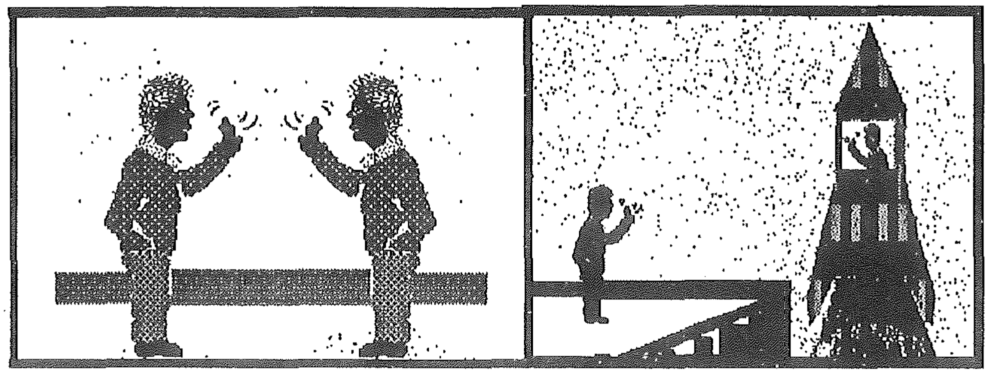
d. Suponga que tiene construido un número a, colocado como en el dibujo. Encuentre el punto medio de a+1 y con centro en este punto, trace un círculo que tenga por diámetro el segmento a+1. Ahora trace una perpendicular al segmento a+1 que pase por el punto P, lo suficientemente larga para que corte al círculo en el punto que se llamará Q. Construya el triángulo rectángulo que forman Q y los extremos del segmento. Ahora bien, ¿cuánto mide PQ?



e. Dibuje:

$$\sqrt{5},\quad \sqrt{(2+\sqrt{5})},\quad \frac{(\sqrt{5}-1)}{2},\quad \frac{1}{\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}},\quad \sqrt[4]{5}$$

18. Viajes a través del espacio y el tiempo



1. Mirando al pasado

a. Comente la siguiente frase:

> Un observador y un objeto que ya no existe pueden encontrarse en un mismo instante.

b. ¿Se puede *ver* en el instante presente (hoy, por ejemplo) algún hecho ocurrido en el pasado (hace diez años, por ejemplo)?

2. ¿Mareado?

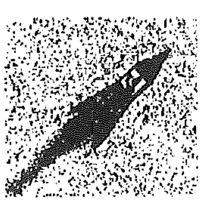
a. ¿Ha sentido mareo a causa del movimiento de la tierra, ya sea en torno de su eje o alrededor del sol?

b. Si todos los días, de día y de noche, a toda hora usted viera la luna **en el mismo sitio**, siempre luna llena, ¿esto querría decir que la luna no se mueve?

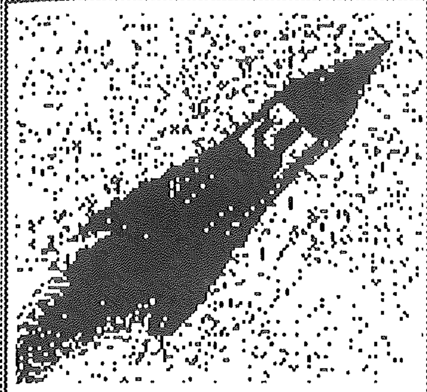
3. Viajando rápido

a. Si usted pudiera desplazarse a la velocidad de la luz en un espacio pequeño, digamos en el salón de clases, ¿cómo lo verían los demás?

b. La estrella Bernard está situada a unos seis años luz de distancia de la tierra. Si usted emprendiera un viaje a esa estrella en una nave que viajara con una velocidad cercana a la de la luz y llevara un reloj a bordo, tardaría, medidos por ese reloj, unos ocho años. Para sus compañeros que no hubieran viajado con usted, las cosas serían diferentes: para ellos habrían transcurrido unos 10.000 años. ¿Por qué?



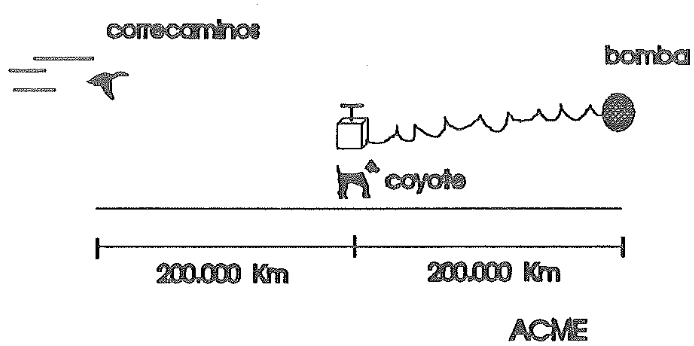
19. Relatividad



¿Recuerda usted al correcaminos y al coyote? Pues el coyote ha recibido una nueva e "ingeniosa" bomba, marca ACME, para destruir, ahora sí, al correcaminos. He aquí los planos que acompañan el producto; el coyote quiere que usted le ayude a estudiarlos para preparar la bomba, de modo que el correcaminos sea destruido en ella y además que el coyote vea la explosión. Como el correcaminos es tan "veloz", el coyote va a instalar la bomba a una distancia prudencial para poder observar lo que sucede.

1. Los datos

La distancia entre el correcaminos (cuando empiece la acción) y el coyote es de 200.000 kms, igual que la distancia entre el coyote y la bomba (el coyote se instala en el centro para no perder detalle). El correcaminos viaja a una velocidad de 200.000 km/seg según ha podido darse cuenta el coyote en todas sus experiencias anteriores. La señal que emite el coyote desde su posición para accionar la bomba, viaja a la velocidad de la luz: 300.000 km/seg.

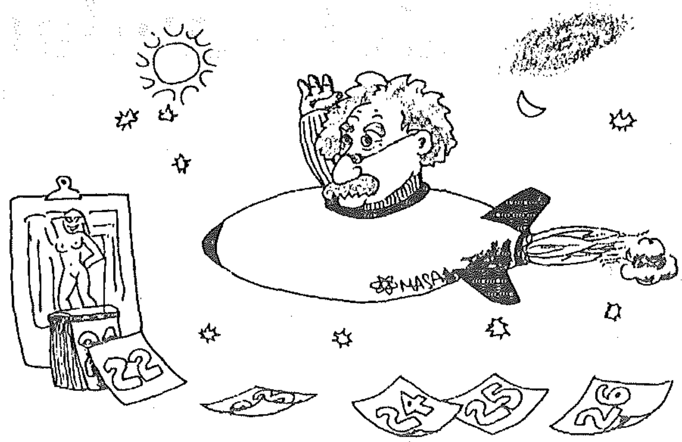


2. El problema

Ayudemos ahora al coyote en su análisis de la situación. Contaremos el tiempo desde el instante en que el correcaminos parte de la posición señalada. En ese momento t=0. Recuerde que:

$$\text{velocidad} = \frac{\text{espacio recorrido}}{\text{tiempo empleado}}.$$

Albert Einstein (1879 — 1955) Físico alemán nacido en Ulm. Se naturalizó norteamericano cuando fue privado de su nacionalidad en 1934 por los nazis. Profesor en varias universidades de Alemania y en la de Princenton en Estados Unidos (1933 — 45). En 1905 formuló matemáticamente la teoría de la relatividad del tiempo, que ha venido a modificar la teoría newtoniana de la gravitación universal. En 1916 la amplió (teoría general de la relatividad) y la aplicó a la cosmología. En 1912 formuló la ley de los efectos fotoeléctricos y fue el primero en verificar la hipótesis inicial de la teoría de los cuantos de Planck. En 1920 formuló la teoría del campo unificado que agrupa los fenómenos eléctricos y los de gravitación en una misma teoría. Sus trabajos abrieron el camino a la física nuclear. Entre los premios importantes que recibió, figura el Nobel de Física (1921). Es autor de Sobre la teoría del campo unificado *(1920),* Significado de la Relatividad *(1923),* Builders of the Universe *(1932),* On the Method of Theorical Physics *(1933),* The Evolution of Physics *(con Leopold Infeld, 1938).*



a. ¿En qué instante, desde que arrancó el correcaminos, pasó el correcaminos frente al coyote?

b. Después de emitida la señal que acciona la bomba, ¿cuánto tiempo se demora en estallar la bomba?

c. ¿En qué momento, desde que arrancó el correcaminos, debe el coyote accionar la bomba para que el correcaminos sea destruído?

d. ¿En qué instante, desde que arrancó, el correcaminos es destruido por la bomba?

3. ¿Qué ve el coyote?

a. Sabiendo que la imagen que el coyote ve de la explosión viaja hacia él a la velocidad de la luz, 300.000 km/seg, ¿cuánto tiempo transcurre desde que la bomba es accionada por el coyote hasta que éste ve la explosión?

b. Entonces, ¿en qué instante, desde que empezó todo, ve el coyote la explosión de la bomba?

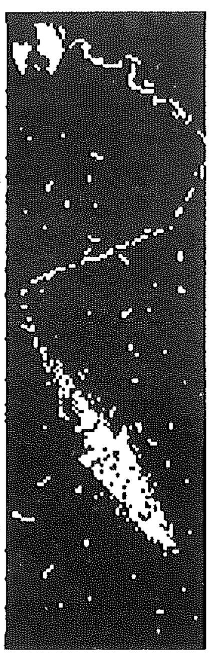
c. El correcaminos se aleja del coyote a una velocidad de 200.000 km/seg, pero la luz de su imagen se acerca al coyote a la velocidad de la luz. La velocidad a la que viaja la imagen del correcaminos hacia el coyote es 300.000 km/seg - 200.000 km/seg = 100.000 km/seg. Entonces, ¿cuánto tiempo transcurre desde que el correcaminos es destruido por la bomba, hasta que el coyote lo ve?

d. ¿En qué instante, desde que arrancó el correcaminos, ve el coyote pasar al correcaminos por el sitio de la explosión?

4. Un resumen

a. Explique en pocas palabras lo que pasa en cada momento

- t = 0
- t = 1
- t = 1.33
- t = 2
- t = 2.66
- t = 4



b. ¿Es destruido el correcaminos por la bomba?

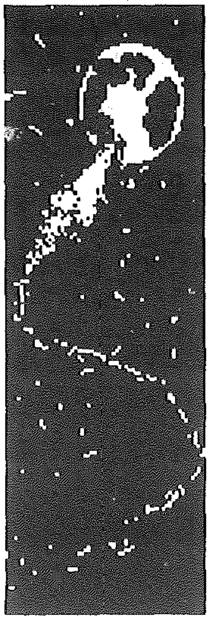
c. ¿Ve el coyote el momento en que la bomba acaba con el correcaminos?

Ahora, usted es invitado a participar en la acción y se sitúa lo más cerca posible a la bomba, para verificar lo que ocurre.

d. Para usted, como observador, ¿cuándo estalla la bomba? ¿Alcanza al correcaminos?

Estos dos hechos, para el coyote no son simultáneos, aunque para usted sí lo son. Es decir todo depende de quien mire los hechos.

Esto no pasaría si las velocidades involucradas no fueran tan grandes y si no hubiéramos usado la velocidad de la luz.



El primer hecho importante en la teoría de la relatividad es que la luz viaja en todas las direcciones con la misma velocidad y no debe ser sumada ni restada a otras.

El segundo hecho es que si las velocidades involucradas en el problema son muy grandes, las observaciones hechas por dos personas, de un mismo hecho, pueden ser distintas, pero están relacionadas.

En general, si tenemos dos observadores O y O', O' en reposo y O moviéndose con respecto a O' a una velocidad constante v, las mediciones que realicen los dos sobre el hecho observado no son las mismas pero se pueden relacionar mediante las siguientes ecuaciones, donde c es la velocidad de la luz.

Si V es la velocidad medida por O con respecto al cuerpo que se mueve y V' es la velocidad medida con respecto a O', entonces:

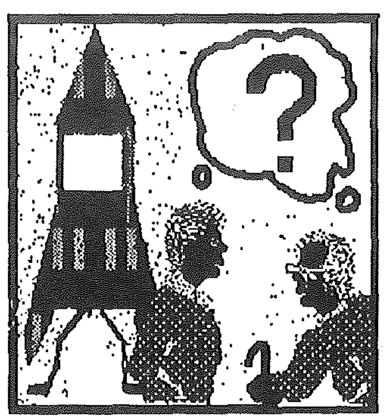
$$V' = \frac{V - v}{\left(1 - \frac{v*V}{c^2}\right)}$$

Si T es el tiempo medido por O y T' el medido por O' entonces:

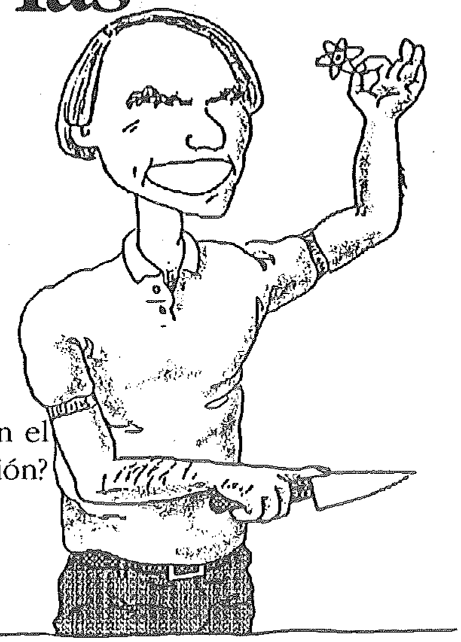
$$T = \frac{T'}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)}}$$

Si L es la longitud medida por O y L' la medida por O' entonces:

$$L = \sqrt{(1 - v^2/c^2)} * L'$$



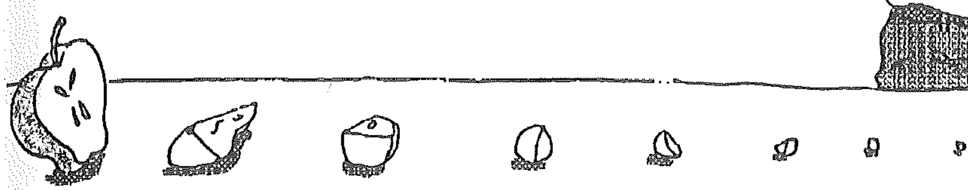
20. Las vidas de las estrellas



1. Resumen y opinión

a. ¿Cuáles ideas, de las sugeridas en el capítulo, le llamaron más la atención?

♣*Sea original y explique*♣



2. Unos acertijos atómicos y astronómicos

a. Suponga que el pastel de manzana tiene forma de cubo ♣*feísimo, ¿cierto? Aunque, claro, vaya uno a preguntarle a Picasso qué piensa de esto*♣ de 10 cm. de lado, y calcule el diámetro de un átomo con base en la afirmación de los 90 cortes que hace Sagan. ♣*sugerencia: primero imagínese cómo se hacen los cortes*♣

b. ¿Es razonable decir que es imposible encontrar dónde escribir los ceros de un *gugol* ♣*originalmente "googol", en inglés?*♣ ¿por qué?

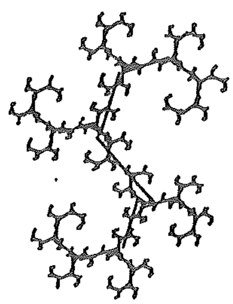
c. En general, mientras mayor cantidad de protones tenga un núcleo, más fácilmente se *desintegra* (o sea, se divide en varios pedazos). ¿Por qué?

d. Explique los principios básicos de la fusión nuclear (sugerencia: consulte una enciclopedia, un libro de física, uno de química, o uno de ciencia general. Por ejemplo. *Introducción a la Ciencia* de Isaac Asimov).

e. ¿Le parece extraño que la gravedad afecte la luz? Comente. Averigüe qué decía Newton acerca de qué es la luz; opine acerca del *comportamiento* de la luz en presencia de gravedad.

f. Sagan dice: "la estrella se encoge... enrojece y desaparece" Explique la relación entre el enrojecimiento y la gravedad.

21. Notación científica



Trabajaremos un método práctico para manejar cifras muy grandes, como el tiempo de vida de una estrella, un gugol, etc., o muy pequeñas, como el tamaño de una molécula o el de un electrón. Cada número se puede escribir en forma decimal (con coma) y lo que hace este sistema es mover la coma a derecha o izquierda de su posición compensando este movimiento con una potencia de diez.

1. La edad del sol

Usemos la edad del sol, calculada en unos cinco mil millones de años, para ver cómo funciona este método. 5.000.000.000 podría escribirse como 5×10^9 ya que 5 es 5,0 y si corremos la coma 9 lugares a la derecha, obtenemos la cifra inicial.

Esta forma, 5×10^9, se llama **notación científica.** Llamaremos:

5	x	10^9
Parte decimal		Parte exponente

Lo mismo se puede hacer para cantidades muy pequeñas. Por ejemplo, el diámetro de un átomo de hidrógeno, que es 0,0000001 milímetros, podría escribirse como 1×10^{-7}, -7 porque debemos correr la coma de 1,0 siete lugares a la izquierda para obtener la cifra inicial.

a. Escriba las siguientes cifras en notación científica

- 270.000
- 300.000.000
- 0,000012
- 0,00000007

Pero esta forma de escribir no es única, por ejemplo 2.360.000 se puede escribir

$$236 \times 10^4 \quad ó\ 23,6 \times 10^5\ ó\ 2,36 \times 10^6 \ldots.$$

b. Escriba de tres manera diferentes 0,00000125.

2. Unas operaciones

a. Para sumar debemos escribir las cantidades que queremos sumar con el mismo exponente. Sumemos 125.000 y 2.800.000. Primero escribamos cada cifra con exponente 5.

- 125.000 = ________ x 10^5
- 2.800.000 = ________ x 10^5

Ahora tomamos las partes decimales 1,25 y 28 y las sumamos, esto nos da ____________. El resultado final es esto que nos dió por 105 es decir

____

Ahora con los números pequeños:

0,000132 y 0,0008

b. ¿Qué exponente escogería para trabajar?

c. Escriba cada número en esta forma, con el exponente que escogió y sume las partes decimales.

d. ¿Cuál es el resultado de toda la operación?

Su respuesta debe ser equivalente a la de las personas que escogieron otros exponentes.

e. Ahora, haga la siguiente operación

$$12,4 \times 10^9 - 34,2 \times 10^8$$

La multiplicación es así

> Se multiplican las partes decimales entre sí y las partes de exponentes entre sí (recuerde aquí que para multiplicar potencias de igual base, se suman los exponentes).

f. Multipliquemos $1{,}3 \times 10^{3}$ y $0{,}2 \times 10^{6}$

Entonces hacemos

$$1{,}3 \times 0{,}2 = 0{,}26$$

y

$$10^{3} \times 10^{6} = 10^{9}$$

Luego el resultado es

$$0{,}26 \times 10^{9} \text{ ó } 26 \text{ X } 10^{7} \text{ ó } 2{,}6 \times 10^{8}$$

g. Realice $(1{,}26 \times 10^{-2}) \times (2{,}08 \times 10^{-6})$

3. Problemas

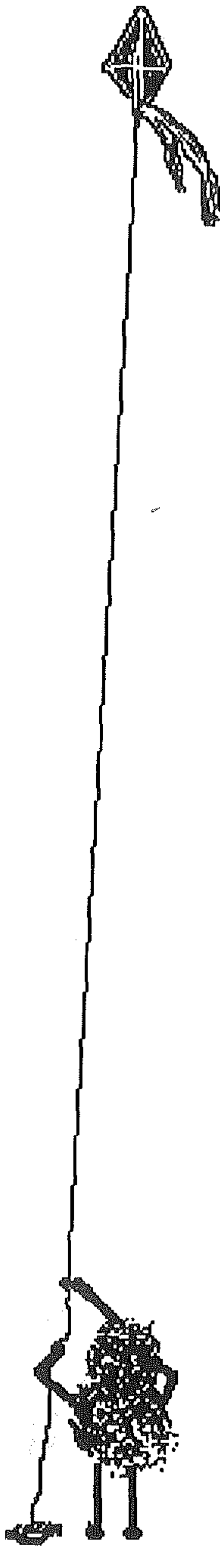
a. La edad actual del sol es aproximadamente 5×10^{9} años y le quedan aún unos 6×10^{9} años de vida, ¿cuál será la edad del sol al morir?

b. El diámetro de la tierra es $12{,}8 \times 10^{3}$ km, el diámetro del sol es $1{,}3 \times 10^{6}$ veces mayor. ¿Cuál es el diámetro del sol?

c. El diámetro del núcleo de un átomo de hidrógeno es 2×10^{-15} mm, el diámetro de uno de sus electrones es 2×10^{3} veces mayor. ¿Cuál es el diámetro de un electrón de hidrógeno?

d. La nebulosa del Velo se formó hace unos 5×10^{4} años y se expande a 100 km por segundo. Un año tiene aproximadamente $31{,}5 \times 10^{6}$ segundos. ¿Podría calcular el tamaño actual de la nebulosa?

22. La persistencia de la memoria



1. Información

a. ¿Qué es un bit?

b. ¿Cómo servirse de los bits para *medir* la cantidad de *información*? *♣Sugerencia: Si no tiene algo mejor, piense en aquel juego de salón consistente en que una persona escoge secretamente un personaje y mediante preguntas sí–no, los demás tratan de descubrirlo♣* Dé un ejemplo.

c. ¿En dónde hay una mayor cantidad de *información*: en el libro **Cosmos,** o en dos horas de telenovela? *♣Dependesss... de cuál telenovela♣* *Justifique* su respuesta.

d. ¿Qué relación se puede establecer entre la *cantidad* de información y la *calidad* de la misma? Dé un ejemplo.

2. Información e inteligencia

a. ¿En dónde hay una mayor cantidad de información: en nuestros genes o en nuestro cerebro? *♣Dependesss... el cerebro, ¿de quién?♣* *Justifique* su respuesta.

b. ¿Qué significa la frase: "el cerebro es un lugar muy grande en un espacio muy pequeño"?

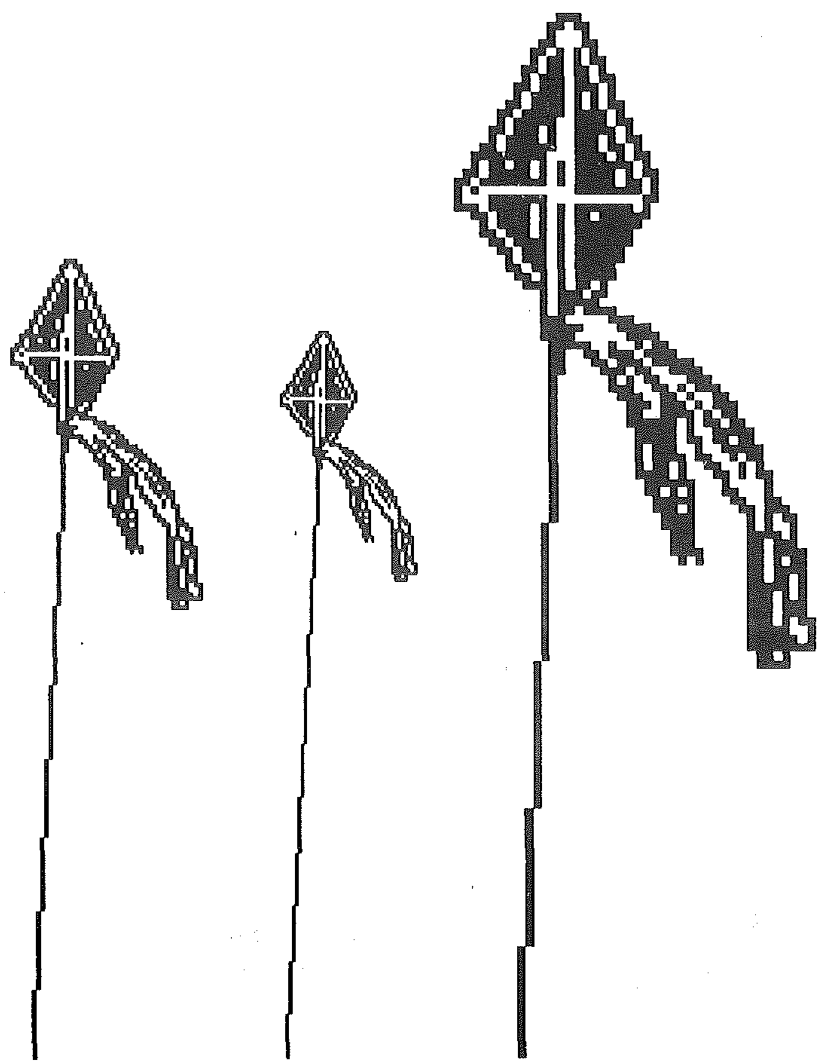
c. ¿Qué diferencias y semejanzas hay entre ser *inteligente* y *poseer una gran cantidad de información*? *♣¡Mi compañero de al lado sabe muchísimo!♣* Dé un ejemplo.

d. ¿Bajo qué *criterio* aseguramos que entre los animales se destacan las ballenas por su inteligencia?

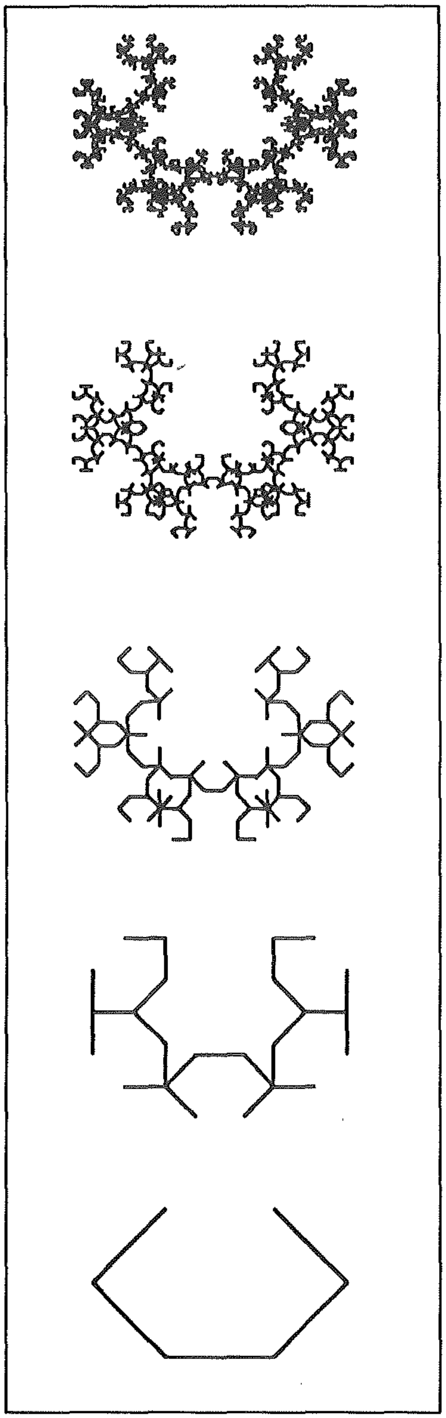
e. ¿Qué realización específica del ser humano en la inmensidad del universo es comparable al canto de la ballena en la inmensidad del océano?

f. A partir de lo que usted ha reflexionado hasta ahora, ¿se le ocurre un *criterio* con el cual sería posible comparar y diferenciar las distintas grandes especies de seres vivientes en la tierra? Proponga su criterio y compare y diferencie los siguientes seres vivientes: una amiba, una rosa, un insecto, una ballena, un mono, el hombre.

♣ *¿Dónde podré poner a mi compañero de al lado?* ♣



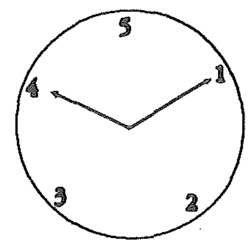
23. Reloj de cinco horas



1. Introducción

Al contar en base cinco, sabemos que necesitamos cinco símbolos para trabajar. Veremos ahora qué más podemos hacer con estos cinco símbolos.

Imaginemos un reloj no de doce horas sino de cinco horas. Veamos qué nueva hora le correspondería a cada una de éstas.



1 a.m. 6 a.m. 3 a.m. 10 a.m. 2 p.m.

a. Con dos vueltas de un reloj común completamos un día. ¿Con este reloj también?

b. Si no, ¿cuántas vueltas se necesitan para completarlo?

Operemos ahora con nuestro reloj.

c. Si son las 2 y pasan 4 horas, ¿en qué hora queda el reloj?

d. ¿Si son las 4 y pasan 3 horas?

e. ¿Si son las 3 y pasan 5 horas? ¿10 horas?

f. ¿Si es la 1 y pasan 5 horas? ¿15 horas?

g. Este reloj sólo tiene 5 horas, así que por mucho tiempo que pase sólo podremos hablar de una de estas cinco horas. ¿Cómo cree que podemos averiguar qué hora le corresponde a cualquier tiempo que nos podamos imaginar?

h. Describa todos los tiempos que se pueden asociar con cada una de las horas de nuestro reloj.

i. Resumamos ahora en un cuadro, cómo se pueden sumar horas en nuestro reloj; usaremos 0 en vez de 5, pero usted ya debió notar que les corresponde la misma hora. Complete la siguiente tabla. Recuerde que sólo deben aparecer horas de nuestro reloj.

+	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3					
4					

j. Complete la siguiente tabla para la multiplicación.

x	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3					
4					

Examinemos algunas propiedades que cumple el conjunto de nuestras horas {0, 1, 2, 3, 4} con estas dos operaciones.

2. La suma

a. ¿Existe alguna hora que sumada a cada una, la deje igual? ¿Cuál es?

b. Para cada hora, existe otra, tal que al sumarlas da 0. ¿Cuál es para cada una?

Además, fíjese que no importa el orden en que llene la tabla, ni cómo haga las sumas, aquella queda de la misma manera siempre.

3. La multiplicación

a. ¿Existe alguna hora que multiplicada con cualquiera otra hora, la deje igual?

b. ¿Existe para cada hora, otra hora tal que al multiplicarlas el resultado sea 1?

4. Otras propiedades

a. Tome una hora y vaya sumándola una, dos, tres, cuatro y cinco veces y escriba las horas que va obteniendo.

b. Repítalo con otra hora.

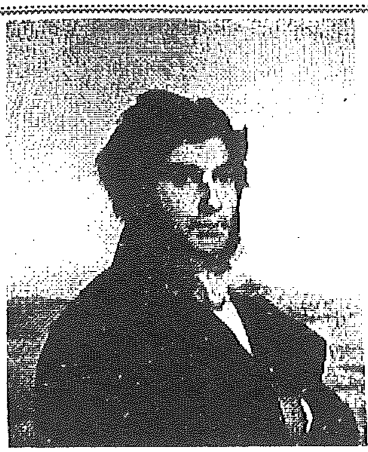
Esta propiedad la cumplen todas las horas y podría resumirse así: con una hora (cualquiera) podemos obtener todas las demás horas, sólo con cinco sumas.

c. Tome cualquier hora y multiplíquela por sí misma cinco veces. ¿Qué obtiene?

d. Repítalo con las demás horas.

En nuestro conjunto hay 5 horas, esta propiedad dice que cualquier elemento diferente a 0 elevado a la 5, da siempre uno.

24. Enciclopedia galáctica



Jean François Champollion (1790 — 1832) Egiptólogo francés. Fundador del museo egipcio del Louvre y del cual fue nombrado su conservador. Descifró los jeroglíficos egipcios. Autor de Précis du Système Hiéroglyphique des Anciens Egyptiens.

1. Champollion y la piedra Rosetta

a. ¿Cuál fue el aporte de Jean François Champollion a la humanidad?

b. Si vamos un poco más al fondo, ¿cree usted que lo que hizo Champollion fue simplemente descubrir otro idioma? Si no fue eso lo importante, entonces, ¿qué fue?

c. ¿Qué papel juega la **piedra Rosetta** en todo el cuento anterior?

2. Buenos días, Antenitas Eteñito

a. ¿Cómo cree usted que debería ser el mensaje de una civilización a otra civilización desconocida?

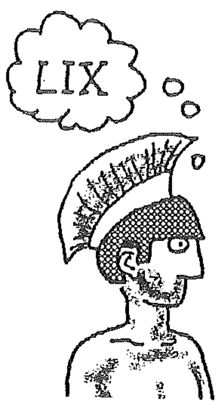
b. Si usted fuera uno de los últimos habitantes de la tierra y tuviera a su cargo ♣*de consciencia...*♣ dejar vestigio de nuestro paso por el cosmos y el medio para hacerlo fuera diseñando un mensaje, ¿qué información incluiría en el mensaje? ♣*música, filosofía, datos científicos, una tira de Mafalda, un cuento de G.G.M.*♣ Justifique su respuesta.

c. Dé algunos ejemplos (fuera del de los egipcios y Champollion) de encuentros entre civilizaciones que haya habido en nuestro planeta.

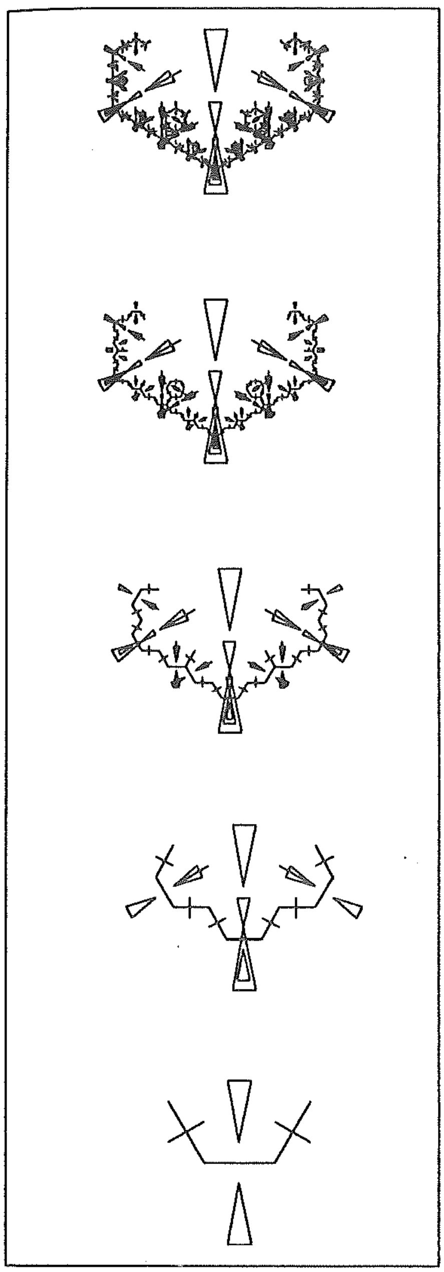
3. Una ecuacioncita

a. Explique la dichosa ecuación de Drake.

b. Describa cómo logró Sagan estimar algunas de las variables en la ecuación.



25. Cantidad de información



1. Bogotá y Medellín

Se desea establecer un sistema de comunicación entre los aeropuertos de Bogotá y Medellín. El sistema debe transmitir a intervalos regulares, datos sobre el estado del tiempo, usando solamente un equipo de funcionamiento binario. El estado del tiempo en Medellín puede ser soleado, nublado, lluvia o niebla y son igualmente probables. Es decir, cada uno tiene una probabilidad de 1/4.

La siguiente tabla muestra el código que será usado:

Mensaje	Probabilidad	Código A
S_1 = soleado	1/4	00
S_2 = nublado	1/4	01
S_3 = lluvia	1/4	10
S_4 = niebla	1/4	11

Está claro que con el empleo del código A es necesario enviar dos dígitos binarios por mensaje.

a. ¿Cómo se codificaría el mensaje: *soleado–nublado–lluvia*?

b. ¿Cómo se interpretaría **010111**?

2. Cantidad de información

Veamos la cantidad de información que tiene cada mensaje. Tomemos *soleado* como ejemplo. $P(S_1)$ será la probabilidad de que el tiempo esté soleado, en este caso es 1/4. Así: $1/P(S_1) = 1/(1/4) = 4$.

Debemos buscar un número I tal que $2^I = 4$. En este caso $I=2$, $2^2 = 4$.

Este número **I** es la cantidad de información del mensaje *soleado* en bits.

En este ejemplo la información de cada mensaje es la misma, 2 bits por mensaje.

En general, la información dada por un evento **E** con probabilidad P(E) de que suceda es el número **I** tal que $2^I = 1/P(E)$ medido en bits.

Para transmitir información de Bogotá a Medellín debemos tener en cuenta que en Bogotá los estados del tiempo no son igualmente probables, pues el sol no sale mucho y es más posible que esté nublado o que llueva. A continuación se da una tabla con los mensajes, su probabilidad y el código que usaremos:

Mensaje	Probabilidad	Código B
soleado	1/8	110
nublado	1/2	0
lluvia	1/4	10
bruma	1/8	1110

En este caso, el código es de longitud variable; no todas las palabras tienen la misma longitud. La longitud media de un código se mide con la longitud de cada mensaje y la probabilidad con que se presenta.

a. ¿Cómo se codificaría *soleado–soleado–lluvia*?

b. ¿Cómo se interpretaría **100110**?

c. En este caso, ¿cuánta información hay en el mensaje *nublado*? ¿cuánta en *bruma*?

En el código A la longitud de cada mensaje (número de símbolos usados) es 2 y la probabilidad de cada mensaje es 1/4, la longitud promedio es

$$(1/4)2 + (1/4)2 + (1/4)2 + (1/4)2 = 2.$$

d. ¿Cuál es la longitud promedio del código B?

A continuación tenemos una serie de códigos que servirían para codificar cuatro mensajes.

Símbolo	Código A	Código B	Código C	Código D	Código E
S_1	00	0	0	0	0
S_2	01	100	10	100	11
S_3	10	110	110	110	110
S_4	01	111	111	11	11

e. Si todos los mensajes tienen la misma probabilidad, es decir, $P(S_1) = P(S_2) = P(S_3) = P(S_4) = 1/4$, halle la longitud media de los códigos B y C.

f. Si las probabilidades son $P(S_1) = 1/2$; $P(S_2) = P(S_3) = 1/8$ y $P(S_4) = 1/4$, halle la longitud media de los códigos D y E.

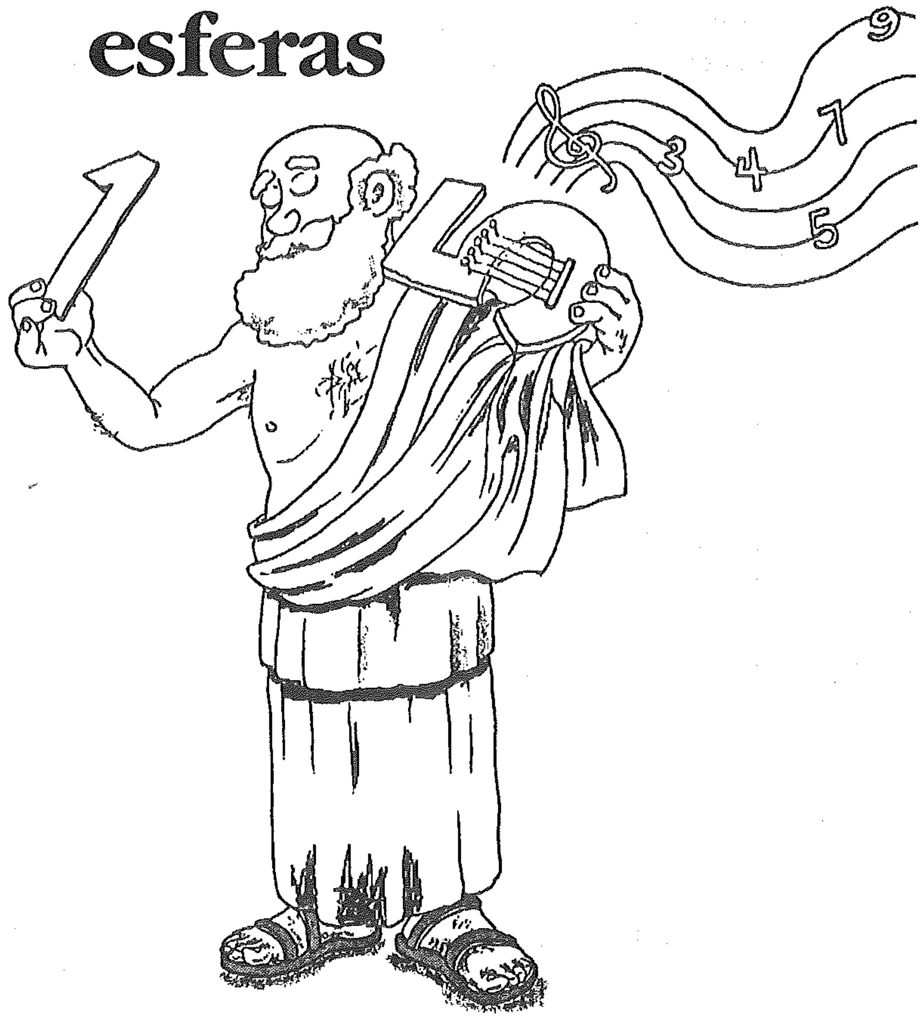
g. Codifique el mensaje $S_1S_2S_4$ en el código B.

h. ¿Qué significa el mismo mensaje en el código C?

i. Codifique el mensaje S_2S_3 en el código D.

j. ¿Qué significa en el código E?

26. La música de las esferas



1. Pitágoras y los números

Las siguientes tres guías de lectura se refieren a capítulos del libro *El ascenso del hombre* de J. Bronowski.

a. Comente la siguiente frase:

Los números son el lenguaje de la naturaleza.

b. ¿Qué relación encontró Pitágoras entre la armonía musical y los números?

2. Matemáticas y ciencia

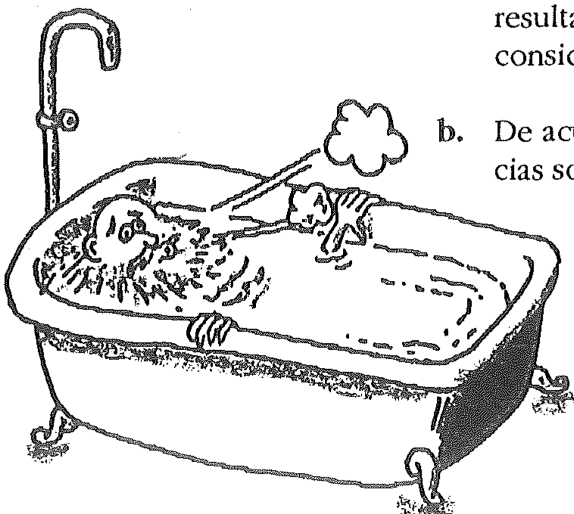
a. Para explicar el hecho de que la astronomía se desarrolló más temprano que la medicina, Bronowski afirma que una ciencia avanza más rápidamente cuando puede ser tratada matemáticamente. ¿Está usted de acuerdo con esta afirmación? ¿Cree usted que ella explica también el hecho de que las ciencias naturales gocen de mayor credibilidad que las ciencias sociales?

b. Dé ejemplos de objetos naturales (es decir, no creados por el hombre) distintos de los cristales, que posean formas simétricas.

c. ¿Cómo explicaría usted que las matemáticas estudien el movimiento y el cambio haciendo uso de *números* que son conceptos que no cambian?

27. El mensajero celeste

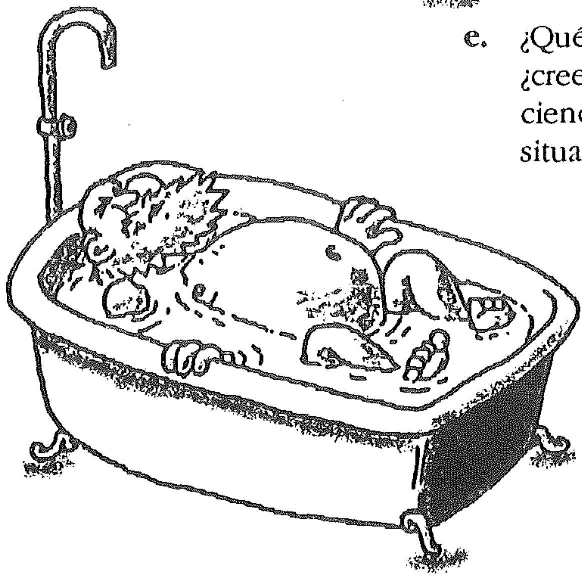
a. ¿Es necesario que una actividad pueda expresar sus resultados en lenguaje matemático para que se le considere ciencia? Justifique su respuesta.



b. De acuerdo al criterio expuesto en **a**, ¿son las ciencias sociales, ciencias de verdad?

c. ¿Por qué cree usted que los europeos descubrieron América y no al revés?

d. ¿Cree usted que para explicar el movimiento de los planetas, el sistema copernicano sea más simple que el sistema de Tolomeo? Explique.



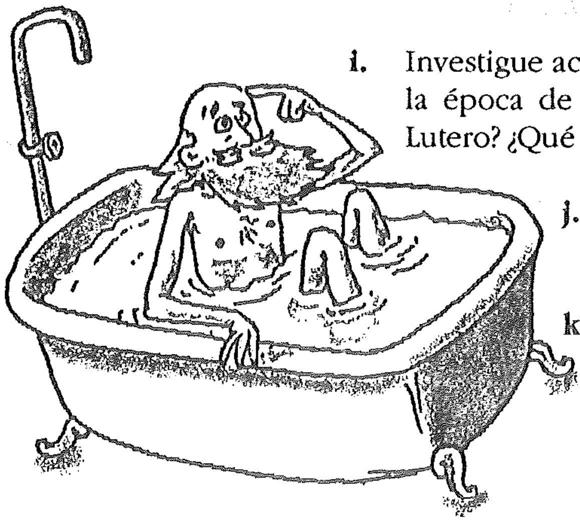
e. ¿Qué es eso de la *simplicidad*? De manera general, ¿cree usted que la *estética* juega algún papel en la ciencia? ¿Cuál papel? Proponga un ejemplo de dos situaciones similares en las que se escoge una por razones estéticas.

f. Averigüe, cuál es el **principio de Arquímedes** y cómo se puede usar para encontrar la densidad de objetos preciosos. ¿Qué tiene que ver el principio de Arquímedes con lo que usted siente cuando se deja hundir hasta el fondo de una piscina?

♣*Que yo me asusto y a Arquímedes le importa un pepino*♣

g. ¿En qué sentido se afirma en el capítulo que "Galileo es el creador del método científico moderno"?

h. *La pregunta del millón* A propósito, ¿qué es eso del método científico moderno?



i. Investigue acerca de la situación religiosa que se vivía en la época de Galileo ¿Qué fue la Reforma? ¿Quién fue Lutero? ¿Qué fue la Contrarreforma?

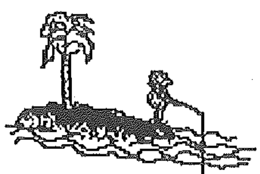
j. Resuma y comente el proceso seguido por la iglesia contra Galileo.

k. ¿Cree usted que pueda haber en su interior *sí: ahí adentro, donde usted siente las cosas* un conflicto entre la *religión* y la *ciencia*? O, para ponerlo de otra forma, ¿entre la *fe* y la *razón*? Trate de explicar con un ejemplo.

l. ¿Cree usted que dentro de la ciencia cabe la religión?

m. ¿Cree usted que dentro de la religión cabe la ciencia?

28. Conocimiento o certeza



a. ¿Cuáles son, en su opinión, las ideas más importantes del capítulo?

b. "La ciencia no puede lograr un conocimiento absoluto." ¿Es esta limitación una característica negativa de la ciencia? Explique.

c. ¿Cómo se imagina usted un mundo en el que conozcamos todo acerca de nuestro entorno y de nosotros mismos? ¿Le gustaría vivir en ese mundo? ¿Por qué?

d. ¿Qué similitudes y diferencias encuentra usted entre el método del artista y el método del científico, y, más generalmente, entre arte y ciencia? Dé un ejemplo.

e. ¿Puede el arte contribuir a nuestra comprensión del mundo?

f. Explique, en sus términos, el **Principio de Tolerancia** (como lo llama Bronowski) de Heisenberg.

g. La ciencia puede desarrollarse sólo dentro de un ámbito de tolerancia y de crítica. ¿Puede decirse lo mismo acerca de la religión? ¿De la política? Proponga ejemplos.

h. ¿Es la investigación científica una investigación *pura*, que debe adelantarse independientemente de las ideas religiosas, políticas, filosóficas del científico? ¿Debe el científico preocuparse por las implicaciones políticas y sociales de sus investigaciones y preservarlas de una utilización equívoca? Proponga dos ejemplos de actualidad.

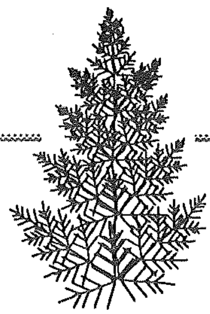
i. Escriba un comentario personal sobre el siguiente párrafo:

> Se ha dicho que la ciencia deshumanizará a la gente y la convertirá en números. Esto es falso, trágicamente falso. Compruébelo usted mismo. Este es el campo de concentración y el crematorio de Auschwitz. Fue aquí donde la gente se convirtió en números. En este estanque fueron esparcidas las cenizas de cuatro millones de personas. Y esto no fue obra del gas. Fue obra de la arrogancia. Fue obra del dogma. Fue obra de la ignorancia. Cuando la gente se cree poseedora del conocimiento absoluto, sin pruebas de la realidad, tal es su comportamiento. Todo ello ocurre cuando los hombres aspiran al conocimiento de los dioses.

4.

NUMEROS

1. Los naturales



En los próximos capítulos vamos a tratar de hacer un poco de botánica numérica. Será una especie de primera expedición dentro de este bosque numérico aparentemente tan rico en variedad, tamaño y complejidad. Comenzaremos por las especies más sencillas y que son también las más conocidas: los números naturales. Miraremos después los números enteros y finalmente entraremos a considerar los números que más dificultad presentan a los expedicionarios primíparos: los números racionales.

1. Introducción

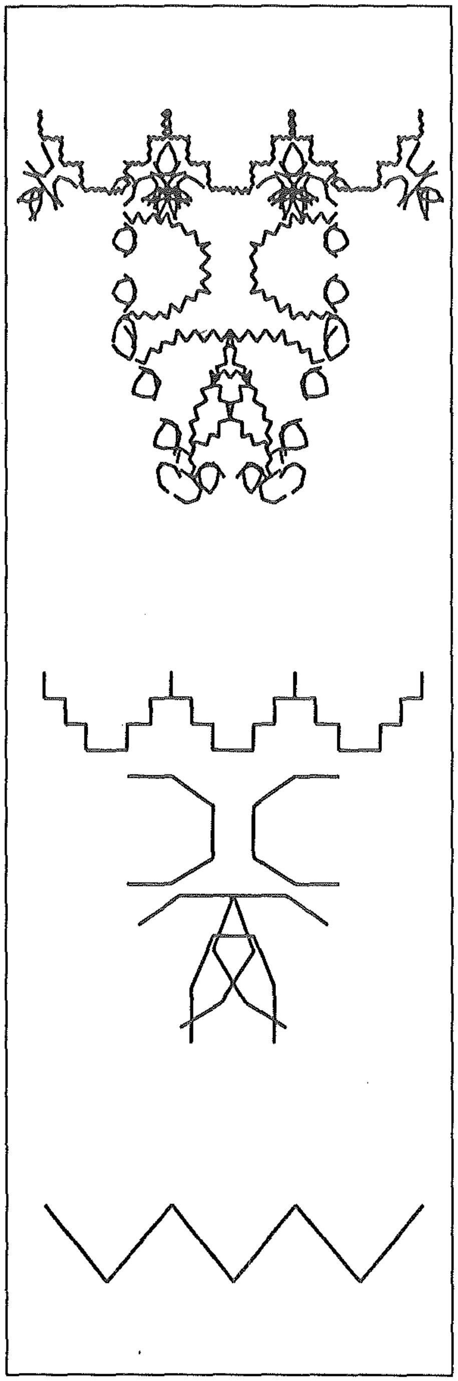
No todos los números son iguales. ♣*¡Pues claro: si todos los números fuesen iguales, no habría sino uno solo; un paisaje numérico bastante desértico*♣ De hecho, el *paisaje numérico* es más un gran bosque que un desierto. Hay muchas variedades de tipos diferentes. Hay números grandes y números pequeños. Hay números sencillos y números muy complejos. Hay números que se parecen mucho entre sí y números que, aparentemente, no tienen nada que ver entre ellos. Existen números que piensan mucho ♣*¿Ha oído hablar de los números racionales?*♣; y hay hasta parentescos entre ellos. ♣*Estoy seguro que usted ha oído hablar de los números primos.*♣ Se podría también pensar que hay algún tipo de diferencia sexual entre algunos números. ♣*O, ¿es que usted no ha oído hablar de las manifestaciones que hacen los números pares por la llamada liberación parisina? Lo que sucede es que los números pares consideran que los impares los oprimen. Además si los pares son las niñas y los impares son los niños, ¿qué será el número 0?*♣

Considere la siguiente miscelánea de números:

2,5	2	0	-25	3/2	7	21,0
13	-(-4)	9	20/4	23.67	-1	18/8

a. ¿Cuáles de los anteriores números son *naturales*? ¿Cuáles impares? ¿Cuáles primos?

2. Los enteros



1. Identificando a los enteros

a. Subraye los *números* de la siguiente lista que sean **enteros:**

-7	16/6	-2,0	0	-39/3	8
$\sqrt{3}$	-0	4	15,2	-13	π

b. De la anterior lista, ¿cuáles números son *enteros* pero no son *naturales*?

c. ¿Cree usted que el *cero* debería incluirse entre los números *naturales*. ¿Por qué?

2. ¿Y si sustraemos?

Los números naturales tienen un significado muy claro: son los números de contar. La frase

hay 5 libros en la mesa

es perfectamente entendible, pero vaya uno a saber qué quiere decir

hay -3 libros en la mesa.

a. Explique lo que usted cree que pueden representar los números *negativos*.

b. Hay situaciones en las que no tiene sentido hablar de números negativos. Por ejemplo Mático tiene -2 amigos ♣*¿Cómo así que no tiene sentido? ¿Usted no sabía que Mático es muy antipático?*♣ Dé otros ejemplos en los que el uso de números negativos sea absurdo.

c. Sin embargo, hay otras ocasiones en las que se puede ir más abajo del cero: si yo no tengo un centavo y, peor aún, si le debo 200 pesos mi vecina, yo puedo decir que tengo -200 pesos. Invéntese otros ejemplos en los que el uso de números enteros negativos sea significativo.

d. Supongamos que Mate debe 300 pesos y que su amigo Mático debe 500 pesos. Sin duda Mate atraviesa por un mejor momento económico que Mático. Teniendo en cuenta lo anterior, ¿Cuál número cree usted que es mayor: -300 o -500? Justifique su respuesta.

e. Dé otro ejemplo de una situación cotidiana en la que se compare el tamaño de dos números negativos. Explique.

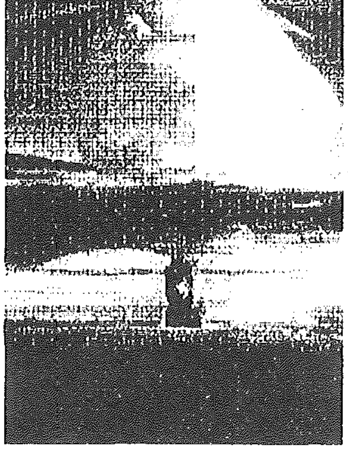
f. Ordene los números enteros de la lista del comienzo de la hoja de menor a mayor.

g. Realice las siguientes operaciones: ♣*Esto se está poniendo cansón. A mí me gustaba más cuando jugábamos al MU*♣

(-6)	+	3	=
2	+	(-7)	=
(-8)	+	(-10)	=
(-20)	-	18	=
(-2)	-	(-9)	=

h. Interprete una de las anteriores operaciones en el contexto de alguna de las situaciones que usted consideró en la parte **b**.

3. El cataclismo de Damocles



Damocles (IV A.C.) Cortesano de Dionisio de Siracusa; se cuenta que el tirano lo obsequió con un suntuoso banquete durante el cual Damocles al alzar los ojos vio sobre su cabeza una pesada espada pendiente de una crin de caballo; de ahí la expresión "La espada de Damocles" para aludir a un peligro inminente.

1. Lectura

Conferencia Ixtapa—México—1986

Un minuto después de la última explosión, más de la mitad de los seres humanos habrá muerto, el polvo y el humo de los continentes en llamas derrotarán la luz solar, y las tinieblas absolutas volverán a reinar en el mundo. Un invierno de lluvias anaranjadas y huracanes helados invertirá el tiempo de los océanos y volteará el curso de los ríos, cuyos peces habrán muerto de sed en las aguas ardientes, y cuyos pájaros no encontrarán el cielo. Las nieves perpetuas cubrirán el desierto del Sahara, la vasta Amazonia desaparecerá de la faz del planeta destruida por el granizo, y la era del rock y de los corazones transplantados estará de regreso a su infancia glacial. Los pocos seres humanos que sobrevivan al primer espanto, y los que hubieran tenido el privilegio de un refugio seguro a las tres de la tarde del lunes aciago de la catástrofe magna, sólo habrán salvado la vida para morir después por el horror de sus recuerdos. La creación habrá terminado. En el caos final de la humedad y las noches eternas, el único vestigio de lo que fue la vida serán las cucarachas.

Señores Presidentes,
señores Primeros Ministros,
amigas, amigos:

Esto no es mal plagio del delirio de Juan en su destierro de Patmos, sino la visión anticipada de un desastre cósmico que puede suceder en este mismo instante: la explosión —dirigida o accidental— de sólo una parte mínima del arsenal nuclear que duerme con un ojo y vela con el otro en las santabárbaras de las grandes potencias.

Así es. Hoy, seis de agosto de 1986, existen en el mundo más de cincuenta mil ojivas nucleares emplazadas. En términos caseros, esto quiere decir que cada ser humano, sin excluir a los niños, está sentado en un barril con unas cuatro toneladas de dinamita, cuya explosión total puede eliminar doce veces todo rastro de vida en la tierra. La potencia de aniquilación de esta amenaza colosal, que pende sobre nuestras cabezas como un cataclismo de Damocles, plantea la posibilidad teórica de inutilizar cuatro planetas más de los que giran alrededor del sol, y de influir en el equilibrio del sistema solar. Ninguna ciencia, ningún arte, ninguna industria se ha doblado a sí misma tantas veces como la industria nuclear desde su origen, hace cuarenta y un años, ni ninguna otra creación del ingenio humano ha tenido nunca tanto poder de determinación sobre el destino del mundo.

El único consuelo de estas simplificaciones terroríficas —si de algo nos sirven—, es comprobar que la preservación de la vida humana en la Tierra sigue siendo todavía más barata que la peste nuclear. Pues con el solo hecho de existir, el tremendo apocalipsis cautivo en los silos de muerte de los países más ricos está malbaratando las posibilidades de una vida mejor para todos.

En la asistencia infantil, por ejemplo, esto es una verdad de aritmética primaria. El Unicef calculó en 1981 un programa para resolver los problemas esenciales de los quinientos millones de niños más pobres del mundo. Comprendía la asistencia sanitaria de base, la educación elemental, la mejora de las condiciones higiénicas, del abastecimiento de agua potable y de la alimentación. Todo esto parecía un sueño imposible de cien mil millones de dólares. Sin embargo, ése es el costo de apenas cien bombarderos estratégicos B-1B, y de menos de siete mil cohetes Crucero, en cuya producción ha de invertir el gobierno de los Estados Unidos veintiún mil doscientos millones de dólares.

En la salud, por ejemplo: el año pasado había en el mundo, según cálculos de la Fao, unos quinientos setenta y cinco millones de personas con hambre. Su promedio calórico indispensable habría costado menos que ciento cuarenta y nueve cohetes MX, de los doscientos veintitrés que serán emplazados en Europa occidental. Con veintisiete de ellos podrían comprarse los equipos agrícolas necesarios para que los países pobres adquieran la suficiencia alimentaria en los próximos cuatro años. Ese programa, además, no alcanzaría a costar ni la novena parte del presupuesto militar soviético de 1982.

En la educación, por ejemplo: con sólo dos submarinos atómicos Tridente, de los veinticinco que planea fabricar el gobierno actual de los Estados Unidos, o con una cantidad similar de los submarinos Tifón que está construyendo la Unión Soviética, podría intentarse por fin la fantasía de la alfabetización mundial. Por otra parte, la construcción de las escuelas y la calificación de los maestros que harán falta al Tercer Mundo para atender las demandas adicionales de la educación en los diez años por venir, podrían pagarse con el costo de doscientos cuarenta y cinco cohetes Tridente II, y aún quedarían sobrando cuatrocientos diecinueve cohetes para el mismo incremento de la educación en los quince años siguientes.

Puede decirse, por último, que la cancelación de la deuda externa de todo el Tercer Mundo, y su recuperación económica durante diez años, costaría poco más de la sexta parte de los gastos militares del mundo en ese mismo tiempo. Con todo, frente a este despilfarro económico descomunal, es todavía más inquietante y doloroso el despilfarro humano: la industria de la guerra mantiene en cautiverio al más grande contingente de sabios jamás reunido para empresa alguna en la historia de la humanidad. Gente nuestra, cuyo sitio natural no es allá sino aquí, en esta mesa, y cuya liberación es indispensable para que nos ayuden a crear, en el ámbito de la educación y la justicia, lo único que puede salvarnos de la barbarie: una cultura de la paz.

A pesar de estas certidumbres dramáticas, la carrera de las armas no se concede un instante de tregua. Ahora, mientras almorzamos, se construyó una nueva ojiva nuclear. Mañana cuando despertemos, habrá nueve más en los guadarneses de muerte del hemisferio de los ricos. Con lo que costará una de ellas alcanzaría —aunque sólo fuera por un domingo de otoño— para perfumar de sándalo las cataratas del Niágara.

Un gran novelista de nuestro tiempo se preguntó alguna vez si la Tierra no será el infierno de otros planetas. Tal vez sea mucho menos: una aldea sin memoria, dejada de la mano de sus dioses en el último suburbio de la gran patria universal. Pero la sospecha creciente de que es el único sitio del sistema solar donde se ha dado la prodigiosa aventura de la vida, nos arrastra sin piedad a una conclusión descorazonada: la carrera de las armas va en sentido contrario de la inteligencia.

Y no sólo de la inteligencia humana, sino de la inteligencia misma de la naturaleza, cuya finalidad escapa inclusive a la clarividencia de la poesía. Desde la aparición de la vida visible en la Tierra debieron transcurrir trescientos ochenta millones de años para que una mariposa aprendiera a volar, otros ciento ochenta millones de años para fabricar una rosa sin otro compromiso que el de ser hermosa, y cuatro eras geológicas para que los seres humanos a diferencia del bisabuelo Pitecántropo fueran capaces de cantar mejor que los pájaros y de morirse de amor. No es nada honroso para el talento humano, en la edad de oro de la ciencia, haber concebido el modo de que un proceso multimilenario tan dispendioso y colosal, pueda regresar a la nada de donde vino por el arte simple de oprimir un botón.

Para tratar de impedir que eso ocurra estamos aquí, sumando nuestras voces a las innumerables que claman por un mundo sin armas y una paz con justicia. Pero aún si ocurre —y más aún si ocurre—, no será del todo inútil que estemos aquí. Dentro de millones de milenios de años después de la explosión, una salamandra triunfal que habrá vuelto a recorrer la escala completa de las especies, será quizás coronada como la mujer más hermosa de la nueva creación. De nosotros depende, hombres y mujeres de ciencia, hombres y mujeres de las artes y las letras, hombres y mujeres de la inteligencia y la paz, de todos nosotros depende que los invitados a esa coronación quimérica no vayan a su fiesta con nuestros mismos terrores de hoy. Con toda modestia, pero también con toda la determinación del espíritu, propongo que hagamos ahora y aquí el compromiso de concebir y fabricar un arca de la memoria, capaz de sobrevivir al diluvio atómico. Una botella de náufragos siderales arrojada a los océanos del tiempo, para que la nueva humanidad de entonces sepa por nosotros lo que no han de contarle las cucarachas: que aquí existió la vida, que en ella prevaleció el sufrimiento y predominó la injusticia, pero que también conocimos el amor y hasta fuimos capaces de imaginarnos la felicidad. Y que sepa y haga saber para todos los tiempos quiénes fueron los culpables de nuestro desastre, y cuán sordos se hicieron a nuestros clamores de paz para que ésta fuera la mejor de las vidas posibles y con qué inventos tan bárbaros y por qué intereses tan mezquinos la borraron del universo.

Gabriel García Márquez

2. Guía de lectura

Con el fin de que usted pueda comprender y conocer mejor la sensación que le ha dejado la lectura de este conmovedor texto de García Márquez, aparecen a continuación algunas, como decir, preguntas.

a. Escoja una palabra, una sola, para descubrir lo que sintió durante la lectura. (Me siento influenciado por lo de *conmovedor*).

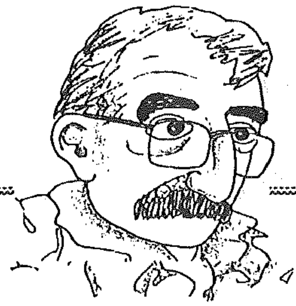
b. Busque tres frases en el texto, aquellas que, según su parecer mejor contribuyeron a sentir lo que indicó en **a**, y escríbalas.

c. Alguien, luego de leer el texto de la conferencia, dijo: jamás había visto una utilización más poética pero, al mismo tiempo, más eficaz de las cifras. Son cifras vivas, con un gran significado, a diferencia de los fríos números estadísticos. Si usted comparte la opinión de esta persona ¿podría señalar algunos ejemplos (subrayando en el texto, si le parece) que ilustren esta apreciación?

d. ¿Después de haber leído el texto de la conferencia, usted quiere más el mundo en el cual le correspondió vivir, o lo quiere menos?

3. Problemas

a. Si la tierra* tiene *cinco mil millones de habitantes*, ¿cuál es el poder explosivo de una ojiva nuclear *♣en toneladas de dinamita♣* ?



Gabriel García Márquez. Nacido en Aracataca, Colombia en 1928. Inicia el bachillerato en Barranquilla y lo termina en el Liceo Nacional de Zipaquirá con una beca ganada por concurso. Publicó en 1958 El coronel no tiene quien le escriba, en 1955 La hojarasca y en 1967 Cien años de soledad, obra acogida universalmente, en que el mito no es una referencia virtuosista sino que constituye una unidad con el trabajo literario consciente de sí mismo. En 1975 publica la desconcertante obra El otoño del patriarca un intento de experiencia literaria. En 1981 publica Crónica de una muerte anunciada, rompiendo su promesa de no publicar más obras hasta que desapareciera la dictadura de Chile. En 1983 publica El amor en los tiempos del cólera. En 1982 es galardonado con el Premio Nobel. La última novela qué publico fue El general en su laberinto, un obra sobre la vida del libertador Simón Bolivar.

* Por favor, no le cuente *nunca* a *nadie* que utilizamos este texto para hacer unos viles cálculos aritméticos.

b. ¿Cuántas ojivas nucleares se necesitan para destruir la tierra?

c. ¿Cuánto vale un bombardero **B-1B**?

d. ¿Cuál es el mínimo del precio de un *cobete crucero*?

e. Si un cohete **MX** vale 20 millones de dólares, ¿cuál fue el presupuesto militar soviético en 1982?

f. ¿Cuál es la *velocidad* con que se construyen actualmente las ojivas nucleares?

4. Contemos con nuestros ancestros

Desde los comienzos de la humanidad el hombre conoce los números, o por lo menos tiene un sentido de ellos; es decir, puede diferenciar entre uno y muchos objetos. Fue ese su primer paso hacia el proceso de contar, que es prácticamente el inicio de las matemáticas.

1. Contar con los dedos

Probablemente la primera fase de este proceso fue establecer una relación o una correspondencia *uno a uno* entre grupos de objetos. Así, las tribus, para contar sus rebaños de ovejas, se ayudaban de piedras, de tal forma que al pasar una oveja pasaban también una piedra. El método más utilizado para contar y el más primitivo, fue el de contar por medio de los dedos; pero también se utilizaron piedras, guijarros, marcas o muescas en los árboles, semillas, nudos en cuerdas e incluso las articulaciones de los dedos. Aunque algunos hombres primitivos sólo contaban hasta el dos o hasta el tres, denominando a todo lo que excediera con la palabra *muchos*, en otras tribus se llegó a contar hasta *mano* (cinco) y hasta *hombre completo* (veinte). Así mismo, los indios llegaron a contar varios "diez" por medio de los dedos.

El hombre primitivo tenía la necesidad de contar los miembros de su tribu, sus enemigos, sus ovejas y los artículos de trueque.

Algo realmente sorprendente, es que la mayoría de las civilizaciones empezaron contando con los dedos, a pesar de desarrollarse en medios geográficos diferentes y por lo general, apartados unos de otros; así que contar con los dedos es algo natural y espontáneo en el hombre, de ahí que los niños en el momento de contar recurran casi que instintivamente a sus dedos. Es más, estudios han demostrado que la mayoría de las personas empiezan contando por el meñique de la mano izquierda, aunque también existen otras variaciones.

De cualquier manera, los diferentes métodos utilizados para contar surgieron como una ayuda externa para comprender y expresar una idea que el cerebro no podía alcanzar por sí solo.

2. Contar en el niño

La facultad de contar implica un fenómeno más complicado que tener un sentido del número. Esta facultad mental la desarrolló el hombre primitivo muy similarmente a como la desarrolla hoy en día un niño. Tanto el hombre primitivo como el niño empiezan su proceso de contar con una fase senso-motora o material sobre los objetos, la cual se presenta en los niños entre los 10 meses y los 2 años; se presenta luego la fase preoperatoria, entre los 2 y los 7 años. Esta fase consiste en la utilización del lenguaje, de símbolos y de imágenes mentales que permiten interiorizar las acciones materiales; es en esta fase donde el hombre primitivo crea *conjuntos modelos*: ayudándose de las cosas que lo rodean, cada uno de estos conjuntos modelos representa un número. Así, toma como conjunto modelo para el número 2, las alas de un pájaro; para el 3, las hojas del trébol; para el 4, las extremidades de los animales, etcétera. El uso continuo de estos conjuntos modelos hace que el nombre del número sirva también de modelo. Así los sonidos reemplazan a las imágenes para las cuales fueron creados, pasando de la forma concreta de los modelos a los modelos abstractos (números). Y por último se da la fase operatoria, entre los 8 y los 12 años; es una fase en que se actúa sobre los números, ubicándolos en una serie creciente o ascendente, de tal forma que sea posible establecer una relación biunívoca uno a uno entre los números y los objetos.

Contar significa asignar un número de la serie, siguiendo el orden de la misma, a cada uno de los objetos, hasta que estos se acaben.

Contar significa asignar un número de la serie, siguiendo el orden de la misma, a cada uno de los objetos, hasta que estos se acaben.

A medida que crecen sus necesidades se va mejorando y ampliando su sistema de numeración. Cuando el hombre necesitó comunicar a otros la cantidad que tenía y anotarla se originaron los símbolos numéricos, que jugaron un gran papel en el desarrollo de la aritmética.

3. La simbología

Cada civilización escogió un sistema de base diferente, de acuerdo a sus creencias y facilidades, para expresar sus números por medio de símbolos; creaban símbolos para los números desde el *uno* hasta el *numero base* y para expresar números mayores lo hacían por medio de combinaciones de los símbolos que ya tenían. Por ejemplo, si escogía como número base el **tres**, daban símbolos para *uno, dos y tres* y después contaban:

1,	2,	3,	3 y 1,	3 y 2,	etcétera

Así mismo, otras tribus africanas contaban:

a,	oa,	ua,	oa-oa,	oa-oa-a,	etcétera

para 1, 2, 3, 4, 5 . . .

Pero debido al uso de los dedos para contar, el sistema de base **cinco** fue muy común, aunque para expresar cinco decían *"mano"*, es decir, contaban:

uno,	dos,	tres,	cuatro,	mano,	mano y uno,

y así sucesivamente.

Otras civilizaciones escogieron el **12** como *base*, debido tal vez al número de lunaciones en un año; rasgos de este sistema se observan en las doce pulgadas que tiene un pie, en los doce peniques de un *shelling*, en las doce horas del reloj y en comprar una docena de...

4. La simbología de las civilizaciones

Los celtas desarrollaron un sistema de numeración de base **20** que transmitieron a Francia hacia el siglo X A. C. De ahí que en Francia se dice *cuatro veintes* en vez de **ochenta**.

Los babilonios usaron un **sistema sexagesimal** o de base **60**, cuyos rastros aún conservamos para medir el tiempo y los ángulos.

El sistema de numeración más antiguo que se desarrolló fue el llamado **sistema de agrupación simple** que consistía en escoger un *número base* **b** y dar símbolos para

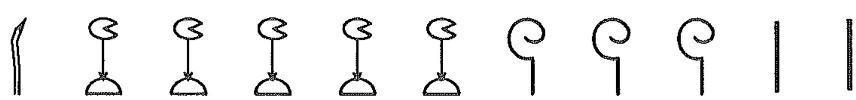
$$\boxed{1, \quad b, \quad b^2, \quad b^3, \quad \text{etcétera}}$$

de tal forma que expresaban el número que quisieran, por medio de repetir los símbolos tantas veces como fuera necesario.

Los egipcios

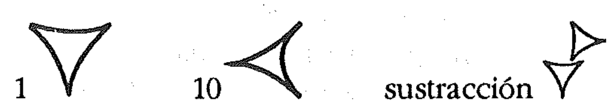
Un ejemplo de este sistema es el utilizado en los jeroglíficos egipcios hacia el año 3400 A. C., cuyos símbolos de base 10 eran:

Así, para escribir 15302 escribían:



Los babilonios

Los babilonios, quienes tenían un sistema de numeración de base **60**, expresaban los números del 1 al 60 por medio de sólo tres símbolos:



Aunque para contar del **1** al **60** no era importante el orden de los símbolos, los babilonios introdujeron el sistema posicional para aquellos números mayores de 60. Este sistema posicional también fue descubierto por los hindúes y se explica con mayor claridad más adelante.

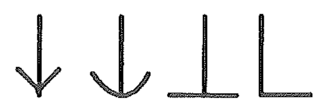
Los griegos

Los griegos antiguos o clásicos del siglo III A. C. también utilizaron el sistema de agrupación simple de base **10**, con la única variación de que también tenían un símbolo especial para el **5**. Para escribir 3125, escribían:

ΧΧΧΗΔΔΓ

Los romanos

Los romanos también utilizaron este sistema con símbolos especiales para **5**, **50** y **500**. Se cree que los símbolos **I**, **II**, **III** y **IIII** se derivan de los dedos levantados de las manos al querer expresar esas cantidades; así mismo, el **V** representa la forma de la mano abierta y el **X** es la unión de dos **V**. El símbolo para el **50** fue evolucionando hasta llegar a la "L" que se utiliza hoy en día.



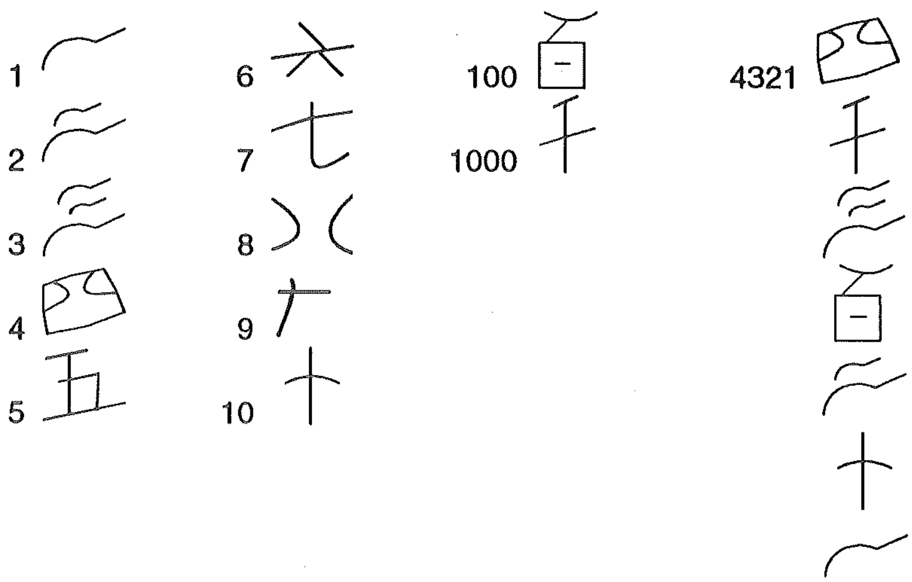
Y el símbolo para el **500** con el tiempo se convirtió en **D**. Y el símbolo **C** para **100** y **M** para **1000** se debe a que son las iniciales de los nombres latinos para estos. Con el transcurso del tiempo, los romanos adaptaron un principio de substracción, consistente en colocar el símbolo de una unidad pequeña antes del símbolo de una unidad grande, para expresar sus diferencias. Así, pasaron de escribir, por ejemplo el número

1459: MCCCCLVIIII a escribirlo: MCDLIX

Luego, se dió una evolución en cuanto al sistema de numeración; se pasó de un sistema de agrupación simple a un **sistema multiplicativo de agrupación**, para el cual después de escoger una base **b**, se creaban símbolos para los números del 1 al b y símbolos para b^2, b^3, b^4, etcétera. Por medio de la combinación de estos dos grupos de símbolos se podía escribir cualquier número, indicando cuantas unidades de 10, 100, 1.000, 10.000, ... había.

El sistema chino–japonés

El sistema numeral chino—japonés, es un ejemplo de lo anterior, siendo sus símbolos



Los jonios

Los jonios, los hebreos, los sirios y los árabes primitivos desarrollaron un sistema alfabético de numeración que consistía en simbolizar los números con las letras de su alfabeto.

Los hindúes

Los hindúes hacia el año 250 A. C. tenían un sistema de numeración muy parecido a los anteriores, pero hacia el 800 D. C. desarrollaron un **sistema posicional** de números, que incluía el cero y que tenía base **10**; en este sistema se le dieron símbolos a los números desde el **0** al **9**, obteniendo así los símbolos básicos, que conocemos como dígitos en nuestro sistema de numeración.

Estos dígitos, para cambiar de una posición a otra, multiplicaban su valor por **10**, de tal forma que en cada posición representaban un múltiplo de alguna potencia de **10**.

Es decir, la primera casilla representaba un múltiplo de $\mathbf{10^0=1}$; la segunda un múltiplo de $\mathbf{10^1}$; la tercera un múltiplo de $\mathbf{10^2}$ y así sucesivamente.

10^4	10^3	10^2	10^1	10^0

Por ejemplo:

$$
\begin{array}{rcl}
5 & = & 5 \times 1 \\
5\ 0 & = & 5 \times 10 \\
5\ 0\ 0 & = & 5 \times 10 \times 10 \\
5\ 0\ 0\ 0 & = & 5 \times 10 \times 10 \times 10
\end{array}
$$

Este sistema posicional permitió expresar cualquier número como la suma de múltiplos de potencias de **10**, para lo cual fue necesario un símbolo **0**, cuya función fue indicar que en determinada casilla no había múltiplos de alguna potencia de **10**. Es decir, fue necesario un símbolo que permitiera diferenciar, por ejemplo, **53** de **503**. En resumen, se pudo expresar:

$$2506 = (2x10^3) + (5x10^2) + (0x10^1) + (6x10^0)$$

Este sistema de numeración fue introducido en España en el 711 D. C. por los árabes, cuando invadieron la península Ibérica y de ahí fue transmitido y modificado hasta llegar a nuestro actual sistema de numeración.

El sistema binario

El sistema binario o de *base 2*, fue empleado por la civilización china mucho tiempo antes de la era cristiana (hacia el 3000 A. C.).

En este sistema sólo se utilizaron dos símbolos: el *cero* y el *uno*, permitiendo así expresar cualquier número, ya que este sistema también fue posicional. Es decir, para pasar de una posición a otra se multiplicaba su valor por **2**, así:

$$2^3 \qquad 2^2 \qquad 2^1 \qquad 2^0$$

Por ejemplo:

	2^3	2^2	2^1	2^0
ocho:	1	0	0	0
quince:	1	1	1	1
	(8 +	4 +	2 +	1)

Así como en el sistema hindo—arábigo, en el sistema decimal se pudo expresar cualquier número como la suma de las potencias de **2**. Por ejemplo:

$$53 = 110101 = 1x2^5 + 1x2^4 + 0x2^3 + 1x2^2 + 0x2^1 + 1x2^0$$
$$53 = 110101 = 32 + 16 + 0 + 4 + 0 + 1$$

5. Bibliografía

Eves, Howard. *An introduction to the history of mathematics.*

Dantzig, Jean. *Seis estudios de sicología.*

Newman, James R. *El mundo de las matemáticas. Vol. IV.*

Piaget, Jean. *La enseñanza de las matemáticas.*

6. Guía de lectura

Las siguientes preguntas se refieren a la lectura anterior.

a. ¿Qué significa contar? Póngase a contar y trate de identificar el tipo de proceso mental que usted está llevando a cabo.

b. ¿Qué es una correspondencia *uno a uno*?

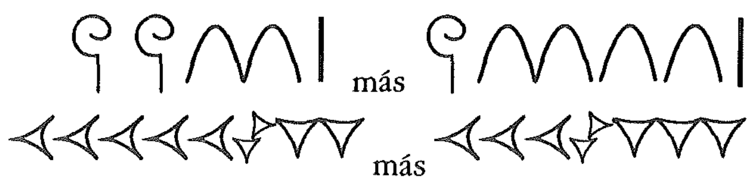
c. ¿Qué es una correspondencia *biunívoca*?

d. ¿Qué es la *base* de un sistema de numeración? Explique el concepto de *sistema de numeración simple.*

e. Exprese los números uno, dos, siete, quince y noventa y cinco en cada uno de los siguientes sistemas de numeración:

- Decimal
- Binario
- Egipcio
- Babilonio
- Chino—Japonés

f. ¿Sería usted capaz de hacer las siguientes sumas sin tener que pasar al sistema decimal? Explique el procedimiento que utilizó. (¿Está seguro que no tradujo al sistema decimal?)



MCDLIX más CCCXCIII

g. ¿Qué opina de los sistemas posicionales de agrupación simple con respecto a la suma? Justifique su respuesta.

h. Invéntese un método para sumar en binario. Explique bien las reglas de su método y haga las dos sumas siguientes con ese método:

- treinta y dos más diecisiete
- veintiocho más cuarenta y cuatro

i. ¿Cuántos símbolos se requieren en un sistema de agrupación simple para representar cualquier número natural (por grande que sea)? ¿Y en un sistema posicional de base diez?

j. Ahora que ha trabajado con otros sistemas de numeración, ¿qué opina de nuestro sistema decimal? Justifique su respuesta.

7. ¿Está fuera de base?

a. Exprese el número 42 en base cuatro.

b. Exprese en base diez el siguiente número, escrito en base tres, 120221.

c. Sume en base dos: 0110 +11011.

d. Invente símbolos para representar números en base cinco, utilizando el sistema de agrupación simple. Exprese en este sistema, los números que en base diez son 38, 45 y 134.

e. Exprese en base dos, el número que en base diez se representa por 67.

f. Exprese en base diez, el número que en base dos se representa por 10011101.

8. Otro de base 4

Se tiene un sistema posicional de base cuatro, que consta de los símbolos 0, 1, 2, 3. En este sistema cualquier número se puede expresar como la suma de potencias de cuatro, por ejemplo:

$$302 \quad = \quad 3 \times 4^2 \quad + \quad 0 \times 4^1 \quad + \quad 2 \times 4^0$$

a. Los siguientes números están en base cuatro. Colóquelos en base diez: $31_{(4)}$, $2003_{(4)}$.

b. Los siguientes números están en base diez. Expréselos en base cuatro: $4_{(10)}$, $17_{(10)}$, $27_{(10)}$.

c. Sume en base cuatro, *sin pasar a base diez*: 212 más 32

9. Otro acertijo

"¡Ah! ¡Ser tijo!"
Toro Sentado

Para resolver este acertijo responda estas preguntas:

a. En un sistema posicional de base diez, ¿cuántos dígitos se necesitan? ¿Y en base dos?

b. Convierta el número 101, que está en base dos, a base diez.

c. Ahora sí el acertijo: un número de dos cifras, en base diez, se utiliza para formar un número en base dos. Y esto se logra escribiendo el número dos veces para formar uno de cuatro cifras. Si el número visto en base dos es el mismo en base diez, ¿cuál es el número?

5. La magia de los números

Por lo menos una vez en el día, cada uno de nosotros pensamos, vemos o realizamos operaciones con números; tal vez por esto, no nos preocupamos por saber qué entendemos por número, aunque, si nos preguntan, lo más seguro es que contestemos que es un concepto abstracto. Pero para llegar a considerar al número como un concepto abstracto, el hombre dio muchos pasos; primero, se preguntó por la naturaleza de los números y, después, por medio de procesos de abstracción, fue aislando conceptos como cinco, diez, etc. de un grupo de objetos materiales, hasta el punto en que hoy en día logra operar con cantidades abstractas sin preocuparse de relacionarlas en cada caso a objetos concretos.

Los números los hizo Dios;
todo lo demás
es obra del hombre.
Kronecker

1. Números y magia

Cuando el hombre no se explicaba algún fenómeno o la existencia de algo, tendía a buscarle alguna explicación en cosas del *más allá* como en la magia y en la religión; por eso su concepción del mundo y de la naturaleza se reflejó en la idea que él desarrolló de la naturaleza de los números, haciendo que se les atribuyera inicialmente una naturaleza *mágica, mística* y casi *misteriosa*, como a cualquier fenómeno natural. Así, los números desempeñaron un papel importante en la magia, la brujería, la astrología y en la predicción de horóscopos. Ejemplos de esto se aprecian entre los *pitagóricos*, quienes creían que el número era la esencia de todas las cosas; que era el principio de un *orden del mundo*, y que era como la materia o la base del mundo real. Por ejemplo consideraban el **10** como número perfecto o ideal, por ser la suma de los cuatro primeros números (**1 + 2 + 3 + 4 = 10**) y por esto creían que los astros del cielo debían ser **10** (como no observaban sino nueve, se explicaban la existencia de una *contratierra* invisible). Así mismo los *platónicos* consideraron los números como objetos eternos, definidos e independientes de la razón; como entes distintos del mundo de la percepción sensible y que sólo podían ser captados por medio de la razón. Años después, los filósofos pertenecientes a la corriente *neoplatónica* concibieron el universo como una armonía mística de los números, lo cual explica

por qué, tanto pitagóricos como neoplatónicos, siempre estaban en busca de relaciones matemáticas en la naturaleza.

Pero no sólo fue en esa época cuando se concibió el número como algo suprasensible y trascendente. En el siglo XVIII, Kant concibió los números como verdades *a priori* que no dependen de la experiencia; que son verdades aceptadas y que tienen validez universal y necesaria. Aún en el siglo XIX, Kronecker expresa su concepción del número así: Los números los hizo Dios; todo lo demás es obra del hombre, considerando los números como algo simple y transparente, imposible de simplificar.

2. Evolución del concepto de número

Después de haber visto algunos ejemplos de las diferentes naturalezas atribuídas a los números, es necesario ver cómo el concepto de número fue evolucionando gracias a los procesos de abstracción que el hombre llegó a desarrollar. Los conceptos abstractos están en correspondencia con las relaciones cuantitativas de los conjuntos o colecciones de objetos; surgen por la abstracción como resultado del análisis y generalización de una gran cantidad de experiencias prácticas. En otras palabras, después de una serie de sucesivas abstracciones y generalizaciones, el hombre llega a poder concebir el número como un *concepto abstracto*.

Un sentido rudimentario del número, consistente en poder diferenciar el tamaño de varios conjuntos de objetos, fue el núcleo del que surgió nuestra concepción de número. Cuando el hombre empieza a contar, concibe el número como una propiedad de una colección de objetos, estrechamente relacionada con esto. Esta propiedad se manifiesta, por ejemplo, en las tribus de la Columbia Británica, quienes tenían siete conjuntos diferentes de términos numéricos que se utilizaban de acuerdo a los objetos que se fueran a contar: unos, para contar objetos chatos y animales; otros, para objetos redondos y el tiempo; otros, para personas; otros, para objetos grandes y árboles; otros, para canoas; otros, para medidas; y otros para todos los objetos distintos a los anteriores. Por eso, cuando el hombre cuenta cualquier conjunto de objetos con los *mismos* términos numéricos, es cuando pasa a concebir el número como una propiedad de *todas* las colecciones de objetos, cuyos elementos se pueden poner en correspondencia *biunívoca* unos con otros y que es diferente en aquellas colecciones donde esta correspondencia es imposible.

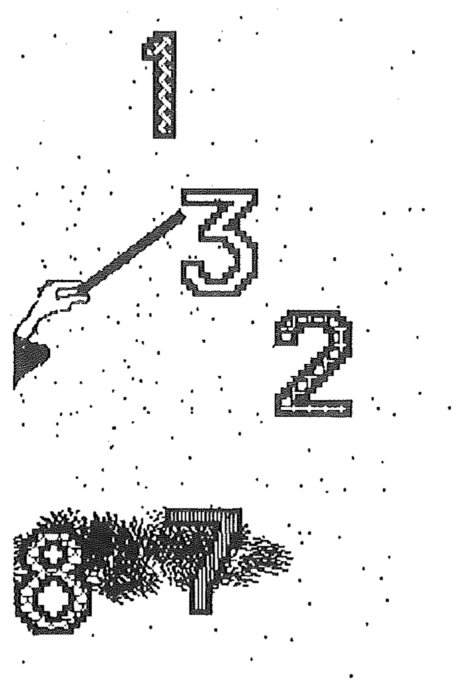
Puesto que los símbolos numéricos aparecen como una materialización sencilla del concepto del número abstracto, la simbolización permitió pensar en números más grandes que los imaginables hasta el momento. Arquímedes, por ejemplo, pensó en el número de granos de arena existentes en el mundo y lo simbolizó como 10^{63} y siglos más tarde un niño denominó *Gugol* al número 10^{100} (un uno seguido de 100 ceros).

Simultáneamente a la simbolización, aparecieron las operaciones entre los números que lograron que el hombre concibiera el número en "sí mismo", en tanto sus relaciones con otros números; por ejemplo se concebía 6 en tanto que era

$$(2 \times 3), \quad (5 + 1), \quad (4 + 2), \quad \text{etc.}$$

3. Conclusión

En resumen, el concepto clásico o antiguo de número se limita a unidades visibles, limi- tables y tangibles; es por esto, que los pitagóricos, a pesar de darse cuenta de que había números como *raíz de dos,* lo mantuvieron en secreto; no podían aceptar la existencia de números que no veían, ni tocaban. Mientras que la concepción occidental considera al número como la función misma, la función como unidad, como elemento, como la relación variable e irreducible a límites ópticos. Es decir, la cultura occidental ya no sólo considera el número como un concepto abstracto, sino que lo considera en general; con-



sidera cualquier variación posible del número y por lo tanto establece leyes muy generales sobre los números. Por ejemplo, si considerando los números como conceptos abstractos se expresa:

$$\boxed{1 + 2 = 3}$$

la cultura occidental llega a generalizar tanto esa expresión que dice:

Cualquier número impar sumado a cualquier número par es siempre un número impar.

Por último se concibe el número como un *objeto lógico*. Frege afirma: "Debemos concebir los números como clases: el número 2 designa la clase de todos los pares, el 3 la clase de todas las triadas, y así sucesivamente."; concepción ésta que nos permite llegar a la definición de número.

En general, lo que ha permitido el desarrollo y la evolución de las matemáticas, ha sido la tendencia a generalizar y a realizar abstracciones, cada vez a un nivel superior.

4. Bibliografía

Aleksandrov, A. D. *La matemática: su contenido, métodos y significados.*

Dampier, W. C. *Historia de la ciencia.*

Dantzig, Tobías. *Número, el lenguaje de la ciencia.*

Kline, Morris. *Mathematics in Western Culture.*

Korner, Stephan. *Introducción a la filosofía de la matemática.*

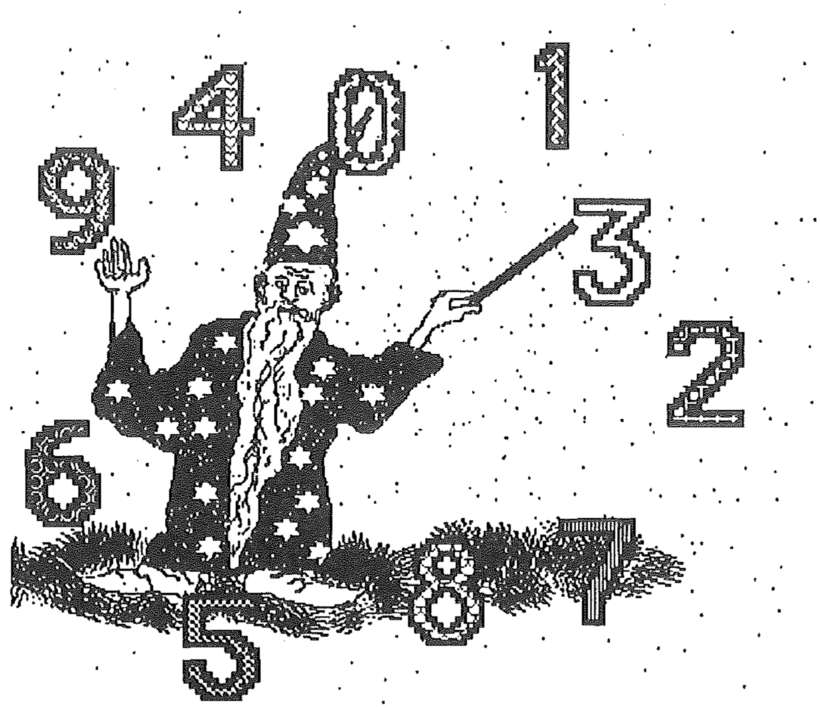
Newman, James. *The World of Mathematics. Vol. 1,4.*

5. Guía de lectura

a. Dé un ejemplo en el que se atribuya a un número (o a los números en general) un carácter místico, mágico o sobrenatural. *Trate de ser original*

b. Dé ejemplos de experiencias prácticas que usted crea que pudieron contribuir a que el hombre abstrajera la noción de número.

c. Mencione cuáles pudieron ser los principales pasos que debió recorrer el hombre en el proceso de *generalización* y *abstracción* de la noción de número, a partir de la *experiencia práctica*.



6. La definición de número

Bertrand Russell (Gales 1872 – Gales 1970), filósofo, matemático y sociólogo inglés, uno de los fundadores de la Lógica Simbólica. Su principal producción fue la relacionada con la lógica y la matemática. Debido a que en su época se presentaron muchas dudas en lo concerniente a conceptos como "conjunto", "infinito", "comunidad", etc, una de sus principales metas fue averiguar: "Qué tanto podemos decir que sabemos, y con qué grado de certeza o de duda", queriendo con lo cual lograr, por medio de un estudio sistemático de los fundamentos matemáticos y de la lógica, dar al razonamiento matemático una base "lógica" que pudiera probar "libre de contradicción" y que incluyera todos los conceptos y definiciones fundamentales de la matemática. Así, logró en su obra Principia Matemática, *realizada entre 1910 y 1913, llegar a la definición de número.*

Por Bertrand Russell

1. Lectura

La pregunta ¿qué es un número? ha sido a menudo formulada pero sólo ha recibido correcta respuesta en nuestro tiempo. La respuesta fue dada por Frege en su *Grundlagen der Arithmetik.* Aunque el libro es bastante corto, no difícil y de la mayor importancia, no atrajo casi la atención y la definición de número en él contenida continuó prácticamente desconocida hasta que el presente autor la redescubrió en 1901.

Al buscar una definición de número, lo primero que hay que aclarar es lo que podemos denominar la gramática de nuestra indagación. Muchos filósofos, al pretender definir el número, están de hecho tratando de definir la pluralidad, lo que es algo bien distinto. Número es lo que es característico de los números, como hombre es lo característico de los hombres. Una pluralidad no es un ejemplo de número sino de algún número particular. Un trío de hombres, pongamos por caso, es un ejemplo del número 3 y el número 3 es un ejemplo de número, pero el trío no es un ejemplo de número. Esta puede parecer una observación elemental que apenas vale la pena de mencionar; y, sin embargo, ha probado ser demasiado sutil para los filósofos, con pocas excepciones.

Un número particular no es idéntico a ningún conjunto que tenga dicho número de términos: el número tres no es idéntico al trío consistente en

Brown, Jones y Robinson. El número tres es algo que todos los tríos tienen en común y que los distingue de otros conjuntos, a saber, los que tienen este número.

En lugar de hablar de *conjuntos*, hablaremos por regla general de *clases* o, a veces, de *series*. Otras palabras empleadas en matemáticas para designar lo mismo son "agregados" o "multiplicidades". Más tarde tendremos mucho que decir acerca de las clases. Por el momento trataremos de decir tan poco como sea posible. Pero hay que hacer inmediatamente algunas observaciones.

Un conjunto o clase puede ser definido de dos modos que, a primera vista, parecen totalmente distintos. Podemos enumerar sus miembros, como al decir: *El conjunto al que me refiero es Brown, Jones y Robinson*. O podemos mencionar una propiedad característica, como cuando hablamos de *la humanidad* o *los habitantes de Londres*. La definición que enumera se llama definición por **extensión** y la que menciona una propiedad definidora se llama definición por **intensión**. De ambas, la definición por intensión es la más fundamental. Esto puede demostrarse mediante dos consideraciones:

- a) que una definición extensiva puede siempre ser reducida a una intensiva;
- b) que a menudo la intensiva no puede ser reducida ni tan sólo teóricamente a la extensiva.

Estos dos puntos exigen alguna aclaración:

a. Brown, Jones y Robinson poseen una propiedad que no posee nadie ni nada más en todo el universo, a saber, la propiedad de ser o Brown o Jones o Robinson. Esta propiedad puede ser empleada para dar una definición por intensión de la clase consistente en Brown, Jones y Robinson. Consideremos una fórmula como x es Brown o x es Jones o x es Robinson. Esta fórmula será tan sólo verdadera para tres x, a saber, Brown, Jones y Robinson. A este respecto se parece a una ecuación cúbica con sus tres raíces. Puede considerarse que asigna una propiedad común a los miembros de la clase consistente en estos tres hombres, y peculiar de ellos. Un tratamiento similar puede evidentemente darse a cualquier otra clase dada en extensión.

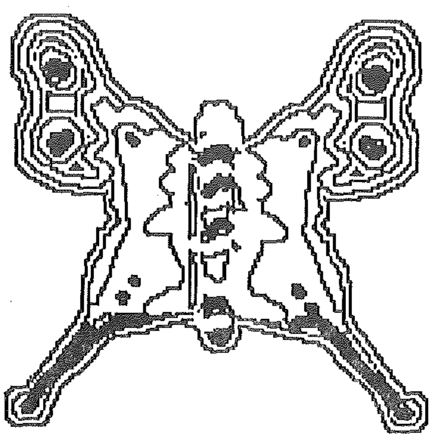
b. Es evidente que, en la práctica, podemos a menudo conocer bastante acerca de una clase sin ser capaces de enumerar sus miembros. Nadie podría ahora enumerar todos los hombres, ni tan sólo los habitantes de Londres, y sin embargo es mucho lo que se sabe de estas dos clases. Este hecho basta para mostrar que no es *necesaria* la definición por extensión para conocer una clase. Pero cuando pasamos a considerar clases infinitas, nos encontramos con que la enumeración no es ni teóricamente posible para seres que viven sólo un tiempo finito. No podemos enumerar todos los números naturales: son 0, 1, 2, 3, etcétera. En algún momento hemos de contentarnos con el "etcétera". No podemos enumerar todas las fracciones o todos los números irracionales, o todos los miembros de cualquier otro conjunto infinito. Así, pues, nuestro conocimiento en relación a tales conjuntos puede tan sólo proceder de una definición por intensión.

Cuando estamos buscando la definición de número, estas observaciones son relevantes en tres aspectos distintos. En primer lugar, porque los mismos números forman un conjunto infinito y no pueden, por tanto, ser definidos por enumeración. En segundo lugar, porque cabe presumir que los conjuntos de un número dado de términos forman ellos mismos un conjunto infinito; puede suponerse, por ejemplo, que hay un conjunto infinito de trios en el mundo, pues si no fuera este el caso, el número total de objetos en el mundo sería finito, lo que, aunque posible, parece improbable. En tercer lugar, porque queremos definir el número de modo que sean posibles infinitos números; tenemos así que poder hablar del número de términos en un conjunto infinito y tal conjunto tiene que ser definido por intensión, es decir, por una propiedad común a todos sus miembros y particular de ellos.

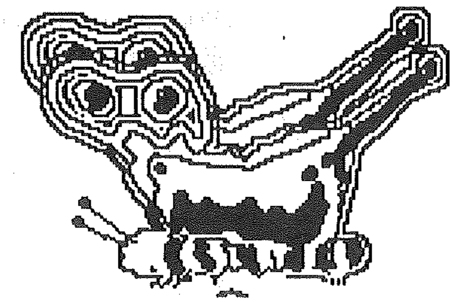
Para muchos propósitos, una clase y una característica definidora de la misma son prácticamente intercambiables. La diferencia vital entre ambas consiste en que hay sólo una clase que tenga una serie dada de miembros, mientras que hay siempre muchas características distintas por las que una clase dada puede ser definida. Puede definirse al hombre como bípedo implume, como animal racional o (más correctamente) por los rasgos con los que Swift describía a los Yahoos. Vemos así que la característica definidora que hace útiles a las clases no es nunca única; de otro modo podríamos contentarnos con las propiedades comunes y particulares de sus miembros. Cualquiera de estas propiedades puede reemplazar la clase siempre que la singularidad no sea importante.

Volviendo ahora a la definición de número, es claro que el número es una manera de agrupar ciertos conjuntos, a saber, aquellos que tienen un número dado de términos. Podemos imaginar todas las parejas en un fajo, todos los tríos en otro y así sucesivamente. Obtenemos de este modo varios fajos de conjuntos, donde cada fajo consiste en todos los conjuntos que tienen un número determinado de términos. Cada fajo es una clase cuyos miembros son conjuntos, esto es, clases; cada uno es pues una clase de clases. El fajo compuesto por todas las parejas, por ejemplo, y el fajo entero de parejas es una clase con un número infinito de miembros, cada uno de los cuales es una clase de dos miembros.

¿Cómo hemos de decidir si dos conjuntos han de pertenecer al mismo fajo? La respuesta que se impone es: Cuenta cuántos miembros tiene cada una, y ponlos en el mismo fajo si tienen el mismo número de miembros. Pero esto presupone que hemos definido los números y que sabemos cómo descubrir cuántos miembros tiene un conjunto. Estamos tan habituados a la operación de contar que tal presupuesto podría fácilmente pasar inadvertido. De hecho, sin embargo, el contar, aunque familiar, es lógicamente una operación muy compleja; además, sólo sirve para descubrir cuántos términos tiene un conjunto cuando se trata de un conjunto finito. Nuestra definición de número no debe presuponer que todos los números son finitos; y en todo caso no podemos, sin caer en un círculo vicioso, contar para definir números, pues los números son empleados al contar. Necesitamos, por lo tanto, algún otro método para decidir cuándo dos conjuntos tienen el mismo número de términos.



De hecho, es más simple descubrir si dos conjuntos tienen el mismo número de términos que definir lo que es número. Un ejemplo lo aclarará sin duda. Si en ninguna parte del mundo existiera la poligamia ni la poliandria, es evidente que el número de esposos que vivirían en un momento dado sería el mismo que el número de esposas. No necesitaríamos un censo para convencernos de ello, ni necesitaríamos saber el número real de esposos y esposas. Sabríamos que el número ha de ser igual en ambos conjuntos, puesto que cada esposo tiene una esposa y cada esposa un esposo. La relación de esposo y esposa es lo que se llama uno—uno.



Se dice que una relación es **uno—uno** cuando si x tiene la relación en cuestión con y, ningún otro término x' tiene la misma relación en cuestión con y, y x no tiene la misma relación con ningún término y' otro que y. Cuando sólo se cumple la primera de estas dos condiciones, la relación se llama **uno—varios**; cuando sólo la segunda se cumple se llama **varios—uno.** Hay que señalar que en estas definiciones no se emplea el número 1.

En países cristianos, la relación de esposo a esposa es uno—uno; en países mahometanos es uno—varios; en el Tibet es varios—uno. La relación de padre a hijo es uno—varios; la de hijo a padre es varios—uno, pero la de hijo mayor a padre es uno—uno. Si n es un número cualquiera, la relación de n a $n+1$ es uno—uno; y lo es asimismo la relación de n a $2n$ o a $3n$. Cuando consideramos sólo números positivos la relación de n a n^2 es uno—uno; pero cuando se admiten números negativos es dos—uno, ya que n y $-n$ tienen el mismo cuadrado. Estos ejemplos han de bastar para dejar claras las nociones de relaciones uno—uno, uno—varios y varios—uno. Estas relaciones son de gran importancia y juegan un papel importante en los principios de las matemáticas, no sólo en relación con la definición de números, sino en muchos otros aspectos.

Se dice que dos clases son **similares** cuando existe una relación uno—uno que refiere cada uno de los términos de una clase a un término de la otra, del mismo modo como la relación de matrimonio asigna una esposa a cada esposo. Unas pocas definiciones preliminares han de ayudarnos a establecer esta definición. La clase de aquellos términos que tienen una relación dada con algo o alguien se denomina el *dominio* de la relación. Así, los padres son el dominio de la relación de padre a hijo, los esposos el dominio de la relación de esposo y esposa, las esposas el dominio de la relación de esposa a esposo, y esposos y esposas conjuntamente el dominio de la relación de matrimonio. La relación de esposa a esposo es denominada la *conversa* de la relación de esposo a esposa. De modo similar, *menor* es la conversa de *mayor*, tarde la conversa de *pronto*, y así sucesivamente. En general la conversa de la relación dada es la relación que existe entre y y x cuandoquiera que esta relación dada existe en x e y. El *dominio converso* de una relación es el dominio de su conversa; así la clase de las esposas es el dominio converso de la relación de esposo a esposa.

Podemos ahora establecer nuestra definición de semejanza del modo siguiente:

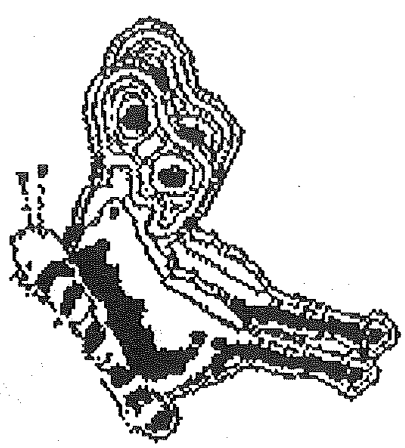
> Se dice que una clase es *similar* a otra cuando existe una relación uno—uno de la que una clase es el dominio mientras la otra es el dominio converso.

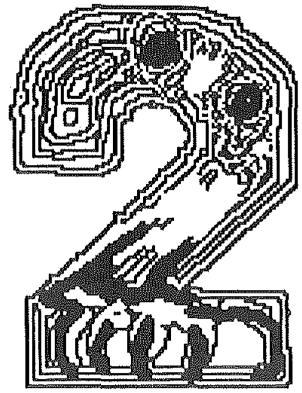
Resulta fácil probar:

- 1) que cada clase es semejante a sí misma
- 2) que si una clase **a** es semejante a una clase **b**, **b** es entonces semejante a **a**
- 3) que si **a** es semejante a **b** y **b** a **c**, **a** es entonces semejante a **c**

Se dice que una relación es **reflexiva** cuando posee la primera de estas propiedades, **simétrica** cuando posee la segunda y **transitiva** si posee la tercera. Es evidente que una relación simétrica y transitiva tiene que ser reflexiva en todo su dominio. Las relaciones que poseen estas propiedades son de tipo importante, y vale la pena señalar que la semejanza es una relación de este tipo.

Es evidente para el sentido común que dos clases finitas tienen el mismo número de términos si son semejantes, y no de otro modo. El acto de contar consiste en establecer una correlación uno—uno entre la serie de objetos contados y los números naturales (excepto el 0) que se usan en el proceso. En consecuencia, el sentido común concluye que hay en la serie tantos objetos a ser contados como números hasta el último empleado en la cuenta. Y también sabemos que, en la medida en que nos limitemos a los números finitos, hay sólo *n* números del 1 hasta *n*. De ahí se sigue que el último número empleado al contar un conjunto es el número de términos del conjunto, supuesto que se trata de un conjunto finito. Pero este resultado, además de ser sólo aplicable a conjuntos finitos, depende y asume el hecho de que dos clases que son semejantes tienen el mismo número de términos; pues lo que hacemos al contar, supongamos, 10 objetos, es mostrar que la serie de estos objetos es semejante a la serie de los números del 1 al 10. La noción de semejanza está lógicamente presupuesta en la operación de contar y es lógicamente más





simple, aunque menos familiar. Al contar, es necesario tomar los objetos contados en un cierto orden —como primero, segundo, tercero, etc.— pero el orden no es de la esencia del número: desde el punto de vista lógico es una adición irrelevante y una innecesaria complicación. La noción de semejanza no exige un orden: vemos, por ejemplo, que el número de esposos es el mismo que el número de esposas, sin tener que establecer un orden de precedencia entre ellos. La noción de semejanza tampoco exige que las clases que son semejantes sean finitas. Tómense, por ejemplo, los números naturales (excluyendo el 0) en una mano, y las fracciones que tienen uno de numerador en la otra: es evidente que se podrá referir 2 a 1/2, 3 a 1/3 y así sucesivamente, probando con ello que ambas clases son semejantes.

Podemos así emplear la noción de *semejanza* para decidir, según antes nos preguntábamos, cuando han de pertenecer a un mismo fajo dos conjuntos. Queremos hacer un fajo que no contenga ningún miembro: será para el número 0. Queremos luego hacer un fajo de todas las clases que tienen un miembro: será para el número 1. Y así, para el número 2, necesitamos un fajo consistente en todas las parejas, luego uno que contenga todos los trios, y así sucesivamente. Dado un conjunto, podemos definir el fajo a que ha de pertenecer como clase de aquellos conjuntos semejantes a él. Es muy fácil ver que si (por ejemplo) un conjunto tiene tres miembros, la clase de todos aquellos conjuntos semejantes a él, será la clase de los tríos. Y cualquiera que sea el número de términos que tenga el conjunto, aquellos conjuntos que sean semejantes a él tendrán el mismo número de términos. Podremos tomar esto como una definición de *tener el mismo número de términos.* Es evidente que ofrece resultados susceptibles de ser usados en la medida en que nos limitemos a conjuntos finitos.

Hasta aquí no hemos sugerido nada mínimamente paradójico. Pero cuando llegamos a la efectiva definición de número no podemos evitar lo que a primera vista ha de parecer una paradoja, aunque la impresión pronto tiene que desaparecer. Pensamos naturalmente que la clase de las parejas (por ejemplo) es algo distinto del número 2. Pero no hay duda alguna respecto a la clase de las parejas: es indudable y fácil de definir, mientras que el número 2 es, en cualquier otro sentido, una entidad metafísica de la que nunca podemos estar seguros si existe o si le hemos seguido la pista. Es por lo tanto más prudente contentarnos con las clase de las parejas, de las que estamos seguros, que ir en busca de un problemático número 2 que seguirá siempre elusivo. De acuerdo con ello establecemos la siguiente definición:

> El número de una clase es la clase de todas aquellas clases que son semejantes a ella.

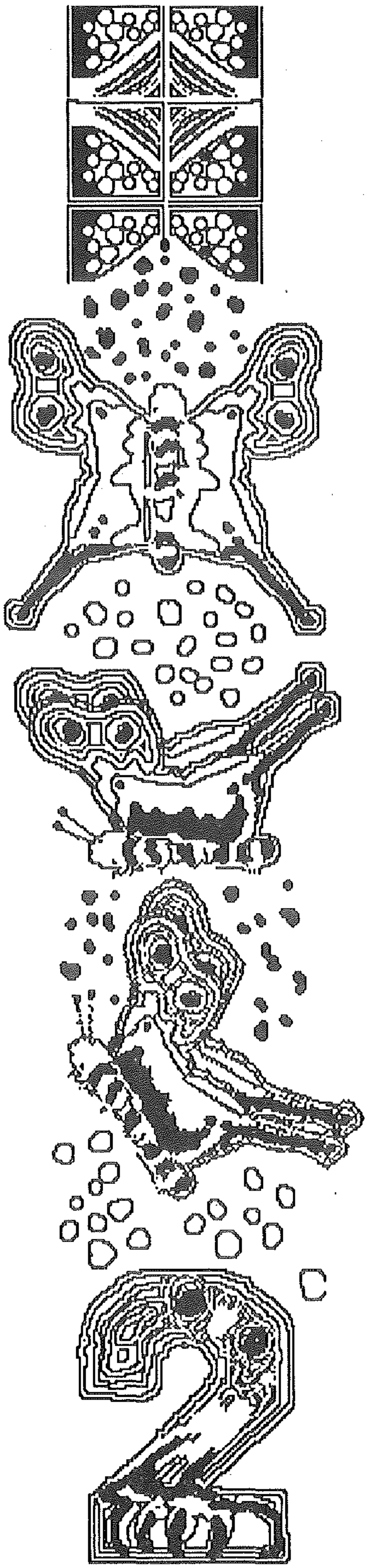
El número de una pareja será así la clase de todas las parejas. De hecho, la clase de todas las parejas será el mismo número 2, de acuerdo con nuestra definición. Al precio de cierta rareza, esta definición nos asegura algo definido e indiscutible; y nos es fácil probar que todos los números de este modo definidos tienen las propiedades que se supone que los números han de tener.

Podemos continuar ahora definiendo los números en general como cualquiera de los fajos en los que la semejanza reúne a las clases. Un número será una serie de clases tal que dos cualquiera de ellas son semejantes entre sí, y ninguna fuera de la serie es semejante a alguna perteneciente a la misma. En otras palabras, un número (en general) es cualquier conjunto que es el número de uno de sus miembros; o, más simplemente aún:

> Un número es cualquier cosa que es el número de alguna clase.

Tal definición tiene la apariencia verbal de ser circular, pero de hecho no lo es. Definimos *el número de una clase dada* sin emplear la noción de número en general; por consiguiente podemos definir el número en general en términos de el número de una clase dada sin cometer ningún error lógico.

De hecho las definiciones de este tipo son muy corrientes. La clase de los padres, por ejemplo, tendría que ser definida estableciendo ante todo qué es ser el padre de alguien; entonces la clase de los padres consistiría en todos aquellos que son el padre de alguien. De modo similar, si queremos definir, pongamos por caso, los números al cuadrado, tenemos que definir primero qué queremos decir cuando decimos que un número es el cuadrado de otro; y definir entonces los números al cuadrado como aquellos que son el cuadrado de otros



números. Este tipo de procedimiento es muy común y es importante darse cuenta de que es legítimo, y a menudo incluso necesario.

2. Guía de lectura

a. ¿A qué clase pertenece el conjunto A= {1, 2, 3, 4, 5}? Justifique.

b. Defina por *intensión* la clase del número 5.

c. Dé dos ejemplos que pertenezcan a una clase de número y dos que no pertenezcan.

d. ¿Cuántos miembros o elementos puede tener una clase?

e. ¿Qué pasa si los miembros de una clase son infinitos?

f. ¿Un número puede pertenecer a dos clases? ¿Cuál?

g. ¿El cero es una clase? ¿Cómo la definiría?

h. ¿De qué tipos pueden ser las relaciones entre autores y libros?

i. Si el conjunto A y el conjunto B pertenecen a una misma clase, ¿qué puede usted afirmar?

j. Explique con un ejemplo la siguiente frase:

> El número de una clase es la clase de todas aquellas clases que son semejantes a ella.

k. Si Russell pudo llegar a la definición de número, seguramente usted podrá llegar a la definición de color. Intente seguir su proceso:

1) Dentro de la definición de *color*, ¿qué sería una clase? Dé un ejemplo.

2) ¿Qué condición tienen que cumplir las clases para pertenecer a una misma clase?

3) ¿Cómo es la relación entre ellas?

4) Defina *El color de una clase*

5) ¿Necesita saber qué es el *color en general?*¿Por qué?

6) ¿Podría ahora definir el color en términos del *color de una clase?*

7) ¿Qué opina del proceso que siguió?

8) ¿Le parece lógico?

7. Abstracción, números y práctica

Hoy en día, si hablamos de números seguramente nos damos cuenta de que es un tema muy extenso. Podemos hablar de racionales, negativos, reales, imaginarios, complejos e incluso de binarios. Pero, hace tres mil años, el campo de los números era mucho más limitado que el que tenemos hoy. Fue debido a condiciones tanto externas como internas en las matemáticas, que poco a poco se fue ampliando este campo. Las condiciones históricas, el desarrollo cultural y tecnológico, y la tendencia del hombre a estudiar la naturaleza, fueron factores que influyeron notablemente en este proceso. Aún así, el desarrollo de las matemáticas es, más que un proceso histórico, un proceso de adaptación y de comprensión del mundo.

1. Práctica y teoría

Para tratar de seguir el proceso de formación de sistemas de números es importante tener claro que se pueden tener dos visiones: una en el campo de lo práctico y concreto; y otra, en un espacio puramente teórico y abstracto. Esto se debe a que hay gran diferencia entre concebir los números como representación de cosas concretas y reales y concebirlos como conceptos en sí. Más importante aún es ver que estos dos campos no tuvieron un desarrollo tan paralelo como esperaríamos. Tomemos, por ejemplo, a los pitagóricos quienes en el siglo V A.C. descubrieron números irracionales como *raíz de dos*, o sea, prácticamente sí conocieron los números irracionales, puesto que la diagonal del cuadrado o hipotenusa era algo que veían y que tenía un sentido real y concreto para ellos. Sin embargo, *teóricamente* ni siquiera se habían explicado los números negativos (aunque sí tenían un sentido de estos, aun no los consideraban como números en sí).

Así mismo, no debe sorprendernos que los números racionales se concibieran como conceptos, antes que los números negativos. Era más fácil explicarse partes de unidades concretas, que unidades enteras que no se veían y que no se podían representar.

Una vez aclarado lo anterior, podemos tratar de ubicar los números naturales, los enteros, los racionales, los irracionales y los reales, dentro de una época histórica, con un determinado desarrollo técnico y por lo tanto con necesidades diarias diferentes.

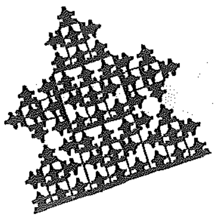
2. Naturales

Fue el proceso de contar, ya desarrollado en casi todas las civilizaciones antiguas hacia el siglo VII A. C., el que planteó la necesidad de asignar un número determinado a cada elemento de una colección de objetos. Fue esto lo que dió origen a los números naturales o enteros positivos. El desarrollo primitivo de estas civilizaciones requería de los números para contar rebaños de ovejas, objetos de trueque, etcétera. Con el transcurso del tiempo fueron necesarios para calcular la época de cosechas, para mediciones de tierra y para algunas construcciones. Básicamente asimilaron los números naturales, siempre ligados a su función en la práctica, o sea, en la vida diaria.

Hacia el siglo VI A. C. los griegos le dieron a los números naturales un significado ya no práctico sino teórico; pudieron pensar en números *en general* y plantear axiomas y teoremas sobre ellos. Además, se dieron cuenta de la posibilidad de prolongar indefinidamente la sucesión de números al agregar una unidad al último número que se hubiera considerado.

Años después, los hindues, quienes solamente para comodidad de su sistema de numeración introdujeron el cero, desarrollaron las operaciones básicas entre los números tales como adición, sustracción, multiplicación y división, las que permitieron un mejor desarrollo del comercio y plantearon dudas que llevaron a la formación , tanto de los números negativos, como la de los irracionales.

Los números naturales tuvieron además de un sentido práctico, un sentido teórico o abstracto, aunque la etapa final de dicha significación abstracta sólo se logró hasta el siglo XIX cuando Frege dio la definición de los números naturales por medio de su reducción a la teoría de conjuntos y por medio de sólo tres conceptos: número, cero y siguiente de un número. Formuló cinco axiomas:



Gottlob Frege, el famoso matemático y filósofo, nació en Wismar en 1874 y murió en Bad Kleinen en 1925. Fue privatdozent de matemáticas en la universidad de Jena desde 1894 hasta 1896, y desde esta fecha siguió enseñando en la misma facultad como profesor honorario hasta 1917.
Sus investigaciones se extienden por el campo de la matemática y la filosofía, especial- mente en lo que atañe a la lógica. La búsqueda de los fundamentos filosóficos de la matemática llevó a Frege al descubrimiento de aspectos fundamentales para la investigación filosófica, como los que se refieren a la estructura del lenguaje en su relación con su contenido significativo; las posibles connotaciones esenciales de las estructuras simbóli- cas, el intento de reducir el mecanismo matemático a ciertos principios lógicos universales, y otros muchos que están en el fundamento de la filosofía moderna.

1. Cero es un número.
2. El siguiente de un número es un número.
3. No hay dos números que tengan el mismo siguiente.
4. Cero no es el siguiente de ningún número.
5. Toda propiedad válida para el cero y para el siguiente de un número que goce de aquella propiedad, pertenece a todos los números.

3. Negativos

En cuanto a lo que significan los números negativos dentro de la vida práctica, es decir, en lo concerniente al *debe*, los números negativos son tan antiguos como los naturales y tuvieron que surgir simultáneamente con ellos. El concepto antiguo de número, puramente concreto, permitió que se tuviera un sentido de los números negativos, aunque para que se consideraran como conceptos tuvieron que pasar varios años.

La misma asimilación de los números naturales en operaciones como la sustracción, permitió preguntarse por aquellos casos en los que a–b no es un número natural, o sea, por los casos donde a es menor que b. Los hindues trabajaron con estos números y los consideraron al mismo nivel que los números naturales; pero entre muchas civilizaciones no fue tan fácil su adaptación al sistema de números. Se utilizaban porque eran necesarios pero siempre con cierta duda. Sólo hasta el siglo XVII se utilizaron libremente.

4. Racionales

El desarrollo de la geometría entre los griegos a partir del siglo III A. C. hizo que se utilizaran con mayor frecuencia los números naturales en mediciones, tanto para expresar una unidad de medida como para conocer cuántas unidades contenía determinado segmento. Así, los números racionales son un poco menos antiguos que los naturales. Inicialmente sólo se creía que había números enteros, y por lo tanto que todas las magnitudes o longitudes contenían la unidad un número exacto de veces. Pero cuando el hombre se dio cuenta de lo contrario, dividió su unidad en partes más pequeñas con el propósito de medir con éstas el segmento que era menor que su unidad. Por ejemplo, si dividía su unidad en cinco partes, tomaba una de éstas para medir el segmento que no conocía, y si estaba contenida dos veces exactas, entonces sabía que este segmento correspondía a 2/5 de su unidad, a dos veces un quinto de su unidad.

En general, los números racionales surgieron por la necesidad de realizar mediciones exactas.

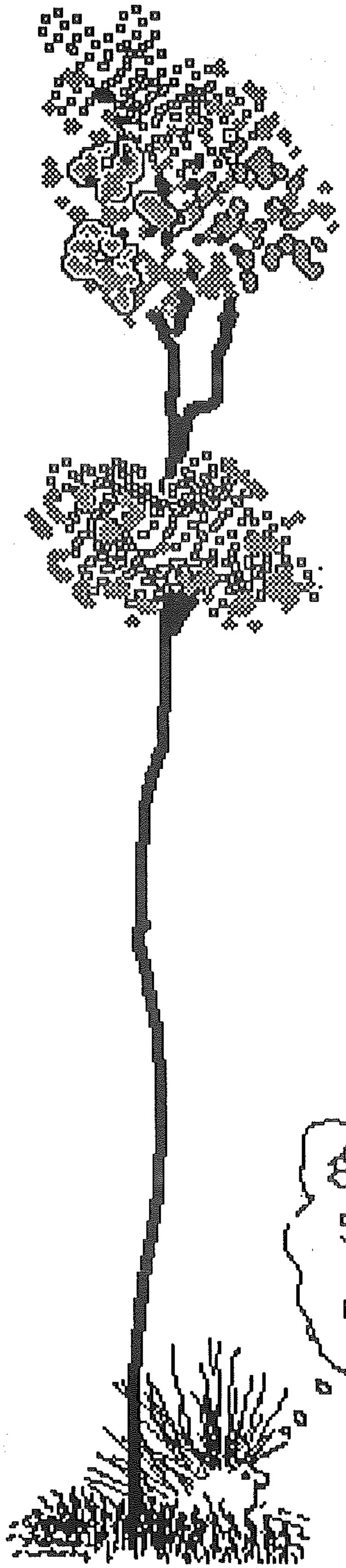
Así como los números negativos fueron una solución para los casos en los que la diferencia de dos enteros no es otro entero, los racionales fueron una solución para aquellos casos en los que la división de dos enteros no es un número entero. Entonces, si no se podía representar ese cociente como un número entero, si lo podían representar como la división entre dos números enteros.

La asimilación de los racionales fue tanta que se crearon leyes para sumar, restar, multiplicar y dividir con números racionales, en tanto que concibieron los racionales como la expresión de la división entre dos números naturales.

Se puede decir que estos números, además de tener un sentido práctico, tenían un sentido teórico, puesto que aunque no eran números enteros eran *partes* de números enteros y los podían representar como a/b donde a y b eran enteros. El problema de que b fuera *cero*, no se lo plantearon, sencillamente porque nunca iban a dividir la unidad en cero partes.

5. Irracionales

Los números irracionales por su parte, prácticamente fueron descubiertos por los pitagóricos en el siglo V A. C. gracias al desarrollo y al auge que tuvo la geometría entre los griegos. Descubrieron que el lado y la diagonal de un cuadrado no son conmensurables puesto que si se usa el lado de un cuadrado como unidad de medida para medir su diagonal, dicha medida no se puede expresar como cociente de dos números enteros. Este descubrimiento les creó tanta incertidumbre, que estuvo a punto de derribar todas sus bases matemáticas. Esta fue la razón por la que decidieron ocultarlo. Hasta este momento los números irracionales sólo se consideraron geométricamente, cuando tenían un sentido totalmente práctico. No los consideraron como números en sí, porque para ellos sólo eran números aquellos que se podían representar como



enteros o como cocientes de números enteros. La existencia de estos números era inexplicable. En cambio, los hindues sí utilizaron los números irracionales independientemente de su representación geométrica, y los aplicaron en sus trabajos de álgebra.

La asimilación teórica de los números irracionales demoró mucho puesto que ni siquiera sabían como representarlos. La utilización del símbolo para raíz de, facilitó en mucho su comprensión.

6. Reales

En el siglo XVII, el desarrollo del análisis infinitesimal, creado simultáneamente por Newton y Leibniz, hizo que se crearan los números reales con el propósito de conformar un sistema de números que no tuviera huecos, que fuera denso en su totalidad y que por lo tanto comprendiera todos los números que se conocían hasta el momento. Newton al intentar definir los números reales los identificó como cocientes de magnitudes que podían ser, enteros, racionales o irracionales, si las magnitudes eran inconmensurables. A principios del siglo XX, Dedekind y Weierstrass también dieron definiciones para los números reales.

7. Conclusiones

Podemos concluir que los números naturales, los enteros, los racionales y los irracionales son muy antiguos; tienen sus bases en problemas concretos y se desarrollaron paulatinamente hasta llegar a ser considerados como conceptos. Los números reales surgen más por procesos de abstracción y análisis de los números ya conocidos que por problemas concretos. Es este proceso de progreso en el conocimiento de las relaciones entre entidades abstractas (que no tienen relación con lo concreto) el que está en la base del desarrollo de las llamadas *matemáticas puras* durante los dos últimos siglos. Sin embargo, hay que anotar que aún cuando existen sistemas de números más allá de los reales (los complejos y los cuaterníos, por ejemplo) y estos sistemas fueron *inventados* a partir de lo abstracto, han llegado a ser utilizados para problemas concretos dentro de diversas ciencias.

El desarrollo del cálculo integral y diferencial, de los logaritmos, de la teoría de la probabilidad, etcétera, es producto de la acción simultánea del desarrollo de las ciencias y de los procesos de abstracción del hombre.

8. Bibliografía

Aleksandrov, A.D. *Las matemáticas: su contenido, métodos y significado.*

Courant, R. y Robbins, H. *¿Qué es la matemática?*

Howard, Eves. *An introduction to the history of Mathematics.*

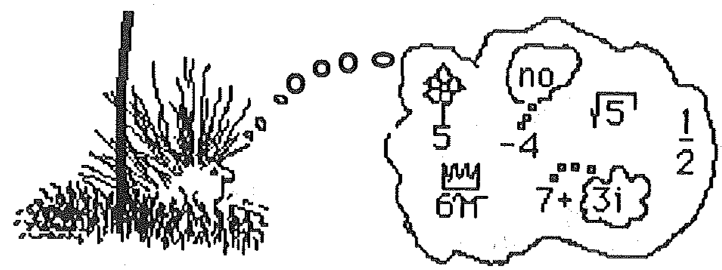
Kline, Morris. *Mathematics in Western Culture.*

Newman, James. *The world of Mathematics. Vol. 4.*

Shaaf, William L. *Our Mathematical Heritage.*

9. Guía de lectura

a. Comente la siguiente frase. Dé ejemplos para sustentar su tesis.



Los sistemas de números aparecieron debido a condiciones internas y externas a las matemáticas.

b. Comente la siguiente frase. Dé ejemplos para sustentar su tesis.

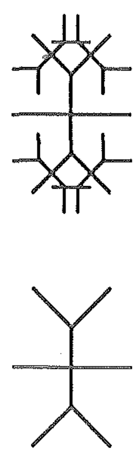
Los conceptos matemáticos aparecen a veces por necesidades prácticas, a veces como producto de razonamientos abstractos.

c. Compare la definición de los *números naturales* dada por Frege con la que usted dio en la parte de sistemas formales. ¿Cuáles son las ventajas y desventajas de cada una? ¿Se llega al mismo resultado?

d. ¿Cómo explica usted que los números *racionales* hayan aparecido antes que los *enteros negativos*?

e. Una última reflexión: ¿qué es un número?

8. Las propiedades aerodinámicas de la adición



Raymond Queneau (1903) Escritor Francés, que militó primero en el surrealismo, autor de las novelas: Le chiendent (1933), Pierrot mon ami (1943), Saint Glinglin (1948), Le dimanche de la vie (1952), Zazie dans le métro (1959).

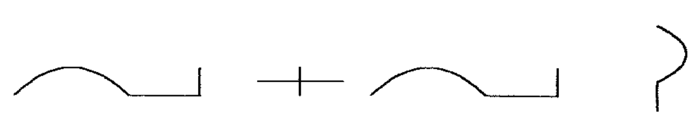
1. Sobre las propiedades aerodinámicas de la adición

Por Raymond Queneau

Todos los intentos desde los tiempos más antiguos hasta hoy en día, para demostrar que **2 + 2 = 4,** se han olvidado de tener en cuenta la velocidad del viento.

El hecho es que la operación que se desarrolla en la adición de números enteros, es sólo posible cuando el tiempo es suficientemente tranquilo de tal forma que después de escribir el primer **2,** éste permanezca en su lugar durante un tiempo suficiente que nos permita escribir: primero la cruz, luego el otro **2,** después la pequeña pared donde nos apoyamos para reflexionar **(=)** y por último el resultado. En este momento, aún si el viento comenzara a soplar, hemos comprobado que dos más dos son cuatro.

Pero si la velocidad del viento aumentara, nuestro primer número caería al suelo. Y si continuara aumentando, el segundo número también se caería. Bajo estas condiciones, ¿cómo podríamos calcular el valor de

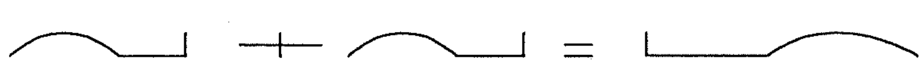


El actual pensamiento matemático es incapaz de dar una solución a esto. Consideremos ahora que el viento alcanza casi la fuerza de un huracán. En este caso el primer número sería indudablemente arrastrado por el viento, luego la pequeña cruz y así sucesivamente hasta que no quedara nada en la parte izquierda de la expresión. Pero supongamos que inmediatamente después de desaparecer la pequeña cruz, el viento repentinamente deja de soplar. Estamos entonces con el absurdo $\mathbf{2 = 4}$.

Sin embargo, el viento puede dar tanto como quitar. El número 1 siendo excepcionalmente ligero y desplazable por la más ligera brisa, puede también, sin que la persona que realiza la operación se de cuenta, ser infiltrado en una adición a la que propiamente no pertenece. Esto explica la predilección del matemático ruso Dostoyevski por la ecuación $\mathbf{2 + 2 = 5}$.

Del mismo modo las reglas de la numeración decimal, sugieren que los hindúes fueron guiados inconscientemente a la formulación de nuestra teoría general. Es claro que el cero, sensible al más ligero soplo del viento, ruede fácilmente. De ahí que cuando se coloca a la izquierda de un número, como en la expresión $\mathbf{02 = 2}$, ningún valor le concierne, puesto que él se habrá desvanecido antes de que lleguemos al final de la ecuación. El cero sólo tiene significado cuando se coloca a la derecha, situación en la cual los números que lo preceden pueden detenerlo y evitar que salga rodando. Mientras que el viento no exceda una velocidad de unos pocos pies por segundo, una ecuación del tipo $\mathbf{20 = 2}$ puede ser originada.

Estas consideraciones tienen ciertas consecuencias prácticas. Enfrentados a la expectativa de disturbios atmosféricos, es prudente que cada persona imponga a su adición la forma aerodinámica más conveniente. Similarmente es aconsejable escribir la ecuación de derecha a izquierda, comenzando lo más cerca posible al margen derecho del papel. Así, si durante el desarrollo de la ecuación el viento la hiciera deslizarse o escabullirse, podríamos siempre alcanzarla antes de que ésta llegara al margen izquierdo. Así son obtenidas, aún durante una tempestad equinoccial, ecuaciones como:



2. El maravilloso mundo de las cifras

Por Corey Ford

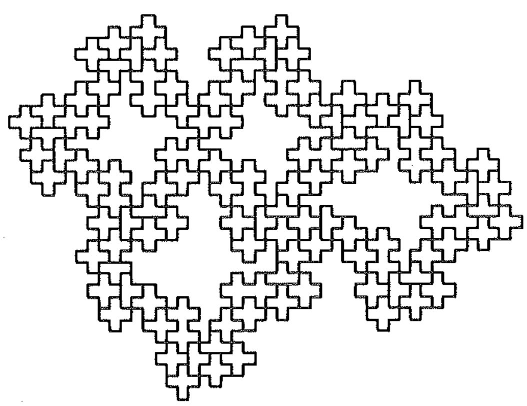
Nuestra historia comienza retrocediendo a tiempos prehistóricos, cuando el hombre llevaba largas patillas y vivía sobre altas bicicletas de ruedas. En esos días primitivos él tenía sólo *uno* de cada cosa –un caballo, una vaca, una esposa, etc.– y no había necesidad de matemáticas. Pero la naturaleza avara del hombre lo obligó a adquirir más caballos, más vacas, y más esposas. La única manera que tenía para decir cuántos tenía era colocarlos juntos en un mismo salón y contarlos con sus dedos. Esto resultó con los caballos y las vacas, pero cuando reunió todas sus esposas en un solo salón, se vio en grandes problemas. Por lo tanto él dibujó algunos símbolos en la pared para representarlas; y así mis pequeños, es como nació la aritmética.

Gradualmente el hombre adquirió muchos más caballos, vacas y esposas hasta que se le escaparon de los dedos, por lo cual tuvo que inventar la adición. Luego, decidió que debía deshacerse de algunas de sus esposas, y así inventó la sustracción. Mientras tanto la multiplicación de la familia lo llevó a la *multiplicación* y más tarde o más temprano, la mamá de su esposa, los parientes toledanos de sus hermanos, muchos primos y una pareja de yernos que no estaban trabajando, se mudaron con él para disfrutar de sus posesiones, con lo cual inventó la división. A esto siguió la invención del álgebra, la geometría, la trigonometría, el cálculo y la canasta. El hombre desarrolló nuestro moderno sistema de matemáticas y desde entonces, la vida no ha sido la misma.

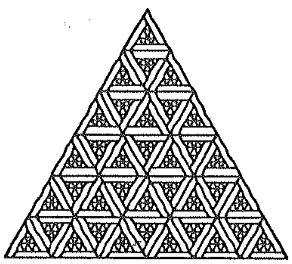
Efectivamente hay 2 sistemas matemáticos que se usan hoy en día: el sistema que utiliza el hombre y el que utiliza su esposa. La matemática de las mujeres se diferencia de la de los hombres en que en aquélla no hay números redondos y todas las cosas se expresan en términos de $4.49 o $9.98. Además cualquier cantidad de más de dos cifras es automáticamente cargada a sus esposos. Lo que hace este sistema oscuro, al menos para los hombres, es el hecho de que está basado en la lógica femenina. Por ejemplo, si una mujer ve algo en una tienda que está rebajado a mitad de precio, siempre compra uno más, porque de esa forma *ella obtiene el primero gratis.* O si queremos dar otro ejemplo del razonamiento femenino, tomemos a un esposo que le da $20 a su esposa para comprar un nuevo sombrero y ella ve justamente el sombrero que quiere por sólo $17, o sea que ya ahorró $3. Ahora sigamos esto cuidadosamente: mientras que compra el sombrero, ve un abrigo que le hace juego rebajado de $40 a $23, así con los $3 que ahorró en el sombrero y los $17 que ahorra en el abrigo, su esposo ya le debe exactamente $20.

El problema es que el sistema matemático femenino trabajó tan rápido que el hombre no logra marchar a su mismo paso.

Tomemos la experiencia de un amigo mío, el señor Martínez, cuya esposa decidió que quería un abrigo de mink. El señor Martínez le dijo que ellos no podían enfrentar ese gasto, y ella dijo que no costaría más que un viaje a Miami a lo que el señor Martínez señaló que ellos no podían solventar un viaje a Miami. Entonces la señora Martínez dijo que en vez del viaje a Miami ellos podían remodelar la sala, y cuando Martínez le preguntó que donde iban a conseguir la plata para remodelar la sala, ella dijo que simplemente no yendo a Miami, y que si no remodelaban la sala ni iban a Miami, podrían gastar esa plata en el abrigo de mink. Mientras que el señor Martínez trataba de hacer cuentas, su esposa compró el abrigo de mink, lo lució en Miami y mientras tanto estaban remodelando la sala. Lo único que Martínez alcanzó a decir es que todo lucía muy bien en ella.



9. ¿Cuántos?



En el transcurso de nuestra expedición botánica en el bosque de los números, hemos llegado a un punto culminante. Hemos descubierto y hemos logrado organizar ♣¡Eso es lo que usted cree!♣ *una cierta cantidad de especies: los naturales, los enteros y los racionales. Pero, ¿habrá más?*

1. ¿Cuántos enteros?

Antes de descubrir cuántos racionales hay, veamos cuántos enteros hay. Seguramente usted dirá que *hay un jurgo*. Pero, *¿cuántos?*

Sí, ya sé: *hay un número infinito*. Pero, *¿cuántos?* Simplifiquemos la pregunta:

> ¿Qué hay más: naturales o enteros?

Simplifiquemos aún más la pregunta:

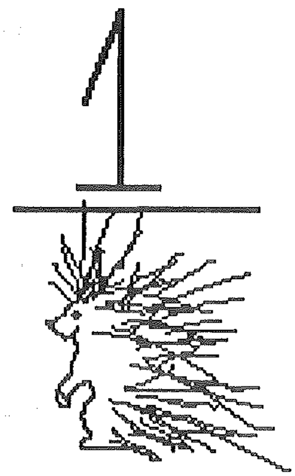
> ¿Qué hay más: naturales o naturales pares?

a. ¿Se puede usted imaginar una *manera* de poner en relación ♣*invitémoslos a una fiesta y los presentamos*♣ los naturales pares y los naturales? Es decir, una *correspondencia* tal que a cada par le corresponda un natural y a cada natural, un par? ♣*Haga funcionar las neuronitas. Va a ver que sí puede*♣

b. ¿Puede usted imaginarse ahora una *manera* de poner en relación los enteros y los naturales? Es decir, una *correspondencia* tal que a cada entero le corresponda un natural y a cada natural, un entero? ♣*Si usted pudo hacer c, entonces puede hacer éste. Si no pudo hacer c, pues ¡vuelva a intentarlo! No se va a dejar, ¿no es cierto?*♣

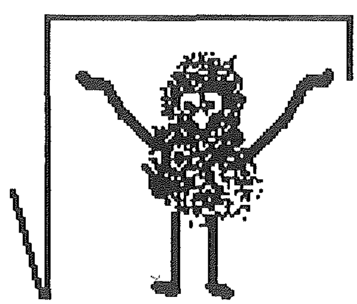
c. Dado que usted ha encontrado una manera de relacionar los naturales y los enteros con las condiciones impuestas arriba,

¿Qué hay más: naturales o enteros?



d. Ahora que sabemos que hay tantos naturales como enteros *♣claro: con la nueva manera que nos hemos inventado para contar en infinitos♣*, podemos volver a la pregunta inicial:

¿Cuántos racionales hay?



e. ¿Es usted capaz de inventarse una manera de poner en relación los *racionales positivos* y los *naturales*? Le doy una ayuda: cada racional positivo se puede representar como una *pareja* de dos enteros. Si usted conoce el plano cartesiano, puede entonces dibujar los racionales positivos en el primer cuadrante de un plano haciendo una correspondencia entre los números racionales positivos y las parejas de números enteros. Por ejemplo, al número 2/3 le hace corresponder la pareja (2,3); al 4/5 la pareja (4,5). Una vez que los tenga dibujados, *♣Por favor: ¡no se vaya poner a dibujarlos todos!♣* trate de *contarlos*. Esto es, trate de inventarse una forma gráfica de ponerlos en relación con los naturales. Es decir, intente hacer una lista de los puntos que usted ha dibujado. Piense en la manera como usted haría una lista de sus compañeros de clase, dado que están sentados en lugares particulares del salón.

2. La historia de Pitágoras

Si usted cree que no hay más números más allá de los racionales, usted no está solo. En la historia de la humanidad existió una escuela (más que una escuela era *una secta*) que construyó una visión del mundo a partir de esta posición: los pitagóricos. Lo más curioso de la historia es que fueron ellos mismos quienes descubrieron que estaban equivocados*.

Ellos descubrieron que había un número, la raíz cuadrada de 2, que *no era racional.*

a. ¿Conoce usted la *demostración* de que raíz cuadrada de dos *no* es racional? Si la conoce, expóngala a continuación. Si no la conoce, búsquela al final del libro de COSMOS y escríbala a continuación *en sus propias palabras.*

3. Se llaman irracionales

Aquellos números, como la raíz cuadrada de 2, que *no* son racionales, se llaman **irracionales**. ♣ *¡Claro! Ahora sí entiendo por qué dicen que las matemáticas son lógicas* ♣ Para su información, y sin darle ninguna demostración, ♣ *¡Uf! De la que nos salvamos esta vez...* ♣ le cuento que irracionales, *sí hay un jurgo.* De hecho, hay muchos más irracionales que racionales. Pero, como usted vio arriba, esto depende de la manera como uno *cuente.*

4. Los reales

Y, ¿qué son los reales? ♣ *Ala, mi rey, ¿cómo te dijera?...* ♣ Usted se imagina que tampoco tienen que ver con la realidad. (Vaya uno a preguntarle esto a Pitágoras). Los **números reales** son los números racionales junto con los números irracionales. Para efectos prácticos, usted puede pensar que los números reales son *todos los números.*

a. A continuación, presente *cuatro* ejemplos de números reales. ¡Sea original! Para cada uno, diga si es un número racional o irracional.

* Esta es una situación muy rara dentro de la historia de las sectas. Estas tienden a ser extremadamente dogmáticas y, por lo tanto, ciegas a sus errores. Sin embargo, hay que tener en cuenta que esta era una secta matemática...

5. ¿Qué tan cerca?

¿Qué tan lejos?

a. ¿Quién está más cerca de **1**, **3** o **-5**? Justifique su respuesta.

b. Invéntese una fórmula o *receta* que permita, dados cualquier par de números reales, saber qué tan lejos o qué tan cerca está el uno del otro.

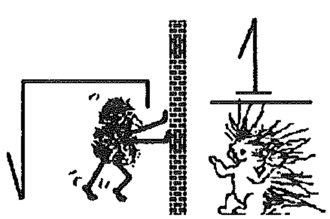
c. ¿Qué nombre le daría usted a esta *receta*?

6. Son organizados

Los números reales son números *organizados*. De hecho, los naturales y los enteros también lo son. ♣*Ahora me va a venir con el cuento que realmente las matemáticas sí son organizadas*♣ Lo de *organizados* quiere decir que usted sabe, por ejemplo, *quién va primero entre el* **1** *o el* **9**. ¿O no?

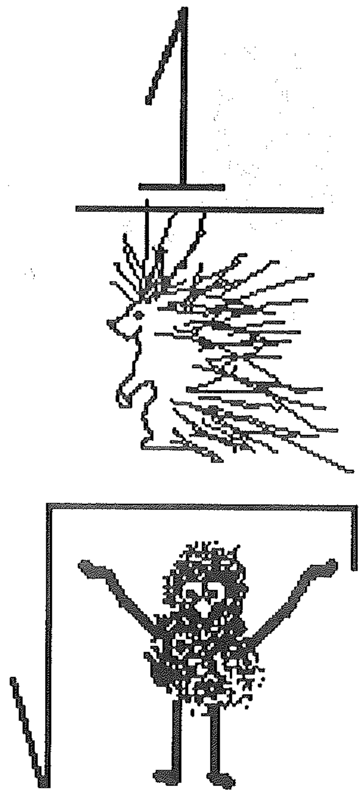
a. Invéntese una *receta* que permita determinar *para cualquier par de números reales*, cuál es el mayor entre los dos.

b. A partir de la *receta* anterior, invéntese otra ♣*¡Ni que nosotros fuéramos Leonardos da Vinci, para ponernos a inventar tanto!*♣ que permita, *para cualquier par de números reales*, determinar cuál es el menor.



Pitágoras (582-507 A.C.) Filósofo y matemático griego nacido en Samos, viajó por Egipto y el Oriente; expulsado de su isla natal por el tirano Polícrates, emigró a Crotona (529) donde fundó una comunidad religiosa y política; sus especulaciones místicas y científicas tuvieron como base los números, se le atribuye el invento de las tablas de multiplicación, creyó en la metempsicosis y observó una moral rígida y una vida austera; se cree que fue el primero en demostrar que el cuadrado de la hipotenusa de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los catetos, no dejó escritos, se conocen sus doctrinas por sus discípulos, quienes hicieron considerables progresos en las matemáticas y en la astronomía.

7. Están junticos

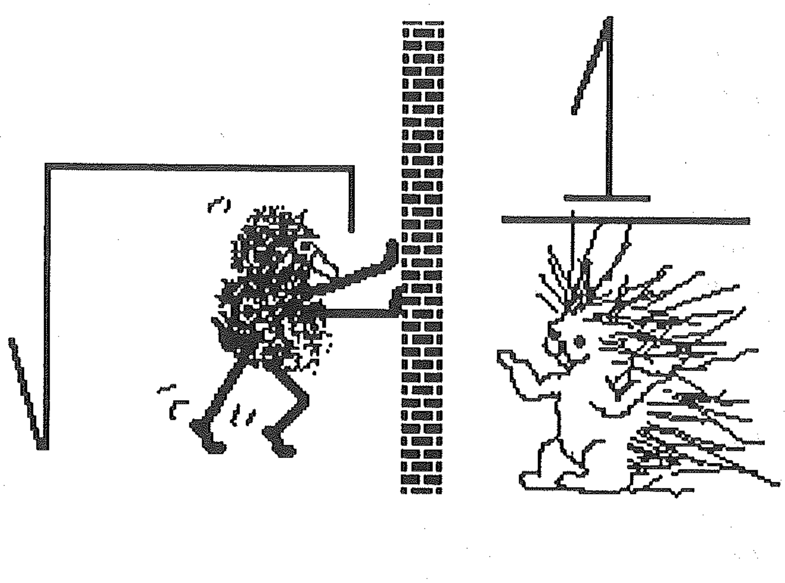


a. Escriba tres números racionales que se encuentren entre **1** y **2**.

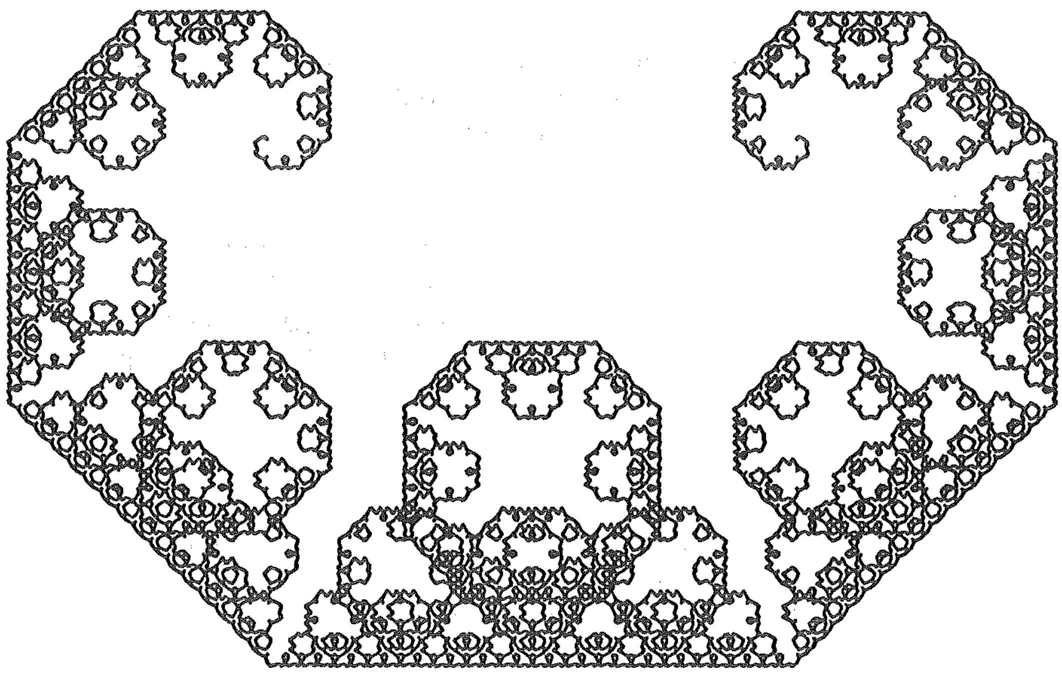
b. ¿Es posible encontrar un número entero entre **1** y **2**? *♣Ya se puso a hacer preguntas idiotas, el tipo este♣*

Imposible, ¿no es cierto? *En los números enteros hay huecos*. Sin embargo, esto no sucede en los números reales.

c. Encuentre tres números racionales que se encuentren entre **1/2** y **1/4**.



10. La biblioteca de Babel



Un cuento de J. L. Borges

1. Guía de lectura

a. ¿Alcanzó usted a imaginarse la biblioteca de Babel? Imagínese que usted estuviera allí, en uno de los hexágonos. ¿Qué sentiría? ¿Por qué?

b. ¿Podría usted hacer un *dibujito* de la biblioteca de Babel?

c. ¿Cuáles son, en su opinión, las implicaciones más sorprendentes de la idea de que exista una biblioteca infinita *¿será infinita?* que contenga todos los libros posibles?

d. Si la biblioteca tuviese todos los libros posibles, ¿qué libro buscaría usted? Explique su respuesta.

e. Suponga que cada libro tiene únicamente una página, cada página, únicamente un renglón y cada renglón únicamente una letra o símbolo. Si no hay ningún libro repetido, ¿cuántos libros habría en la biblioteca?

f. Suponga que las condiciones son las mismas que en el punto anterior *excepto* que cada renglón contiene dos símbolos. ¿Cuántos libros habría en la biblioteca?

g. Suponga ahora que las condiciones son como Borges las describe al comienzo del libro ♣*por ejemplo, todos los libros tienen 410 páginas*♣ *excepto* que no hay dos libros iguales. ¿Cree usted que es posible calcular el número de libros en la biblioteca? ¿Por qué?

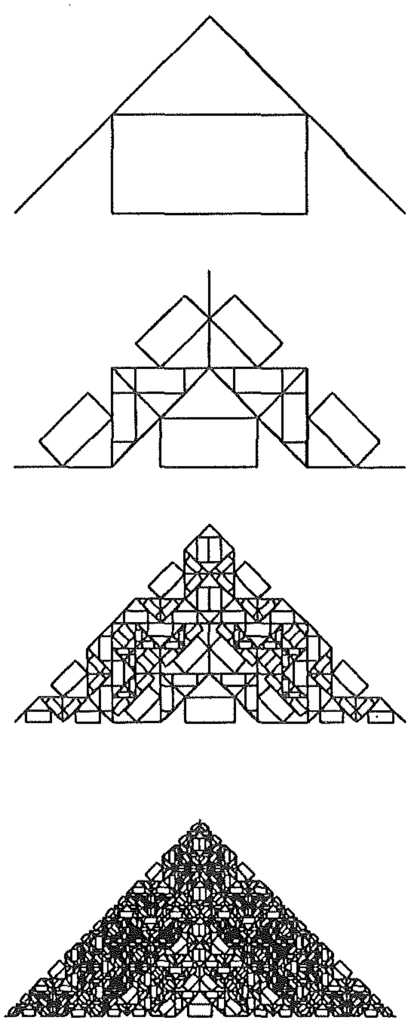
h. Suponga ahora (como lo supone Borges) que los libros se pueden repetir. Esto es que en dos hexágonos, en dos muros, en dos anaqueles, diferentes —y posiblemente muy alejados el uno del otro— es posible encontrar dos libros con la misma sucesión de símbolos. ¿Cree usted que es posible calcular el número de libros en la biblioteca? O, en otras palabras, ¿cree usted que es posible encontrar un número natural ♣*Claro: ya tuvo que meter las matemáticas y tirarse toda la historia*♣ tal que el número de libros en la biblioteca (aunque no conozcamos ese número) sea menor que el número natural encontrado? ¿Por qué?

i. Dentro de la biblioteca hay innumerables catálogos (existen incluso catálogos de catálogos). Hay ciertos catálogos que se incluyen a sí mismos, dentro de los libros que reseñan. Suponga que existe un catálogo de todos los catálogos que, dentro de los libros que referencian, no se incluyen a sí mismos. ¿Será que este catálogo se incluye (se menciona) a sí mismo? ♣*¿Perdón? Van tres veces que leo la pregunta y no entiendo ni pío*♣

j. ¿Se ha detenido a pensar que esta guía de lectura —con las respuestas que usted le de a ella— se halla contenida en algún libro de la biblioteca de Babel?

11. El libro de arena

Un cuento de J.L. Borges



1. Guía de lectura

a. Suponga que ha llegado a sus manos el libro de arena. ¿Qué haría usted con él? ¿Qué sentiría usted al tenerlo en sus manos?

b. En el libro de arena, una vez que usted cierra el libro, no puede volver a encontrar la página donde se encontraba. ¿Pasa lo mismo en la biblioteca de Babel? Es decir, si usted ha estado en un hexágono, mirando un libro en una página específica y se va a otros hexágonos durante algunos días, a mirar otros libros, ¿le es *imposible* volver a encontrar el libro que estuvo mirando inicialmente? ¿Podría usted inventarse un método para poder lograrlo?

c. Después de haber respondido a la pregunta anterior y dado que el número de libros en la biblioteca de Babel y el número de páginas del libro de arena son ambos infinitos, ¿cree usted que los dos infinitos son el mismo? ¿Por qué? Si usted tiene, por un lado, el conjunto de todos los números naturales y, por el otro, el conjunto de los números reales, ¿cómo los haría corresponder con el libro de arena y la biblioteca de Babel? Trate de justificar su respuesta, aún si no está seguro.

d. Comente esta frase extraída del cuento:

Si el espacio es infinito, estamos en cualquier punto del espacio. Si el tiempo es infinito, estamos en cualquier punto del tiempo.

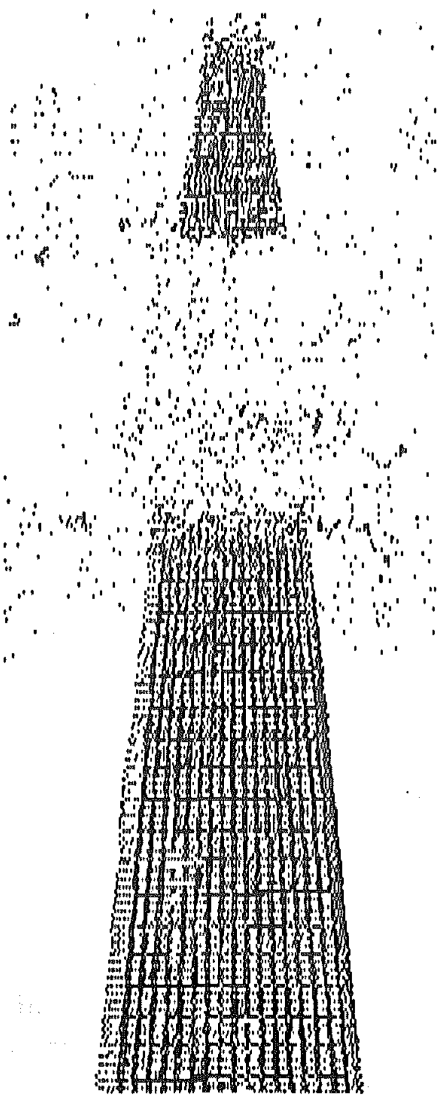
e. El vendedor de biblias afirma que el libro de arena no tiene una primera página, ni una última página. ¿Se puede hablar de la página central del libro? Explique.

f. Si el libro de arena tiene un número infinito de hojas, ¿no tendría él que tener dimensiones infinitas?

g. ¿Cabría toda la biblioteca de Babel en el libro de arena? Piense en la respuesta que usted dio a la pregunta **c**.

h. ¿Podría estar el libro de arena dentro de la biblioteca de Babel?

12. Un infinito con estrellas



1. Un hotel infinito

Recientemente un inquieto científico *Carlos Saganio*, en uno de sus viajes en busca de vida extraterrestre, encontró, en una pequeña y remota isla del océano cósmico, un fabuloso hotel interestelar. Este hotel llamado Cosmos, tenía la peculiaridad de tener un número *infinito* de habitaciones. Saganio, luego de haberse recuperado un poco de la emoción de su descubrimiento, quiso tomar una habitación; desafortu- nadamente y pese a lo que se hubiera podido esperar, el hotel estaba totalmente lleno.

Un número infinito de investigadores de todos los rincones del universo* celebraban un congreso en el que se debatía la cuestión de si todas las esmeraldas del universo eran verdes o *verzules*.

El botones pasó por las habitaciones buscando a alguien que quisiera admitir un compañero de cuarto (no pregunte cuánto tiempo duró esta averiguación), y sólo un amable huésped, Ben Usino, se ofreció a compartir su habitación. (¡A Saganio le debieron ver cara de colombiano varado en el extranjero!) Pero Saganio no aceptó este ofrecimiento pues Ben era alérgico al oxígeno y además pasaba frío si la temperatura descendía de 500°C.

* Excepto de un insignificante planetica llamado Tierra, habitado por seres algo primitivos.

Finalmente otro huésped, Saturnino dió una solución muy ingeniosa a este problema y Saganio pudo alojarse en el hotel.

a. ¿Cuál cree usted que fue la solución?

Al día siguiente Saganio comunicó a la Tierra su maravilloso hallazgo y ese mismo día arribaron un millón de terrícolas a conocer el hotel Cosmos.

b. ¿Cómo podrían acomodarse en el hotel estos nuevos huéspedes? Explique bien su idea.

Dos días después llegaron al Cosmos una cantidad infinita de biólogos para realizar un coloquio sobre el tema:

¿Existen los genes matemáticos?

Ben Usino tuvo entonces una idea estupenda para poder acomodarlos a todos en el hotel.

c. ¿Cuál cree usted que fue esta idea? Piense en los pares y los naturales.

El domingo, el dueño del hotel, muy satisfecho por la prosperidad de su negocio, decidió brindar a todos los huéspedes una copa de vino. Antes de sentarse a la mesa (que por supuesto, tenía infinitos puestos) Saganio sagazmente advirtió: *Si nos sentamos de una manera adecuada podremos beber no una, sino cuatro copas de vino cada uno.*

d. ¿Cómo deberían sentarse todos para hacer esto posible? ♣ *¿Le es posible imaginarse una borrachera infinita? ¿Y el guayabo?* ♣

e. ¿Puede usted imaginarse una manera de sentarse de modo que cada huésped pueda tomar un número infinito de copas de vino? ♣ *Le doy una ayudita: piense en los números racionales* ♣

2. Todo el conocimiento humano

Luego de que Carlos Saganio y Ben Usino se recuperaron (un poco) de la borrachera infinita en el hotel Cosmos, Saganio invitó a su amigo a unas vacaciones en la Tierra. Ben Usino, movido por la curiosidad de conocer a los extraños y primitivos habitantes de la Tierra, aceptó la invitación, no sin antes proveerse de un traje especial que lo protegía del oxígeno y que lo mantenía a una agradable temperatura de 570°. Ya en la Tierra, Ben Usino dijo a Saganio:

Ben Usino: Pienso llevar información sobre los humanos a mi planeta.

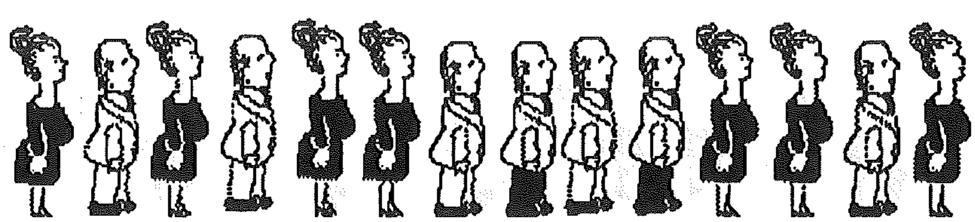
Saganio: ¿Por qué no llevas una copia del almanaque Bristol? Es una muestra representativa de lo que conocemos.

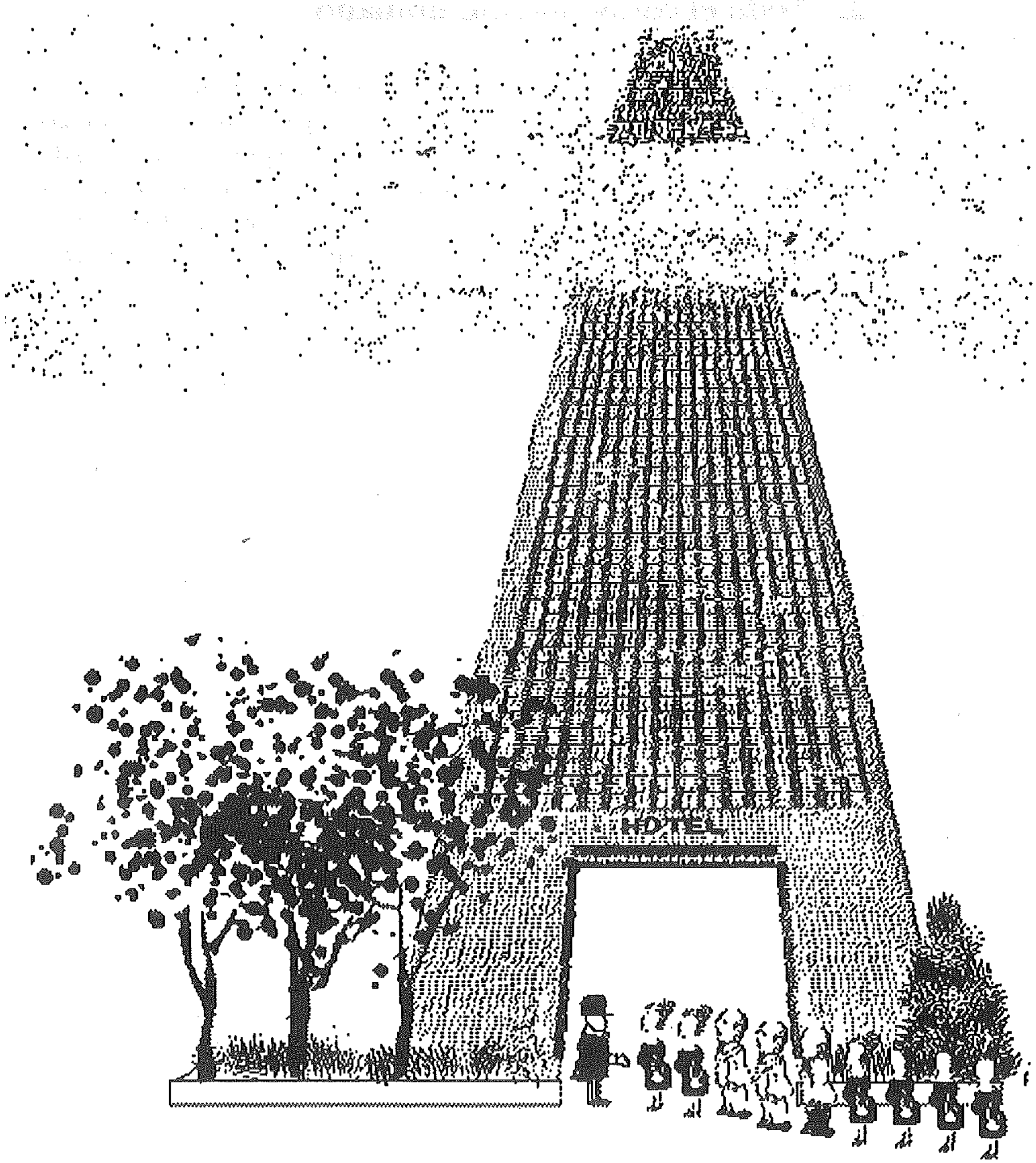
Ben Usino: Deseo llevar una información más completa. En esta barra de metal de un metro de longitud puedo codificar todo el conocimiento humano.

Saganio: ¿Es eso posible?

Ben Usino: Por supuesto. A cada símbolo de los alfabetos humanos le asocio un número de **0** a **999**. Por ejemplo, **GATO** podría representarlo como **G**(007) **A**(001) **T**(020) **O**(015). Luego tomo todos los libros existentes hoy y, usando mi código, les asocio un número gigantesco en el que está contenida toda su información. Anteponiéndole un cero y una coma, transformo ese número en un decimal entre 0 y 1 y luego mido la distancia entre el extremo izquierdo de la barra y la distancia determinada por mi número. En ese punto trazo una marca, de manera que esa marca codifica todo el conocimiento humano.

Saganio: Glup...





a. ¿Podría usarse el método de Ben Usino para codificar la información que puede haber en la Biblioteca de Babel?

b. ¿Podría usarse el método de Ben Usino para codificar la información que puede haber en el libro de arena?

c. ¿Cree usted que en el desarrollo decimal de π podría estar codificada (mediante el método de Ben Usino) toda la información de todos los libros del mundo?

d. En la práctica, ¿podría una civilización lo suficientemente avanzada codificar todo el conocimiento humano en una barra de metal de un metro de longitud?

13. Aquiles y la tortuga

1. El cuento

Usted ya conoce varias versiones de la historia de Aquiles y la tortuga. La repetimos aquí, sencillamente para que todos estemos de acuerdo y no vayamos a ser injustos ni con Aquiles ni con la tortuga.

Resulta que Aquiles, uno de los maratonistas más famosos de la antigüedad va a hacer una carrera de velocidad con su contrincante más difícil: la tortuga. Aquiles, siendo poco modesto y viendo el tamaño de su rival (además de cierta tradición que habla acerca de la velocidad con que normalmente se desplazan estos animales) decide darle una ventaja a la tortuga. De hecho le da 1.000 metros de ventaja (Aquiles es diez veces más veloz que la tortuga).

La carrera comienza. Cuando Aquiles llega al punto donde se encontraba la tortuga en el momento de la partida, ha pasado un cierto tiempo. En este espacio de tiempo, la tortuga ha logrado recorrer una distancia. Si Aquiles quiere alcanzar a la tortuga, tiene entonces que recorrer esta nueva distancia. Para hacerlo, necesita un cierto tiempo. Cuando él logra llegar a donde estaba la tortuga, esta ya ha avanzado otro poco. Es decir, Aquiles no logró alcanzarla en ese intento, puesto que la tortuga continúa llevándole una cierta ventaja. Aquiles tiene que recorrer esta distancia, pero para ello necesita un cierto tiempo. En ese tiempo, la tortuga ha recorrido una nueva distancia... El pobre Aquiles no logrará nunca alcanzar a la tortuga.

2. La práctica

La anterior es una versión simplificada de una paradoja de Zenón. Es una paradoja, porque la manera como se presenta le hace a uno llegar a una conclusión aparentemente extraña. Y la pregunta es: ¿Será que Aquiles logra alcanzar a la tortuga? Y, si lo logra, ¿en qué momento y después de qué distancia?

Un amigo de Aquiles estuvo presente en esta competencia y, viendo la velocidad de la tortuga y el problema que se le presentaba a su amigo, escribió los siguientes datos sobre la distancia recorrida por Aquiles.

Tiempo (en minutos)	0	1	2	3	...
Distancia (en metros)	0	10	20	30	...

A partir de la tabla, responda a las siguientes preguntas. Usted debe iustificlr sus respuestas.

a. ¿A qué distancia del punto de partida se encontraba Aquiles al cabo del segundo minuto?

b. ¿A qué distancia del punto de partida se encontraba Aquiles al cabo de un minuto y medio?

c. ¿A qué distancia del punto de partida debería encontrase Aquiles al cabo de cuatro minutos?

d. ¿Cuánto tiempo debe haber pasado para que Aquiles se encuentre a 130 metros del punto de partida?

El amigo de Aquiles hizo también la tabla para la tortuga.

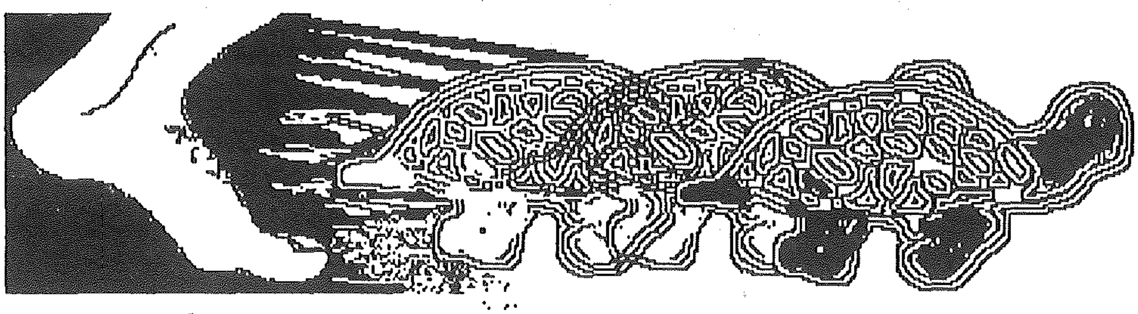
e. ¿Cómo es esta tabla?

f. Responda las preguntas a) a d), para la tortuga.

g. Haga una representación gráfica del problema.

h. ¿Será que Aquiles alcanza a la tortuga?

14. Aquiles, la Tortuga y Zenón



Traducción no literal de un capítulo de Gödel, Escher, Bach. An Eternal Golden Braid

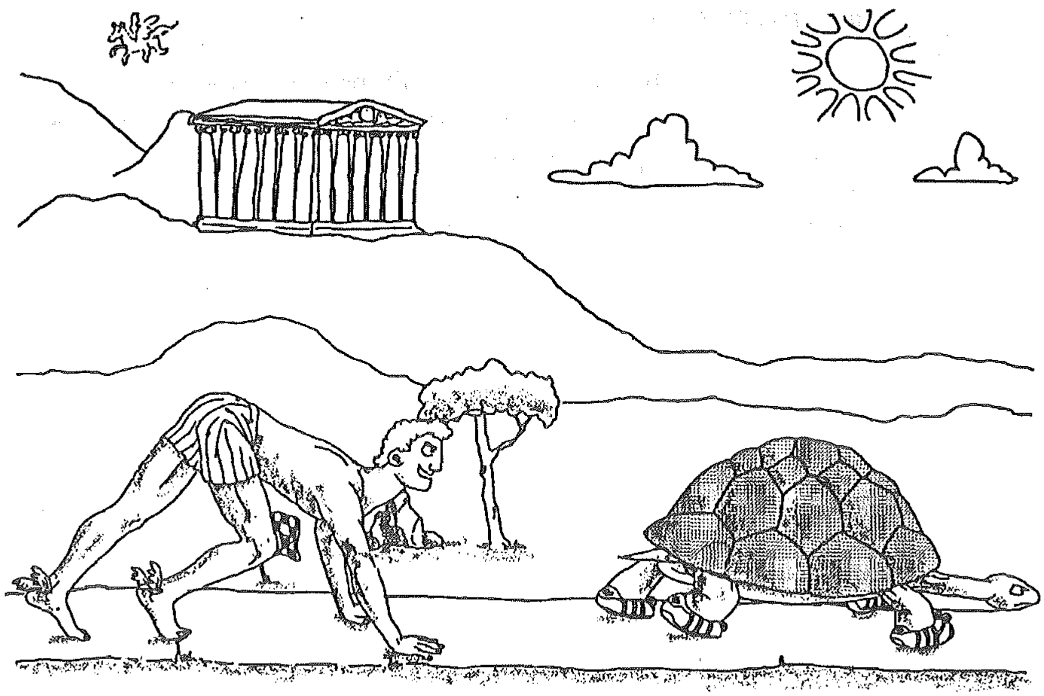
1. El cuento

Aquiles (el guerrero griego, los más rápidos pies de todos los mortales) y la Tortuga se encuentran de pie en una empolvada pista de carreras bajo el sol intenso. Al final de la pista, en un alto mástil, se ve una bandera rectangular. La bandera es completamente roja, excepto en un lugar donde se le ha hecho un hueco en forma de anillo, a través del cual se puede ver el azul del cielo.

Aquiles: ¿Qué es esa extraña bandera al otro lado de la pista? Me recuerda un dibujo de mi artista favorito, M.C. Escher.

La Tortuga: Esa es la bandera de Zenón.

Aquiles: ¿Es posible que ese hueco que tiene se parezca a la tira de Möbius que Escher dibujó alguna vez? Hay algo extraño en esa bandera; estoy seguro.



La Tortuga: El anillo que se le ha cortado a la bandera tiene la forma del numeral cero, que es el número favorito de Zenón.

Aquiles: ¡Pero si el cero no se ha inventado todavía! Será inventado por un matemático hindú dentro de un milenio. Por consiguiente, querida Señora T, mi argumento prueba que esa bandera es imposible.

La Tortuga: Su argumento es muy persuasivo, Aquiles; y tengo que aceptar que esa bandera es imposible. Pero es bella en todo caso, ¿no es cierto?

Aquiles: Claro que sí. No hay duda acerca de su belleza.

La Tortuga: Pregunto si su belleza está relacionada con su imposibilidad. No lo sé. Nunca he tenido tiempo para analizar la belleza. Es la ESENCIA en Mayúsculas. Y nunca he tenido tiempo para analizar las ESENCIAS en Mayúsculas.

Aquiles: Hablando de ESENCIAS en Mayúsculas, Señora T, ¿se ha preguntado usted alguna vez sobre el propósito de la vida?

La Tortuga: ¡Cielos! Nunca.

Aquiles: ¿Nunca se ha preguntado usted por qué estamos aquí? ¿Quién nos inventó?

La Tortuga: Ah, esa es una cosa diferente. Nosotros somos invenciones de Zenón (como usted lo verá dentro de poco); la razón por la cual estamos aquí es para hacer una carrera.

Aquiles: ¿Una carrera? ¡Qué horror! Yo, el mortal más rápido de todos los tiempos, contra usted, la más lenta de todos los lentos. Una tal carrera no tiene ningún sentido.

La Tortuga: Usted podría darme una ventajita.

Aquiles: Tendría que ser una ventajota.

La Tortuga: No me quejo.

Aquiles: Pero yo voy a alcanzarla, tarde o temprano. Y muy seguramente muy temprano.

La Tortuga: No, si las cosas suceden de acuerdo a la paradoja de Zenón. Zenón espera utilizar nuestra carrera para mostrar que el movimiento es imposible, ¿ves, ala? Según Zenón, el movimiento es posible únicamente en la mente. En realidad, el movimiento *Es Inherentemente Imposible.* Y él lo prueba de manera muy elegante.

Aquiles: ¡Ah! sí; ahora recuerdo: el famoso oráculo de Zen acerca del Maestro Zen de Zenón. Como usted lo dice, es muy sencillo.

La Tortuga: ¿El oráculo de Zen? ¿El maestro Zen? ¿Qué quiere usted decir?

Aquiles: La historia es la siguiente: dos monjes estaban discutiendo acerca de una bandera. Uno dijo: la bandera se está moviendo. El otro dijo: El viento se está moviendo. El sexto patriarca dijo: No es el viento, no es la bandera; es la mente que se mueve.

La Tortuga: Me temo que usted está un poco confundido, Aquiles. Zenón no es el Maestro Zen; lejos de ello. El es, de hecho, el filósofo griego del pueblo de Elea (que queda entre los puntos A y B). Dentro de algunos siglos, él será conocido por sus paradojas acerca del movimiento. En una de esas paradojas, esta carrera que vamos a hacer los dos jugará un papel central.

Aquiles: Estoy completamente confundido. Recuerdo claramente cómo acostumbraba yo a repetir una y otra vez los nombres de los seis patriarcas Zen, y yo decía siempre El sexto patriarca es Zenón, el sexto patriarca es Zenón ... (*Súbitamente, una suave brisa tibia comienza a correr*) ¡Mire, Señora Tortuga: mire la bandera cómo se mueve! ¡Cómo me gusta mirar los quiebres que se desplazan sobre la tela! ¡Y el hueco en forma de anillo también se está moviendo!

La Tortuga: No sea tonto. La bandera es imposible, por consiguiente no se puede estar moviendo. Es el viento el que se mueve.

En este momento, Zenón pasa por casualidad por ahí.

Zenón: ¡Hola! ¿Qué tal? ¿Qué ha habido? ¿Qué hay de nuevo?

Aquiles: La bandera se está moviendo.

La Tortuga: El viento se está moviendo.

Zenón: ¡Ay! Amigos, queridos amigos. ¡Dejen de discutir! ¡No se peleen más! Yo les voy a resolver sus dudas. Y, además, ¡qué día más bonito!

Aquiles: Este tipo nos debe estar tomando del pelo.

La Tortuga: No: espere Aquiles. Escuchemos qué es lo que nos quiere decir. ¡Oh Desconocido Señor! comparte con nosotros vuestros pensamientos en esta materia.

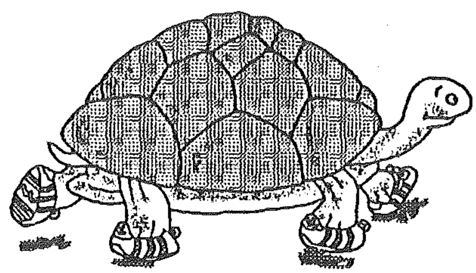
Zenón: Encantado. No es el viento, no es la bandera —ninguno de los dos se está moviendo. Pues yo he descubierto un gran Teorema, que dice: El movimiento es Inherentemente Imposible. Y de este teorema se deduce un Teorema aún más grande, el Teorema de Zenón: El Movimiento no Existe.

Aquiles: ¿El Teorema de Zenón? ¿Es usted, por grandísima casualidad, el filósofo Zenón de Elea?

Zenón: En efecto, el mismo que canta y baila, Aquiles.

Aquiles: (Rascándose la cabeza, atónito) Pero, ¿cómo supo él mi nombre?

Zenón: ¿Puedo persuadirlos de escucharme, para explicarles por qué las cosas son como son? He venido hasta Elea, desde el punto A, esta tarde, simplemente tratando de encontrar alguien que le pare bolas a mi argumento. Pero todos están corriendo, muy apurados, sin tener tiempo. No se imaginan lo frustrante que es encontrarse con un rechazo tras otro rechazo. ¡Ay!, pero lamento molestarlos con mis problemas. Yo sólo quisiera preguntar una cosa: ¿quisieran ustedes aguantarse a un filósofo loco durante unos breves momentos –muy breves, se los prometo– con sus teorías excén- tricas?

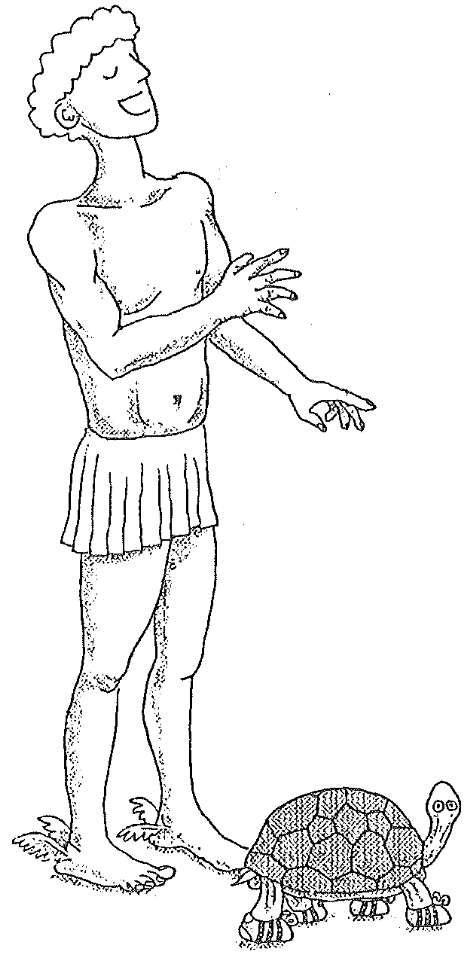


Aquiles: ¡Por supuesto! ¡Por favor, ilumínenos! Yo sé que hablo por nosotros dos, puesto que mi compañera, la Señora Tortuga, estaba tan sólo hace unos momentos hablando con veneración de usted. Y ella mencionó especialmente sus paradojas.

Zenón: Gracias. Lo que sucede es que mi Maestro, el quinto patriarca, me enseñó que la realidad es una, inmutable e incambiable; toda pluralidad, todo cambio y todo movimiento son puras ilusiones de los sentidos. Algunos se han burlado de sus puntos de vista. Pero yo voy a mostrarles qué estúpidas son esas burlas. Se los voy a mostrar con dos caracteres de mi propia invención: Aquiles (un guerrero griego, el más rápido de todos los mortales) y una Tortuga. En mi cuento, alguien que pasa por ahí los convence de hacer una carrera a lo largo de una pista hasta el lugar donde se mueve una bandera bajo la brisa. Supongamos que, dado que la Tortuga es un corredor mucho más lento, tiene una ventaja de, digamos 100 metros. La carrera comienza. En unos pocos saltos, Aquiles ha logrado llegar hasta donde estaba la Tortuga en el momento en que la carrera comenzó.

Aquiles: ¡Ajá!

Zenón: Y ahora la tortuga no le lleva sino diez metros de ventaja a Aquiles. En pocos instantes, Aquiles ha llegado a ese lugar.



Aquiles: ¡Je, Je!

Zenón: No obstante, en esos pocos instantes, la Tortuga ha logrado avanzar un poco más. En menos de lo que canta un gallo, Aquiles recorre esa distancia.

Aquiles: ¡Ja, ja, ja!

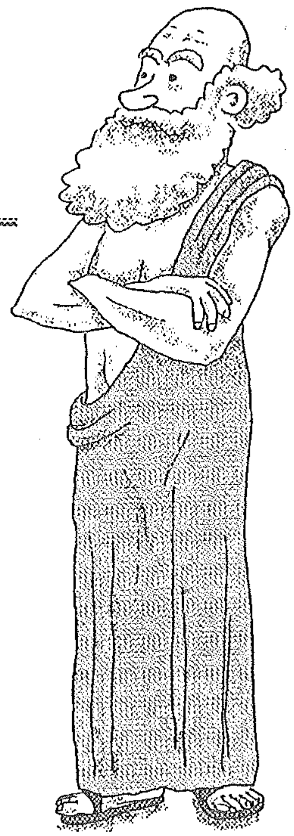
Zenón: ¿Están listos?Pero, mientras que el gallo cantaba (y este era un gallo rápido) la Tortuga ha logrado avanzar una mincha, y Aquiles se encuentra todavía atrás. Ahora ustedes ven que para que Aquiles alcance a la Tortuga, este juego tendrá que ser jugado un número INFINITO de veces, y, por consiguiente, ¡Aquiles no podrá NUNCA alcanzar a la Tortuga!

La Tortuga: ¡Ji, ji, ji!

Aquiles: Hm ... hmm ... hmmm.... hmmmm... Ese argumento me suena raro. Sin embargo no puedo descubrir qué hay de equivocado en él.

Zenón: El es un mamagallista, ¿o qué? Esta es mi paradoja favorita.

La Tortuga: Excúseme Zenón, pero me parece que su cuento ilustra el principio errado, ¿no es cierto? Usted nos acaba de contar lo que será conocido, dentro de muchos siglos, como la "paradoja de Aquiles" por Zenón, que muestra (¡ajjem!) que Aquiles no podrá nunca alcanzar a la Tortuga. Pero la prueba de que el Movimiento es Inherentemente Imposible es su "paradoja de la dicotomía". ¿Me equivoco?



Zenón de Elea. Filósofo griego nacido en Elea al sur de Italia entre 490 y 485 A.C., discípulo de Parménides a quien acompañó a Atenas. Fundó la escuela Eleática. Autor de los célebres sofismas(aporias) sobre la flecha y Aquiles y la tortuga, por los cuales negaba la existencia del movimiento y de la pluralidad del ser. Por conspirar contra un tirano fue condenado a morir en el tormento, que afrontó con entereza. Sus obras han desaparecido pero quedan citas que de sus ideas hace Aristóteles y sus enseñanzas se mencionan en el Parménides *de Platón.*

Zenón: ¡Ay, ala, qué pena! Por supuesto, usted tiene razón: esa es la paradoja acerca de cómo, para ir de A a B, uno tiene que llegar a la mitad primero, y del trecho que falta uno tiene que recorrer la mitad, y del que queda, la mitad, y así sucesivamente. Pero, usted se dará cuenta, ambas paradojas tienen el mismo sabor. Para ser franco, ala, yo sólo tuve Una Gran Idea, la aprovecho de muchas maneras diferentes.

Aquiles: Les aseguro que esos argumentos contienen un error. Yo no sé cuál es, pero que contienen un error, lo contienen.

Zenón: ¿Usted está poniendo en duda la validez de mi paradoja? ¿Por qué no la prueba? ¿Ve usted la bandera roja que está, allá, al final de la pista?

Aquiles: ¿La bandera imposible basada en el dibujo de Escher?

Zenón: Exactamente. ¿Qué le parece si hacen una carrera hasta ella, dándole usted una ventaja a la tortuga?

La Tortuga: ¿Qué tal 100 metros?

Zenón: Muy bien. 100 metros.

Aquiles: Cuando quieran.

Zenón: ¡Magnífico! ¡Qué emoción! ¡Una prueba experimental del Teorema que he probado tan rigurosamente! Señora Tortuga, ¡quiere adelantarse 100 metros, por favor? ¿Están listos? (La Tortuga avanza —muy lentamente— los 100 metros)

Aquiles y la Tortuga: ¡Listos!

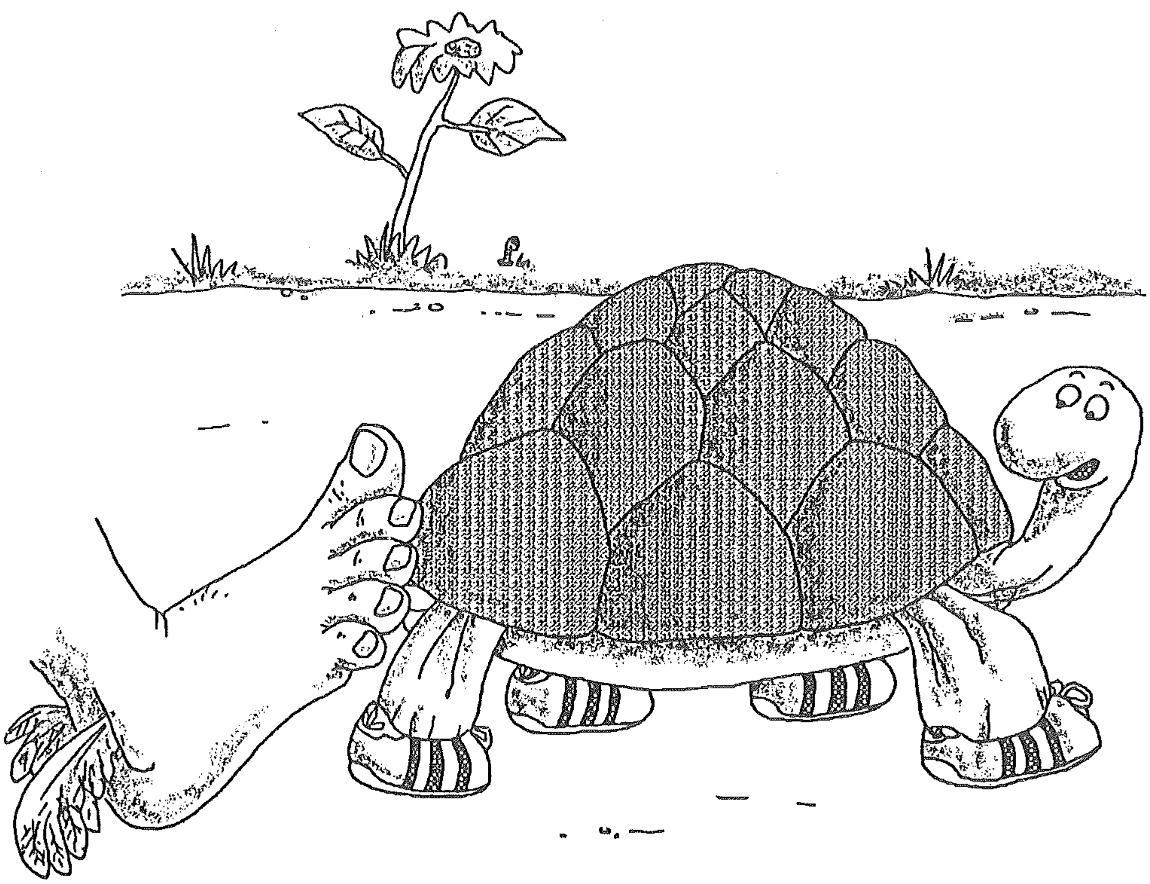
Zenón: En sus marcas, listos, ... ¡ya!

2. Guía de lectura

Es importante darse cuenta de que el secreto de la paradoja de Aquiles y la Tortuga *no* es si Aquiles alcanza a la Tortuga o no, sino *cómo, dónde y cuándo* la alcanza

a. ¿Puede usted decir *con exactitud* en qué momento Aquiles alcanza a la Tortuga?

b. ¿Puede usted decir con *exactitud* a qué distancia del punto de partida de Aquiles, éste alcanza a la Tortuga?



c. Para responder a las dos preguntas siguientes suponga los siguientes datos:

- Aquiles le da una ventaja de 100 metros a la Tortuga.
- La velocidad de Aquiles es de 10 metros por segundo.
- La velocidad de la Tortuga es de 1 metro por segundo.

d. Haga una sucesión de dibujitos que muestren en qué posición se encontrarían Aquiles y la Tortuga en diferentes momentos de la carrera. Por ejemplo, después de uno, dos, ..., minutos.

e. ¿Puede Aquiles *saltar* de un momento a otro, de tal manera que *antes* esté atrás de la Tortuga y *después* esté adelante?

f. Encuentre la sucesión de los tiempos que se demora Aquiles en llegar al punto donde estaba la Tortuga en el momento anterior. ¿Puede usted imaginarse como sería esta sucesión en el infinito?

g. Descubra el razonamiento que mostraría que el momento en que Aquiles alcanza a la Tortuga es el resultado de la siguiente suma:

$$\boxed{10 + 1 + 1/10 + 1/100 + 1/1000 + \ldots}$$

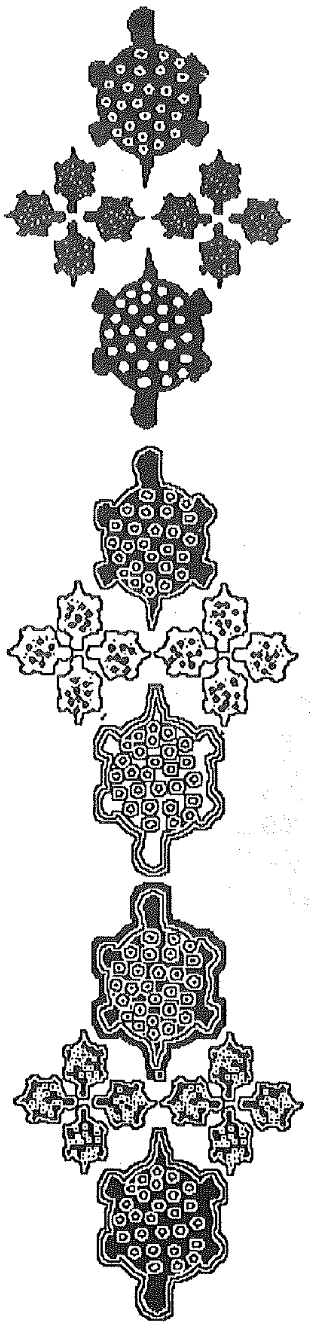
h. Compare la suma anterior con las dos siguientes sumas.

$$\boxed{1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots}$$

$$\boxed{1/10^6 + 1/10^6 + 1/10^6 + 1/10^6 + 1/10^6 + \ldots}$$

i. ¿Es cierto que todas las sumas infinitas, dan resultado infinito?

15. Avatares de la tortuga



Una reflexión de J. L. Borges

1. El infinito, otra vez

a. En el texto, Borges presenta varios argumentos que apelan a la *noción de infinito.* Escoja uno de tales argumentos, expréselo en sus palabras y coméntelo. Si usted está de acuerdo con el argumento, explique *por qué*; si está en desacuerdo *critique* el argumento.

b. Invéntese otro ejemplo en el que se use la *noción de infinito* (o en el que haya un *regressus infinitum ad infinitum*). Sea original, eso no cuesta nada.

c. ¿Qué es eso de *"regressus"*?

2. Comentando frases

a. Explique lo que quería decir Agripa con:

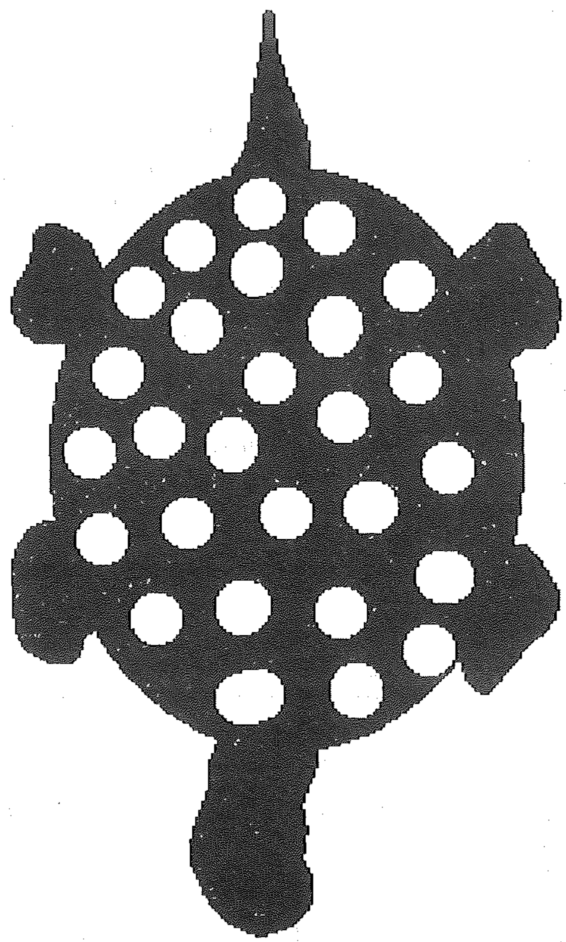
Toda prueba requiere una prueba anterior.

b. Comente la siguiente frase de Santo Tomás de Aquino:

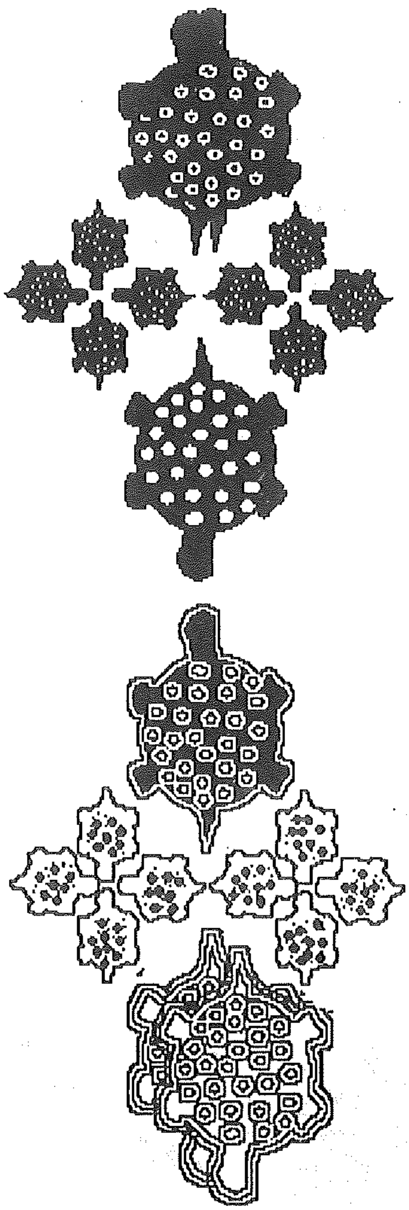
No hay cosa en el universo que no tenga una causa eficiente y [... que] esa causa, claro está, sea el efecto de otra causa anterior.

c. Exprese su opinión sobre la siguiente frase:

Hay un concepto que es el corruptor y el desatinador de los otros. No hablo del Mal cuyo limitado imperio es la ética; hablo del infinito.



16. La perpetua carrera de Aquiles y la tortuga



Otra reflexión de J. L. Borges

1. Refutaciones

a. ¿Qué pretende mostrar Zenón con la paradoja de Aquiles y la tortuga?

b. Resuma, en sus propios términos, la refutación de Stuart Mill de la paradoja de Aquiles y la tortuga.

c. ¿Cree usted que el argumento de Mill refuta realmente la paradoja?

d. ¿Qué teorías tenía Mill? ♣*En Inglaterra lo llamaban "thousand"...*♣

e. Exprese, en sus palabras, la refutación de Bergson y coméntela.

f. ¿Quién era Bergson?

g. Explique en qué consiste, según Russell, la operación de contar y dé un ejemplo (que no aparezca en el texto).

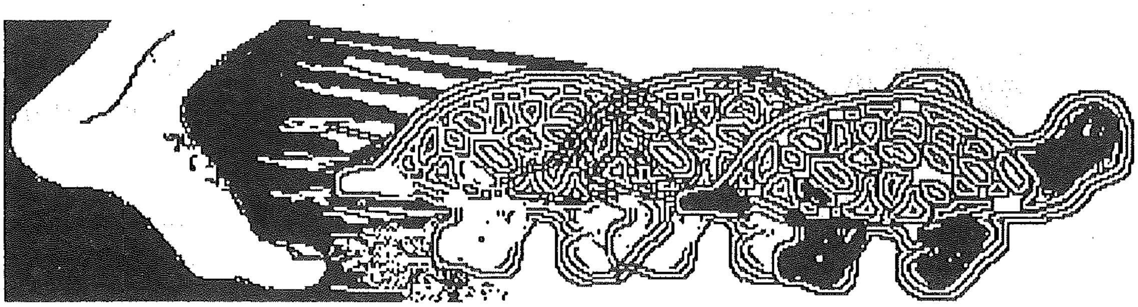
h. ♣*Tranquilo. No le voy a preguntar quién era Russell...*♣ Trate de establecer, de manera geométrica, una correspondencia biunívoca entre los siguientes segmentos:

i. ¿Puede su respuesta anterior dar lugar a una refutación de la paradoja?

j. ¿Cree usted que la paradoja implica que el movimiento es una ilusión engañosa de nuestros sentidos? Si no, ¿cuál es en su opinión la falla del argumento de Zenón?

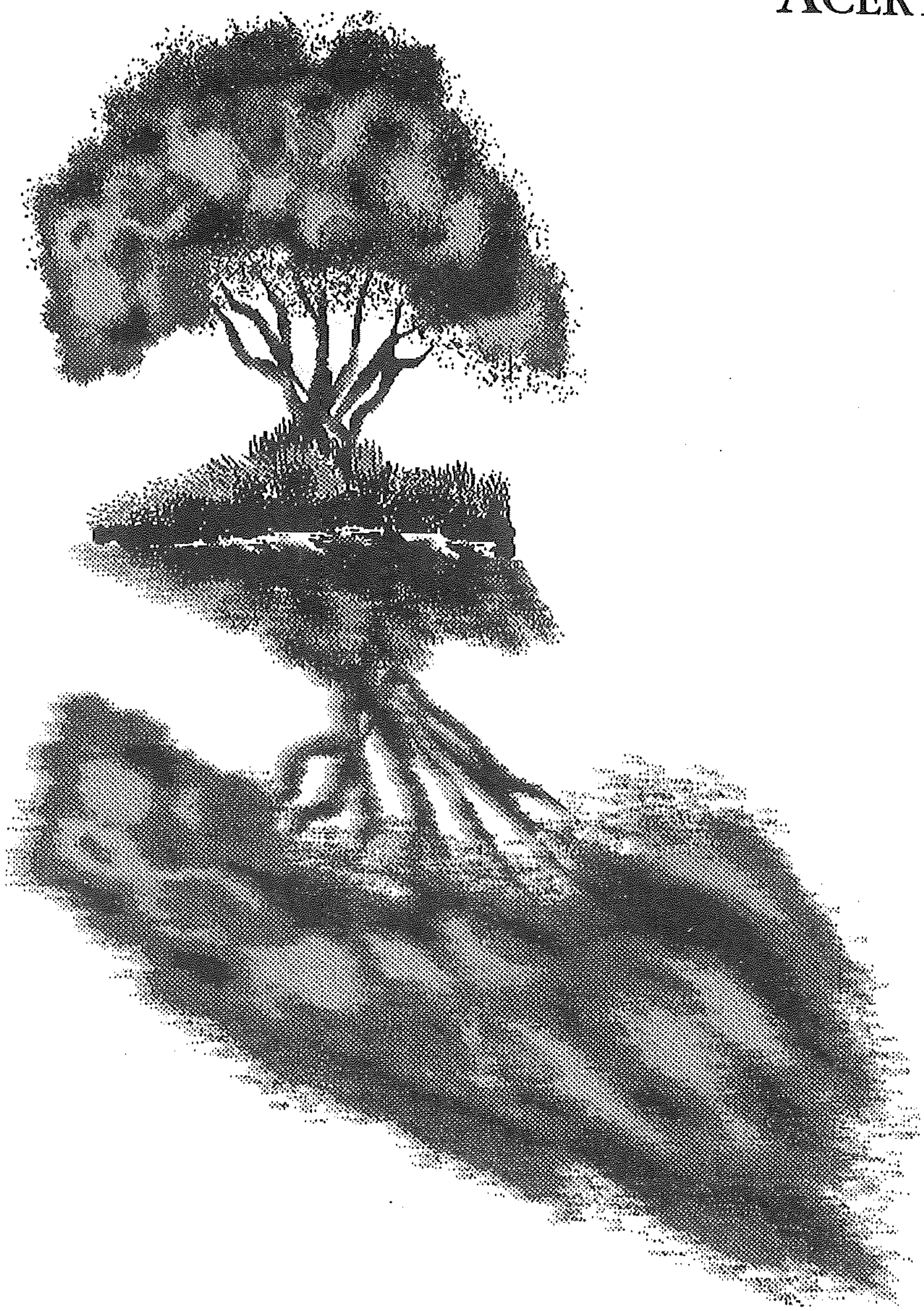
k. Comente la siguiente frase de Borges:

> [...] la existencia de un cuerpo físico, la permanencia inmóvil de una tarde en la vida, se alarman de aventura por [la paradoja de Zenón]. Esa descomposición es mediante la sola palabra *infinito*, palabra (y después concepto) de zozobra que hemos engendrado con temeridad y que una vez consentida en un pensamiento, estalla y lo mata.



5.

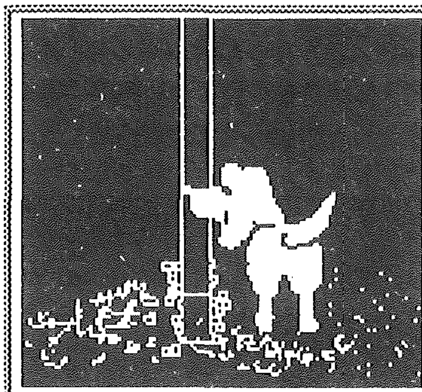
ACERTIJOS



1. Una ayudita

"La instrucción matemática debería ayudar a los estudiantes a desarrollar su habilidad para leer y usar textos y otros materiales matemáticos. Debería preparar a los estudiantes para convertirse, tanto como sea posible, en aprendices independientes, que interpretan y usan las matemáticas".

Alan Schoenfeld

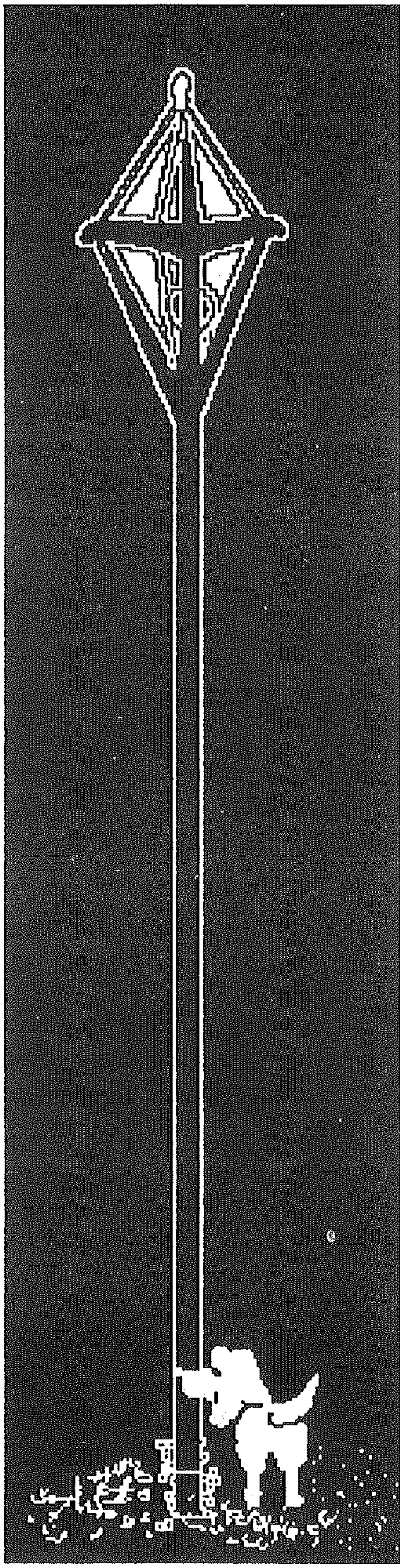


Los acertijos que usted encontrará a continuación no son tan fáciles como parece a primera vista. Es muy posible que la primera solución impulsiva que usted dé a un acertijo sea incorrecta. El propósito de los acertijos es obligarlo a pensar, pero a pensar con método. *Por consiguiente, es necesario que usted desarrolle un método para atacar cada uno de estos problemas.*

1. Resolución de problemas

Cómo definir "problema" y "resolución de problemas" ha sido un tema que se ha tratado durante varios años. Podríamos definir un problema como una tarea que se debe realizar, pero la resolución de problemas se podría definir de tres maneras distintas:

- como un contexto: como justificación para enseñar matemáticas, como motivación en un tema específico, como diversión, como medio para desarrollar destrezas, como práctica (ejercicios)
- como una destreza: resolver problemas permite desarrollar destrezas de razonamiento en un contexto matemático, y ella misma se puede ver como una destreza



- como un arte: la resolución de problemas es el corazón de las matemáticas, casi podría decirse que son las mismas matemáticas

Esta última es la definición con la que se trabajará este tema en Matebásica.

Ya que el aprendizaje es una actividad cultural, es importante crear ambientes matemáticos que favorezcan el entendimiento y desarrollo de las habilidades matemáticas. Este ambiente podría ser construido alrededor de la resolución de problemas y esperamos que este conjunto de acertijos contribuya a generarlo.

Pero, ¿cómo se resuelve un problema?

Lo que usualmente se ha hecho es: presentar un problema a resolver para introducir una técnica que ayude a resolverlo, y después presentar muchos ejercicios que permitan practicar la técnica. Cuando se utilizan estrategias de resolución de problemas en esta forma lo que realmente se está haciendo es un trabajo algorítmico.

Supongamos que una persona está en una situación en que debe usar las matemáticas bien sea para interpretar o solucionar un problema. Lo primero que debemos preguntarnos es:

¿Qué información relevante a la situación matemática o problema debe tener la persona?

y después:

¿Cómo va esta persona a accesar y usar esa información?

En realidad la resolución de problemas es aprender a enfrentarse con tareas nuevas y poco familiares que requieren métodos de solución no conocidos.

Vista de esta forma, la resolución de problemas es un problema difícil que esperamos superar entre todos.

La auto-regulación o monitoreo y control es uno los principales aspecto del "metaconocimiento" y significa ser conscientes del proceso de conocimiento que se está siguiendo. Es una destreza que la mayoría de los estudiantes no tiene pero que puede ir desarrollando si se le dan instrucciones explícitas que enfoquen estos aspectos metacognitivos del pensamiento matemático. Preguntas como:

Qué es exactamente lo que están haciendo?

Por qué lo están haciendo?

Para qué les va a servir?

pueden ayudar mucho a crear hábitos por cuestionar el trabajo que están realizando y les permite darse realmente la oportunidad de solucionar problemas.

A continuación proponemos una estrategia (heurística) para enfrentarse a un problema. Esta se debe a Polya, maestro en este tema.

Esperamos que estas sugerencias le ayuden a convertirse en un "resolutor de problemas".

2. El método

Usted encontrará a continuación una lista de preguntas. El método consiste simplemente en que usted se haga (seriamente) cada una de estas preguntas para cada uno de los acertijos que usted quiera resolver. En algunos casos, habrá preguntas que no se aplican al problema particular. Esto es irrelevante. Lo importante es que habrá algunas que sí se aplican y que, si usted intenta mantener un orden mental y físico (en la hoja en la que está trabajando), podrá muy seguramente resolver la mayor parte de los acertijos.

Las preguntas del método son las siguientes:

a. ¿Leyó todo el problema antes de comenzar a resolverlo?

b. ¿Está seguro de que lo que hay en su cabeza después de leer (su *interpretación* del problema) es lo que el problema dice?

c. ¿Está seguro de que lo que el problema dice es lo que hay en su cabeza? ♣ *Ojo: las dos preguntas anteriores no son necesariamente la misma* ♣

d. ¿Ha visto un problema similar a éste, que usted ya lo haya resuelto?

e. ¿Qué le piden?

f. ¿Cuáles son las *condiciones* del problema?

g. ¿Puede imaginar un problema similar, pero más sencillo?

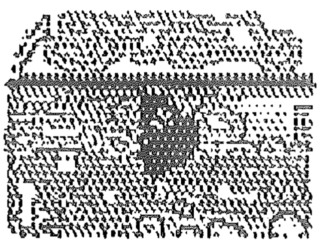
h. ¿Puede hacer un dibujito? ♣ *¡Siempre se puede hacer un dibujito! ¡Hágalo!* ♣

i. ¿Puede experimentar? Es decir, ¿intentar algunos casos particulares para ver si cumplen con las condiciones?

j. ¿Comprobó su respuesta? Esto es, ¿está seguro de que su solución cumple con *todas* las condiciones del problema?

k. ¿Discutió su solución con un compañero y logró convencerlo de que su solución es la correcta?

2. ¿Dónde está el retratico?



Los siguientes tres acertijos pretenden descubrir qué tan bien le fue a usted en tercero de primaria cuando su profesora —a quien usted, obviamente, le llevaba religiosamente una manzana— quiso con toda la buena voluntad del mundo enseñarle a leer.

1. ¿Sabe leer?

a. Si un avión se acaba de estrellar exactamente en la frontera entre Colombia y Perú, ¿en qué país se deben enterrar a los sobrevivientes?

b. Hace 35 años, ¿cómo se llamaba el presidente de Colombia?

c. Dos conejos están sentados tomando el sol al lado de un estanque. El pequeño es el hijo del grande, pero el grande no es el papá del pequeño. ¿Por qué?

d. En una calle de Bogotá, el periódico El Espectador ♣*que se especializa en este tema*♣ descubrió un hueco de forma cúbica. El lado del cubo mide dos metros. Si un centímetro cúbico de tierra pesa dos gramos, ¿cuánto pesa la tierra que hay en el hueco?

2. ¡Cuidado! No se equivoque

Mótico y Mútico están sentados en sus coches tomándose un tetero, mientras miran pasar los coches de sus vecinas.

Yo tengo gases, dijo Mótico.

A mí me tienen que cambiar los pañales, dijo Mútico. ♣*Algo de esto tiene que pasar para que Mútico abra la boca*♣

Si al menos uno de los dos ha mentido y Mética tiene listos los pañales y una bayetilla, ¿a quién hay que sacarle los gases y a quién hay que cambiarle los pañales? ♣*¿Sí puede ver las consecuencias de que usted se equivoque?*♣

3. Un ratón de biblioteca

Para resolver este acertijo, usted tiene que estar seguro de que comprende el significado de las frases *más de*, *menos de* y *alguno*. Responda primero las siguientes preguntas:

a. Si usted tiene tres cuadernos,

- ¿Tiene usted *más* de dos?
- ¿Tiene usted *más* de tres?
- ¿Tiene usted *menos* de tres?
- ¿Tiene usted *menos* de cuatro?
- ¿Tiene usted *algún* cuaderno?
- ¿Tiene usted *al menos* un cuaderno?
- ¿Tiene usted *al menos* dos cuadernos?

b. Ahora, si usted acaba de prestar dos de sus cuadernos ♣*porque usted es de los compañeros chéveres que prestan cuadernos*♣ y no tiene sino uno,

- ¿Tiene usted *algún* cuaderno?
- ¿Tiene usted *al menos* un cuaderno?
- ¿Tiene usted *máximo* cinco cuadernos?

Y, ahora sí, el acertijo:

— *Rupérez tiene más de dos mil libros*—, dijo Alberto.

— *De eso nada* —replicó Jorge —. *Tiene muchos menos.*

— *Bueno* —dijo Enriqueta, apaciguadora—. *Alguno tendrá.*

c. Si tan sólo una de las tres declaraciones es verdadera, ¿cuántos libros tiene Rupérez?

4. ¿Pelirrojo o moreno?

Mótico y Mítico están sentados en las escaleras de su escuela.

— *Yo soy Mótico*—, dice la persona morena.

— *Yo soy Mítico*—, dice la persona pelirroja.

a. Si al menos uno de los hablantes ha mentido, ¿quién es pelirrojo y quién moreno? *No pudimos invitar a Mútico a este acertijo porque, además de mudo, ¡es calvo!*

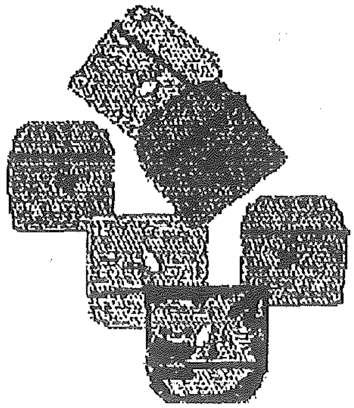
5. Portia, la original

En el libro *El mercader de Venecia* de William Shakespeare, Portia tiene tres cofres, uno de oro, uno de plata y uno de plomo y en uno de ellos ella ha escondido su retrato. Cuando uno de sus pretendientes se presenta, ella le hace escoger uno de los cofres. Aquel que tiene la suerte (o la astucia) de escoger el cofre que contiene el retrato puede casarse con ella.

Sobre cada cofre hay una inscripción para guiar al pretendiente, pues Portia no quiere escoger un esposo por su virtud, sino por su inteligencia.

Las inscripciones que ella puso sobre cada cofre son las siguientes:

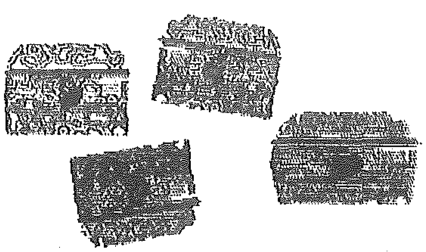
Oro	Plata	Plomo
El retrato está en este cofre	El retrato no está en este cofre	El retrato no está en el cofre de oro



Ella le explica al pretendiente que, de estas afirmaciones, una sola es verdadera.

a. ¿Qué cofre debe escoger el pretendiente para obtener la mano de Portia? Es esencial que usted:

- Identifique lo que le están dando
- Identifique lo que le están pidiendo
- Identifique las condiciones que debe cumplir su solución
- Haga un dibujito y una tabla donde trabajar ♣*carpinteros no somos, ala*♣
- Experimente con el problema
- Encuentre una solución ♣*¡Qué va! Yo creía que esto lo hacíamos por diversión*♣
- Compruebe que su solución cumple con las condiciones del problema



6. Eso le pasa por voltearepas, Portia

El pretendiente de Portia I logró descubrir el buen cofre. Como ella lo había prometido, Portia se casó con su pretendiente y fueron felices

—por un tiempito—. *♣Algunos dirán que eso le pasa a Portia por casarse "por inteligencia" y no "por amor". Algo similar se puede decir de su pretendiente, ¿no es cierto?♣*
Portia pensó:

Aunque mi esposo demostró una cierta inteligencia al escoger el cofre correcto, yo creo que el problema no era realmente difícil y si yo me hubiese inventado un acertijo más difícil, muy seguramente habría encontrado un marido más vivo que el que tengo. *♣Hay quienes dirán que uno nunca está contento con lo que tiene. Otros podrán agregar que eso es cierto, pero especialmente para las mujeres♣*

Después de todo este razonamiento, Portia entabló un proceso de divorcio y lo logró. *♣En aquella época, usted lo ve, no existía aún el problema del Concordato♣* En seguida, se puso a buscar marido y, para ello, se inventó un nuevo acertijo, una variante del primero. Esto fue lo que escribió en los cofres:

Oro	Plata	Plomo
El retrato no está en el cofre de plata	El retrato no está en este cofre	El retrato está en este cofre

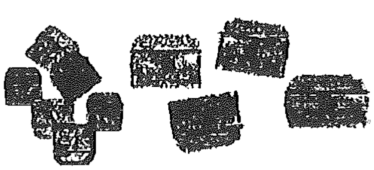
Ella le dijo a sus pretendientes que al menos una de las inscripciones era verdadera y que al menos una era falsa.

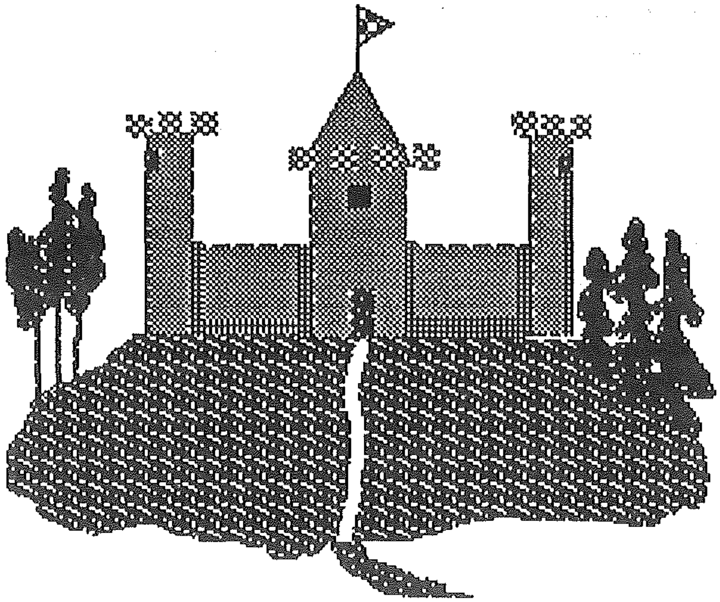
a. ¿Dónde escondió ella el retrato?

b. ¿Será que el método que descubrió para resolver el primer acertijo de Portia le sirve para resolver éste?

Epílogo

Por un golpe del destino, *♣sí, el destino es así♣* fue su antiguo marido quien, siendo verdaderamente muy brillante, adivinó dónde estaba escondido el retrato. Se volvieron a casar. *♣Puesto que en esa época no había concordato, no hubo problema, tampoco♣* El la llevó a casa y, apenas habían cerrado la puerta, le dió una muenda tan terrible que a Portia nunca se le volvió a ocurrir una sola idea relacionada con retratos y cofres. *♣En esa época no había concordato, pero tampoco había donde pudiesen ir las señoras a quejarse...♣*





7. Portia II: de tal palo, tal astilla

Después que Portia se recuperó de la muenda que le dió su segundo marido, *♣que era también el primero, ¿lo recuerda?♣* ambos vivieron muy felices y, esta vez, para siempre. Tuvieron una hija que se llamó Portia II, pero que nosotros llamaremos Portia, para simplificar. Cuando la joven Portia se transformó en mujer, fue tan bella y tan inteligente como su madre. Ella adoptó, también *♣hay cosas que parece que fuesen genéticas♣* el método de los cofres para escoger a su esposo, pero con otra variante, pues el pretendiente debía pasar *dos* pruebas para obtener su mano.

Primera prueba

Para esta prueba, se grabaron dos afirmaciones sobre las cubiertas de los cofres. Portia le decía a cada pretendiente que ella había escrito las frases de tal manera que nunca había más de una mentira sobre cada cubierta. Los cofres se presentaban de la siguiente manera:

Oro	Plata	Plomo
1. El retrato no está aquí	1. El retrato no está en el cofre de oro	1. El retrato no está aquí
2. El autor del retrato es veneciano	2. El retrato está en el cofre de plomo	2. El retrato está en el cofre de oro

a. ¿En qué cofre está el retrato?

Segunda prueba

Si el pretendiente tenía éxito en la primera prueba, se le llevaba a otra pieza ♣*Usted sabe, en esa época, los castillos no tenían alcobas sino piezas...*♣ donde había otros tres cofres ♣*Sí, ya sé, usted está comenzando a pensar que el abuelo de Portia era carpintero*♣ que también tenían dos afirmaciones sobre cada una de sus cubiertas. El pretendiente sabía que Portia había escogido las leyendas de tal manera que, sobre uno de los cofres, las dos afirmaciones eran verdaderas, sobre otro, las dos afirmaciones eran falsas y, sobre el tercero, una afirmación era falsa y la otra verdadera.

Oro	Plata	Plomo
1. El retrato no está aquí	1. El retrato no está en el cofre de oro	1. El retrato no está aquí
2. El retrato está en el cofre de plata	2. El retrato está en el cofre de plomo	2. El retrato está en el cofre de oro

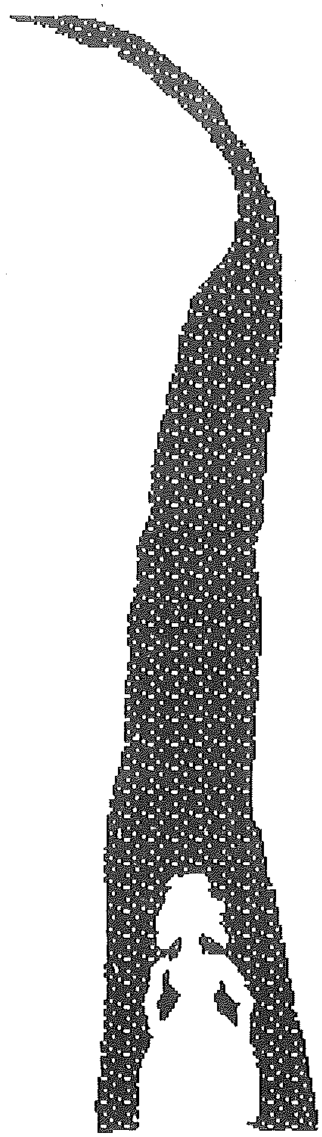
a. ¿Dónde está el retrato?

b. Explique con todo detalle el método que usted desarrolló para resolver las dos partes de este acertijo. Trate de cambiar este acertijo poniendo otras frases en los cofres y utilice su método para resolver su propio acertijo. ¿Cree usted que el acertijo puede resolverse con cualquier tipo de frases?

8. Portia III: ¡Ay estos nietos!

Uno de los pretendientes de Portia II —a quien, para simplificar en aquella ocasión decidimos llamar sencillamente Portia— logró pasar con éxito las dos pruebas que ella había impuesto. Tuvo, por lo tanto, el placer de casarse con Portia. Ella, siendo conocedora de lo que le sucedió a su madre cuando decidió divorciarse para poner de nuevo a prueba a su marido, ♣*y a otros más*♣ nunca tuvo la idea de volver a jugar con cofres. Fue así como Portia (la hija) y su marido vivieron muy felices y, como sucede frecuentemente en estos casos, tuvieron una hija. No es necesario ser adivino para imaginarse qué nombre le pusieron. Sí, la llamaron Portia III. Sin embargo, y para simplificar, nosotros la llamaremos simplemente Portia.

Portia, como era de esperarse, creció volviéndose una joven mujer muy bella con quien muchos querían casarse. Sin embargo, Portia *cosas de genética* resolvió utilizar también los mismos métodos de su madre y de su abuela para resolver ese problemita. No obstante, decidió que las cosas debían ser un poco más difíciles. Es así como el pretendiente debía resolver con éxito, *tres* pruebas. Las pruebas eran bastante complejas, aunque decidió regresar a la costumbre de su abuela y puso únicamente una afirmación sobre cada uno de los cofres. Por otro lado, decidió complicar las pruebas, introduciendo una nueva dificultad, al revelarle a los pretendien- tes que cada uno de los cofres había sido esculpido por uno de dos escultores florentinos muy famosos, *Cellini* y *Bellini*. Todo el mundo sabía que Cellini siempre grababa inscripciones falsas sobre cada cofre, mientras que Bellini siempre grababa inscripciones verdaderas.



Primera prueba

En esta prueba, poco común, el pretendiente tiene dos posibilidades sobre tres de acertar si escoge al azar, mientras que en las pruebas anteriores no tenía sino una posibilidad sobre tres. En efecto, en lugar de utilizar su retrato, Portia utilizaba un puñal que escondía en uno de los cofres, dejando los otros dos vacíos. Para pasar la prueba, el pretendiente debía designar un cofre vacío. Las inscripciones sobre los cofres eran los siguientes:

Oro	Plata	Plomo
El puñal está en este cofre	Este cofre está vacío	Bellini hizo no más de uno de los tres cofres

a. ¿Qué cofre debe escoger el pretendiente para evitar el puñal?

Segunda prueba

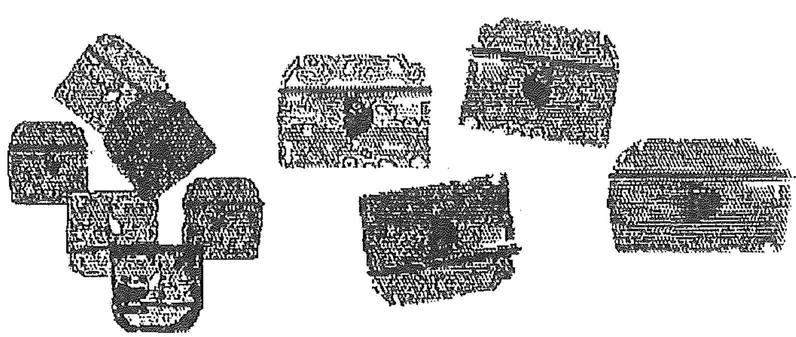
En esta prueba hay una de dos posibilidades de acertar escogiendo al azar. Portia decide utilizar únicamente dos cofres: el de oro y el de plata y esconde su retrato (ya no hay ningún puñal) en uno de ellos. Los cofres son, de nuevo, de Cellini o Bellini. Sobre las cubiertas se lee:

Oro	Plata
El retrato no está en este cofre	Uno y sólo uno de estos cofres fue hecho por Bellini

a. ¿En qué cofre el pretendiente encontrará el retrato?

Tercera prueba

Si el pretendiente lograba pasar victoriosamente las dos pruebas precedentes, ♣*Portia tenía que ser muy bella...*♣ se le llevaba a otra pieza que contenía los tres cofres tradicionales, hechos, como siempre, por Cellini



o Bellini. Portia había escondido de nuevo su retrato en uno de los cofres. Para tener éxito, el pretendiente debía:

- Escoger el cofre que contenía el retrato
- Decir quién había grabado cada uno de los cofres

Las inscripciones eran las siguientes:

Oro	Plata	Plomo
El retrato está en este cofre	El retrato está en este cofre	Cellini hizo al menos dos de los tres cofres

a. ¿Será que alguien logró casarse con Portia, la nieta?

9. Una Portia chévere

¿Se acuerda de Portia? Pues, resulta que una de sus tataranietas, Portia *n*, a quien, para comodidad de todos, llamaremos simplemente Portia, vive actualmente en Manhattan, Estados Unidos. Ella, como su mamá, su abuela y todas sus tatarabuelas es muy bella. Revistas como *Vogue* le han ofrecido mucho dinero para que aparezca en sus publicaciones. ♣*Vanidades, Cosmopolitan, Aló y otras revistas científicas también lo han intentado*♣ Sin embargo, Portia tiene un problema. Al ser tan bella, tiene muchos pretendientes y ella se comprometió con su tatarabuelo ♣*Fue algo que éste dejó en su testamento, escrito sobre un cofre...*♣ en escoger a su futuro esposo de una manera muy especial. ¿Adivina cuál? Exactamente: por medio de unas cajas fuertes y una fotografía a todo color. Decidió entonces buscar al único grabador de cajas fuertes que existe en la actualidad (tataranieto de Cellini o Bellini, él no lo sabe) para que le hiciera el retrato. Este señor se encontraba a mitad de su trabajo, cuando desafortunadamente le dió un infarto cardiaco y pasó a mejor vida. Portia se quedó con las cajas fuertes a medio hacer, puesto que faltaban unas frases por grabar. El caso es que Portia tenía la idea de que solamente una de las frases fuera cierta.

El estado de las cajas fuertes es el siguiente:

Oro	Plata	Plomo
El retrato no está aquí y __________	El retrato no está en este cofre	El retrato está en el cofre de plata o __________

a. ¿En qué cofre pondría usted el retrato y cómo se debería terminar el trabajo para que la condición se cumpla?

10. Para un optómetra

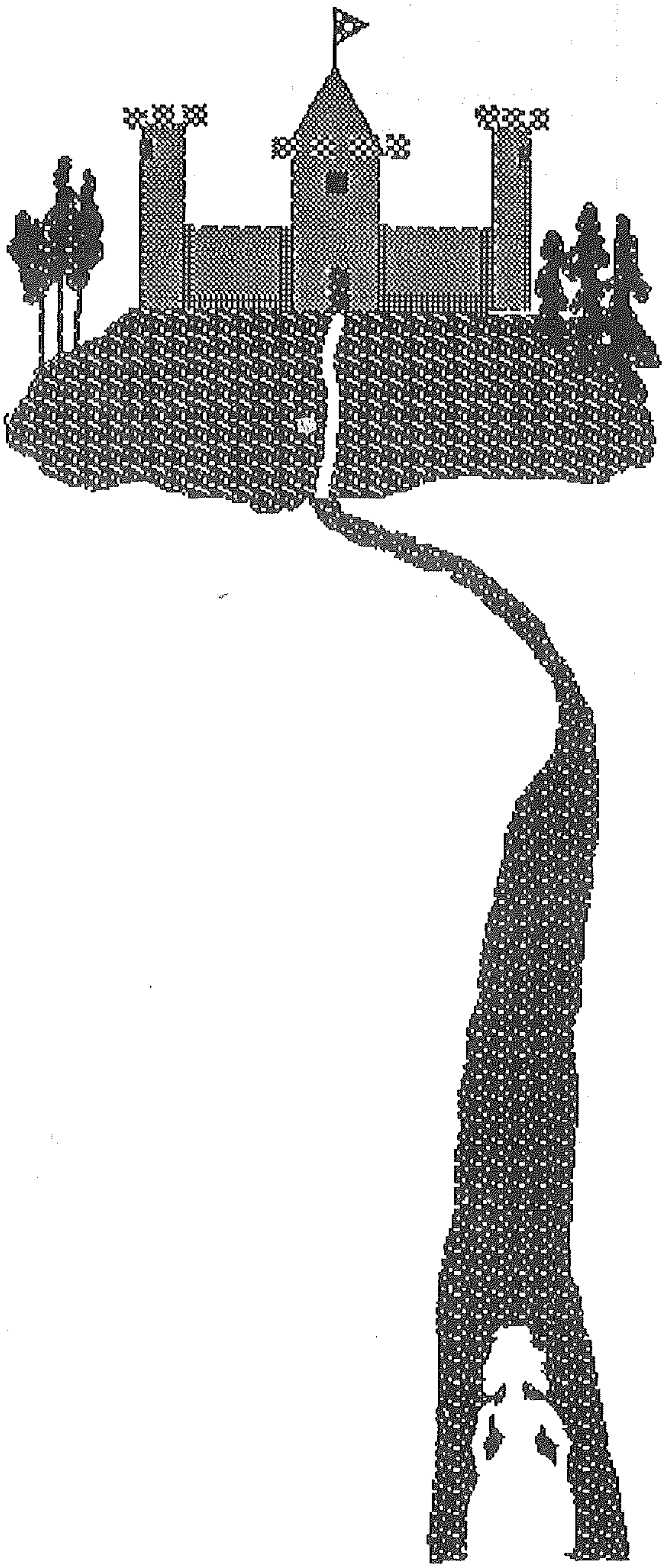
"Hay cinco mujeres de espaldas a mí, de las cuales tres de ellas tienen los ojos azules y dos de ellas tienen los ojos negros.

El único dato que me dan es que las que tienen los ojos azules dicen siempre mentiras y las que tienen los ojos negros dicen siempre la verdad.

Tengo que averiguar cuáles son las de los ojos negros y cuáles las de los ojos azules. Pero para poder averiguar esto me dan la oportunidad de hacer tres preguntas a las cinco mujeres.

Entonces (suponiendo que las mujeres están en orden) le pregunto a la primera: *¿de qué color tiene usted los ojos?*, y resulta que ella me contesta en chino, y como yo de chino ni idea, pues quedo en las mismas. Decido entonces preguntarle a la mujer que está al lado de la que me contestó en chino: *¿de qué color dijo ella* (la que contestó en chino) *que tenía los ojos?*, y ella me responde: *ella* (la que contestó en chino) *dijo que tenía los ojos azules.* Bueno, como sólo me queda una pregunta, le pregunto a la siguiente: *¿de qué color tienen los ojos las dos mujeres de al lado?*, ella me responde: *la primera* (la que contestó en chino) *los tiene negros y la segunda los tiene azules*".

a. ¿Cuáles mujeres tienen los ojos negros y cuáles los tienen azules?. Explique.



11. Del Quijote

Lea el capítulo LI de la segunda parte de *El Ingenioso Hidalgo Don Quijote de la Mancha.*

a. Exprese en sus palabras el acertijo que se plantea en ese capítulo.

b. ¿Cómo solucionaría usted el problema planteado en ese capítulo? ¿Cómo lo soluciona Sancho Panza?

12. Atrapado sin salida

Usted está condenado a morir ahogado en una burbuja. Sin embargo, usted tiene la posibilidad de salvarse porque esta burbuja tiene dos botones tales que, uno rompe la burbuja, y, el otro llena la burbuja de agua, cumpliendo la sentencia. Pero usted no sabe cuál es el botón que rompe la burbuja y lo deja libre. Para averiguarlo, usted sólo puede hacer una pregunta a uno de los dos guardias que lo cuidan. Sin embargo, uno de ellos siempre dice mentiras y el otro siempre dice la verdad. Usted tampoco sabe cuál es cuál.

a. ¿Con qué pregunta puede usted descubrir el botón correcto y salvarse?

3. ¿Quién amaría a María?

Los acertijos y las paradojas que involucran la autoreferencia se conocen desde la época de los griegos, cuando se hizo famosa la paradoja de los cretenses que decían siempre mentiras. Durante venticinco siglos, se miraron estas paradojas como "curiosidades lógicas" a las que algunos filósofos intentaban encontrarles una solución. Fue a comienzos de este siglo cuando Bertrand Russell descubrió que el problema de la autoreferencia se encontraba en la base de los fundamentos de las matemáticas e introdujo la famosa paradoja del barbero que no tiene quien lo afeite. En este capítulo se estudian algunas de estas paradojas.

1. ¿Quién amaría a María?

a. Haga un comentario sobre el siguiente razonamiento:

- María es una palabra
- Yo amo a María
- Yo amo a una palabra

2. La autoreferencia

¿Una frase falsa?

Mate y Mático están charlando. De pronto, Mate dice una frase enigmática:

La frase que estoy diciendo es falsa.

a. Mático, desconcertado, trata de descifrar si esta frase es verdadera o falsa. Ayúdelo.

¿Cuál de las dos?

Mático responde a Mate con las siguientes frases:

La próxima frase que voy a escribir es verdadera.

La anterior frase que escribí es falsa.

b. ¿Cuál es cuál?

c. ¿Dónde está el problema?

¿Cuántas palabras?

Esta frase tiene seis palabras.

Observe que la frase anterior es falsa puesto que tiene cinco palabras.

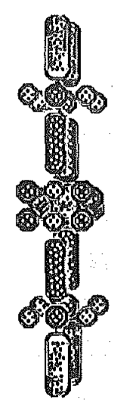
d. Determine si la siguiente frase es verdadera o es falsa.

Esta frase no tiene seis palabras.

La bolita de cristal

Mate: Mático, acabo de comprarme una bola de cristal para ver el futuro y tengo una ganas terribles de estrenarla.

Mático: ¿Cómo te pudiste dejar tumbar de esa manera? El futuro no se puede predecir y te lo voy a demostrar.



Mate: ¿Cómo?

(Mático escribió algo en un papel, lo dobló y lo colocó debajo de la bola de cristal de Mate.)

Mático: En ese papel he descrito un acontecimiento que podrá suceder o no antes de las tres de la tarde. Consulta con tu bola de cristal. Si predice que el acontecimiento va a ocurrir antes de las tres, escribe en esta tarjeta SI. Si predice que no va a ocurrir antes de las tres, escribe NO.

(Mate lanzó una inquisidora mirada al interior de su bola de cristal y, luego de algunos segundos, escribió algo en el papel que le dió Mático. A las tres en punto, Mate sacó el papel que Mático había colocado debajo de la bola y leyó en voz alta .)

Mate: Antes de las tres de la tarde escribirás NO en la tarjeta.

e. ¿Se había dejado tumbar Mate con la compra de la bola de cristal?

3. Negando la negación

Mótico: ¡Hola, Mítico! ¿Cómo estás? Figúrate que acabo de recibir una carta de parte de Numérita, la chica vecina nuestra, aquella que anda en un coche deportivo, con ocho ruedas y niñera uniformada de blanco y todo. ¿La recuerdas? Pues no entiendo ni pío. Te la voy a leer a ver qué piensas tú:

> Tengo que aclararte que yo hablaba en serio cuando te escribí que no estaba bromeando sobre lo que te dije de reconsiderar mi decisión de no cambiar de idea. Y ahora sí hablo en serio.

Mítico: ¡Qué chica más complicada! ¿Por qué será que tú siempre andas con gente así? ¿No será que lo que te interesa es el coche deportivo? Espero que con la explicación que te voy a dar puedas resolver el problema. Escucha:

> No dejes inoscurecidas las tinieblas de tu carta.

Mótico: ¿Qué fue lo que dijiste? Quedé en las mismas que cuando leí el periódico esta mañana. Decía:

El Senado rechaza la enmienda al proyecto de ley contra la limitación voluntaria de la natalidad.

Mítico: Pues, afortunadamente nosotros ya pudimos evitar la posibilidad de no nacer...

a. ¿Cómo podría usted traducir este diálogo a un diálogo *positivo*? Es decir un diálogo en el que se eviten las *negaciones*, pero que se *diga lo mismo.* *♣Si es que entendió lo que dice♣*

b. ¿Qué piensa usted de aquellos políticos que usan en sus exposiciones la *doble negación*?

4. ¿Quiere llorar?

1. Unas colombinas y un ascensor

Las colombinas de Mútico

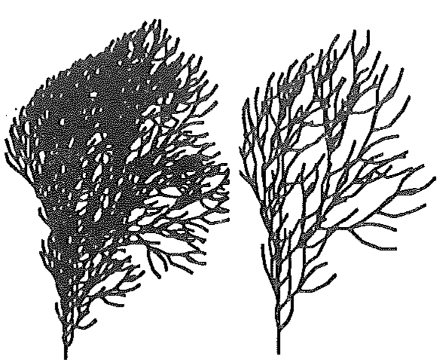
Mático le ha comprado a su sobrino Mútico ♣*el callado*♣ venticinco colombinas. En el momento en que Mútico se pone a berrear, él se descuida, y, como a Mítico ♣*que es un vivo*♣ no le tocaba berrear en ese momento, éste le quita a Mútico todas las colombinas menos siete. ¿Cuántas colombinas le quedan a Mútico?

2. Una polilla de biblioteca

En un estante de una biblioteca hay 5 libros. Una polilla comienza a atravesar los libros a razón de 1 libro cada 2 días. Si la polilla comienza por la portada del libro de la extrema izquierda hasta la contraportada del libro de la extrema derecha, ¿cuántos días demorará en su recorrido?

3. Para poner un ascensor

En un edificio de seis plantas las escaleras que van de un piso a otro son todas de igual longitud. ¿Cuántas veces más hay que subir para ir desde la primera hasta la sexta planta, que para ir desde la primera a la tercera?



4. La gran chocolatina

Concluya el siguiente diálogo.

Ari y su amiga Mética frecuentemente discuten cuestiones de números.

Ari: Mética, mira esta enorme barra de chocolate que me he comprado.

Mética: ¡Vaya! Debe medir casi un metro de larga.

Ari: Mide exactamente 28 centímetros.

Mética: ¡28 centímetros! Te indigestarías si comieras solo toda la barra.

Ari: Comprendo tu indirecta, pero no me la voy a comer toda el mismo día. Hoy parto dos centímetros, mañana otros dos y sigo así hasta acabar toda la barra. Sin embargo, para que te dés cuenta de cuánto te aprecio, estoy dispuesto a regalarte los dos centímetros de chocolate de hoy, si me dices cuántas veces habré de partir la barra antes de terminarla.

Mética: Bueno...

5. Lloremos

Unos para ponerse a berrear

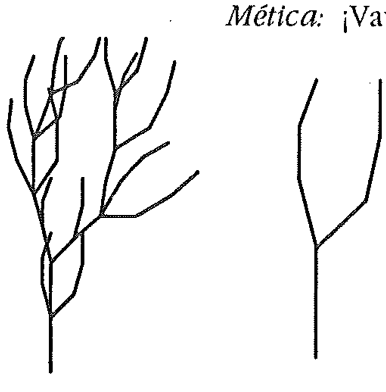
Ari y Mética están cuidando a los sobrinitos de Mética.

Ari: Mética, ¿has notado que tu sobrino Mítico berrea exactamente cada 6 minutos y que tu sobrino Mótico lo hace exactamente cada 8 minutos?

Mética: Pues, la verdad no me había pillado eso.

Ari: Sí, y además Mítico y Mótico berrearon al unísono hace exactamente 3 minutos.

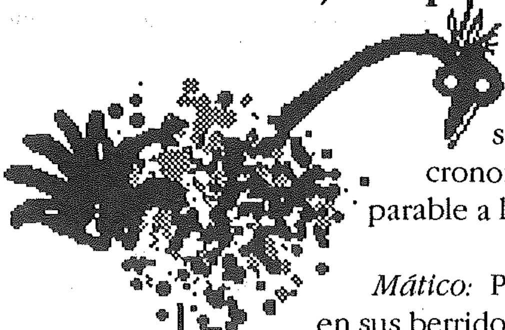
Mética: ¡Vaya! Eres muy observador.



Ari: ¿Sabes cuánto tiempo tendremos que esperar para que Mítico y Mótico berreen otra vez simultáneamente?

Mética: Pues...

6. Y, otro para ponerse a chillar



Mientras Ari y Mética estaban cuidando a Mítico y a Mótico, llega su amigo Mático, con su sobrino Mútico. Ari comenta a Mático la precisión cronométrica de los berridos de Mítico y Mótico (comparable a la del cronométrico Funes).

Mático: Pues mi sobrino Mútico también es muy parecido en sus berridos. El berrea exactamente cada hora.

Mética: ¡Que mutismo el de Mútico!

Ari: Si los tres niños berrean a la 1 de la tarde, ¿cada cuánto tiempo lo hacen al unísono y cuántas veces ocurre esto entre la 1 de la tarde y las 5 de la tarde?

7. Ojos y patas

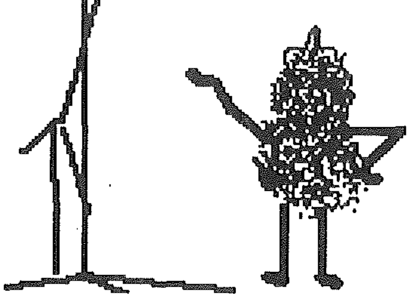
Ari y Mética llevaron a sus sobrinos al zoológico. ♣*Yo creía que ya estaban allí. ¡Con esa manera de berrear!*♣ Llegaron a un recinto donde estaban mezcladas jirafas y avestruces. ♣*El director del zoológico organizaba los animales por longitud de cuello. ¿Sí ve la idea?*♣ Cuando salieron del zoológico, ♣*¡Mítico casi se queda con los monos!*♣ Ari le dijo a Mética:

Ari: Oye, Mética, ¿contaste cuántas jirafas y cuántos avestruces había?

Mética: Pues no. ¿Cuántos eran?

Ari: Averígualo tú misma. En total había treinta ojos y cuarenta y cuatro patas.

Mética: Ari, hay que cambiarle los pañales a Mútico...



8. ¿Será que Macenroe lo resuelve?

A Mate y a Mático les encanta el tenis y tratan de jugarlo en los períodos en que Mítico, Mótico y

Mútico no lloran. Un día lograron hacerlo y Mático le ganó un *set* a Mate, 6 a 3. Si cinco *games* fueron ganados por el jugador que no sirvió, ¿quién comenzó sirviendo?

9. Acertijos a medias

Los siguientes dos acertijos tienen que ver con la moda. Además, pueden llegar a ser *un poco olorosos.* Se tienen 24 medias rojas y 24 medias azules entre un cajón dentro de una pieza en tinieblas. ¿Cuál es el número mínimo de medias que debo sacar para estar seguro de tener por lo menos dos del mismo color?

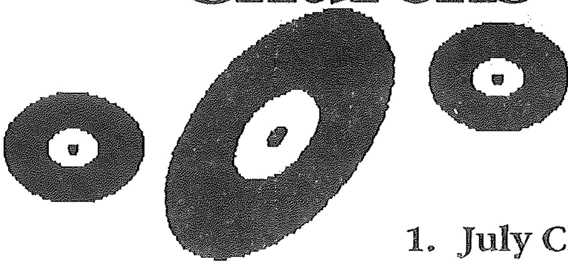
10. Más medias

Esta es una variación del acertijo anterior. Supongamos que hay igual número de medias rojas y de medias azules entre el cajón. Supongamos que el número mínimo de medias que yo debo sacar para estar seguro de tener dos medias del mismo color es el mismo que el número mínimo de medias que yo debo sacar para estar seguro de tener al menos dos medias de colores diferentes. ¿Cuántas medias hay en el cajón?

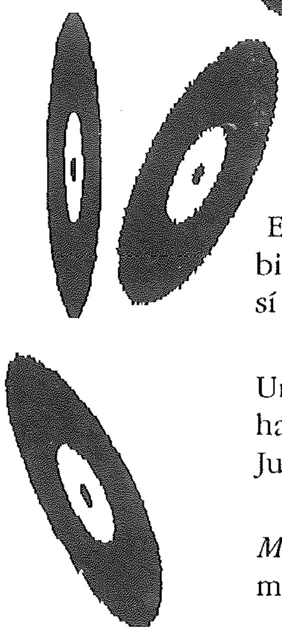
11. Salir o quedarse

Hay un caracol en un hueco de treinta metros. Durante el día, el caracol sube tres metros y en la noche, dormido, rueda dos metros. ¿En cuántos días sale el caracol del huec

5. Julio Iglesias o July Churchs



1. July Churchs y sus discos



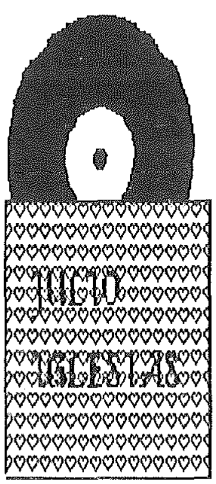
Mate es una estudiante universitaria, muy inteligente, a quien le gusta comenzar muchos proyectos pero que desafortunadamente casi nunca logra terminarlos.

Ella tiene un amigo. Se llama Mático. Los dos se complementan muy bien, pues a Mático no se le ocurren muchas ideas, pero, en cambio, sí es capaz de terminar algo, una vez que está comenzado.

Un día se encontraban en la cafetería de estudiantes y en un radio que había en la mesa de al lado pasaron una canción del cantante de moda: July Churchs. Se dio el siguiente diálogo:

Mático: Mate, ¿qué hiciste con los discos de July Churchs que escuchamos el otro día en tu casa? Estaban como chéveres, ¿no es cierto?

Mate: Pues me aburrí de ellos, ¿sabes? A ese tipo se le escucha por todas partes. ¿Sabías que ahora se presenta en Francia y se hace llamar Juillet Eglises?



Mático: No, no sabía. ¿Por qué será? Pero, al fin, ¿qué hiciste con los discos?

Mate: Pues regalé la mitad de los discos que tenía, más la mitad de un disco a mi amigo Ari.

(Mático frunce el ceño. A él le hubiese gustado tener esos discos de su cantante favorito.)

Mate: Después, le presté la mitad de los restantes, más la mitad de un disco a mi amiga Mética.

(Mático se desespera. ¡Y él que creía que era un buen amigo de Mate!)

Mate: Y ahora sólo me queda un disco y estoy dispuesta a regalártelo si eres capaz de averiguar cuántos discos tenía yo al principio.

(Mático se tranquiliza. Al menos Mate sí pensó en él. ¿Cómo lograr que ella le regale ese disco? ¿Cuántos discos tenía Mate al comienzo?)

Pronto se le ocurrió una idea. Y se dió cuenta de que Mate no tuvo necesidad de partir ningún disco. Consiguió resolver el problema y Mate le regaló el disco prometido.

a. ¿Qué fue lo que se le ocurrió a Mático?

2. Una chocolatina *Jet*

Mate quiere regalarle a Mático parte de una chocolatina. ♣*De las que traen monas por dentro*♣ Mate le da a escoger a Mático entre tres opciones:

- 5/8
- el 60%
- 7/12 de la chocolatina

a. ¿Cuál opción debería escoger Mático? ♣*Sobra aclarar que a Mático le encantan las chocolatinas*♣

b. Si las mismas tres alternativas se le ofrecen a Mútico, ♣*a quien, además de callado, un pedazo de chocolate implica cambio automático de pañal*♣ ¿cuál de las tres le convendría más?

3. ¡A romper huevos!

Mética salió de compras un día. Llevaba en su canasta, a Mítico, y además una cierta cantidad de huevos que había comprado. Mientras que charlaba con Ari, Mítico se puso a jugar con los huevos, tirándolos al suelo. Cuando Mética volvió a mirar, todos los huevos estaban rotos en el piso. Cuando Ari le preguntó cuántos huevos eran, Mética no supo decirlo. ♣ *Obviamente, Mítico tampoco podía hablar, después de la bofetada que le dio Mética* ♣ Lo único que Mética podía decir era que, al contarlos en manos de dos, de tres, de cuatro y de cinco, le sobraron uno, dos, tres y cuatro huevos, respectivamente. ¿Cuántos huevos había comprado Mética? ♣ *O lo que es lo mismo, pero un poco más desordenado, suponiendo que Mítico no se comió ninguno, ¿cuántos huevos rompió?* ♣

4. Coca-Cola Vice

Ari y Mética llevaron un día a Mítico, Mótico y Mútico al *Burger King* a tomar Coca-Cola. Decidieron pedir una Coca-Cola gigante y tres pitillos. Si Mítico es capaz de desocupar el vaso en 15 segundos, Mótico en 20 segundos y Mútico en 30 segundos, ¿en cuánto tiempo lo desocuparán si están tomando los tres al mismo tiempo? ¿Si sólo toman Mútico y Mítico?

5. No son iglesias

Con los dígitos 1, 3, 5, 7 y 9 (sin repetirlos) escriba en cada caso un número de tres dígitos y otro de dos tales que satisfagan las siguientes preguntas:

a. ¿Cuál es la máxima suma posible?

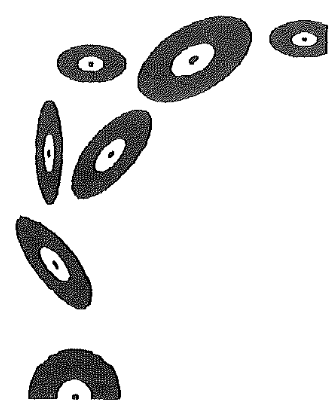
b. ¿Cuál es la mínima suma posible?

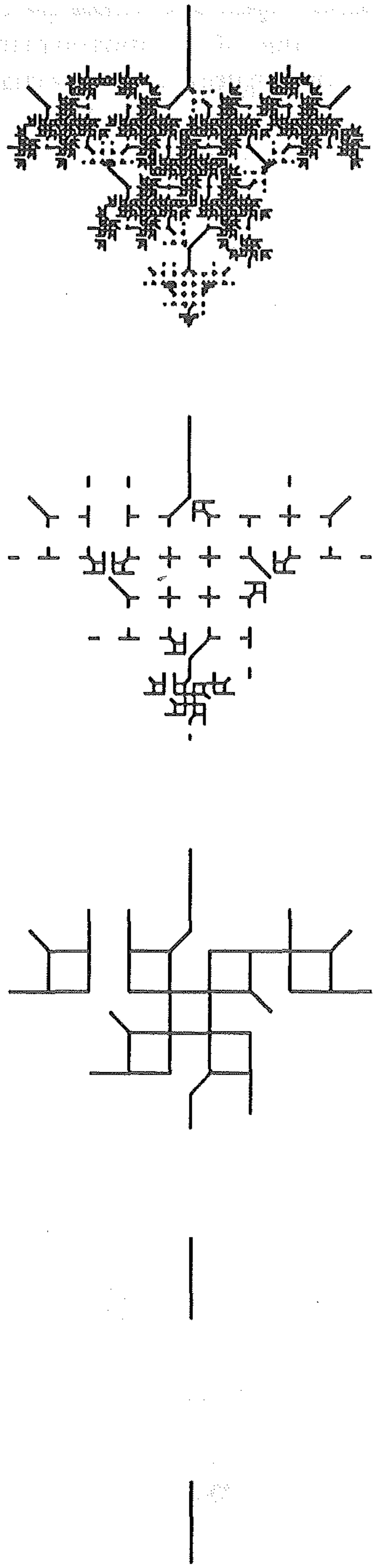
c. ¿Cuál es la diferencia máxima?

d. ¿Cuál es la diferencia mínima?

e. ¿Cuál es el producto máximo?

f. ¿Cuál es el producto mínimo?





6. Paisas y cachacos

Recordemos el reñido partido en la copa Libertadores de América entre los equipos colombianos Nacional y Millonarios en el que se jugaba la permanencia de los dos equipos en la copa. Pues bien, vivían en La Dorada (más o menos, la mitad del trayecto entre Medellín y Bogotá) 30 entusiastas aficionados al fútbol divididos en dos grandes bandos (la mitad hinchas de Millonarios y la mitad hinchas de Nacional) pero muy amigos entre sí, por lo que decidieron alquilar un bus que los llevara de La Dorada a Bogotá, con tan mala suerte que en Villeta (cuando comienza la subida brava a la sabana cundiboyacense) el bus tuvo un serio desperfecto y no pudo seguir adelante con todos los aficionados. El conductor del bus (que era aficionado al Deportes Tolima) comunicó a los afligidos aficionados que el viaje se podría continuar únicamente con la mitad del cupo y que él escogería a los pasajeros mediante un sistema, que explicó así:

> Todos se colocan en un círculo. A continuación, yo cuento nueve hombres y el noveno hombre se dedica a comer panela en la plaza (Villeta es la capital panelera del país). Nuevamente cuento nueve hombres y se repite el proceso hasta que hayan salido los quince afligidos come panelas.

Uno de los hinchas del Nacional organizó a sus coequiperos de tal forma que fueron ellos los que llegaron a ver el partido en Bogotá.

a. ¿Cómo se organizaron los hinchas del Nacional para ser ellos los que se perdieron de la comilona de panela en Villeta?

6. El pesito del paisita

Hace varios años, cuando yo era estudiante primíparo, dos compañeros me invitaron a almorzar a un restaurante que gozaba la fama de ser el más barato: diez pesos valía el almuerzo para cada estudiante, veinte pesos para el resto de los seres humanos. Nos atendió un paisita muy simpático, casi un niño, y le pedimos tres almuerzos. Una vez que terminamos —por cierto un buen almuerzo— nos identificamos mediante nuestros carnés, y le pedimos la cuenta. Como éramos estudiantes varados, se entendía que la invitación era "a la americana", es decir que cada quien pagaba lo suyo, y eso hicimos: cada uno pagó sus diez pesos.

* Por Leonardo Venegas.

1. El pesito del paisita*

Lo que ignorábamos era que en aquel preciso día el paisa dueño del restaurante, o sea el papá del paisita, había decidido agregar un atractivo más a su amable negocio, consistente en rebajar cinco pesos a cada cuenta o mesa en que se hubiera consumido un mínimo de tres almuerzos. (Después supimos que esta curiosa medida tenía por objeto procurar que las mesas utilizaran el máximo de su capacidad, por lo cual, era lo esperado, no se daría más el caso de tener tres mesas, cada una con apenas un comensal y con tres puestos vacíos, sino que al agruparse los desconocidos para verse favorecidos con la rebaja, se contaría con dos mesas disponibles. El paisa, como se ve, sabía de negocios)

En todo caso el paisa, al recibir de su hijo los treinta pesos correspondientes al pago de los tres almuerzos, le pidió al niño que nos alcanzara y que nos devolviera cinco pesos. El paisita, camino de nosotros, hizo la siguiente reflexión: *¡Eh! esos muchachos no están esperando que yo les devuelva nada. Para que no se vayan a pelear, les voy a devolver tres pesos; y para no perder el viaje, yo me guardo los otros dos.* El paisita, como se ve, sabía de negocios.

Desde luego que al recibir los tres pesos, uno para cada uno, nos pusimos muy contentos y le agradecimos al paisita que se hubiera tomado el trabajo de alcanzarnos.

Ahora bien: cada uno de nosotros terminó pagando, en definitiva, nueve pesos (ya que cada uno había pagado diez y a cada uno le devolvieron un peso).

Como éramos tres, pagamos, en total veintisiete pesos (supongo que es claro). Y dos pesos que se guardó el paisita, van veintinueve.

¿Qué se hizo el otro peso?

a. Lo que usted debe hacer, ante todo, es encontrar el error que hay en el cuento anterior, no en la cuenta anterior.

b. Este cuento, tal y como aparece escrito, no sirve para que usted pueda entretener a sus amigos, para que los ponga a pensar, como se dice, porque esos datos numéricos no son verosímiles en esta época. Este ejercicio se trata, entonces, de que usted redacte el cuento como si le hubiera ocurrido a usted mismo(a). Pero como ahora los almuerzos no cuestan diez pesos ni siquiera en los cuentos, usted debe suponer que el costo de la vida (y por consiguiente el de los almuerzos) ha venido aumentando en un 20% cada año (en realidad ha aumentado bastante más, pero nuestra suposición nos debe facilitar los cálculos). Así que, dado que mi cuento ocurrió hace diez años, usted debe redactar el suyo, suponiendo que todo lo que sea dinero ha aumentado en un 20% cada año. Redactar, no resolver. Hágalo, naturalmente con sus palabras, omitiendo o agregando a mi relato lo que usted considere conveniente, pero actualizando los datos de dinero según lo indicado.

2. El hombre que calculaba

Tres días después*, nos aproximábamos a una pequeña aldea llamada Lazakka cuando encontramos caído en el camino, a un pobre viajero herido.

Socorrímosle y de sus labios oímos el relato de su aventura.

Llamábase Salem Nasair y era uno de los más ricos negociantes de Bagdad. Al regresar, pocos días antes de Bassora, con una gran caravana fue saqueado, pereciendo casi todos sus compañeros a manos de los beduinos. Sólo se había salvado él, que era el jefe, ocultándose en la arena entre los cadáveres de sus esclavos.

* Tomado de: *El Hombre que Calculaba* de Malba Tahan.

Al terminar el relato nos preguntó con voz angustiosa:

—¿Teneis por casualidad, musulmanes, alguna cosa para comer? ¡Estoy casi muriéndome de hambre!

—Tengo solamente tres panes —, respondí.

—Yo traigo cinco—, afirmó a mi lado el *Hombre que calculaba.*

—Pues bien —, sugirió el sheick—. Juntemos esos panes y hagamos una sociedad única. Cuando lleguemos a Bagdad os prometo pagar con ocho monedas de oro el pan que coma.

a. ¿Cómo repartiría usted este dinero entre los dos amigos?

Así lo hicimos y al día siguiente, al caer la tarde, entramos en la célebre ciudad de Bagdad, la perla del oriente...

—Voy a dejaros, amigos míos —dijo Nasair— mas antes deseo agradeceros el gran servicio que me habéis prestado. Y para cumplir la palabra, os pagaré el pan que tan generosamente me dierais. Y dirigiéndose al Hombre que Calculaba, le dijo:

—Por tus cinco panes te daré cinco monedas. Y volviéndose hacia mí, concluyó:

—Y a ti Bagdalí, te daré por los tres panes, tres monedas.

b. ¿Qué piensa usted de esta repartición? ¿Está de acuerdo? Justifique su respuesta

Con gran sorpresa nuestra, el Calculista objetó respetuosamente:

—Perdón, ¡Oh Sheick! La división hecha de ese modo será muy sencilla, mas no es matemáticamente exacta. Si yo di 5 panes debo recibir 7 monedas y mi compañero, el Bagdalí, que dió 3 panes, solamente debe recibir una moneda.

—Por el nombre de Mahoma—, dijo el visir Ibrahim interesado vivamente por el caso. ¿Cómo justificas extranjero, tan disparatada forma de pagar 8 panes con 8 monedas? Si contribuiste con 5 panes, ¿por qué exiges 7 monedas? Si tu amigo contribuyó con 3 panes, ¿por qué afirmas que debe recibir únicamente una moneda? El Hombre que Calculaba se aproximó al poderoso ministro y así le habló:

—Voy a probaros que la división de las monedas, hecha en la forma propuesta por mí, es más justa y más exacta. Cuando durante el viaje, teníamos hambre, sacaba un pan de la caja y lo partía en tres trozos, uno para cada uno de nosotros. Todos los panes, que eran 8, fueron divididos, pues, en la misma forma. Es evidente, por lo tanto que si yo tenía 5 panes, di 15 pedazos. Si mi compañero tenía 3 panes, dió 9 pedazos. Hubo así, un total de 24 pedazos, de los cuales cada uno de nosotros comió 8 pedazos. Ahora bien, si de mis 15 pedazos comí 8, dí, en realidad 7 y mi compañero, que tenía 9 pedazos, al comerse 8, sólo dió 1. Los 7 que di yo y el que suministró el Bagdalí formaron los 8 que comiera el sheick Salem Nasair. Por consiguiente es justo que yo reciba 7 monedas y mi compañero 1.

c. ¿Qué piensa usted de esta repartición? ¿Está de acuerdo? Justifique su respuesta.

3. Un buen sancocho

Un joven aficionado a las matemáticas recreativas ♣*¿Acaso las matemáticas pueden recrear a alguien?*♣ fue a visitar la finca de Roberto, un amigo suyo. Cuando llegó allí su amigo lo enteró de un problema que tenía con sus dos hermanos:

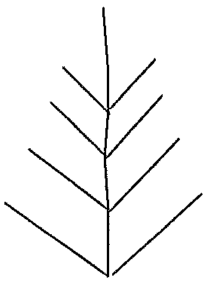
—Somos tres hermanos y nuestro padre nos dejó como herencia sus gallinas. Según la voluntad de nuestro padre yo debo recibir la mitad de las gallinas, Juan debe recibir una tercera parte y José una novena parte. Sin embargo, la finca tiene ahora 35 gallinas. Entonces a mí me corresponderían 17 gallinas y media.

—Pues, ¿por qué no te quedas con 17 gallinas y te comes medio sancocho de gallina de almuerzo?

—No me sentaría mal el medio sancocho, pero el problema está en que no queremos sacrificar ninguna gallina.

—Bueno, entonces permíteme sugerirte esta solución: yo tengo una gallina en mi casa, que pienso regalar a ti y a tus hermanos.

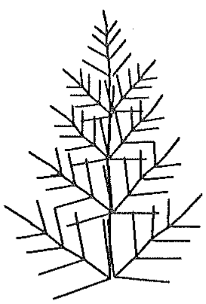
—Te lo agradezco mucho, pero ¿cómo soluciona eso nuestro problema?



—Muy fácil: Ahora son 36 gallinas y no 35. La mitad, o sea 18 gallinas, son para tí, la tercera parte, 12 gallinas son para Juan y la novena parte, 4 gallinas para José. Ahora bien, **18 + 12 + 4 = 34** gallinas. Sobra una de las 35 gallinas, que creo me merezco como recompensa por haber resuelto la cuestión.

Roberto planteó la solución a sus dos hermanos, quienes la aceptaron gustosos. Nuestro joven aficionado a los pasatiempos matemáticos, preparó esa noche un suculento sancocho de gallina. Sin embargo, esa noche Roberto, no podía conciliar el sueño preocupado por las siguientes dudas:

- ¿En realidad mi amigo donó su gallina?
- ¿De dónde salió la gallina que se llevó mi amigo?



a. ¿Podría usted contestar a estas preguntas y ayudar a Roberto a pasar una noche tranquila?

7. Pesos y medidas

1. Monedas

Las doce monedas

Se tienen doce monedas de apariencia idéntica. Una de ellas, sin embargo, es falsa y su peso es ligeramente mayor al de las demás.

Se dispone de una balanza para *comparar* pesos, que *no* sirve para pesar. ♣*Para eso tiene que ir al departamento de física a que le presten la electrónica que tienen para pesar hasta milésimas de gramo*♣

a. Suponiendo que sólo puede utilizar esta balanza, ¿cómo puede detectar la moneda falsa, utilizando la balanza únicamente tres veces?

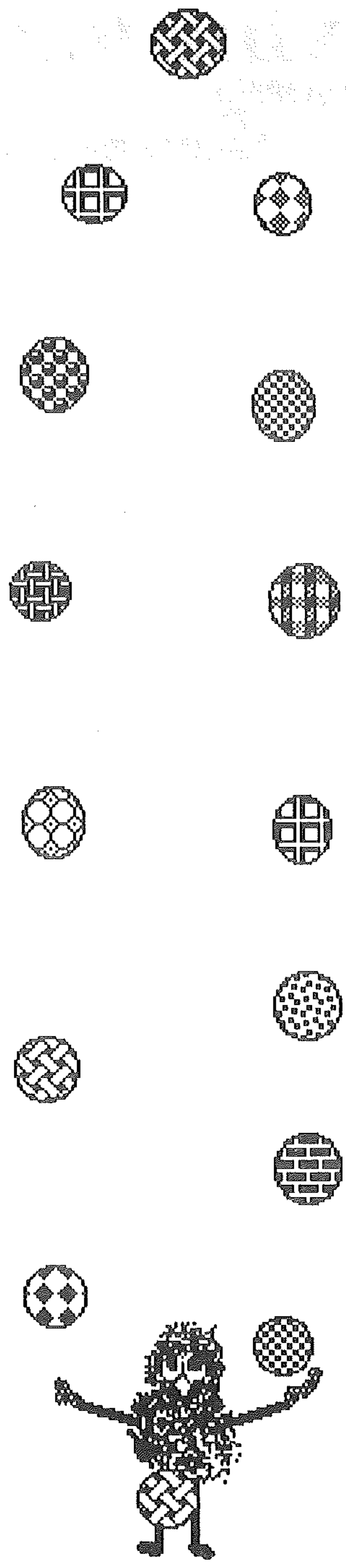
La misma balanza

Cinco objetos, todos con pesos distintos, deben ordenarse descendentemente por su peso. Se dispone de la misma balanza del problema anterior.

b. ¿Cómo pueden ordenarse los objetos, si puede usar la balanza máximo siete veces?

Ahora es con agua bendita

Usted es un empedernido bebedor de cerveza ♣*puede negarlo dándose golpes de pecho*♣ y la taberna a la cual usted asiduamente asiste tiene una maravillosa ganga, según la cual, los clientes confiables del establecimiento tienen la posibilidad de beber 78 litros de cerveza. ♣*Oiga bien: setenta y ocho litros*♣ Para poder lograr este cielo ♣*¿infierno?*♣ es necesario que el interesado saque de un gran



barril un litro de cerveza y se lo beba; luego saque dos litros y los beba, luego tres, y así sucesivamente hasta que llegue a sacar doce litros y se los beba, logrando el objetivo de tomarse setenta y ocho litros. El problema se complica un poco cuando se va por los seis litros ya que se ha tomado una buena cantidad de cerveza ♣ *¿se imagina cuánta?* ♣ y las manos ya no responden como deberían a las órdenes de su usuario.

Adicionalmente, la dueña del establecimiento decide colocar otra pequeña complicación que consiste en que usted sólo disponga de dos recipientes para sacar todas las cantidades. Uno de ellos, de cuatro litros y el otro, de nueve. Por otro lado, la cosa no es gratis, si usted no logra llegar al final de la prueba, deberá pagar el consumo que lleve hasta el momento en que sea llevado al hospital por intoxicación.

c. ¿Se le mide a la pruebita? Si se arriesga, ¿cómo sacaría cada una de las cantidades?

8. Adivina, adivinador

1. Un poco de magia

♣Pero, al fin ¿qué? ¿No dicen que esta es una clase de matemáticas?♣

Desarrolle este acertijo en la tranquilidad de su casa. Después presénteselo a un amigo y déselas de mago.

2. Primer truco

Usted va a escoger un *número*. Un número cualquiera de su elección que no debe comunicárselo a nadie. Puede ser *cualquier* número. Sin embargo, para que los cálculos que usted va a hacer enseguida no resulten muy engorrosos, le recomiendo que sea un número *natural* menor que 100.

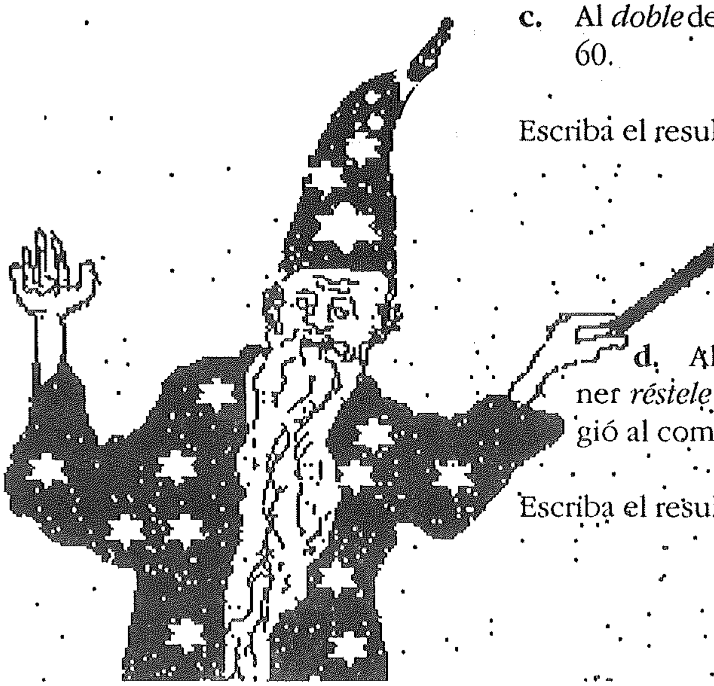
Escriba su número aquí:

a. Multiplique ese número por 3 y al resultado *réstele* 20.

Escriba el resultado aquí:

b. Al resultado que usted acaba de obtener, *súmele* la edad en años cumplidos que usted tenía el 31 de diciembre 1987. (Por ejemplo, 19)

Escriba el resultado aquí:



c. Al *doble* de lo que usted acaba de obtener *réstele* 60.

Escriba el resultado aquí:

d. Al resultado que usted acaba de obtener *réstele* seis veces el número que usted escogió al comienzo.

Escriba el resultado aquí:

e. Al resultado que usted acaba de obtener *súmele* el doble del año de su nacimiento. (Por ejemplo 2 x 1968)

Escriba el resultado aquí:

f. Al resultado *réstele* 2.382.

Escriba, bien grande, pero sin mostrárselo a nadie más, su resultado en el siguiente cuadrito:

¿A qué le suena este número? Piense en un acontecimiento. No escriba lo que está pensando; piénselo, solamente. ♣*Cuidado se le queman las neuronitas*♣

Si ya pensó en el acontecimiento, ahora piense en un *personaje*. Tiene que pensar bien duro; si no, la *magia* no funciona. ¿Ya pensó? ...

3. La tarea

a. Vuelva a hacer el ejercicio con un número *diferente.* Compruebe que la magia funciona.

b. Encuentre una *demostración formal* de que la magia funciona con *cualquier* número y con *cualquier* persona, es decir con cualquier edad.

c. Invéntese un nuevo truco de *magia* similar a este pero con diferentes operaciones, en las que se incluya la edad de la persona y que dé un resultado diferente. Trate de ser *original.* Compruebe que su magia funciona y después hágale el truco a un amigo.

d. Pida puesto en algún circo... ♣ *O hable con Pacheco. Él siempre ayuda* ♣

4. La estética de los números

A continuación le proponemos otro truco de *magia matemática.* ♣ *¡Y a mí que me habían dicho que las matemáticas eran dizque exactas!* ♣ Para que usted se dé cuenta del poder del truco que vamos a experimentar, haga primero el siguiente ejercicio:

a. Encuentre un número *impar* que sea divisible por *tres* números *primos* diferentes de 1. Compruebe su respuesta.

b. Si ya encontró uno, encuentre otro. ♣ *¡Qué tipo tan cansón este! ¿Cuántos querrá que encuentre?* ♣

Ahora que usted se ha dado cuenta de la posible *dificultad* que implica encontrar números *impares* que sean divisibles por varios números primos (a menos, de que usted haya dado con el *método* que le permite a uno resolver este problema sin necesidad de pensar. Porque hay un método. Trate de encontrarlo), en los acertijos siguientes se le propone una manera de generar números que tienen siempre esta característica.

Pero, la *gracia* del truco va más allá de encontrar un número como el que se le está contando. La gracia consiste además en que los tres números primos por los que se va a poder dividir el número en cuestión son números especiales.

5. Cuestión de familia

El primer primo

a. Si a usted le proponen una rifa y le dicen que escoja un número entre 5 y 10, ¿qué número escogería usted? ♣ *Si usted me dice que escogería el número 239/31, me parece un número muy original. Sin embargo, no le creo: a usted no le gustan esos números que tienen una rayita por la mitad* ♣ Escriba su número en la cajita:

De hecho, es muy común que la gente escoja el número 7. Se dice que es el *número de la buena suerte.* El número 7, usted lo sabe bien, es un número *primo.* Además es un número *bonito,* delgado, con personalidad, sin ser exhibicionista como sus vecinos el 6 y el 8. Pues bien, el número 7 es uno de los tres números *primos* escogidos para nuestro truco. Veamos ahora cuál es el segundo.

El segundo primo

En los Estados Unidos ♣ *Ala, ¡qué tipo tan viajado este! ¿No te parece?* ♣ la mayoría de los edificios tienen ascensores en los que se pasa del piso 12 al piso 14. Es decir, *no tienen piso 13.* ♣ *Ala, estos gringos, siempre tan supersticiosos, ¿no? Además, yo te puedo decir que nosotros estamos tan avanzados como nuestros vecinos del norte. Si no, pásate por Chía, Nemocón o Soacha y verás que allá tampoco hay edificios con ascensores que tengan el piso 13* ♣ El número 13 se considera el *número de la mala suerte.* Pues bien, el número 13 es nuestro segundo número primo. ♣ *Ala, ¡qué cantidad de historias. ¿Cuándo será que nos va a decir cuál es el truco?* ♣ Nos queda únicamente un número por escoger.

El tercer primo

El último número es fácil de escoger.

a. ¿Cuántos números *primos* hay entre 7 y 13?

Exactamente: sólo uno: el número 11. Además el 11 es un número muy *simpático*. Si usted lo mira con atención, ♣*Ala, espérate saco mis gafas*♣ el 11 es el único número de dos dígitos, en el que los dos dígitos son el mismo número y que es primo. De hecho, ningún otro número de dos dígitos ♣*Haga el intento con 33 y 55, por ejemplo*♣ que tenga el mismo número en ambos dígitos es primo, porque se puede dividir... ¿por quién? pues... ¿por quién más que por 11? ♣*Ala, simpático el 11, ¿no te parece?*♣

6. Segundo truco

Ahora que hemos escogido los tres números primos, podemos hacer el truco de *magia matemática* que le habíamos prometido. Y es muy fácil:

a. Escoja un número *cualquiera* de tres dígitos: (4 tiene *un* dígito, 15 tiene *dos* dígitos, 356 tiene *tres* dígitos... ¿Ve la idea?)

b. En la siguiente cajita, vuelva a escribir su número y, *al lado*, vuelva a escribir los mismos tres dígitos. (Por ejemplo, si usted escogió 123, entonces lo que le resulta es 123123) Escriba entonces el nuevo número:

7. Y ahora, ☞ viene la *magia*

Pues sí: ahora sí podemos hacer *magia*. ♣*Ala, con tanta historia que ha echado, yo ya estoy cansado. Lo que quiero es poder irme a tomar mi wisky*♣

a. Divida el número de seis dígitos que obtuvo arriba por 7. Escriba el resultado aquí:

Le dió un entero, ¿no es cierto? Es decir *el número es divisible por 7.*

Esta es la primera *magia*

b. Ahora tome ♣*¿'Tomar'? Yo me estoy tomando mi wisky*♣ el número que obtuvo en **a** y divídalo por 11. Escriba el resultado aquí:

Le dio un entero, ¿no es cierto? *Es decir, el número original es divisible por* 11 *y, por consiguiente el número en* **a** *también.*♣*¿Cómo así?*♣

c. Explique por qué si el número en **b** es divisible por 11, entonces el número original, también.

Esta es la segunda *magia*

d. Finalmente, ♣*¡Ouuuffff! Me encanta lo de finalmente. Eso quiere decir que ya casi vamos a acabar y voy a poder irme al club a ver a mis amigotes*♣ tome el número que obtuvo en **b** y divídalo por 13. Escriba el resultado aquí:

Le dió un entero, ¿no es cierto? Es decir, el número en **c** (Y, por consiguiente, el número en **b** y el número original *son divisibles* por 13.

Esta es la tercera *magia*.

8. Resumamos

Usted escogió un número *cualquiera*. A ese número le hicimos un *truquito*. El resultado es un número divisible por 7, por 11 y por 13. Esa es la *magia*. ♣*Ala, me parece muy "in" el jueguito. Se lo voy a hacer a mis amigos en el club. Ah, y dejáte ver para atenderte...*♣

9. La tarea

a. Escoja otro número y vuelva a hacer el truco. Verifique que el truco también funciona con el nuevo número. ♣*A menos que usted no sepa dividir ...*♣

b. Dé una explicación *matemática* de la razón por la cual el *truco* funciona para *cualquier* número. Una ayuda: escoja de nuevo un número cualquiera de tres dígitos y multiplíquelo por 1001. ¿Qué le da?

c. Ahora sí vaya donde Pacheco. En la tele pagan bien y se conoce gente.

9. Elecciones en Alfagonia

Elecciones es un juego que simula el proceso electoral de algunos países anglosajones, particularmente el proceso de elección del parlamento y gobierno británicos y del presidente de los Estados Unidos. La idea es hacer ver cómo unos recursos idénticos en cantidad pueden arrojar resultados totalmente distintos de acuerdo a la estrategia con que estos se distribuyan. Simultáneamente se trata de evaluar un sistema electoral que todavía rige a algunas de las democracias occidentales contemporáneas, resaltando sus ventajas y desventajas (tales como la exclusión de minorías) sugiriendo correctivos para éstas últimas.

1. Alfagonia

Alfagonia, un país imaginario, está dividido en 10 distritos electorales. Los habitantes de Alfagonia eligen su gobierno a través de un parlamento de 10 miembros, uno por cada uno de los distritos electorales. Cada uno de estos miembros pertenece a un partido político y en cada elección es justamente el partido político que logre colocar el mayor número de miembros en el parlamento el llamado a formar el gobierno.

2. Las reglas del juego

Aunque estas pueden variarse de distintas maneras, las reglas que se exponen a continuación son las que han resultado más prácticas hasta el momento.

Alfagonia cuenta con cuatro partidos políticos. Los jugadores de *Elecciones*, no importa el número, se agrupan en uno de estos partidos. Cada partido político debe elegir un vocero o jefe de partido cuyo nombre debe hacerse público. Antes de iniciarse el juego, todos los jugadores, o los cuatro voceros, pactan el número de vueltas que se jugarán. Cada vuelta es una *elección*. Cinco vueltas es el número recomendado. *El ganador del juego* **no** *es el partido político que más vueltas o elecciones gana, sino el que gane la última vuelta de elecciones*. Cada una de las elecciones pactadas se lleva a cabo de la siguiente manera:

Primero: Para comenzar el juego, cada partido político cuenta con 100 votos. Cada partido político deberá distribuir estos 100 votos en los 10 distritos de Alfagonia teniendo en cuenta que el objeto del juego es ganar el mayor número de distritos y que un distrito se gana colocando en él más votos que cualquiera de los otros partidos políticos.

Segundo: Uno de los participantes en el juego es nombrado de común acuerdo *Registrador del Estado Civil.* El Registrador no juega y debe ser elegido antes de la formación de los partidos políticos. En cada elección, los partidos se reúnen por separado para distribuir sus votos, al final de lo cual, el vocero de cada partido entrega al Registrador una papeleta en la que se muestra la distribución de votos del partido que él represente. Cuando el Registrador ha recolectado las papeletas de todos los partidos, procede a escrutar los votos completando dos tablas.

Tabla 1										
Partido	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Liberal										
Conservador										
Radical										
Demócrata										

Tercero: La tabla 1 se llena completamente en cada elección. En ella, el Registrador anota la distribución de votos de cada partido político en cada uno de los 10 distritos electorales. Una vez esté completa esta tabla, se determina el ganador de cada una de las 10 elecciones distritales y el ganador global de la elección es el partido político que haya ganado el mayor número de elecciones distritales. (Los empates se discuten al final)

Cuarto: Estos datos se trasladan, mediante iniciales, a la tabla 2. La tabla 1 debe llenarse en cada una de las vueltas electorales. La tabla 2, por el contrario, es el resumen de los que ha sucedido hasta el momento.

Tabla 2											
Vuelta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Pa.G.
1											
2											
3											
4											
5											

Quinto: Como ya se dijo, el ganador del juego es el partido político que gane la última de las elecciones pactadas. La razón de esto es que, si bien los cuatro partidos arrancan con el mismo poder electoral, representado en 100 votos, a medida que se ganan y pierden elecciones el poder de los partidos aumenta y disminuye, como veremos en seguida. El objeto del juego es consolidarse en el poder, no pasar ratos con él. ♣*¿El poder para qué?*♣

El poder electoral de los partidos varía de las siguientes maneras:

El partido político que sea el ganador global de una elección tendrá derecho, en la siguiente elección, a dos votos más de los que tenía hasta ese momento. Así pues, si un partido gana tres veces consecutivas las elecciones, en la siguiente elección tendrá 106 votos básicos. Los partidos políticos que no sean partido de gobierno en el momento de realizarse una elección tienen siempre 100 votos básicos, no importa el número de elecciones que hayan ganado anteriormente. Los partidos tienen derecho a algunos votos adicionales en ciertos distritos de acuerdo a los siguientes criterios.

El Registrador del Estado Civil concederá votos adicionales a los partidos políticos en aquellos distritos donde estos ganen, de acuerdo a un mecanismo similar al expuesto en el punto anterior. Así pues, si el partido *Radical* ha ganado tres veces consecutivas las elecciones en el distrito 8, el Registrador, al hacer el escrutinio de sus votos, le anotará 6 votos más de los que haya dispuesto para ese distrito y solamente en ese distrito (2 por cada elección ganada). Estos votos extras son sólo para el ganador de la vuelta anterior en un distrito dado y solamente pueden contabilizarse en ese distrito. No hay votos extras para elecciones ganadas en el pasado sino en el caso de un partido que se mantenga triunfador varias veces consecutivas en algún distrito.

El vocero de cada partido deberá entregar al Registrador su papeleta de votos *sin* incluir los votos contemplados en el punto anterior. Estos son asignados por el Registrador a la hora de cada escrutinio.

3. Elecciones en Mate$^{B}_{M}$á$^{S}_{T}$ica

Para efectos de jugar *Elecciones* en el curso de Mate$^{B}_{M}$á$^{S}_{T}$ica se recomienda lo siguiente:

a. Que se juegue a cinco vueltas, durante cinco días (una semana) a razón de una vuelta por día. En el primer día se presentará el juego, se formarán los partidos y se eligen los voceros.

b. Que el profesor actúe como Registrador del Estado Civil.

c. Que en los tres días intermedios del juego se dediquen solamente los últimos cinco minutos de clase al escrutinio de tal manera que todas las discusiones que se deban llevar a cabo para acordar distribución de votos y pactar alianzas se realicen fuera de clase. El primer día se utilizará para explicar el juego y realizar la primera elección y el último para discutirlo.

d. Que los voceros deberán entregar las papeletas con su distribución durante los primeros cinco minutos de clase. Partido político que no cumpla con esta regla no registrará votos para esta elección.

e. Que algún estudiante se ofrezca voluntariamente (o no) a hacer en cartulina o papel de papelógrafo el esquema de la tabla 2 que debe irse completando poco a poco.

4. Observaciones

Tal como en unas elecciones verdaderas, en el juego de *Elecciones* están permitidas las alianzas siempre y cuando no se alteren las reglas del juego.

Dos o más partidos políticos pueden por lo tanto reunirse y acordar caballerosamente pactos tales como no votar en ciertos distritos para evitar duplicidad o para intentar derrotar a un partido que esté acumulando muchos votos. Lo que no se puede hacer es trasladar votos: cada partido debe conservar los suyos. Las alianzas no conciernen al Registrador, ni se hace él responsable de su cumplimiento.

Empates

En caso de empate en una elección distrital, se le asigna a cada uno de los partidos empatados 1/2, 1/3 ó 1/4 de distrito, según sea el caso, en la contabilidad de distritos ganados. Para efectos de la asignación de votos extras, todos los empatados se consideran ganadores en ese distrito pero sólo reciben un voto adicional.

En caso de empate en una elección global, es decir en una de las vueltas electorales, continúa en el gobierno el partido que ya lo está. Si el empate ocurre en la primera vuelta, ésta se anula.

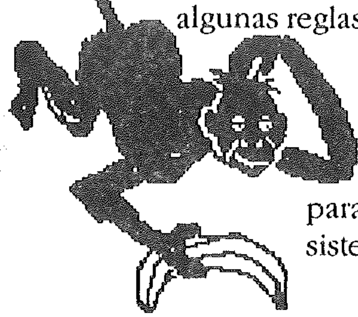
Corte electoral

Actuará como *Corte Electoral* el mismo Registrador del Estado Civil. El resolverá y dirimirá todas las disputas que se den y sus decisiones serán finales, no importa lo injustas.

Puntos de discusión

Finalizando el juego se sugiere uno, varios o todos de los siguientes puntos:

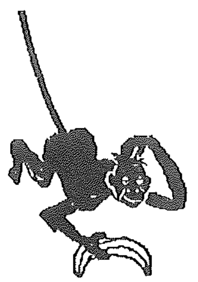
a. ¿Es ésta una buena simulación del proceso electoral anglo-sajón? ¿Qué defectos tiene? ¿Cuáles son corregibles cambiando algunas reglas?

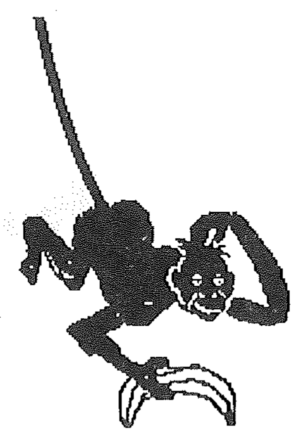


b. Suponiendo que sí es una buena simulación, ¿qué ventajas y qué desventajas tiene un sistema electoral de este tipo en comparación con el nuestro? ¿Conoce usted nuestro sistema? ¿Cómo podrían obviarse las desventajas?

c. ¿Qué tantas matemáticas hay en el juego de *Elecciones*? ¿Qué tanta psicología? ¿Qué tanta política? (Moraleja: todo tiene que ver con todo)

d. ¿Qué estrategias se sugieren para ganar el juego de *Elecciones*?





6.

El final

1. Reconocimientos*

Esta versión del texto es el producto del trabajo y la paciencia de muchas personas a quienes quiero reconocer su colaboración.

Raúl Meléndez, profesor del Departamento de Matemáticas, es el autor de la mayoría de los acertijos (en particular, el magnífico acertijo sobre el hotel infinito), de varias guías de lectura de Cosmos, de *Producir los Números* y de las guías de lectura de la *Biblioteca de Babel* y *El libro de Arena*. Es quien ha participado de manera más directa en el material contenido en el libro y fue quien corrigió la segunda versión del texto.

Clara Eugenia Bolaños, estudiante de Lenguas Modernas, quien vio el curso en su primera versión, es autora de las cuatro lecturas sobre los números. Este material se produjo dentro del marco de un proyecto especial de investigación con el departamento de Lenguas Modernas, con el apoyo de su directora, Clara de Saba.

Sergio Alvarez es el autor de la segunda versión del *Acertijo de MU*, la primera versión de *Adivine la Regla* y dos guías de lectura de Cosmos.

Guillermo Cardozo, estudiante de matemáticas, es el autor de dos guías de lectura de Cosmos.

María del Mar Farello, estudiante de Lenguas Modernas, es el autor de dos de las guías de lectura adicionales de Cosmos. Este material lo produjo siendo mi monitora durante el primer semestre de 1988.

Fred Pinto, profesor del Departamento de Matemáticas, es el autor de la carátula, la contracarátula y los fractales que aparecen en el texto.

Juan Fernando Mejía, es el autor de los dibujos que ilustran el texto. Este material se produjo dentro del marco de un proyecto especial de investigación con Artes y Textiles, bajo la dirección de Mónica Meira y con el apoyo de su directora, María Teresa de Guerrero.

Vilma Mesa y Patricia Perry aportaron correcciones a esta última versión del texto.

* Texto escrito para la quinta versión del libro.

Tengo que reconocer el trabajo de múltiples personas que, en esta edición del texto quedarán anónimas. Son ellas los autores de los diversos libros de los cuales he aprovechado material para copiar, traducir o tergiversar. Esta edición adolece de la falta de un capítulo de bibliografía. Allí habrían estado ellos mencionados.

Finalmente, Jeannette Forero, mi secretaria, fue quien, con inmensa paciencia, levantó una buena parte del texto.

Hasta aquí en lo que respecta al contenido del texto*.

Dentro del Departamento de Matemáticas he recibido un apoyo decidido de parte de tres personas.

Leonardo Venegas, mi amigo, creador de la metodología original del curso, autor de varias guías de lectura y del *Pesito del Paisita* y quien constantemente ha aportado al curso en todos sus aspectos.

Hernando Echeverri, jefe del Departamento de Matemáticas, quien, con su preocupación por la docencia, ha apoyado todos mis proyectos.

Margarita de Meza, decana de la Facultad de Ciencias, quien ha estado siempre pendiente de mis actividades.

En los aspectos técnicos, Ricardo Riaño, dueño de Compulaser, dedicó varios fines de semana a la producción de los archivos digitalizados con los que se produjo la ilustración del texto. La diagramación de la carátula y la contracáratula, como también de los afiches de MatebásicaMática y "una empresa docente"** fueron posibles gracias a la colaboración de mis amigos de Alef Publicidad, en especial de Irina Clopatofsky, Marcela Caldas, Juan Arango y Tito Caldas, de Grafipronto, fueron quienes estuvieron al mando del proceso de impresión del texto.

Quiero también agradecer a Luisa, mi hermana, quien, sacando tiempo de sus actividades, me ha hecho llegar la mayor parte de los programas de computador que han sido utilizados en el proyecto y a mi familia, que con infinita paciencia, ha aceptado que yo utilice mis fines de semana trabajando, a cambio de compartirlos con ellos.

Finalmente, tengo que mencionarlos a ellos, mis alumnos, la razón esencial de mi trabajo. Son ellos, con sus reacciones y su apoyo, quienes han aportado la energía y el entusiasmo necesarios para la realización del proyecto.

* Muchos se preguntarán qué he hecho yo. La verdad, apropiarme del trabajo desinteresado de mis amigos.

** Que pueden adquirirsen en una empresa docente, Departamento de Matemáticas, Universidad de los Andes. ♣*Había que meter una cuña*♣.

2. Ficha técnica

Este libro ha sido producido con las nuevas técnicas de "autoedición", sin ninguna participación de los procesos tradicionales de edición. Es por ello que considero importante dar algunas indicaciones acerca de los elementos y de las técnicas que han sido utilizados en este proceso.

1. Los computadores

Los siguientes son los computadores que han sido utilizados en la producción del libro:

- **Toshiba 5.100**, 16 Mhz, 40 Mb de disco duro, 4 Mb RAM, para la revisión de textos y algunas gráficas tipo objeto
- **Macintosh Portable**, para la producción de fractales y la traducción de formatos
- **Macintosh II**, 80 Mb de disco duro, 4 Mb RAM, monitor a color con 256 colores, para las gráficas con gamas de grises
- **Macintosh II cx**, 40 Mb de disco duro, 2 Mb RAM, monitor monocromático de página completa, para las demás gráficas Mac
- **Mylex 386**, 20 Mhz, 80 Mb de disco duro, 4 Mb RAM, monitor doble página Viking, para gráficas tipo objeto (GEM) y el armado final de artes
- Digitalizador **Scan Man** de Logitech para la digitalización de fotografías
- Digitalizador **Canon IX-12**, para la digitalización de algunas gráficas

2. Las impresoras

- Algunas pruebas se produjeron en una laser **Apple Laser Writer Plus** a 300 puntos por pulgada de resolución
- La mayor parte de las pruebas y las artes finales se produjeron en una impresora **Laser Master 1000** a 1.000 puntos por pulgada de resolución
- Las películas para las carátulas se produjeron en una máquina **Linotronic** a 1.200 puntos por pulgada de resolución

3. Los programas de computador

Los siguientes son los programas de computador que se utilizaron para la producción de la última versión del libro.

Autoedición

- **Ventura Publisher** versión Professional Extension de Xerox

Edición de texto

- **Point Editor** de Logitech y **Norton Editor** para edición de textos
- **Word 4.0** de Microsoft para edición de texto en formato Mac
- **Escribién** de Ibersoft para corrección de ortografía
- **El traductor** de una empresa docente para la traducción de códigos a códigos de Ventura

4. Gráficos

- **MacDraw** y **SuperPaint** para gráficas tipo objeto en formato Mac

- **MacPaint** y **SuperPaint** para gráficas tipo pixel en formato Mac
- **Pixel Paint 2.0** para gráficas con gamas de grises en formato TIF
- **Fracta Sketch** para generación de fractales
- **Corel Draw** y **Gem Draw** para gráficas tipo objeto en formato DOS
- **Paint Brush** y **Gem Paint** para gráficas tipo pixel en formato DOS

5. El libro

El libro ha sido levantado en Garamond Book y Garamond Condensed. Se ha utilizado papel propalibro de 70 gramos para el interior y propalcote de 240 gramos para la carátula. La carátula es plastificada en frío y el libro ha sido cosido a mano antes de ser encuadernado. Se produjeron 2.000 ejemplares para esta primera edición.

3. Bibliografía

La siguiente es una selección de libros de referencia para el curso. Se ha intentado presentar un pequeño comentario acerca de cada uno de ellos que sirva de guía para su elección. Esta bibliografía debería servir para la investigación que los estudiantes deben hacer acerca de los temas de ciencia y de historia y filosofía de las matemáticas.

Esta bibliografía es también un reconocimiento a la mayor parte de los autores que implícita o explícitamente contribuyen al contenido del texto. Particularmente es importante mencionar al *genio* de los acertijos, Martin Gardner, y a Douglas Hofstadter como autores que originaron gran cantidad de ideas desarrolladas en el curso.

Aaboe, Asger. *Matemáticas: episodios históricos desde Babilonia hasta Ptolomeo.* Cali, Editorial Norma — 1964.
Un pequeño libro de historia, por el autor que siempre estará de primero en todas las listas biliográficas. Una presentación sencilla de la historia de la astronomía en sus comienzos con especial referencia a la influencia de las matemáticas en este proceso.

Alberts, Bruce et. al. *Molecular Biology of the Cell.* New York,Harper and Row — 1967.
Un clásico de la bioquímica. Escrito por biólogos famosos, incluído Watson, descubridor de la doble hélice, presenta todos los temas del funcionamiento de la célula de manera clara y completa.

Aguekan, T. *Estrellas, Galaxias, Metagalaxias.* Moscú, Editorial MIR — 1974. Trad. M.F. Jusainov.
En este libro se pueden encontrar numerosos aspectos generales relativos a las estrellas, galaxias y cúmulos de galaxias. Un libro de fácil lectura donde se tratan temas como medición de distancias, luminosidad, tipo espectral, etc. Sobre las galaxias habla de sus aspectos generales como distancia, rotación, velocidad y otros. Se calcula incluso la edad del universo, estimada aquí en 2.500 millones de años.

Alquén, Hannes. *Cosmic Plasma.* Netherlands, Reidel Publishing Co. — 1980. (Astro - physics and space science library # 82).
Este libro introduce el concepto de plasma dentro de la física. Su propósito es presentar un material de lectura semiavanzada, donde se muestra la naturaleza y relevancia del plasma cósmico como un

ingrediente activo en los problemas cosmológicos. Se puede utilizar para obtener una idea general y bien fundamentada de lo que el plasma cósmico es, idea generalmente desvirtuada o inexistente.

Asimov, Isaac. *El Universo: de la tierra plana a los quásars*. Madrid, Alcarza — 1980. Quinta edición (Sección Ciencia y Técnica).
Se tratan en este libro de una manera clara los aspectos que interesan al cosmólogo. Ofrece además una introducción a la teoría del "Big Bang" y a la radioastronomía. El tema es tratado históricamente dentro del estilo de Asimov, de agradable lectura

Beckmann, Peter. *A history of π (pi)*, St. Martin's —1971.
La historia de π forma una pequeña parte de la historia de las matemáticas, es, sin lugar a dudas, un espejo de la historia del hombre. El autor describe el contexto de las épocas en que π progresó y en las que no, porque la ciencia estaba limitada por los fanatismos religiosos y militares. El nivel matemático de este libro es flexible, y puede ser disfrutado por lectores de todas las edades e intereses..

Bell, Eric Temple. *Men of Mathematics*. New York, Simon & Schuster. 1965.
Uno de los autores más románticos de la historia de las matemáticas. La historia de cada matemático es una novela. Para los no matemáticos este libro presenta la belleza, la fuerza y la importancia de las matemáticas.

Bell, J.L. *Course in mathematical logic*. New York, North Holland — 1977.
El gran libro de lógica matemática. En él se presenta en todo detalle los avances de la lógica matemática de nuestro tiempo, con la colaboración de Machover, un gran pedagogo de las matemáticas.

Borek, Ernest. *Los átomos de nuestro cuerpo*. México, Novaro — 1965. Trad. Luis Díaz Cortez.
Cuando Borek habla de átomos se refiere a vitaminas, encimas, azúcares, proteinas, DNA y RNA como constituyentes básicos de la vida. Menciona del mismo modo el cerebro como portador de la inteligencia.

Borel, Emile. *Space & time*. New York, Dover — 1960.
Este libro contiene, después de una extensa introducción donde se mencionan los aspectos más importantes desde Newton hasta Einstein en el surgimiento de la relatividad, unos excelentes capítulos introductorios a las ideas de la relatividad especial y general donde se cubre de manera intuitiva y elegante lo que significa una geometría del espacio y del tiempo y un sobrevuelo de la teoría de la luz.

Bowers, John. *Invitation to Mathematics*, Basil Blackwell — 1988.
¿Qué hacen realmente los matemáticos? ¿Cómo es posible que la más exacta de las ciencias genere debate y controversia? ¿Cuáles son las principales áreas de investigación de las matemáticas? Este libro trata de contestar estas y otras preguntas

en una forma clara y anecdótica. El autor guía al lector a través de corrientes matemáticas complejas y cuenta su fascinante historia. Muestra cómo surgieron varias ramas de esta disciplina y cómo se encaminan hacia el mundo real.

Carrol, Lewis. *The annotated Alice,* Meridian — 1974.
En este libro se agrupan *Alicia en el país de la maravillas* y *A través del espejo*, con los textos completos y las ilustraciones originales de Tenniel en los lugares correspondientes y anotaciones y referencias históricas. Trae comentario de todos los chistes, juegos, acertijos, trampas, parodias, referencias oscuras y todas las curiosidades con que Carrol llena sus escritos.

Crossley, J. N. *What is mathematical logic.* Oxford, Oxford University Press — 1972.
Un muy pequeño libro en el que se presenta la esencia de la lógica matemática. Perfecto para quien quiere informarse del tema sin necesidad de entrar en la complejidad del mismo.

Darwin, Charles. *The Origin of Species*. New York, Covier — 1962.
Darwin expone aquí los principales aspectos de su teoría. Trata entre otros temas de las variaciones naturales y artificiales, la lucha por la supervivencia, el instinto, el hibadismo y afinidades morfológicas embrionarias.

Davies, Paul. *The COSMIC blueprint,* Simon and Schuster —1988.
Maneja la idea de un universo a merced de fuerzas aleatorias, presentando un argumento para existencia de un plan universal predestinado. Trata de entender la secreta fuerza creativa que da unidad a la naturaleza, presenta recientes descubrimientos tan diversos como la evolución biológica, computadores, astrofísica. Afirma que la materia y la energía tienen la habilidad de autoregularse de acuerdo a principios especiales.

Dover, G.A. y Flavell, R.B. *Genome Evolution.* London, Academie Press — 1982. (Systematics Asociation, # 20).
Basado sobre un simposio realizado en Cambridge, este libro contiene numerosos artículos de interés entre los que se destacan:
- "Selfish DNA after fourteen Months": Sobre la autoreplicación prebiótica del DNA.
- "Evolution of primate DNA Organization": Sobre la influencia de las alteraciones de alto rango (macromutaciones) en la evolución.
- "Sequencing & Manipulating Highly repeated DNA" y otros: Cómo afecta el orden de los geromas.

Dyson, Freeman. *Infinite in all directions,* Harper & Row — 1988.
Este nuevo libro de un distinguido científico y escritor está dedicado a la diversidad, en la ciencia y en la vida, una combinación de un científico conocedor y un escritor maravilloso. La primera parte trata de la vida como un fenómeno científico, sobre nuestros esfuerzos por entender la naturaleza de la vida y su lugar en el universo. La segunda parte es sobre la ética y la política, sobre los problemas locales introducidos por nuestra

especie en la existencia de vida en este planeta.

Einstein, Albert y otros. *The principle of relativity.* USA, Docer — 1952. (Republicación 1923) Trad. Rerrett Jeffery.
Este libro contiene una recopilación de los principales artículos sobre el tema escritos por Lorenz, Einstein, Minkowski y Sommerfeld. Son artículos que establecieron pautas en la revolución de las nociones de la física a nivel de cinemática. La mayor parte de los artículos son de Einstein y en ellos describe sus postulados sobre la relatividad especial y general que revolucionaron la ciencia.

Einstein, Albert. *Relativity.* Gran Bretaña, Jarnold & Sons — 1962. (Republicación de 1920). Trad. Lawson.
El libro está dividido en tres partes. En la primera Einstein expone las nociones básicas de la relatividad especial, tales como simultaneidad y distancia. La segunda está dedicada a la relatividad general explicada desde el concepto de campo gravitacional hasta la solución dada por la teoría. La parte tres concluye con unas consideraciones cosmológicas derivadas de su teoría general y con la estructura del espacio, como concepto abstracto y físico.

Feynman, Richard. *Surely you are joking, Mr. Feynman.* New York, W.W. Norton — 1985.
Un libro de *chismografía* científica, escrito por uno de los grandes físicos de nuestro tiempo, autor del mejor texto de física después de mucho tiempo. Se narran las historias del Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, en la época de Einstein, Von Newman y Gödel. También nos cuenta los eventos del laboratorio de los Alamos donde se desarrolló la primera bomba atómica.

Fisher, Alec. *The logic of real arguments,* Cambridge —1988.
Este libro pretende ayudar a los estudiantes a pensar críticamente sobre la clase de bases o orgumentos teóricos que generalmente encuentran en el curso de sus estudios: argumentos sobre la naturaleza del mundo, sobre la sociedad, sobre política, sobre filosofía. El libro expone un nuevo método para manejar tales argumentos y aplicarlos en numerosos ejemplos instructivos. El método tiene dos rasgos distintivos. Emplea la llamada "Assertibility Question", una pregunta especial que extracta y evalua argumentos y que va muy bien con la técnica de razonamiento hipotético, un importante método de razonar que generalmente es ignorado por escritores en este campo.

Fisher; Erns Peter; Lipson, Carol. *Thinking about science,* Norton — 1988.
Es un importante documento histórico que relata la revolución molecular que la biología ha sufrido en nuestro tiempo. Es la historia de la vida de Max Delbrück y de los orígenes de la biología molecular. Se recomienda para todos los lectores interesados en la historia de la ciencia moderna.

Flew, Antony. *Thinking about thinking,* Fontana Press — 1975.
Generalmente los políticos, administradores, estudiantes radicales y otras personas como ellos, ganan la aprobación de la gente presentando argumentos erróneos o analogías falsas. Pero Antony Flew muestra lo que sucede cuando las personas que leen o escuchan estos discursos, tratan de entenderlos de verdad. Además nos comprueba que todos podemos caer en el uso de artimañas lógicas. Nos enseña cómo pensar mejor y más formalmente; es un ejercicio en entrenamiento lógico pero a la vez es informativo, divertido y hace pensar seriamente.

Frege, Gottlob. *The foundations of arithmetic,* Blackwell —1980.
Es, indudablemente, la mejor introducción al pensamiento de Frege; es aquí donde Frege expone las nociones centrales de su filosofía exponiendo las opiniones de sus predecesores y contemporáneos a un análisis devastador. El libro presenta la primera discusión filosóficamente importante sobre el concepto de número en la civilización occidental. Esto influyó profundamente en el desarrollo de la filosofía de la matemáticas.

Frohlichstein, Jack. *Mathematical fun, games and puzzles,* Dover — 1962.
Cubriendo una gran cantidad de temas, este libro usa acertijos y juegos para introducir las ideas y las operaciones de la aritmética, realmente básicas: números, promedios, fracciones, decimales, porcentajes, mediciones, gráficas, potencias y raíces. Incluye tres clases de materiales: acertijos, juegos y pasatiempos. Los acertijos, divididos en fáciles, difíciles e intermedios, se refieren a temas muy conocidos pero en los cuales no se piensa mucho: efectos curiosos basados en las propiedades de los números, métodos poco usuales de realizar operaciones y materiales similares.

Gallon, Ernesto y Ruival, Heraclio. *Teoría especial de la relatividad.* Buenos Aires, Editorial Géminis — 1976.
Este libro ofrece una completa explicación a las nociones básicas desarrolladas por Einstein en su teoría especial de la relatividad. Trata aspectos como cuerpos en movimiento, relojes, sincronización y simultaneidad. Explica también los conceptos de masa y energía en el contexto relativista especial, así como una representación del espacio—tiempo debida a Minkowski y un esbozo del efecto Doppler relativista fundamental para comprender mediciones con galaxias lejanas.

Gardner, Martin. *La magie des paradoxes.* París, Bibliothèque pour la science — 1975.
Uno de los tantos libros de Gardner sobre paradojas, acertijos y juegos matemáticos. Gardner es el padre de este tema y una gran parte de los acertijos presentados en el texto son adaptaciones de acertijos originales de este autor.

Gleick, James. *Chaos,* Viking —1988.
En la última década, físicos, biólogos, astrónomos y economistan han creado una nueva forma

de entender el crecimiento de la complejidad en la naturaleza. Esta nueva ciencia, llamada Caos, da una forma de observar orden y patrones donde antes sólo se observan cosas aleatorias, erráticas, impredecibles, en una palabra, caóticas. La ciencia del caos atraviesa las disciplinas científicas tradicionales relacionándolas con cosas irregulares: de la turbulencia del estado del tiempo a los complicados ritmos del corazón humano, del diseño de los copos de nieve a las espirales de las tormentas de arena del desierto. En este libro el autor describe la fascinante historia de los científicos que comenzaron a explorar estas ideas, como: Edward Lorenz, Mitchel Feigenbaum, Benoit Mandelbrot. Es una historia de descubrimientos científicos, en palabra de sus participantes, sus conflictos y frustraciones, sus emociones y momentos de revelación es el nacimiento de una nueva ciencia.

Gonick, Larry. *The cartoon guide to genetics*. New York, Barnes & Noble Books — 1983.
Un libro de caricaturas en el que se explican los principales conceptos de la genética y la bioquímica. Existen también libros de este tipo sobre la teoría de la relatividad y otros temas.

Hardy, G.H. *A mathematician's apology*. Cambridge, Cambridge University Press — 1940.
Un clásico. Una biografía del matemático hindú Ramajunan por un matemático inglés famoso que vivió toda una experiencia personal y matemática a su lado.

Hoffman, Paul. *Arquimedes'revenge,* Norton — 1988.
El hecho de que vivamos en un mundo de insensibles y algunas veces pesados números no dice mucho sobre los matemáticos actuales, sobre su fabuloso mundo de números, formas y máquinas. El mundo de las matemáticas está lleno de máquinas maravillosas que son capaces de jugar ajedrez mejor que cualquier hombre y que han solucionado problemas que durante mucho tiempo estuvieron sin solución. *666 y sus amigos, Aventuras de un hombre huevo, La máquina que quería ser rey, ¿Es la democracia matemáticamente defectuosa?,* son algunos de los temas que se tratan.

Hofstadter, Douglas R. *Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid.* Londres, Penguin Books — 1979.
Si usted no lee sino uno solo de los libros de esta bibliografía, este es el que tiene que escoger. De este libro sale la idea original del *Acertijo de Mu* y muchas otras ideas acerca de las matemáticas, la ciencia y la forma de mezclar diversos temas con un objetivo común. Este libro explica, para el no iniciado, los resultados de Gödel, resultados estos que cambiaron la visión de la filosofía de las matemáticas y la ciencia, al mismo tiempo que los relaciona con temas del arte, la biología y la informática. Un libro que todos deben tener en su biblioteca personal.

Jacob, Francois. *The statue within.* Basic Books — 1988.
Francois Jacob es un profesor del Instituto Pasteur en París y del Collège de Francia. Participó del

premio nobel de medicina de 1965 con André Lwoff y Jacques Monod por el trabajo en regulación genética. Este libro es su autobiografía.

Jastrow, Robert y Thompson, Malcolm. *Astronomy: Fundamentals & Frontiers*.
Este es un excelente libro de introducción a la astronomía. Se explican en él, en detalle, desde el movimiento de la bóveda celeste hasta el paralaje interestelar y la dinámica cósmica. Un libro de fácil entendimiento con una gran cantidad de ilustraciones de calidad.

Judson, Horace Freelance. *The eighth day of creation*. New York, Simon & Schuster — 1979. (Touchstone book)
Un libro de aceptable nivel científico donde se cuenta en detalle, la relación entre el DNA, el RNA y las proteínas. El tema es tratado historica y científicamente. Ilustra las relaciones químicas, electrónicas y ópticas que se dan en los elementos mencionados para constituir la vida. La mejor historia de la bioquímica que existe. Con delicioso detalle y la mejor exactitud científica se presentan los desarrollos de la biología y la bioquímica de este siglo.

Kippenhann, Rudolf. *Luz del confín del Universo*. Barcelona, Salvat — 1987. (Bilioteca Científica Salvat # 78). Trad. Miguel Muntaner.
Este libro contiene, además de los aspectos generales que atañen a un cosmólogo: luz, vía láctea, espectrografía, universos, isla, quasars, radiografía, nebulosas, un capítulo singular donde el autor explica usando la idea de E. Abbot, la curvatura del universo y su origen.

Koestler, Arthur. *Los Sonámbulos*. Buenos Aires, Eudeba — 1963. Trad. Alberto Luis Bixio.
Un libro histórico de extraordinaria lucidez. Koestler investiga y narra aquí la vida de los grandes pensadores de la ciencia de la cosmología. Trata de manera general a los jonios, la edad media y se ocupa en detalle de la vida de Copérnico, Tycho Brahe, Kepler, Galileo y Newton, sentando las bases de sus transformaciones. Está acompañado de un epílogo donde el autor hace un análisis de la evolución del pensamiento científico en confrontación con la tradición científica y religiosa.

Mandelbrot, Benoit. *The fractal geometry of nature*. New York, Freeman — 1977, 1983.
Un libro que será un clásico de la ciencia del siglo veinte. El padre de los fractales introduce el tema y muestra cómo la naturaleza tiene una geometría fractal. Mandelbrot presenta una visión definitiva del origen de sus ideas y nuevas aplicaciones. El libro está basado en sus trabajos recientes, tiene amplia cobertura y muchas ilustraciones. Si usted se interesa por la naturaleza y sus formas en el arte, la ciencia y la geometría misma, este libro será de gran interes e inspiración.

Maor, Eli. *To Infinity and Beyond*. Birkhauser — 1987.
En una narrativa fascinante, el autor examina el papel del infinito en las matemáticas y la geometía y

discute su impacto cultural en el arte y las ciencias. Maor comparte con el lector el profundo impacto intelectual que el infinito ha ejecutado en la mente humana, desde el "horror del infinito" de los griegos hasta los inspirados trabajos de arte de Maurits C. Escher; desde los exquisitos diseños ornamentales musulmanes, en los cuales el infinito juega un papel importante, hasta la saga de Giordano Bruno, quien creía que un universo infinito conduciría a su trágica muerte en las manos de la Inquisición. El libro está profusamente ilustrado haciendo que sea un placer leerlo.

Medvedev, Zhores. *Molecular—Genetic Mechanism of Development.* New York, Plenum Press — 1970.
Un libro técnico donde se describen las relaciones conocidas entre la genética del DNA y la diferenciación celular; habla sobre la formación de órganos dentro del individuo.

Miller, Stanley y Orgel, Leslie. *The origins of life on the earth.* New Jersey, Prentice—Hall — 1974. (Concepts of modern biology series).
Hace una relación completa de la evolución (o pre—evolución) de la química inorgánica a la orgánica, desde la composición atmosférica y las fuentes naturales de energía hasta la síntesis prebiótica de pirimidinas y nucleótidos. Trae un modelo de la evolución bioquímica hasta la vida. Incluye un capítulo donde se introducen las principales características del metabolismo celular (enzimas, DNA, membranas). Hace estudio sobre la posibilidad de vida en otros planetas.

Monod, Jacques. *Chance and necessity.* New York, Random House — 1971.
Un clásico en la historia de la bioquímica. Se aproxima a la pregunta: ¿cómo se crea la vida a partir de lo inanimado?

Morris, Richard. *Las flechas del tiempo.* Barcelona, Salvat — 1987. Trad. Mercedes Esteban Caso (Bilioteca Científica, Salvat # 65).
Todo el libro está dedicado a una pregunta fundamental: ¿Qué es el tiempo? Abre y cierra su contenido con esta pregunta revelando la insondable naturaleza filosófica del sujeto. Trata sobre toda la problemática histórica al respecto, junto con unos capítulos sobre las últimas nociones del tiempo según la física relativista. Las flechas del tiempo son la manera con la cual la física y el hombre detectan el paso del tiempo, aunque justo es decirlo, todo parece indicar que "un gato es un gato" cuando se trata de la noción de tiempo.

Morrison, Philip & Morrison Phylis. *Potencias de diez.* España, Prensa Científica — 1984. (Bilioteca Scientific American). Trad. Luis Bou.
Un hermoso libro basado en la película del mismo nombre, donde se realiza por medio de bellas fotografías, un viaje hipotético desde el extremo del universo hasta el "interior" de un protón en un átomo de carbono.

Nagel, Ernest. *The structure of science.* New York, Harcourt — 1961.
Un clásico de la filosofía de la ciencia.

National Aeronautics & Space Administration. *The Search for Extraterrestrial Intelligence.* New York, Dover — 1979.
Una serie de artículos provenientes de coloquios internacionales, junto con una ponencia "consenso" a manera de introducción, donde se dan las motivaciones e implicaciones de la búsqueda. Se desarrollan temas como la evolución cósmica y cultural, las estrategias de búsqueda y las formas alternativas de comunicación. También se estudian trabajos en comunicaciones hasta la fecha, su confiabilidad y eficiencia, así como problemas de interferencias y frecuencias de transmisión.

Northrop, Eugene P. *Riddles in mathematics.* London, Penguin Books — 1971.
Un libro de acertijos en matemáticas. Estos son complicados.

Polya, G. *How to solve it.*
El clásico en la metodología de resolución de problemas matemáticos. La metodología propuesta en el texto para la solución de los acertijos fue tomado de este libro.

Ponnamperuma, Cyril. *Cosmochemistry and the origin of life.* Hollanda, Reidel — 1983. (NATO Advanced Study Series C, Mathematical and Physical Sciences; v.101)
Recopilación de artículos dados en un congreso en Maratua, Italia. Se tratan temas como la composición química del polvo interestelar y del primitivo sedimento terrestre. Tiene un artículo sobre moléculas fósiles donde se presenta un nuevo estudio fósil.

Reid, Constance. *Hilbert - Courant,* Springer-Verlag — 1986.
Las vidas entrelazadas de dos hombre únicos y diferentes han sido relatadas juntas por primera vez, en este libro que cubre más de un siglo de la dramática historia de la ciencia, descrita en un estilo no técnico.

Resnikoff, H.L., Wells, Jr. *Mathematics in Civilization,*Dover — 1984.
Este libro comprueba la contribución de las matemáticas en el desarrollo de nuestra sociedad y trata de convencer al estudiante de que las matemáticas son tan útiles como bellas. Los vuelos espaciales, los computadores microelectrónicos, el láser, el reactor nuclear, son algunos ejemplos del espectacular crecimiento, desarrollo y alcance de las aplicaciones que las matemáticas han tenido en el siglo XX. Pero, ¿qué hay sobre el pasado de las matemáticas? ¿Sobre qué bases intelectuales milenarias está desarrollada la matemática del siglo XX? ¿Cómo nuestra comprensión de la estructura del universo físico, el lenguaje y la naturaleza del pensamiento mismo han sido influenciadas por el desarrollo de las matemáticas a través de los tiempos? En este libro los autores examinan cómo los desarrollos y descubrimientos de

las matemáticas se fueron formando en la historia del hombre.

Rucker, Rudy. *Mind Tools,* Houghton Mifflin — 1987.
Conecta las matemáticas con el mundo que las rodea. Revela que el gran poder de las matemáticas viene del hecho de que sirve como una alternativa de lenguaje para entender algunas cosas como por ejemplo el tamaño del infinito. Al explorar estos conceptos como procesos digitales análogos, usando la lógica como una herramienta computacional y la comunicación como sistema de trasmisión de información, el autor presenta las herramientas de la mente para una época posmoderna.

Russell, Bertrand. *The problems of Philosophy,*Oxford.
En este libro Russell da una inteligible y estimulante guía en una rama del conocimiento que es en general, erróneamente considerada como abstrusa para las mentes profanas. Se ha preocupado principalmente por estos problemas de filosofía en los cuales es posible decir algo positivo y constructivo. Por esta razón la teoría del conocimiento ocupa una mayor espacio que la metafísica; algunos temas muy discutidos por los filósofos están tratados brevemente.

Russell, Bertrand. *La evolución de mi pensamiento filosófico.* Alianza — 1976.
Publicada cuando el autor tenía chenta y siete años, es no sólo la crónica de su dedicación a la filosofía, sino además una autobiografía intelectual digna de figurar entre los más altos ejemplos del género. Russell traza el desarrollo de sus ideas desde sus esfuerzos iniciales hasta el momento de lúcida madurez en que escribe; a lo largo del recorrido las numerosas y esclarecedoras puntualizaciones en torno a las diversas fases de su trayectoria, modeladas por los problemas planteados y las influencias recibidas, no hacen sino subrayar el sentido último de su trabajo.

Russell, Bertrand. *La perspectiva científica.* Ariel — 1974.
"Así como la religión y el arte existen desde hace ochenta mil años, la ciencia, como fuerza importante, comienza con Galileo y, por consiguiente, existe desde hace unos trescientos años. En la primera mitad de este corto período, fue un anhelo de los eruditos, sin afectar a los pensamientos o costumbres de los hombres corrientes. Sólo en los últimos 150 años la ciencia se ha convertido en un factor importante que determina la vida cotidiana de todo el mundo. En este breve tiempo ha causado mayores cambios que los ocurridos desde los días de los antiguos egipcios. Ciento cincuenta años de ciencia han resultado más explosivos que cinco mil años de cultura precientífica". Si la ciencia como conocimiento es, en cualquier caso, una conquista positiva e irrenunciable de la humanidad, la ciencia como técnica puede dar lugar a un mundo de esclavitud. Bertrand Russell estudia en este libro la influencia de la ciencia sobre la vida humana y trata de imaginar la futura sociedad científica a la que

inevitablemente estamos abocados.

Salmon, Wesley ed. *Zeno's Paradoxes*. New York, Bobbs—Merril — 1970.
Una colección de artículos sobre las paradojas de Zenón a la luz de las teorías matemáticas modernas.

Schwoerbel, Wolfgang. *Evolución*. Barcelona, Salvat — 1986. (Bilioteca Científica Salvat)
Trata a nivel general todos los temas que atañen a un investigador del mecanismo evolutivo: historia del evolucionismo desde Lineé hasta Lamark y Darwin, Genética (mutaciones, genes), fosilización y estudio fósil, cómo actúa la evolución (mutaciones, nuevas especies, selección, saltos) y una pequeña reseña de la historia de la vida desde sus orígenes.

Schrödinger, Erwin. *What is life? Mind and matter*. New York, Cambridge University Press — 1967.
Un libro muy famoso escrito por un físico muy famoso. Una aproximación al problema de la vida, con respuestas que fueron comprobadas mucho después. Un libro extremadamente estimulante en el ejercicio de la curiosidad científica y en el ansia de llegar a la verdad.

W.H. Freeman. *Evolution*. Scientific American — 1978.
Como todos los artículos de "Scientific American" un artículo sobre la evolución que comienza muy sencillo y termina con todo el detalle necesario.

W.H. Freeman. *La base molecular de la vida*. Scientific American — 1978.
Una explicación completa de cómo se llega a la vida partiendo de material inerte: átomos y moléculas.

W.H. Freeman. *The solar system*. Scientific American — 1978.
Una visión global del sistema solar.

Silk, Joseph. *The Big Bang*. San Francisco.
Escrito para los no especialistas, describe los problemas y logros más grandes en astronomía, cosmología y astrofísica, examinando las actuales controversias desde distintos puntos de vista. Describe el origen y evolución de las galaxias, estrellas, sistemas planetarios. Presenta y sustenta la teoría del "Big Bang". Presenta a groso modo otras alternativas al "Big Bang". Es un libro de obligada lectura para el que se inicia en cosmología.

Smullyan, Raymond. *What is the name of this book?* N.J, Prentice Hall — 1978.
Un libro de acertijos de todo tipo. La idea del acertijo de Portia y de otros acertijos similares surgen de este maravilloso libro. Si las matemáticas son recreativas, entonces este libro es deliciosamente divertido.

Stewart, Ian. *Does God Play Dice?* Blackwell —1989.
Einstein no creía que "Dios jugase a los dados". El puso los fundamentos para pensar que el universo está gobernado por leyes inmutables de la física. Pero estos

fundamentos no se pueden construir sobre arena. La nueva ciencia del Caos está obligando a los científicos a pensar de nuevo en las ideas fundamentales sobre la forma como se comporta el universo. El libro explica las soprendentes teorías nuevas de sistemas que obedecen leyes simples pero que no son constantes ni predecibles. En un universo en que nada es como parece, nuestra formas geométricas conocidas como círculos y elipses, dan forma a estructuras infinitamente complejas conocidas como "fractales".

Struik, Dirk. *A Concise History of Mathematics.* Dover —1967.
Describe las más importantes tendencias en el desarrollo de todos los campos de las matemáticas desde los primeros registros disponibles hasta fines del siglo XIX. Comienza con el antiguo Cercano Oriente, describiendo las ideas y técnicas desarrolladas en Egipto, Babilonia, China y Arabia, investigando en manuscritos antiguos. Considera los desarrollos de Grecia y Roma desde sus comienzos en el racionalismo jónico hasta la caída de Constantinopla; cubre las ideas de la Europa Medieval y las tendencias del Renacimiento; analiza las contribuciones de los siglos XVII y XVIII y concluye con una exposición de los conceptos del siglo XIX. Aparecen todas las figuras importantes de la historia de las matemáticas como son: Euclides, Arquímedes, Diofanto, Omar Kayam, Fermat, Pascal, Newton, Leibniz, Fourier, Gauss, Riemann, Cantor y muchos otros.

Swihart, Thomas. *Astrophysics and Stellar Astronomy.* USA, John Willey & Sons — 1968.
Este libro brinda una introducción matemática a la cosmología, sus nociones básicas: espectro, ionización, gases, física nuclear; y luego de una visión general del estudio del cosmos: su evolución, estrellas binarias, etc. Desarrolla estos aspectos dentro de los conceptos de física clásica sin entrar en grandes complicaciones. Trata también de manera general las galaxias, su masa, distancia, tipo, etc., como una introducción a los modelos relativistas.

Thomas, Lewis. *The lives of the cell.* Toronto, Bantam Books — 1974.
Un precioso libro de historias y experiencias personales sobre temas científicos. Thomas tiene aquí su propia reflexión y respuesta a la pregunta: ¿qué mensaje mandar a los extraterrestres?

Ulam, Stanislaw. *Adventures of a Mathematician.* New York, Charles Scribner's — 1976.
Una autobiografía. Un libro, en forma de cuento, sobre las matemáticas y los matemáticos.

Watson, James. *The double helix.* New York, 1980.
La historia del descubrimiento de la doble hélice de DNA, desde el punto de vista personal de uno de los descubridores.

Webb, Edmund J. *Los nombres de las estrellas.* México, Fondo de Cultura Económica — 1957. Trad. Francisco González Aramburo.
Escrito por un "contemplador de las estrellas", este libro contiene un detallado estudio histórico

sobre el origen de los nombres de las estrellas y sus constelaciones. Toma en detalle algunas estrellas y constelaciones enriqueciendo la investigación con alusiones históricas y literarias. El zodíaco tiene en este libro un tratamiento especial.

Weinberg, Steven. *Gravitation and Cosmology.* USA, John Willey & Sons — 1978.
Un libro de alto contenido matemático. Comienza con una interesante y cumplida nota histórica sobre los orígenes de la relatividad y pasando luego en detalle por la teoría especial y la teoría general de la relatividad, concluye con una parte cosmológica donde se tratan a fondo los modelos más comunes en el estudio de la "forma" del universo.

Whitehead and Russell. *Principia Mathematica.* Cambridge — 1978.
Su objetivo es deducir todas las proposiciones fundamentales de la lógica y las matemáticas a partir de un reducido número de premisas e ideas primitivas y probar así que las matemáticas son un desarrollo de la lógica. Contiene el material introductorio al estudio de la lógica y la filosofía de las matemáticas.

Wolpert, Lewis. Richards, Alison. *A passion for science,* Oxford — 1988.
La ciencia se deja ususalmente como una actividad fría y remota, fuera de la experiencia diaria, pero en este libro se revela como una empresa humana como cualquier otra. Estilo, placer, oportunidad, imaginación, confusión y fracaso, todos influyen en el tortuoso camino del descubrimiento.

4. Indice

Otros libros de la misma editorial:

Javier Serrano.
Mercados monetarios y de capitales.

Xavier Caicedo.
Elementos de lógica y calculabilidad.

Eduardo Alvarez-Correa.
Contratos bancarios.

Patricia Perry, et al.
Matemáticas, Azar, Sociedad (Probabilidad).

Pedro Gómez y Cristina Gómez.
Sistemas formales, informalmente.

Pedro Gómez.
Profesor: no entiendo.

Patricia Perry et al.
Matématicas, Azar, Sociedad (Estadística).

Felipe Fernández, et al.
Estadística y Sociedad.