Revista Colombiana de Educación N. 94, 2025
e-ISSN 2323-0134
DOI: https/doi.org/10.17227/rce.num94-19797
Universidad Pedagógica Nacional, Colombia

Metacognición en tareas de modelado matemático con estudiantes de Educación Primaria en Chile

María D. Aravena-Díaz[*]
Horacio Solar Bezmalinovic[†]
Noemí Cárcamo Mansilla[‡]
María Beatriz Cifuentes[§]

Recibido: 30 de junio de 2023
Evaluado: 28 de febrero de 2024
Publicado: 1 de enero de 2025

Resumen

Este artículo de investigación presenta la caracterización de las estrategias metacognitivas y experiencias socioemocionales que activan los estudiantes de educación primaria cuando resuelven tareas de modelado matemático. Se utilizó una metodología cualitativa con estudio de casos múltiple de alcance exploratorio. Se seleccionaron dos grupos de trabajo de 1° y 3° grado para observar en profundidad las estrategias y experiencias metacognitivas que activan los niños cuando resuelven tareas mediante un trabajo colaborativo grupal. Se usaron grabaciones de video mientras resolvían las tareas de modelado y se codificaron en Atlas ti. Para el análisis, se utilizaron sistemas de categorías en las estrategias metacognitivas y experiencias socioemocionales y se cruzaron con las fases del ciclo de modelado. Como resultados del análisis los niños de 1° grado activaron las estrategias de proceder en las primeras etapas del ciclo de modelado y los de 3°grado las estrategias de planificar y monitorear en las fases de simplificación, matematización y trabajo matemático. Las mayores sensaciones de agrado, desánimo y descontrol, se generan en estas fases. Ambos grupos regulan sus reacciones emocionales para persistir en la tarea, controlándose para evitar distracciones del equipo. Las estrategias de regular se activaron en la fase de matematización para ambos grupos y en el trabajo matemático en el grupo de 3°grado, y las estrategias de evaluar en la interpretación de soluciones y validación del modelo para ambos grupos. En el grupo de 3° grado emergen sensaciones de agrado y desconcierto cuando proyectan el modelo detectando fortalezas y limitaciones.

Palabras clave

metacognición; experiencias; modelado matemático; educación matemática; educación primaria

[*] Doctora en Filosofía y Ciencias de la Educación, Universidad de Barcelona, Barcelona (España). Centro de Investigación en Educación Matemática y Estadística, Facultad de Ciencias Básicas, Universidad Católica del Maule, Talca (Chile). maravena@ucm.cl
[†] Doctor en Didáctica de la Matemática, Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona (España). Facultad de Educación, Pontificia Universidad Católica de Chile, Santiago (Chile). hsolar@uc.cl
[‡] Doctora en Didáctica de la Matemática, Universidad Católica del Maule, Talca (Chile). Departamento de Educación e Innovación, Facultad de Educación, Universidad Católica de Temuco (Chile). ncarcamo@uct.cl
[§] Candidata a doctora en Educación, Facultad de Educación, Pontificia Universidad Católica de Chile, Santiago (Chile). mtcifuentes@uc.cl

Metacognition in Mathematical Modeling Tasks with Primary School Students in Chile

Abstract

This research article presents the characterization of the metacognitive strategies and socio-emotional experiences that primary school students activate when solving mathematical modeling tasks. A qualitative methodology was used, employing a multiple case study with an exploratory scope. Two work groups from 1st and 3rd grade were selected to closely observe the metacognitive strategies and experiences that children activate when solving tasks through collaborative group work. Video recordings were made while they solved the modeling tasks and were coded in Atlas.ti. For the analysis, category systems were used for metacognitive strategies and socio-emotional experiences, and these were cross-referenced with the phases of the modeling cycle. The analysis results show that 1st-grade children activated procedural strategies in the early stages of the modeling cycle, while 3rd-grade students used planning and monitoring strategies during the simplification, mathematization, and mathematical work phases. The most significant feelings of enjoyment, discouragement, and lack of control were generated during these phases. Both groups regulate their emotional reactions to persist in the task, controlling themselves to avoid distractions from the team. The regulation strategies were activated during the solution interpretation and model validation phases for both groups. In the 3rd-grade group, feelings of enjoyment and confusion emerged when they projected the model, detecting its strengths and limitations.

Keywords

metacognition; strategies; mathematical modelling; mathematics education; elementary education

Metacognição em tarefas de modelagem matemática com alunos do Ensino Fundamental no Chile

Resumo

Este artigo de pesquisa apresenta a caracterização das estratégias metacognitivas e das experiências socioemocionais que os estudantes do ensino fundamental ativam ao resolver tarefas de modelagem matemática. Foi utilizada uma metodologia qualitativa com estudo de casos múltiplos de alcance exploratório. Foram selecionados dois grupos de trabalho do 1° e 3° ano para observar em profundidade as estratégias e experiências metacognitivas que as crianças ativam ao resolver tarefas por meio do trabalho colaborativo em grupo. Foram feitas gravações em vídeo enquanto resolviam as tarefas de modelagem, e essas foram codificadas no Atlas.ti. Para a análise, foram utilizados sistemas de categorias para as estratégias metacognitivas e experiências socioemocionais, que foram cruzados com as fases do ciclo de modelagem. Os resultados da análise mostram que as crianças do 1° ano ativaram estratégias procedimentais nas primeiras etapas do ciclo de modelagem, enquanto os alunos do 3° ano utilizaram estratégias de planejamento e monitoramento durante as fases de simplificação, matematização e trabalho matemático. As maiores sensações de prazer, desânimo e descontrole foram geradas nessas fases. Ambos os grupos regularam suas reações emocionais para persistir na tarefa, controlando-se para evitar distrações na equipe. As estratégias de regulação foram ativadas na fase de matematização para ambos os grupos e no trabalho matemático no grupo do 3° ano, e as estratégias de avaliação foram ativadas na interpretação das soluções e validação do modelo para ambos os grupos. No grupo do 3° ano, surgem sensações de prazer e desconcerto quando projetam o modelo, detectando suas fortalezas e limitações.

Palavras-chave

metacognição; estratégias; experiências; modelagem matemática; educação matemática; ensino fundamental

Para citar este artículo:

Aravena-Díaz, M. D., Solar Bezmalinovic, H., Cárcamo Mansilla, N. y Cifuentes, M. B. (2025). Metacognición en tareas de modelado matemático con estudiantes de Educación Primaria en Chile. *Revista Colombiana de Educación*, (94), e19797. https/doi.org/10.17227/rce.num94-19797

Introducción

La metacognición ha sido considerada una fuerza impulsora en la resolución de problemas matemáticos (Czocher, 2018), porque ayuda a los estudiantes a ser eficientes en la resolución de problemas para un aprendizaje efectivo de la matemática. Por ello, es muy necesario prestar atención a los procesos metacognitivos, porque al ser conscientes de lo que saben, los estudiantes reflexionan sobre su pensamiento y del uso eficiente de estrategias metacognitivas (Schoenfeld, 1987).

Para ayudarlos a ser eficientes en la resolución de problemas, es clave que, desde edades tempranas, usen la matemática en problemas auténticos, poco estructurados, desafiantes y significativos (Kaiser y Schwarz, 2010). Los de modelado matemático cumplen con estas características, y constituyen un predictor importante para la activación de los procesos metacognitivos (Velozo de Castro y Almeida, 2023; Geiger *et al.*, 2018; Wedelin *et al.*, 2015).

La investigación que aborda la metacognición en procesos de modelado matemático es cada vez más frecuente, debido a la necesidad de contar con evidencia empírica para ayudar a los estudiantes a ser eficientes en la resolución de este tipo de problemas (Almeida *et al.*, 2021; Krüger *et al.*, 2020; Maaß, 2006; Stillman, 2011; Vorhölter *et al.*, 2019; Vorhölter y Krüger, 2021). Hay consenso en que la naturaleza compleja de los problemas de modelado genera barreras cognitivas en muchos estudiantes durante las etapas de resolución y, en particular, en las fases del ciclo de modelado (Geiger *et al.*, 2018; Stillman, 2011). Blum (2011) plantea que la metacognición es muy importante y las estrategias metacognitivas muy útiles para resolver problemas de modelado matemático. Al ser de naturaleza compleja, o más bien denominadas *tareas auténticas* (Kaiser y Schwarz, 2010; Vorhölter, 2019), los estudiantes deben recurrir a conocimiento metacognitivo, reflexionar y hacer un uso eficiente de las estrategias metacognitivas; por ejemplo: planificar, tomar decisiones y hacer evaluaciones de su trabajo para dar respuesta de manera eficiente al problema (Krüger *et al.*, 2020; Stillman, 2011; Vorhölter, 2019). Otras investigaciones (Czocher, 2018; Vertuan y Werle de Almeida, 2016) confirman el hecho que las tareas de modelado promueven el monitoreo cognitivo, dada su naturaleza compleja, y la toma de decisiones que requiere el proceso de modelado, así como también los constantes procesos de validación que incorpora.

La metacognición puede describirse como la cognición sobre la cognición, que incluye conocimiento de la cognición y control sobre los procesos cognitivos (Flavell, 1979; Veenman, 2011). Lo anterior ocurre a través de la interacción entre conocimiento metacognitivo, experiencias metacognitivas, tareas y estrategias metacognitivas (Flavell, 1979; Krüger *et al.*, 2020). El conocimiento metacognitivo es una parte de los

María D. Aravena-Díaz
Horacio Solar Bezmalinovic
Noemí Cárcamo Mansilla
María Beatriz Cifuentes

conocimientos adquiridos relacionados con temas cognitivos y las experiencias metacognitivas son afectivas como juicios o sentimientos (Flavell, 1979). Los procesos metacognitivos corresponden a conocimiento metacognitivo y control de las propias actividades cognitivas, que implica la utilización de estrategias metacognitivas que ayudan a regular el desarrollo de tareas o actividades (Brown, 1977; Desoete, 2008; Desoete y De Craene, 2019; Pintrich, 2002; Van Velzen, 2016; Vorhölter *et al.*, 2019; Vorhölter y Krüger, 2021).

El conocimiento y las estrategias metacognitivas cumplen un rol clave en procesos de pensamiento, regulación y control de la cognición para aprender a pensar de manera eficiente (Schoenfeld, 1987; Wedelin *et al.*, 2015), y las experiencias metacognitivas como los aspectos motivacionales o socioemocionales son inherentes para movilizar las estrategias metacognitivas (Berger y Büchel, 2012; Berger, 2013; Efklides, 2001; Flavell, 1979). El conocimiento, control y experiencias son tres facetas de la metacognición que han sido reconocidas como importantes en diversos estudios sobre resolución de problemas matemáticos (Berger, 2012; Flavell, 1979; Temur *et al.*, 2019). Por tanto, el control sobre la cognición se refiere a la capacidad de utilizar el conocimiento metacognitivo (declarativo y condicional) mediante las estrategias metacognitivas (metacognición procedimental, habilidades metacognitivas) en la resolución de problemas (Desoete, 2008; Krüger *et al.*, 2020; Veenman, 2011; Vorhölter *et al.*, 2019). Las estrategias utilizadas para analizar la metacognición en el modelado han sido reportadas y descritas en diversos estudios (Hidayat *et al.*, 2018; Krüger *et al.*, 2020; Stillman, 2011; Vorhölter *et al.*, 2019; Vorhölter y Krüger, 2021) y corresponden a: planificar, monitorear, regular y evaluar. Vorhölter (2019) ha usado como estrategia primero la predicción o proceder en la tarea.

Con base en los autores mencionados, las estrategias metacognitivas en el modelado incluyen:

1. *Para proceder*. Hacen referencia a que los niños comprendan la tarea, puesta en común de información, identifiquen los objetivos, establezcan supuestos, activen conocimientos previos y la implicancia de la toma de decisiones.
    - *De planificación.* Tiene que ver con las acciones de los niños para conseguir una meta en el trabajo y para lo cual se requiere tener un plan.
    - *De monitoreo y —si es necesario— regulación*. Se refiere a las acciones de verificación de soluciones o pasos en la resolución de problemas que surgen de la reflexión sobre la efectividad del proceso.

2. *Para regular*. Hacen referencia a que los estudiantes deben discutir aciertos y dificultades durante el proceso orientado a un objetivo y que, a veces, puede conducir a una nueva planificación, mediante la adopción de nuevas estrategias a nivel local o global.
3. *Para evaluar.* Se refieren a que los estudiantes analizan su propio comportamiento y el de los demás. Buscan saber qué aspectos deberían mejorar para futuros trabajos de modelado. Identifican estrategias utilizadas, gestión del tiempo, trabajo grupal o métodos que aplicaron.

Si bien se ha estudiado la metacognición en el modelado matemático, aún no hay suficiente evidencia empírica en estudiantes menores de 9 años. Los estudios que han abordado este tema han sido desarrollados con estudiantes de Secundaria y de educación universitaria (Cardella, 2008; Cárcamo-Mansilla *et al*., 2024; Velozo de Castro y Almeida, 2023; Vorhölter *et al.*, 2019). A pesar de la extensa literatura que ha estudiado la metacognición en diferentes dominios y en casi todos los grupos de edad (Baten *et al.*, 2017; Dignath y Büttner, 2018; Pintrich, 2002; Veenman y Van Cleef, 2019; Whitebread *et al.*, 2007), todavía es escasa en el ámbito de la resolución de problemas matemáticos con niños pequeños (Baten *et al.*, 2017; Nelson y Fyfe, 2019), y en el modelado matemático es prácticamente inexistente (Krüger *et al.*, 2020). Por tanto, enfocarse en el uso de estrategias metacognitivas que utilizan los niños de los primeros niveles de Primaria (6-9 años) es importante, porque el modelado matemático les brinda la oportunidad de conectar la matemática con los problemas del entorno (Niss *et al.*, 2007), y al ser problemas abiertos, en su resolución no es posible aplicar solo procedimientos rutinarios (Schukajlow *et al.*, 2023).

Para los propósitos de este estudio, nos hemos apoyado en diversos hallazgos que muestran que las habilidades metacognitivas emergen desde los 3 años (Baten *et al.*, 2017; Whitebread *et al.*, 2007). En particular, el interés se centra en el trabajo colaborativo grupal porque brinda oportunidades de aprendizaje para que los niños experimenten y practiquen sus habilidades metacognitivas (Baten *et al.*, 2017; Iskala *et al.*, 2011). Se ha mostrado que el trabajo colaborativo grupal los ayuda a la adopción y refinamiento de sus habilidades metacognitivas personales, los involucra en formas sociales de habilidades de regulación, intercambio de información, ideas y control mutuo; promueve la discusión de suposiciones, justificaciones, conclusiones, a partir de las cuales relacionan su pensamiento con el de los otros (Iskala *et al.*, 2011; Vorhölter *et al.*, 2019; Whitebread *et al.*, 2007).

La relación entre estrategias cognitivas y experiencias metacognitivas es importante e inherente para comprender la activación de los procesos metacognitivos y para una comprensión de los procesos cognitivos implicados en el funcionamiento intelectual de los alumnos (Berger, 2009; Efklides, 2001). Investigaciones que han usado modelos de aprendizaje autorregulado describen cómo los estudiantes se encargan del seguimiento y regulación de su aprendizaje (Berger y Büchel, 2013) y que las creencias motivacionales de los estudiantes afectan su metacognición (Lavasani *et al*., 2011; Pintrich y De Groot, 1990).

Debido a la importancia de estudiar las estrategias metacognitivas y las experiencias socioemocionales en el modelado, nos planteamos el siguiente interrogante: ¿qué estrategias metacognitivas y experiencias socioemocionales activan los grupos de estudiantes de educación primaria, cuando transitan por las diferentes fases del ciclo de modelado en el aula de matemáticas?

Metodología

La metodología del estudio es cualitativa con enfoque de estudio de casos múltiple, de alcance exploratorio, para observar en profundidad las estrategias metacognitivas y experiencias socioemocionales que activan los grupos de estudiantes de primaria cuando trabajan tareas de modelado matemático.

Contexto y participantes

Los participantes del estudio fueron estudiantes de escuelas públicas de Primaria de la zona centro-sur de Chile. La selección de los cursos se realizó de manera intencionada y los docentes de matemática de dichos cursos participaron de un programa de desarrollo profesional en modelado matemático. Los cursos estaban constituidos aproximadamente por 30 estudiantes, con clases mixtas, y se distribuyeron en grupos de trabajo de tres y cuatro estudiantes. Para este estudio se seleccionaron dos grupos que corresponden a: grados 1.º (6-7 años) del curso de la profesora Carola, y 3.º (8-9 años) del curso de la profesora Marcela. Haber participado de las cuatro clases consecutivas, planificadas por los profesores como tiempo estimando para resolver un problema de modelado, fue el criterio de inclusión en la selección de los grupos. Se trabajó durante un semestre académico con cuatro horas semanales.

Instrumentos

Para la recolección de datos se utilizaron grabaciones de video que registraron las producciones verbales de los grupos, mientras trabajaban en los problemas de modelado, en espacios de trabajo colaborativo. Los problemas eran cercanos a su entorno, donde iban discutiendo y desarrollando su propio enfoque para una decisión conjunta. Las grabaciones de las clases se incorporaron en el programa *ATLAS.ti* para analizar las producciones de los grupos. Se seleccionaron episodios que mostraban acciones específicas del proceso de modelado en las diferentes fases del ciclo, las estrategias metacognitivas que se activaban durante el desarrollo de los problemas y las experiencias socioemocionales.

Métodos de análisis

Para el análisis de las producciones verbales de los grupos se recurrió al análisis interpretativo de contenido. Se diseñaron sistemas de codificación a priori, según las dimensiones propuestas por Vorhölter (2019), e inductiva que surgen de la propia indagación. Las dimensiones fueron: estrategias para proceder, enfocadas en comprender la tarea, planificar y monitorear el proceso de trabajo; estrategias para regular, referidas al trabajo de modelado a nivel local y global y estrategias para evaluar, relacionada con la efectividad del proceso y los recursos. En la modelación se consideraron las fases que comprenden un ciclo de modelado: simplificación, matematización, trabajo con la matemática, interpretación, validación y proyección (Maaß, 2006). Para identificar las etapas del ciclo de modelación donde los grupos usaban estrategias metacognitivas y experiencias socioemocionales, se analizaron episodios extraídos de las grabaciones y que fueron codificados a partir de tablas de coocurrencias entre episodios de modelación, metacognición y experiencias socioemocionales. Para visualizar la relación entre los datos se generaron redes semánticas y una triangulación de métodos que permitió validar los hallazgos.

Resultados

A continuación, se presentan las tareas de modelado que resolvieron los dos grupos de trabajo y los resultados en el uso de estrategias y experiencias socioemocionales en cada etapa de ciclo de modelado.

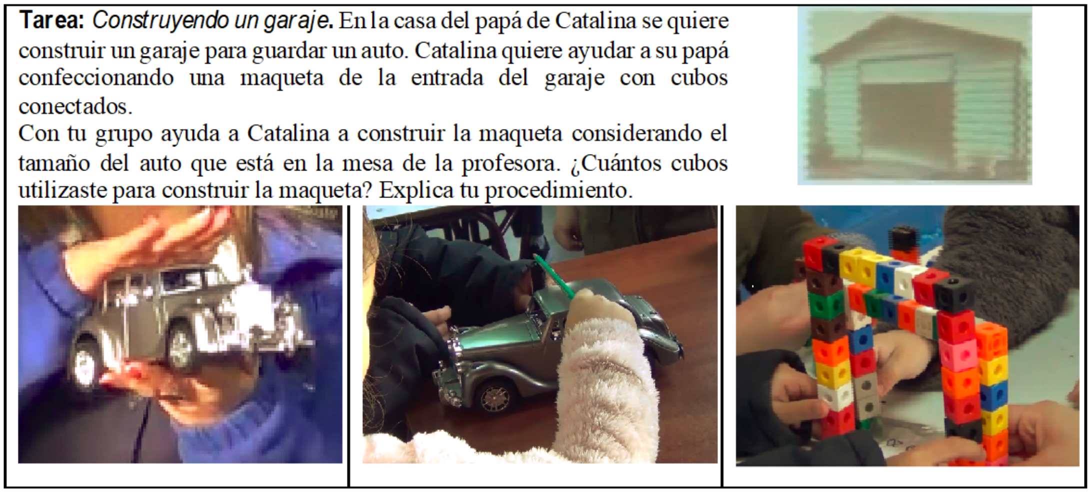
Análisis del caso Carola

Tarea de modelado: construyendo un garaje

En la clase de grado 1.º, Carola implementa la tarea *Construyendo un garaje* (figura 1), donde los estudiantes diseñan la construcción de la entrada para automóviles. Como apoyo, cuentan con bloques y un auto de referencia para estimar las longitudes del garaje. La tarea se implementa en tres clases de 45 minutos cada una, con grupos de 3-4 estudiantes. En la primera y segunda clase, los estudiantes manipulan el auto de referencia, para estimar su tamaño y, a partir de ello, estimar el tamaño que debe tener el garaje. En la tercera clase, Carola gestiona la validación del garaje construido por cada grupo.

Figura 1

Tarea de modelado desarrollada por estudiantes de primer año básico



Estrategias para proceder

Se observa una relación entre las estrategias para proceder y las etapas iniciales del ciclo de modelado: simplificación, matematización y trabajo con la matemática. En el siguiente episodio, cada miembro del grupo ha construido por separado una representación del garaje utilizando el material concreto. Carola promueve la discusión entre los estudiantes para que comparen el tamaño de sus garajes:

> Carola: Hicieron el mismo. ¿Están seguras de que es el mismo?
>
> Dominica: Sí.
>
> Jean Paul: Yo creo que no, porque no tiene los mismos colores.
>
> Profesora: Ah, pero no tiene los mismos colores. Pero ¿el tamaño será el mismo?
>
> Jean Paul: Sí.
>
> Carola: Ya. Y ¿qué pasa con el del Harold?
>
> Jean Paul: Es muy chiquito. [...].
>
> Carola: Es muy chiquitito. ¿Es igual al tuyo? A ver, no es igual. ¿Y el tuyo? [...].
>
> Jean Paul: A ver si el mío es más grande.
>
> Carola: ¿Será el mismo, Domi?
>
> Jean Paul: Yo creo que no.

Carola: A ver, con el de Domi.

Dominica: No, porque el del Jean Paul es un poquito más largo de aquí.

Carola: Más largo del lado. Ya. Y ¿con el del Harold?

Dominica: Un cubo más.

Jean Paul: Yo creo que no.

Dominica: Tiene un cubo más grande aquí.

Carola: Tiene un cubo más. Ya. Y ¿qué pasó con el del Harold?

Jean Paul: Es muy chiquitito.

Aquí, Dominica reconoce la similitud de su representación con el de su compañera: "El mío es el mismo de la Sofi", en cambio Jean Paul no lo ve así: "no tiene los mismos colores". La profesora interviene focalizando la comparación en base a su tamaño: "¿Pero el tamaño será el mismo?". Esta intervención genera que los estudiantes sigan comparando sus representaciones en base al largo y ancho: "Es muy chiquitito", o bien "el del Jean Paul es un poquito más largo de aquí". En la discusión, se destaca el cubo como unidad de medida de referencia para comparar sus representaciones: "Tiene un cubo más grande aquí". En este episodio se puede observar que la verbalización de reflexiones conscientes asociadas a la comparación de las representaciones del garaje es una estrategia metacognitiva, porque promueve la identificación de los aspectos que son relevantes para el problema: la pertinencia del tamaño de los garajes construidos y su relación con el objetivo de la tarea.

Estrategias para regular

Otra de las relaciones observadas es entre estrategias metacognitivas para regular y la etapa de simplificación. En el siguiente episodio, el grupo delibera sobre los aspectos que son relevantes para estimar el tamaño del auto. Discuten las condiciones del problema y los enfoques de solución:

Jean Paul: Va a ser un poquito más grande porque el auto es... es más... así va a ser, miren.

Harold: Diez metros para abajo, once, doce metros para abajo.

Dominica: La tía dijo solo la entrada, no lo de abajo también.

Jean Paul: Yo estoy haciendo esto, yo estoy haciendo lo de abajo.

Dominica: Diez metros [...].

Harold: Diez metros adelante y doce metros por...

Jean Paul: Abajo.

Harold: Por las puertas y... [...].

Jean Paul: Harold, una botella no más...

Harold: ¿Esa es más difícil?

Jean Paul: Es más difícil, porque tienes que contar toda la botella.

Dominica: Creo que un cubito más.

Jean Paul: Yo creo que así va a entrar.

Harold: ¿Por la puerta?

Dominica: Es muy grande [...].

Jean Paul: (A Dominica) Que chiquitito no va a poder entrar, porque el señor recuerda que es supergordito y el auto es más grande que el cielo.

En el episodio, los estudiantes son conscientes de que el tamaño del auto determina el tamaño de la representación del garaje que deben construir: "Va a ser un poquito más grande, porque el auto es". Dentro del grupo emergen distintos enfoques, un enfoque considera la construcción de la parte "de abajo" del garaje, y otro lo indicado por la profesora, es decir, que debe construirse "solo la entrada". También discuten sobre cómo medir el auto, tomando en cuenta lo que ocurre en otro grupo, usar "una botella" pero descartan la estrategia pues "es más difícil", proponiendo en cambio usar "un cubito" como herramienta para medir. Decidir cuál plan de acción global a elegir, para llevar a cabo la tarea, es una estrategia metacognitiva que se manifiesta, cuando los estudiantes discuten distintos enfoques de solución considerando sus ventajas y desventajas. Comparar materiales concretos para medir y posteriormente seleccionar el más útil también es una estrategia metacognitiva de regulación, mientras que la acción de medir el auto es una actividad cognitiva.

Estrategias para evaluar

En las estrategias para evaluar se observa que los estudiantes validan (etapa de validación) el modelo para decidir acerca de su pertinencia en la situación real. En el siguiente episodio Carola promueve una instancia de discusión, en la que todos los grupos del curso presentan la maqueta que han construido:

> Profesora: Vamos a probar a ahora, cual garaje es por el que entra el auto mejor. A ver, voy a tomar el de Felipe [...]. Recordemos, Felipe, ¿cuánto tenía el tuyo?
>
> Felipe: Diez, siete, diez.
>
> Profesora: Diez, siete, diez. Voy a ver si entra el auto por el garaje del grupo de Felipe. Miremos. ¿Puede entrar?
>
> Curso: (Al unísono) ¡Sí!
>
> Profesora: ¡Sí!, este entró. Vamos a ver el otro. Este, que era del grupo de la Chia [...]. ¿Cuánto tenía este lado?
>
> Grupo 1: ¡Once!
>
> Chia: Once, ocho, once.
>
> Profesora: Once, ocho y once [...]. ¡Entró, súper! Este de acá [...]. ¿Cuánto tiene este?
>
> Agustín: Ocho, ocho y ocho.
>
> Profesora: Este, en este todos tenían lo mismo: ocho, ocho y ocho. Vamos a ver si entra.
>
> Agustín: ¡Sí entra, sí!

Como se observa, Carola propone que los estudiantes evalúen el proceso de modelación: “Vamos a probar ahora, cuál garaje es por el que entra el auto mejor”. Carola promueve que los estudiantes evalúen la efectividad del proceso de modelado, mediante la discusión entre todo el curso, de la validación de los modelos de cada grupo, que consiste en comparar el tamaño de cada garaje que se ha construido. Como resultado, los estudiantes comprueban distintas estrategias de construcción, distintos tamaños y cantidades de material, que sirven para dar solución al problema, lo que es característico de las tareas de modelación.

Experiencias socioemocionales

Los estudiantes expresan su conciencia de la experiencia emocional frente la tarea a través de reacciones positivas o negativas, y los estudiantes regulan sus reacciones emocionales para persistir en la tarea, alentándose entre ellos con reacciones propositivas, actitud optimista, disposición a modificar la trayectoria emocional; se controlan entre ellos, evitan distracciones externas o internas del equipo. En la siguiente tabla, se describe para cada estrategia metacognitiva, la fase de modelación predominante de los aspectos socioemocionales.

Tabla 1
Aspectos socioemocionales en las estrategias metacognitivas

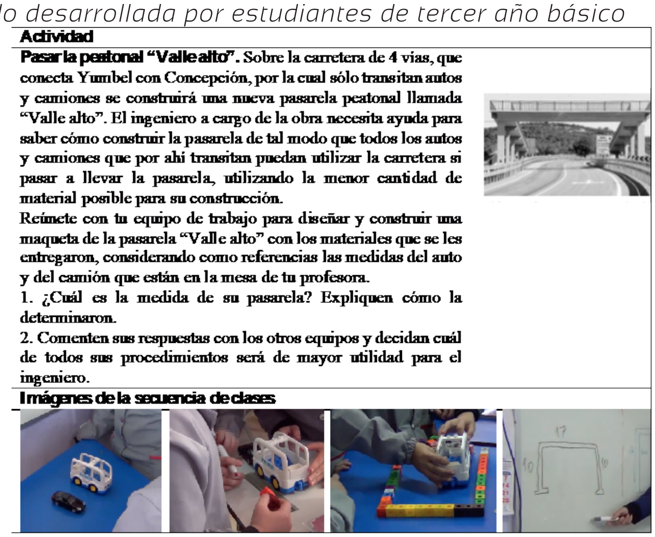
Estrategias metacognitivas	Fase predominante	Ejemplo aspectos socioemocionales
Proceder	Matematización	Agustín: (Tomando la maqueta) ¡Entonces, no compito, lo voy a romper!
Regular	Simplificación	Chía: ¡Fernanda, trabaja! Fernanda: Sí, estoy trabajando.
Evaluar	Trabajando con Matemáticas	Harold: (Le pega a la entrada de garaje con una tijera). Jean Paul: Pero ¡¿para qué lo rompes?! Tía, el Harold lo anda rompiendo...

Análisis del caso Marcela

Tarea de modelado. Pasarela peatonal "Valle alto"

Marcela implementó la tarea "Pasarela peatonal Valle Alto" (figura 2) en grado 3.º, donde los estudiantes debían construir, con bloques multibase, la maqueta de una pasarela, para lo cual debían apoyarse en un auto y un camión de juguete. En la primera clase, los estudiantes observan los autos de referencia, mediante estrategias para estimar el tamaño de la pasarela. En la segunda clase, cada grupo mide los autos, con la estrategia que ellos decidan. En la tercera, una vez construidas las maquetas, los estudiantes manipulan los materiales. En la cuarta, la profesora guía una discusión con base en la suma de los lados de la pasarela.

Figura 2
Tarea de modelado desarrollada por estudiantes de tercer año básico


Actividad

Pasar la peatonal "Valle alto". Sobre la carretera de 4 vias, que conecta Yumbel con Concepción, por la cual sólo transitan autos y camiones se construirá una nueva pasarela peatonal llamada "Valle alto". El ingeniero a cargo de la obra necesita ayuda para saber cómo construir la pasarela de tal modo que todos los autos y camiones que por ahi transitan puedan utilizar la carretera si pasar a llevar la pasarela, utilizando la menor cantidad de material posible para su construcción.
Reúnete con tu equipo de trabajo para diseñar y construir una maqueta de la pasarela "Valle alto" con los materiales que se les entregaron, considerando como referencias las medidas del auto y del camión que están en la mesa de tu profesora.
1. ¿Cuál es la medida de su pasarela? Expliquen cómo la determinaron.
2. Comenten sus respuestas con los otros equipos y decidan cuál de todos sus procedimientos será de mayor utilidad para el ingeniero.

Imágenes de la secuencia de clases

Estrategias para proceder

Las estrategias para proceder se manifiestan en la etapa de simplificación del problema, donde identifican las condiciones para delinear posibles soluciones. En el siguiente episodio, la discusión se enfoca en la búsqueda de una estrategia de resolución, donde utilizan material concreto (bloques) para realizar una simulación en 3D del perímetro de la porción de un rectángulo para representar la pasarela:

> Ignacio: (A Lucas) Ya, pensemos que esto es un auto, el más ancho. Ya, a ver, un auto...
>
> Lucas: (Moviendo los bloques) Pero, miren, miren, aquí cabe un auto, miren.
>
> Ignacio: Un auto cabe.
>
> Lucas: Aquí cabe un auto.
>
> Javiera: Y aquí cabe otro más.
>
> Ignacio: Sí, lo pusimos así.
>
> Javiera: Aquí cabe otro más y acá caben más. Oye, pero cuando pasen los dos se van a...
>
> Lucas: Ay, sí caben cuatro autos, cabe otro más más encima.
>
> Javiera: ¿Y los buses?
>
> Lucas: Ahí, si los buses caben, esos son fácil, incluso...
>
> Ignacio: ¿Los buses? Ya, pero no importa... (Inaudible) ¿Y si hacemos un bus?
>
> Javiera: Mira aquí, po. Tenemos que hacer este de acá, tenemos que hacer este. Son de cuatro vías.

La discusión se genera a partir de la información faltante del problema, por ejemplo, la longitud del automóvil. Cuando Ignacio se dirige al grupo para plantear la siguiente idea: “Ya, pensemos que esto es un auto, el más ancho. Ya, a ver, un auto...”, se está dando cuenta de la necesidad de establecer supuestos: específicamente suponen que la longitud de la arista de un bloque representa la longitud de un auto. Javiera está de acuerdo, pero indica que se debe considerar una condición explícita del problema, el paso de cuatro autos al mismo tiempo. A partir de esta idea, manifiesta al grupo: “Aquí cabe otro más y acá caben más. Oye, pero cuando pasen los dos se van a...”. Lucas se da cuenta de la misma información que indica Javiera y simula la situación con cuatro autos: “Ay, sí caben cuatro autos, cabe otro más más encima”. Javiera insiste en que no están considerando toda la información, debido a que no han incorporado a los buses. Darse cuenta de la necesidad de establecer supuestos es una estrategia metacognitiva, en cambio, establecer como supuesto que la arista de un bloque representa la longitud de un auto es cognitivo. A su vez, plantear que se debe considerar ideas que no está explícitamente en el problema es metacognitivo.

Estrategias para regular

Las estrategias metacognitivas para regular se manifiestan con mayor intensidad en el proceso de matematización. El grupo decide utilizar instrumentos geométricos para medir la longitud de la arista de un cubo y utilizan como representación un automóvil, y la longitud de la base de la porción del rectángulo, que representa para ellos la pasarela. Realizan simulaciones en 3D identificando la máxima cantidad de autos que podrían transitar por debajo de la pasarela. En el episodio que se presenta, la discusión lleva a cambiar el plan de resolución cada vez que se dan cuenta que los autos pasan a llevar la pasarela:

> Sofía: Sí, yo la voy a hacer de doce. (Muestra una regla) Es que yo las medí con esto, las medí con la regla y mide cinco, y alcance para tres cuadrados y tres más tres más tres me da doce [...].
>
> Sofía: (Le pasa la regla a Victoria) Medí los otros y medían cinco.
>
> Marcela: Doce, listo.
>
> Sofía: No, quince, hagámoslo de quince.
>
> Marcela: ¿De quince?
>
> Sofía: Porque ahí caben dos autos no más.
>
> Victoria: Háganlo de veinticuatro.
>
> Sofía: No, no me van a alcanzar, ni a ustedes.
>
> Marcela: Hagámoslo de trece.
>
> Sofía: (Revisa el tarro de bloques de Marcela) ¿Cuántos tenís? No. ¿Para qué de trece? Con trece no alcanzan ni dos.
>
> Marcela: Bueno, de once.
>
> Nicolás: Miren, yo ya tengo...
>
> Sofía: De quince, ¿cierto, Viqui?
>
> Sofía: (Toma la regla y le muestra a Marcela) Mira, doce. En todo esto, ¿tú crees que alcanzan tres autos?, ¿cuatro autos?

En la discusión, Sofía matematiza la situación identificando cuántos autos de longitud igual 3 cm. caben en 12 centímetros a través de una igualdad entre dos expresiones que denotan el mismo objeto: $3+3+3+3=12$, por lo que concluye que caben cuatro autos, lo que es un proceso cognitivo que se manifiesta así: "yo la voy a hacer de doce. (Muestra una regla) Es que yo las medí con esto, las medí con la regla y mide cinco y alcance para tres cuadrados y tres más tres más tres me da doce". Sin embargo, el equipo en su mayoría utiliza la estrategia de ensayo y error para identificar la cantidad de autos que caben bajo la pasarela. Tener dos enfoques de resolución diferentes lleva al equipo a discutir cuántos bloques utilizar, por ejemplo, quince o trece: "No, quince, hagámoslo de quince"; "Hagámoslo de trece". La discusión orienta la toma de decisiones sobre la cantidad de cubos que compone la pasarela para ajustar las dimensiones a las necesidades que plantea el problema. Esto implica llevar a cabo nuevos planes de resolución cada vez que cambia la cantidad, lo que es una estrategia metacognitiva.

Estrategias para evaluar

Las estrategias metacognitivas para evaluar se manifiestan en la etapa de interpretación y validación de las soluciones. La profesora genera una instancia de discusión, con el grupo curso, para que validen sus modelos. El curso menciona argumentos de contexto y simulaciones con base en el material concreto que tenían a disposición, para evaluar la efectividad del modelo, interpretando las soluciones en el contexto del problema. Para validar el modelo, los estudiantes proyectan la utilidad a una situación similar de automóviles pasando bajo una pasarela. En la interpretación, ellos recurren al contexto de donde han sido extraídos los datos. El siguiente episodio da cuenta de la discusión donde varios estudiantes critican la solución:

> Sofía 2: (Toma el auto) Así quedaría el auto, chocando y quedaría todo rajado.
>
> Lucas: El auto tiene que ir dos para acá y dos tendrían que ir para allá.
>
> Victoria: Daría, si fuera más ancho.
>
> Lucas: Ya, pero no van a caber los dos al mismo tiempo.
>
> Soraya: A ver, ¿qué dijo el Lucas?, ¿qué no van a pasar todos al mismo tiempo?
>
> Lucas: No, que no van a salir todos al mismo tiempo.
>
> Soraya: ¿Y qué pasa si pasan cuatro autos al mismo tiempo?
>
> Nicolás: Van a chocar, po.

> Soraya: Un fin de semana largo donde toda la gente sale de Concepción o toda la gente va a Concepción de vacaciones, pasan a cada rato autos.
>
> Lucas: (Pone el auto por detrás del bus) Pero si el auto va aquí, quedan esos dos, po.
>
> Sofía: Pero si hay un montón de autos para allá atrás.
>
> Soraya: A ver, Nico. [...] lo que yo entiendo es que los chicos piensan que van a ir cuatro, pero cuatro en hilera. ¿Hacia dónde van a ir los sentidos de los autos?
>
> Nicolás: (Rayando la entrada de la pasarela dibujada en la pizarra) Tienen que ir dos para allá y dos para acá.
>
> Soraya: Y tú dices que en el de Lucas, no sirve, no caben dos para acá y para allá. ¿Por qué no?
>
> Nicolás: Porque es muy... como decirlo.
>
> Soraya: ¿Muy angosta?
>
> Nicolás: Angosta.

Acá se genera la interpretación entre los compañeros, donde explicitan que el modelo no es tan eficaz ya que no hay suficiente espacio para que transiten los automóviles. Lucas identifica las circunstancias en las que existen espacios donde pueden caber los autos: "pero no van a caber los dos al mismo tiempo", lo cual es apoyado por Nicolás quien señala la posición en que irían los vehículos: "Tienen que ir dos para allá y dos para acá".

La profesora se dirige a Nicolás para pedir más explicaciones: "Y tú dices que en el de Lucas, no sirve, no caben dos para acá y para allá. ¿Por qué no?". Nicolás considera que la pista es muy angosta para que quepan cuatro automóviles. El grupo discute sobre la efectividad de las estrategias utilizadas, y evalúa las que han tenido éxito y aquellas que no han sido útiles en el contexto del problema, lo cual denota actividad metacognitiva. Mientras que la manifestación explícita de reconocer las condiciones iniciales del problema para los diferentes tamaños de autos y buses es una actividad cognitiva.

En la etapa de validación, los estudiantes evalúan el modelo, comprueban su pertinencia y proyectan a una situación similar. Para validar el modelo, verifican si acaso es posible el tránsito de buses con diferentes tamaños. En el episodio que se describe a continuación puede observarse que el modelo permite dar respuesta a la situación real, si se consideran los supuestos, los datos iniciales y la proyección del modelo con autos de diferentes tamaños:

> Nicolás: (Saca cuentas de cuantos buses caben en su pasarela) Dos, tres, cuatro. Pasan cuatro buses.
>
> Victoria: (Salta de la emoción) ¡Pasan, pasan cuatro!

Marcela: ¿Pasan?

Nicolás: La Viqui lo había corrido, sí.

Marcela: Ya, pero yo tengo una duda.

Victoria: ¿Qué?

Ignacio: Aquí, Miss, y tienen un bloque más acá,

Marcela: ¿Tenían un bloque, entonces les queda el espacio? (Señala la figura de la pizarra) Quedamos que en el de ellos, el ancho superbién, chicos, vean acá.

Victoria: El alto.

Marcela: El alto, vean lo que dice la Viqui. El alto. ¿Alcanza a pasar?

Victoria: Sí, demás, po, Miss. De a poquito, pero sí pasa.

Para validar el modelo realizan simulaciones colocando diferentes autos en la pasarela. Nicolás presenta el modelo tras sacar cuentas de los vehículos que pueden pasar por ella: "dos, tres, cuatro. Pasan cuatro buses". Victoria, compañera de equipo, salta de emoción y plantea: "¡Pasan, pasan cuatro!". La profesora no está convencida y les pregunta: "¿Tenían un bloque, entonces les queda el espacio? (Señala la figura de la pizarra) Quedamos que en el de ellos, el ancho superbién, chicos, vean acá". Marcela les valida su construcción, pero ellos siguen analizando todas las posibilidades de uso de la pasarela, y prueban la efectividad con los objetos concretos que representan los autos y buses, lo que es una estrategia metacognitiva de evaluación del modelo. Estos patrones de reconocimiento, desde la metacognición, permiten deducir que los niños son capaces de prever lo que puede suceder en situaciones similares al contexto estudiado.

Experiencias socioemocionales

Los estudiantes de grado 3.º expresan su conciencia de la experiencia emocional frente la tarea en casi todas las fases del ciclo de modelado, a través de reacciones positivas, impulsivas o negativas. Los estudiantes regulan sus reacciones emocionales para persistir en la tarea, alentándose entre ellos, controlándose para evitar distracciones tanto externas como internas del equipo. En la siguiente tabla, se describe, para cada estrategia metacognitiva, la fase de modelación predominante de los aspectos socioemocionales.

Tabla 2
Aspectos socioemocionales en las estrategias metacognitivas

Estrategias metacognitivas	Fase predominante	Ejemplo aspectos socioemocionales
Proceder	Simplificación	Jean Pierre: ¡Cállate, Benja! O si no, no vamos a tener bloques... Marcela: Benja... Benjamín: ¿Qué? Marcela: Cuando a nosotros nos toque tenemos que ir a mirar ese auto, pero, no lo podemos tocar.
Regular	Matematización	Profesora: No pierdan tiempo, chicos, haciendo las partes donde van a pasar las personas o la protección o la escalera. Yo quiero la estructura de la pasarela. Sofía: No entiendo... ¿Cómo la estructura? Macarena: No tengo ni la menor idea.
Evaluar	Validación, interpretación de las soluciones y proyección	Nicolás: (Prueba el tamaño de la pasarela, midiéndola con el tamaño del bus) Uno, dos, tres, cuatro. ¡Pasan cuatro! Victoria: (Salta de la emoción) ¡Pasan, pasan cuatro!

Discusión y conclusiones

Los propósitos del estudio eran caracterizar las estrategias metacognitivas y experiencias socioemocionales que activan dos grupos de estudiantes de Primaria, cuando transitan por las diferentes fases de ciclo de modelado matemático. Los hallazgos se presentarán en términos de las estrategias y experiencias metacognitivas en cada fase de transición del ciclo de modelado. Posteriormente se describen relaciones entre estrategias y experiencias metacognitivas.

Los resultados de esta investigación permiten concluir que los niños desde grados 1.º y 3.º son capaces de usar estrategias metacognitivas cuando resuelven problemas de modelado. Las características de estos problemas requieren que ellos activen estrategias metacognitivas para abordar su resolución (Vorhölter *et al.*, 2019), donde el trabajo grupal y colaborativo es fundamental para que discutan y exploren soluciones (Baten *et al*., 2017; Iskala *et al.*, 2011).

En las dimensiones de proceder se ha observado la activación de estrategias en las fases de simplificación, matematización y trabajo con la matemática. En la fase de simplificación, tanto los niños de grado 1.º como los de 3.º activan estrategias para comprender la tarea, discutiendo condiciones y relaciones. Las estrategias de planificación son activadas porque requieren elaborar un plan que oriente el camino de resolución. En la fase de matematización, se observaron estrategias de monitoreo, debido a que cuestionaron el diseño, a partir de la validación a nivel local del modelo en evolución, en busca de nuevas estrategias para diseñar el modelo de pasarela. En problemas de modelado matemático se ha visto que estas fases son de complejidad para muchos estudiantes, porque deben realizar una representación de la realidad (Geiger *et al*., 2018). Los profesores deben colocar especial atención e incentivar a los niños a la discusión y reflexión grupal de sus propias ideas para que puedan avanzar en la resolución.

Las estrategias para *regular* se activaron en las fases iniciales del modelado correspondientes a simplificación, matematización y trabajo con la matemática. Estas estrategias se caracterizan por la regulación a nivel local, porque revisan el progreso obtenido durante el modelado, detectan dificultades en sus procedimientos y, a nivel global, los grupos de estudio discuten y deliberan diferentes alternativas para elegir nuevos planes de acción que les permita avanzar hacia la solución.

Las estrategias para *evaluar* se despliegan en los niños de grado 1.º en las fases de validación del modelo, debido al rol de la profesora que promueve la discusión para que contrasten resultados, comprueben las diferentes estrategias y la efectividad del trabajo realizado. En los niños de grado 3.º, las estrategias para evaluar se activaron en las fases de interpretación de soluciones, validación y proyección del modelo. En la fase de validación, valoraron la efectividad del proceso, y trabajaron los enfoques que han tenido éxito y aquellos que no han sido útiles; incluso, el reconocimiento de limitaciones y proyecciones en el entorno del modelo diseñado.

En la fase de validación se requiere que los docentes apoyen las ideas y creaciones propias, y proyecten el modelo para situaciones similares, dado que esta fase es un proceso difícil en todos los niveles de enseñanza, incluso en la formación de profesores. El grupo de estudiantes de grado 3.º utilizaron de forma autónoma conocimiento sobre el conocimiento adquirido. Sin embargo, no hay consenso en la investigación sobre la adquisición de conocimientos de los niños por sí mismos, porque se ha demostrado que muchos de ellos no lo harán (Pintrich, 2002).

Es de resaltar que los resultados, en ambos grupos de estudio, son coincidentes con los trabajos de Vorhölter *et al.* (2019), y muestran que, en el trabajo grupal con estudiantes de Secundaria, las estrategias de proceder, de planificación y de monitoreo se dan en las etapas iniciales del modelado. Asimismo, hay coincidencias con los trabajos de Czocher, (2018) y Vertuan y Werle de Almeida (2016), porque monitorean y validan constantemente el modelado.

Esta investigación da cuenta de que, en tareas de modelado matemático, las estrategias metacognitivas emergen desde edades tempranas (Baten *et al.*, 2017; Whitebread *et al.*, 2007) y, en algunos casos, de manera autónoma. Pero no todos los niños podrían ser autónomos en el uso de estrategias, por lo que los docentes deben estar calificados en la enseñanza de la metacognición para lograr una mayor eficiencia en la resolución de problemas de alta complejidad, como es el modelado (Temur *et al.*, 2019).

También permite concluir que el trabajo colaborativo grupal ha sido fundamental, porque la discusión de los niños en equipo los ha involucrado en el uso de estrategias metacognitivas, en menor o mayor grado de activación, durante todo el ejercicio de resolución. Lo anterior coincide con estudios que muestran la importancia del trabajo colaborativo en el refinamiento de sus habilidades metacognitivas (Iskala *et al.*, 2011; Vorhölter *et al.*, 2019; Whitebread *et al.*, 2007).

Por otra parte, constatamos que las experiencias metacognitivas como las *socioemocionales* son importantes para activar las estrategias metacognitivas (Berger, 2013; Efklides, 2001). Si bien las experiencias socioemocionales se manifiestan durante el ciclo de modelado, las mayores sensaciones de agravio, desánimo o descontrol, por algunos integrantes del equipo, se generaron en proceder en la tarea, en la planificación y el monitoreo, que se da justamente en las fases de simplificación, matematización y trabajando con la matemática. Incluso emergen de manera colectiva en los niños de grado 3.º.

En los dos casos estudiados, la regulación emocional ha sido importante durante el ejercicio, porque ellos fueron capaces de regular sus reacciones emocionales para persistir en la tarea o generar nuevos planes de acción, alentándose entre ellos, controlándose para evitar distracciones externas o internas y lograr manifestaciones de bienestar en la evaluación del trabajo.

Estos hallazgos pueden ser una base para otros estudios situados durante todo el ciclo escolar, al dar cuenta de la diversidad de estrategias metacognitivas en las fases del ciclo de modelado, incluyendo aspectos socioemocionales. Asimismo, tiene implicaciones en la formación inicial y continua del profesorado de Primaria, pues estos requieren apropiarse de estrategias y experiencias metacognitivas en cada fase del ejercicio de modelado para apoyar a los estudiantes a ser eficientes en la resolución de problemas (Schoenfeld, 1987), y que la metacognición se convierta en parte de la formación matemática actual y futura.

Agradecimientos

Este artículo ha contado con el financiamiento del proyecto Fondecyt 1230865 y Fondecyt 1231303, de la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo de Chile.

Referencias

Almeida, L. M. W., Velozo de Castro, É. M. y Pierobon Gomes, J. C. S. (2021). Estratégias metacognitivas em atividades de modelagem matemática. En *Anais do VIII Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM)* (pp. 2029-2043). Uberlândia, Brasil. https://even3.blob.core.windows.net/anais/ANAIS.217ec246892448a4bead.pdf

Baten, E., Praet, M. y Desoete, A. (2017). The relevance and efficacy of metacognition for instructional design in the domain of mathematics. *ZDM-Mathematics Education, 49*, 613-623. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0851-y

Berger, J. L. (2009). The influence of achievement goals on metacognitive processes in math problem solving. *Journal of Cognitive Education and Psychology, 8*(2), 165-181. https://doi.org/10.1891/1945-8959.8.2.165

Berger, J. L. (2012). Motivational belief and self-regulated learning in low vocational training track students. *Journal of Educational and Development Psychology*, *2*(1), 37-48. https://doi.org/10.5539/jedp.v2n1p37

Berger, J. L. (2013). Motivation et métacognition: les buts de compétence prédisent les processus métacognitifs en résolution de problèmes mathématiques. *Psychologie française*, *58*(4), 297-318. https://dx.doi.org/10.1016/j.psfr.2013.07.002

Berger, J. L. y Büchel, F. P. (2013). *L'apprentissage autorégulé: perspectives théoriques et recherches empiriques*. Ovadia.

Blum, W. (2011). Can modelling be taught and learnt? Some answers from empirical research. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri y G. Stillman (eds.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling. International perspectives on the teaching and learning of mathematical modelling* (vol. 1, pp.15-30). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_3

Brown, A. L. (1977). *Knowing when, where, and now to remember: A problem of metacognition*. Lawrence Erlbaum Associates.

Cárcamo-Mansilla, N., Aravena-Díaz, M. D. y Berres, S. (2024). Metacognitive strategies in mathematical modelling: A case study with engineering students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1-24. https://doi.org/10.1080/0020739X.2024.2404421

Cardella, M. E. (2008). Which mathematics should we teach engineering students? An empirically grounded case for a broad notion of mathematical thinking. *Teaching Mathematics and Its Applications: International Journal of the IMA*, *27*(3), 150-159. https://doi.org/10.1093/teamat/hrn008

Czocher, J. A. (2018). How does validating activity contribute to the modeling process? *Educational Studies in Mathematics, 99*(2), 13-159. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9833-4

Desoete, A. (2008). Multi-method assessment of metacognitive skills in elementary school children: How you test is what you get. *Metacognition and Learning, 3*, 189-206. https://doi.org/10.1007/s11409-008-9026-0

Desoete, A. y De Craene, B. (2019). Metacognition and mathematics education: An overview. *ZDM-Mathematics Education, 51*(4), 565-575. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01060-w

Dignath, C. y Büttner, G. (2018). Teachers' direct and indirect promotion of self-regulated learning in primary and secondary school mathematics classes – Insights from video-based classroom observations and teacher interviews. *Metacognition Learning*, 13, 127-157. https://doi.org/10.1007/s11409-018-9181-x

Efklides, A. (2001). Metacognitive experiences in problem solving. En A. Efklides, J. Kuhl y R. M. Sorrentino (Eds.), *Trends and prospects in motivation research* (pp. 297-323). Kluwer.

Flavell, J. H. (1979). Metacognition and cognitive monitoring. A new area of cognitive-developmental inquiry a model of cognitive monitoring. *American Psychologist, 34*(10), 906-911.

Geiger, V., Stillman, G., Brown, J., Galbriath, P. y Niss, M. (2018). Using mathematics to solve real world problems: The role of enablers. *Mathematics Education Research Journal, 30*(1), 7-19. https://doi.org/10.1007/s13394-017-0217-3

Hidayat, R., Syed Zamri, S. N. A. y Zulnaidi, H. (2018). Does mastery of goal components mediate the relationship between metacognition and mathematical modelling competency? *Educational Sciences: Theory & Practice, 18*, 579-604. http://dx.doi.org/10.12738/estp.2018.3.0108

Iskala, T., Vauras, M., Lehtinen, E. y Salonen, P. (2011). Socially shared metacognition of dyads of pupils in collaborative mathematical problem-solving processes. *Learning and Instruction, 21*(3), 379-393. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2010.05.002

Kaiser, G. y Schwarz, B. (2010). Authentic modelling problems in mathematics education-examples and experiences. *Journal für Mathematik-Didaktik, 31*(1), 51-76. https://doi.org /10.1007/s13138-010-0001-3

Krüger, A., Vorhölter, K. y Kaiser, G. (2020). Metacognitive strategies in group work in mathematical modelling activities – The students' perspective. En G. A. Stillman, G. Kaiser y C. E. Lampen (Eds.), *Mathematical modelling education and sense-making. International perspectives on the teaching and learning of mathematical modelling* (pp. 311-321). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-37673-4_27

Lavasani, M., Mirhosseini, F., Hejazi, H. y Davoodi, M. (2011). The effect of self-regulation learning strategies training on the academic motivation and self-efficacy. *Procedia-Social and Behavioral Sciences, 29*, 627-632. https://dx.doi.org/10.1016/j.sbspro.2011.11.285

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM, 38*(2), 113-142. https://doi.org /10.1007/BF02655885

Nelson, L. J. y Fyfe, E. R. (2019). Metacognitive monitoring and help-seeking decisions on mathematical equivalence problems. *Metacognition Learning. 14*, 167-187. https://doi.org/10.1007/s11409-019-09203-w

Niss, M., Blum, W. y Galbraith, P. (2007). Introduction. En W. Blum, P. Galbraith, H-W. Henn, y M. Niss (eds.), *Modelling and applications in mathematics education. 14th ICMI Study* (vol. 10, pp. 3-32). Springer.

Pintrich, P. R. (2002). The role of metacognitive knowledge in learning, teaching, and assessing. *Theory into Practice, 41*(4), 219-225. https://doi.org/10.1207/s15430421tip4104_3.

Pintrich, P. R. y De Groot, E. V. (1990). Motivational and self-regulated learning components of classroom academic performance. *Journal of Educational Psychology, 82*(1), 33-40. https://doi.org /10.1037/0022-0663.82.1.33

Schoenfeld, A. (1987). What's all the fuss about metacognition. En A. H. Schoenfeld (ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 189-215). Routledge.

Schukajlow, S., Kaiser, G. y Stillman, G. (2023). Modeling from a cognitive perspective: Theoretical considerations and empirical contributions. *Mathematical Thinking and Learning, 25*(3), 259-269. https://doi.org/10.1080/10986065.2021.2012631

Stillman, G. (2011). Applying metacognitive knowledge and strategies in applications and modelling tasks at secondary school. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, y G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling. International perspectives on the teaching and learning of mathematical modelling* (pp. 165–180). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_18

Temur, Ö. D., Özsoy, G. y Turgut, S. (2019). Metacognitive instructional behaviours of preschool teachers in mathematical activities. *ZDM-Mathematics Education, 51*(4), 655-666. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01069-1

Van Velzen, J. H. (2016). Eleventh-grade high school students' accounts of mathematical metacognitive knowledge: Explicitness and systematicity. *International Journal of Science and Mathematics Education, 14*(2), 319-333. https://doi.org/10.1007/s10763-015-9689-3

Veenman, M. V. J. (2011). Alternative assessment of strategy use with self-report instruments: A discussion. *Metacognition and Learning*, 6(2), 205-211. https://doi.org/10.1007/s11409-011-9080-x

Veenman, M. V. J. y Van Cleef, D. (2019). Measuring metacognitive skills for mathematics: students' self-reports versus on-line assessment methods. *ZDM-*

Mathematics Education, 51(4), 691-01. https://doi.org/10.1007/s11858-018-1006-5

Velozo de Castro, E. M. y Almeida, L. M. W. (2023). Estratégias metacognitivas de estudantes brasileiros em atividades de modelagem matemática. *Revista Actualidades Investigativas en Educación, 23*(1), 1-26. https://doi.org/10.15517/aie.v23i1.51512

Vertuan, R. E. y Werle de Almeida, L. M. (2016). Práticas de monitoramento cognitivo em atividades de modelagem matemática. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 30*(56), 1070-1091. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n56a12

Vorhölter, K. (2019). Enhancing metacognitive group strategies for modelling. *ZDM-Mathematics Education, 51*, 703-716. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01055-7

Vorhölter, K. y Krüger, A. (2021). Metacognitive strategies in modeling: Comparison of the results achieved with the help of different methods. *Quadrante, 30*(1), 178-197.

Vorhölter, K., Krüger, A. y Wendt, L. (2019). Metacognition in mathematical modeling – An overview. En S. A. Chamberlin y B. Sriraman (Eds.), *Affect and mathematical modeling* (pp. 29-51). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-04432-9_3

Wedelin, D., Adawi, T., Jahan, T. y Andersson, S. (2015). Investigating and developing engineering students' mathematical modelling and problem-solving skills. *European Journal of Engineering Education, 40*(5), 557-572. https://doi.org/10.1080/03043797.2014.987648

Whitebread, D., Bingham, S., Grau, V., Pasternak, D. P. y Sangster, C. (2007). Development of metacognition and self-regulated learning in young children: Role of collaborative and peer-assisted learning. *Journal of Cognitive Education and Psychology*, *6*(3), 433-455. https://doi.org/10.1891/194589507787382043