

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

CONVERSIÓN DE UNIDADES DE LONGITUD

ERIKA RICARDO, MÓNICA TAPIAS Y CINDY LÓPEZ

BOGOTÁ, NOVIEMBRE DE 2025

En este documento, presentamos la unidad didáctica del tema conversión de unidades de longitud, resultado del trabajo del grupo uno de la decimocuarta cohorte de la Maestría en Educación Matemática de la Universidad de los Andes. Esta es una unidad didáctica que busca contribuir a la enseñanza y comprensión por parte de los estudiantes de la conversión de unidades de longitud como una herramienta útil para resolver tareas de aprendizaje en diversos contextos. La conversión de unidades de longitud resulta relevante porque permite conectar los conocimientos matemáticos con situaciones de la vida cotidiana. Además, promueve que los estudiantes comprendan el sentido práctico de las medidas y desarrollen habilidades para interpretar, comparar y expresar magnitudes en distintos sistemas de unidades. Asimismo, abordar este contenido desde una perspectiva contextualizada favorece la comprensión conceptual y el razonamiento lógico, más allá de la simple aplicación de fórmulas o procedimientos. Justificamos la elaboración de esta unidad didáctica porque en la práctica escolar se evidencian dificultades frecuentes en los estudiantes al realizar conversiones de unidades, especialmente cuando deben interpretar el significado de las magnitudes o aplicar los conocimientos en situaciones reales. Esta propuesta busca responder a ese problema mediante tareas de aprendizaje que promueven la exploración, el razonamiento y la argumentación.

Esta unidad didáctica fue diseñada para grado octavo. En ese sentido, pensamos su diseño en el marco de la normativa colombiana que busca contribuir a los Estándares Básicos por Competencias de los grados sexto-séptimo que mencionan “Selecciono unidades, tanto convencionales como estandarizadas, apropiadas para diferentes mediciones” y “Reconozco el uso de algunas magnitudes y de algunas de las unidades que se usan para medir cantidades de la magnitud respectiva en situaciones aditivas y multiplicativas” (Ministerio de Educación Nacional, 2020, p. 83) y octavo-noveno que menciona “Justifico la pertinencia de utilizar unidades de medida estandarizadas en situaciones tomadas de distintas ciencias.” (Ministerio de Educación Nacional, 2020, p. 87). Asimismo, consideramos aportar a los Derechos Básicos de Aprendizaje que lo incluyen para grado noveno como “Utiliza procesos inductivos y lenguaje simbólico o algebraico para formular, proponer y resolver conjeturas en la solución de problemas numéricos, geométricos, métricos, en situaciones cotidianas y no cotidianas” (Ministerio de Educación, 2016).

Nuestro diseño de la unidad didáctica corresponde con el contexto del colegio San Jorge de Inglaterra, un colegio privado y bilingüe en la ciudad de Bogotá. Consideramos que esta unidad didáctica puede implementarse y adaptarse para cualquier colegio privado o público en el territorio nacional que imparta sus clases de matemáticas en español o en inglés. La versión original de las tareas de la unidad didáctica está en inglés, y las hemos traducido también al español, por lo que estarán presentadas y disponibles en ambos idiomas. La implementación funcionaría mejor si los estudiantes tienen acceso a espacios abiertos, al aire libre, y si las clases son en modalidad presencial. Ninguna tarea necesita el uso de equipos tecnológicos, y se contempla el trabajo en equipo en diferentes formas de agrupación, así como la interacción constante entre docente y estudiantes. En el desarrollo de este trabajo, contamos con la orientación constante de nuestra tutora, Cindy Paola López Puentes, quien nos acompañó y guio en este camino.

1. ANTES DE IMPLEMENTAR

En este apartado, presentamos la información que sustenta el diseño de la unidad didáctica y que permite comprender la lógica interna de las tareas de aprendizaje. Exponemos los elementos conceptuales, cognitivos, y estructurales que orientan el trabajo pedagógico. Esto incluye la articulación de los contenidos, los aspectos cognitivos y afectivos, las posibles limitaciones de aprendizaje, los criterios de logro y la organización general de la unidad didáctica. Con esta fundamentación, buscamos ofrecer al lector una visión clara del sentido, la coherencia y la intencionalidad formativa de las actividades que conforman la unidad didáctica.

1. ARTICULACIÓN DE LOS CONTENIDOS

Nuestro tema, la conversión de unidades de longitud, se enmarca en la geometría. Para la conversión de unidades de longitud se utilizan herramientas y procedimientos aritméticos, algebraicos y gráficos, pero el gran marco que le da sentido es la geometría. Medir ha sido una necesidad humana desde hace siglos. Mientras las civilizaciones se encontraron cada vez más a lo largo de la historia, la medición se constituyó como un problema. Cada grupo de personas tenía su propia manera de medir distintas magnitudes (distancias, masas, tiempo) pero no había una manera concreta de que se entendieran esos parámetros por fuera del contexto social e histórico donde habían surgido. De ahí nace la necesidad de entender y aplicar la conversión de unidades. Con esta necesidad, surge también la preocupación de establecer unidades de medida más o menos universales, que sean adoptables y entendibles para cualquier persona y que, sobre todo, sean consistentes.

La medición empieza a surgir con las herramientas que los seres humanos tenemos más cerca, las que nos proporciona nuestro propio cuerpo. Medimos primero con las manos, con los pies, con los cuerpos, con lo que se puede correr o caminar. Empezamos después a incorporar herramientas externas. Al observar cómo cambia la cantidad de luz durante el día, establecimos medidas de tiempo. Al ponderar cuántos días toma caminar de un lugar a otro, establecimos medidas de longitud. Al considerar cuánto se necesita para alimentar a una familia, elegimos medidas de masa. Así sucesivamente, refinamos nuestras maneras de medir dentro de nuestras tribus y sociedades. Cuando personas de grupos distintos empezaron a encontrarse, surgió la necesidad de entendimiento entre todos. De aquí se explica lo que mencionamos anteriormente, y que nuestras maneras de medir sean cada vez más sofisticadas, precisas y universales. Sin embargo, no debe pareceros extraño todavía encontrarnos con vestigios de las antiguas prácticas, como medir las distancias en los tabacos que pueden fumarse antes de llegar, o relacionar el área de una pared con la cantidad de litros de pintura, o estimar el tiempo en función de canciones.

1.1. Estructura conceptual del tema

En esta ocasión, nosotras decidimos concentrar nuestra atención en la conversión de unidades de medida de longitud. Consideramos que la capacidad de medir es previa al trabajo que proponemos en nuestra unidad didáctica, que la conversión de otro tipo de unidades puede ser una enseñanza paralela a esta, y que de aquí se puede partir para enseñar conversión de unidades de medida compuestas. Dentro del tema de la conversión de unidades de medida de longitud, identificamos dos partes o componentes conceptuales de su estructura conceptual, que llamaremos subestructuras. Estas subestructuras organizan los conceptos y procedimientos esenciales que intervienen en el proceso de convertir entre unidades.

En línea con lo que habíamos relatado, las formas de medir que surgieron a lo largo del tiempo se organizaron eventualmente en sistemas de medidas. Aunque la intención es que las unidades de medida sean lo más universales posible, existen sistemas de medida distintos. De aquí parte la identificación que pudimos hacer de las dos subestructuras: una, corresponde a conversiones exactas, y la otra, a conversiones redondeadas. La primera subestructura corresponde a las conversiones exactas. Desde el punto de vista conceptual, este tipo de conversión se fundamenta en la existencia de relaciones de equivalencia fijas entre unidades pertenecientes a un mismo sistema de medidas, como el sistema métrico decimal. En este caso, los procedimientos asociados se basan en multiplicaciones y divisiones precisas que permiten transformar una unidad en otra sin pérdida de información. Su comprensión implica manejar nociones como proporcionalidad, factores de conversión y operaciones aritméticas elementales.

La segunda subestructura corresponde a las conversiones redondeadas. Estas conversiones se presentan cuando las unidades involucradas pertenecen a sistemas de medidas distintos, lo cual implica trabajar con equivalencias aproximadas. Conceptualmente, esta subestructura incluye la idea de aproximación, el uso de factores no exactos y la necesidad de tomar decisiones basadas en el nivel de precisión requerido. Los procedimientos asociados pueden implicar redondeo, estimación y comparación entre valores obtenidos en distintos sistemas.

1.2. Fenomenología

Para comprender cómo articulamos este contenido con la realidad, consideramos la fenomenología asociada a la conversión de unidades de longitud. Según Gómez (2018), entendemos que los contextos fenomenológicos constituyen el punto de partida para identificar los fenómenos que dan sentido al aprendizaje de un tema matemático, pues permiten reconocer cómo y dónde aparece la matemática en situaciones reales. Desde esta perspectiva, examinamos las diversas manifestaciones del contenido en prácticas cotidianas, sociales, profesionales o científicas.

Relacionamos estos fenómenos con las dos subestructuras conceptuales que organizan el tema: conversiones exactas y conversiones redondeadas. Esta distinción nos permite clasificar las situaciones en las que el estudiante debe convertir unidades de longitud según pertenezcan o no al mismo sistema de medida. Asimismo, articulamos esta organización con los contextos definidos por PISA (OCDE, 2012), que agrupan las situaciones de uso de las matemáticas en contextos personales, educativos y laborales, sociales y científicos. A partir de esta articulación, identificamos fenómenos como medir longitudes en el entorno inmediato, interpretar planos y escalas, realizar conversiones en aplicaciones tecnológicas o comparar especificaciones técnicas provenientes de distintos sistemas de medida.

1.3. Sistemas de representación

En las matemáticas, los conceptos siempre pueden abordarse con distintas maneras de expresar y organizar la información matemática presentada en situaciones problema a las que llamaremos tareas de aprendizaje. No hay una sola manera de expresar y organizar una tarea de aprendizaje, ni hay maneras más correctas que otras de hacerlo. En ese sentido, es importante que identifiquemos esas distintas maneras en las que podemos expresar a las situaciones problema que nos convocan en ocasión de la conversión de unidades de longitud. En muchas ocasiones, esas maneras de representar una tarea de aprendizaje que llevan a una solución se conocen como camino de aprendizaje. Los sistemas de representación son las formas que permiten expresar, operar y relacionar conceptos dentro de una estructura matemática. Cabe aclarar, que una tarea puede tener más de una estrategia de solución dentro de un mismo sistema de representación. Los sistemas de representación se dividen en categorías según su naturaleza. Para el problema que nos compete, identificamos varios sistemas de representación que se relacionan con el tema de conversión de unidades de longitud y que nos ayudan a entender y a organizar las distintas maneras que se puede solucionar una tarea de aprendizaje sobre conversión de unidades de longitud.

Sistema de representación verbal

Los nombres de las unidades de medida nos aportan información sobre el tamaño o la escala que representan. En el caso de los múltiplos y submúltiplos del metro, es importante conocer y entender la relación que tiene el nombre de la unidad con la magnitud con respecto al metro. Por ejemplo, el milímetro se debe entender como una milésima parte del metro. Dentro del mismo nombre está incluido el factor de conversión. En el caso del sistema de medidas inglés, las unidades de medida de longitud se relacionan con las partes del cuerpo. La relación no es tan inmediata en términos de conversión, pero sí es fácil ver mediante las partes del cuerpo por qué una yarda (la longitud aproximada de un paso) corresponde a tres pies. De nuevo, el nombre mismo nos da mucha información acerca de la unidad de medida de longitud y de su relación con las otras unidades del mismo sistema.

Sistema de representación manipulativo

El sistema de representación verbal, que acabamos de explicar, nos da paso entonces al sistema de representación manipulativo. La conversión entre unidades que nacen del uso de las partes del cuerpo se da de manera natural porque se puede comprobar muy rápidamente. Es importante conceder el hecho de que, como todos nuestros cuerpos son distintos, puede que las equivalencias no sean exactas. Pero son lo suficientemente cercanas como para identificar las relaciones intrínsecas en el sistema de medidas inglés. A esto le podemos sumar, por ejemplo, que muchas personas relacionan las partes de sus propios cuerpos con medidas en centímetros. Una mano estirada corresponde fácilmente a 30 centímetros para unos, 20 centímetros para otros. La manipulación de las partes del cuerpo se convierte entonces en una manera de resolver tareas de aprendizaje.

Sistema de representación numérico

Hablamos antes de los factores de conversión. Estos corresponden al sistema de representación numérico. Los factores de conversión son las cantidades por las que multiplicamos una unidad para llegar a otra. Recordemos que estamos dentro de la estructura que divide nuestro problema

en dos: conversiones exactas y redondeadas. Eso tiene mucho que ver con los factores de conversión. Dentro de cada sistema de medidas, los factores suelen ser números racionales. En cambio, los factores de conversión de unidades de longitud provenientes de sistemas de medidas distintos suelen ser números irracionales que se han redondeado para poder trabajar con ellos. Por eso, estas conversiones implican también un proceso de redondeo.

Sistema de representación tabular

Otra manera de comprender el concepto de conversión de unidades de longitud es mediante el sistema de representación tabular. Este sistema permite organizar y mostrar las relaciones entre diferentes unidades mediante columnas que representan cada tipo de medida y filas que expresan valores asociados. La tabla funciona como un medio para visualizar la estructura de equivalencias entre unidades, lo que facilita la identificación de patrones numéricos y la comprensión de cómo se transforman los valores al pasar de una unidad a otra. Al disponer la información en este formato, se hace evidente la proporcionalidad entre las unidades y se favorece una interpretación más clara del proceso de conversión, independientemente del tipo específico de tarea que se plantee al estudiante.

Sistema de representación gráfico

La construcción de estas tablas también puede ayudarnos a dibujar la conversión como una gráfica lineal. En la gráfica lineal, se evidencia cómo todos los puntos que pertenecen a la línea corresponden a los valores equivalentes entre las dos unidades de medida. Dentro de este sistema de representación gráfico también podemos valernos, por ejemplo, de instrumentos como las reglas que tienen, en uno de sus lados, los centímetros marcados mientras que, en el otro lado, tienen las pulgadas marcadas. Esta es una manera gráfica de ver las equivalencias entre las dos unidades. En una simple recta numérica (también, si se quiere, en la forma de una regla escolar normal de 30 centímetros) se pone en evidencia, por ejemplo, la equivalencia entre un centímetro y diez milímetros.

Sistema de representación simbólico

De las gráficas lineales podemos derivar, dentro del sistema de representación simbólico, una función lineal. La función determina el cambio entre una unidad de medida y otra. Es más, si nuestros estudiantes ya son versados en el manejo de funciones, el cambio en una dirección u otra se puede equiparar con una función lineal y su inversa.

Como vemos, todas estas representaciones conversan entre sí. Nada impide que se utilicen de manera simultánea, alternada o preferencial. En la figura 1, presentamos el mapa conceptual que resume toda la articulación de los contenidos que hemos enunciado hasta ahora.

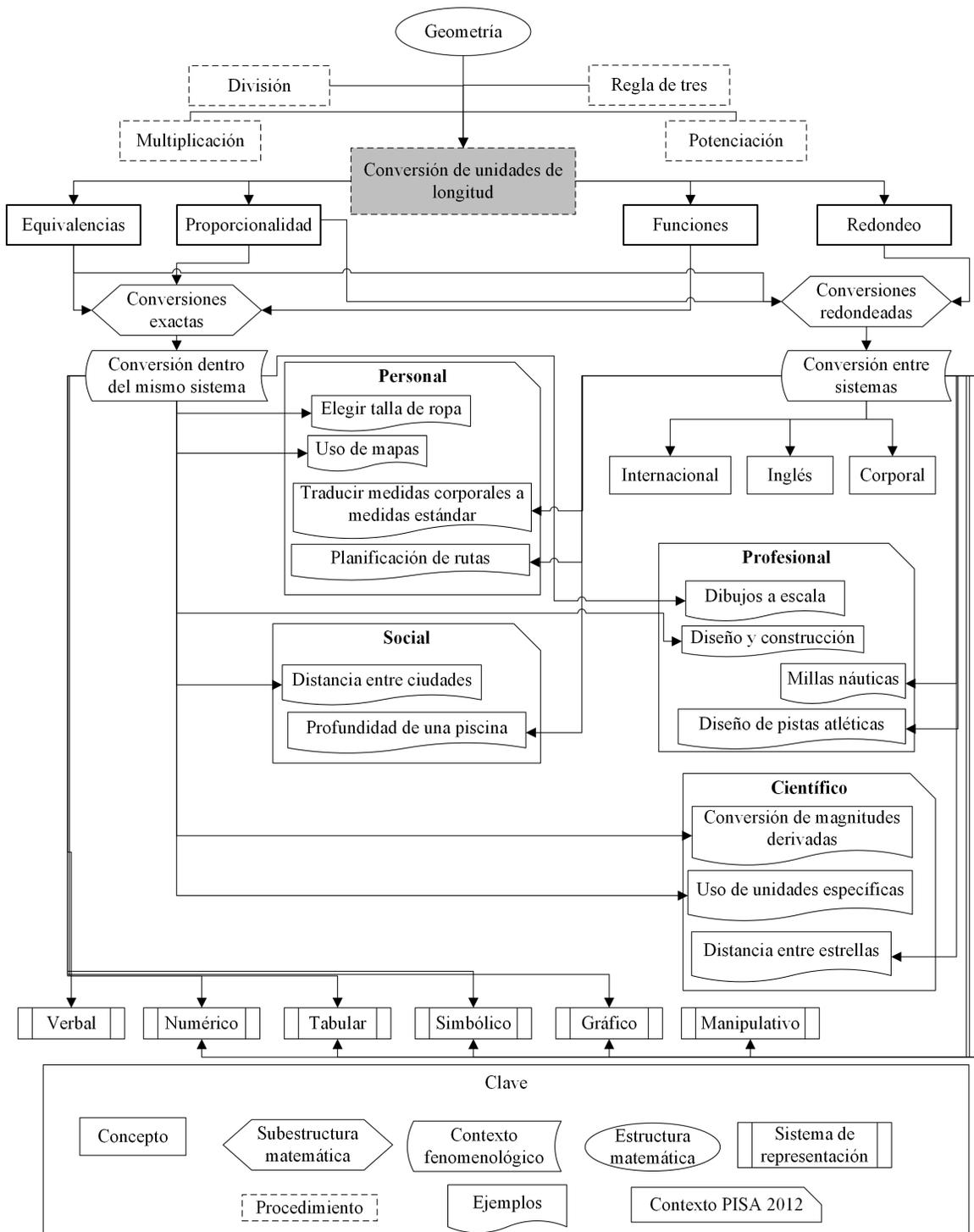


Figura 1 Mapa conceptual de la consolidación de los conceptos pedagógicos

El mapa conceptual permite visualizar cómo la conversión de unidades de longitud se articula con diversos conceptos matemáticos, procedimientos, sistemas de representación y contextos fenomenológicos. En la parte superior se muestran las nociones matemáticas que sostienen el tema, como la equivalencia, la proporcionalidad, la potenciación y los procesos de multiplicación, división o regla de tres, que intervienen en las conversiones exactas y redondeadas. Estas subestructuras matemáticas se relacionan con los diferentes fenómenos en los que aparece la necesidad de convertir unidades, que pueden ser personales, sociales, profesionales o científicos, en correspondencia con los contextos PISA. Además, el mapa ilustra los distintos sistemas de representación —verbal, numérico, tabular, simbólico, gráfico y manipulativo— que pueden emplearse para abordar el concepto y favorecer su comprensión desde múltiples registros.

Un ejemplo que permite ilustrar estas relaciones es la tarea de interpretar la distancia entre dos ciudades en el que se usa un mapa que presenta la escala en kilómetros mientras que la aplicación móvil del estudiante la expresa en millas. En este caso, la conversión entre sistemas métricos diferentes constituye una conversión redondeada, apoyada en el concepto de equivalencia aproximada y en el procedimiento de multiplicar o dividir por la constante de conversión (por ejemplo, 1 milla \approx 1.609 km). El fenómeno corresponde a un contexto social y personal, puesto que se trata de la planificación de rutas y la lectura de mapas. Para resolverla, el estudiante puede emplear diferentes sistemas de representación: una tabla que muestre valores en ambas unidades, un esquema gráfico de la escala, y una expresión simbólica que represente la relación numérica entre millas y kilómetros. De esta manera, se hace evidente cómo un mismo problema integra la estructura conceptual del tema, los procedimientos matemáticos involucrados, los sistemas de representación utilizados y el contexto fenomenológico que justifica el aprendizaje. En el Anexo 1, presentamos los mapas conceptuales más detallados de cada aspecto de la articulación de los contenidos.

2. ASPECTOS COGNITIVOS

Durante el diseño de la unidad didáctica, analizamos los aspectos cognitivos implicados en el aprendizaje del tema, es decir, los procesos mentales que los estudiantes ponen en juego para construir y aplicar el conocimiento matemático. Este análisis permitió orientar el enfoque de enseñanza y anticipar las posibles dificultades y avances en el aprendizaje. Por esto, a lo largo de este apartado, abordaremos las expectativas de aprendizaje, las expectativas de tipo cognitivo, las limitaciones del aprendizaje, los criterios de logro y finalmente la estructura general de la unidad didáctica.

2.1. Expectativas de aprendizaje

A partir de la reflexión que realizamos alrededor de los aspectos cognitivos, establecimos las expectativas de aprendizaje. Estas expectativas se clasifican en nivel superior, medio e inferior. Nuestra unidad didáctica parte del modelo de referencia mencionado propuesto por Gómez (2018). En este sentido, entendemos como expectativas de nivel superior según PISA (OCDE, 2012) los procesos matemáticos de formular, emplear e interpretar las matemáticas en diversos contextos, así como las capacidades matemáticas fundamentales. Entre estas consideramos contribuir al

fortalecimiento del diseño de estrategias para resolver problemas; la matematización; la comunicación; el razonamiento y argumentación; la utilización de operaciones y de lenguaje simbólico, formal y técnico; la representación; y la utilización de herramientas matemáticas. Con el desarrollo de esta unidad didáctica, esperamos contribuir a los tres procesos generales y a todas las capacidades matemáticas a excepción del uso de herramientas matemáticas. Consideramos que la contribución de nuestra unidad didáctica para esa capacidad matemática no es relevante porque ninguna de nuestras tareas de aprendizaje contempla el uso de herramientas matemáticas más allá de un sentido operacional (como la calculadora, por ejemplo). Ninguna herramienta se utiliza como parte fundamental del desarrollo de las tareas de aprendizaje.

Establecimos las expectativas de nivel medio como los objetivos generales que orientan el desarrollo de la unidad didáctica. Estos objetivos se centran en que el estudiante sea capaz de utilizar la conversión de unidades de longitud tanto en un mismo sistema de medidas como entre distintos sistemas de medidas. Asimismo, busca que los estudiantes evalúen la idoneidad de una unidad de medida según un contexto específico. Enunciamos los objetivos de la unidad didáctica a continuación.

Objetivo 1. Usar la conversión de unidades de longitud dentro de un mismo sistema de medidas y entre distintos sistemas de medidas para resolver problemas.

Objetivo 2. Evaluar la idoneidad de una unidad de medida de longitud para resolver problemas en un contexto dado.

En el mismo sentido, establecimos las expectativas de nivel inferior como las capacidades que hacen referencia a las actuaciones de los estudiantes cuando ejecutan los procedimientos rutinarios básicos de un tema matemático. En la tabla 1, describimos brevemente la relación entre las expectativas de nivel superior y nivel medio.

Tabla 1

Relación entre los objetivos de aprendizaje, los procesos matemáticos y las capacidades matemáticas fundamentales

Objetivo de aprendizaje	Proceso Matemático	Capacidades Matemáticas Fundamentales
Usar la conversión de unidades de longitud dentro de un mismo sistema y entre distintos sistemas para resolver problemas	Formular	DRP, M, C, RA, U, R
	Emplear	DRP, M, C, RA, U, R
	Interpretar	C, RA, U
Evaluar la idoneidad de una unidad de medida de longitud en un contexto dado	Formular	DRP, M, RA, U
	Emplear	DRP, RA, U, R
	Interpretar	DRP, M, C, RA, U, R

Nota. F = formular; E = emplear; I = interpretar y evaluar; DRP = diseño de estrategias para resolver problemas; M = matematización; C = comunicación; Ra = razonamiento y argumentación; U = Utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico; Re = representación

La contribución de cada objetivo a los procesos matemáticos y a las capacidades matemáticas fundamentales surge de nuestras reflexiones alrededor del planteamiento de los objetivos. A partir de la pregunta ¿qué queremos que nuestros estudiantes sean capaces de hacer al finalizar la unidad didáctica?, podemos anticipar qué expectativas de nivel superior se esperan que los estudiantes desarrollen.

2.2. Expectativas afectivas

Somos conscientes de que no basta con trabajar únicamente en el desarrollo de conceptos y procedimientos. Por esto, proponemos contribuir a tres expectativas de tipo afectivo en las que intervienen aspectos relacionados a la motivación y la actitud positiva frente a la solución de problemas que se vinculan al tema de conversión de unidades de longitud. En la tabla 2, presentamos estas expectativas.

Tabla 2

Expectativas afectivas del tema conversión de unidades de longitud

EA	Descripción
1	Valorar positivamente la conversión de unidades de longitud para entender su utilidad y relevancia en distintos contextos
2	Desarrollar una predisposición a resolver problemas complejos relacionados con la conversión de unidades de longitud y plantear soluciones por medio de la proporcionalidad
3	Establecer el hábito de revisar cuidadosamente los cálculos y resultados obtenidos en la conversión de unidades de longitud para asegurar la coherencia en las soluciones y expresar de manera precisa el resultado con su respectiva unidad de medida

Nota. EA: expectativa afectiva.

Estas expectativas afectivas pretenden fortalecer un ambiente de aprendizaje positivo, en el que los estudiantes lograrán reconocer el valor de la precisión, la constancia y el razonamiento lógico. Consideramos que fortalecer la confianza, la curiosidad y el pensamiento crítico es parte fundamental del desarrollo de la unidad didáctica.

2.3. Limitaciones de aprendizaje

Para analizar las limitaciones de aprendizaje del tema, partimos de algunas dificultades y errores previstos en los que los estudiantes pueden incurrir. Estos errores están asociados a la comprensión del procedimiento de la conversión, la aplicación de las unidades en contextos específicos y la precisión y justificación de los resultados obtenidos al desarrollar las tareas de aprendizaje. En el Anexo 2, presentamos un listado de los errores en los que los estudiantes pueden incurrir que previmos al momento del diseño de la unidad didáctica. Están organizados en siete grupos de dificultades de la siguiente manera: (a) dificultad en la comprensión del proceso de conversión de unidades; (b) dificultad en la aplicación de la conversión de unidades en contexto; (c) dificultad en la comprensión de la precisión necesaria en los resultados; (d) dificultad en el planteamiento de justificaciones y argumentos; (e) dificultad en la organización de información; (f) dificultad en el

manejo algebraico y aritmético; y (g) dificultad en la comprensión de las relaciones de proporcionalidad. En la tabla 3, presentamos los errores en los que los estudiantes pueden incurrir con mayor frecuencia.

Tabla 3

Dificultades y errores en los que los estudiantes pueden incurrir con mayor frecuencia

Dificultad	Error
Dificultad en la comprensión del proceso de conversión de unidades	E2 Extraer datos irrelevantes
	E56 Relacionar una unidad con un factor de conversión inadecuado
	E63 Hacer mal la conversión de unidades de longitud
Dificultad en la aplicación de la conversión de unidades de longitud en contexto	E49 Identificar un valor distinto al de la tabla
	E48 Presentar solo el número sin contexto
	E52 Confundir las unidades del requerimiento con el factor de conversión
Dificultad en la comprensión de la precisión necesaria en los resultados	E45 Combinar unidad correcta con número equivocado
	E81 No considerar todas las unidades no estandarizadas
Dificultad en la organización de información	E62 Confundir valores numéricos asociados a unidades del SI
Dificultad en el manejo algebraico y aritmético	E76 Realizar cálculos inexactos en la demostración

Estructuramos la tabla 3 en tres columnas. En la primera, se indican las dificultades identificadas en el aprendizaje del tema de conversión de unidades de longitud. En la segunda, se presenta el código asignado a cada error, de acuerdo con la nomenclatura establecida en el listado general presentado en el Anexo 2. Finalmente, en la tercera columna se incluye una descripción breve que resume el tipo de error. Esta organización permite visualizar de manera clara la relación entre cada dificultad y los errores específicos que las representan. La caracterización de las dificultades en las que organizamos los errores surge, entonces, de una observación de esos errores y de pensar en las categorías a las que pueden pertenecer. Buscamos así relaciones lógicas entre los errores que previmos.

2.4. Criterios de logro

Para la resolución de una tarea de aprendizaje, el estudiante puede encontrar distintas estrategias de solución. Denominaremos caminos de aprendizaje a estas maneras de solucionar la tarea de aprendizaje. Los caminos de aprendizaje se componen de criterios de logro que son los procedimientos entendidos como logros parciales que se evidencian para alcanzar el objetivo de aprendizaje. En relación con cada uno de nuestros objetivos de aprendizaje, definimos nuestros criterios

de logro como los procedimientos dentro de un camino de aprendizaje. Como mencionamos anteriormente, estos criterios de logro surgen de la unión de las capacidades en secuencias. Y las capacidades son procedimientos rutinarios que el estudiante efectúa para dar solución a una situación matemática.

Anteriormente mencionamos que en matemáticas nunca hay una manera única de resolver un problema, ni una más correcta que otra. En ese sentido, los criterios de logro se organizan de manera secuencial en diferentes caminos que los estudiantes pueden tomar para resolver la tarea de aprendizaje a la que se enfrentan. Cada camino es en realidad la representación de una estrategia de solución de la tarea. En los grafos que presentaremos más adelante, se harán evidentes dos cuestiones: la primera, que las bifurcaciones en los grafos corresponden a las diferentes estrategias que el estudiante puede adoptar para resolver su tarea; la segunda, que cada una de estas estrategias está relacionada con algún sistema de representación, aunque no siempre ocurre así, como lo explicamos en el primer apartado de este documento. Tiene sentido entonces pensar que, si se sigue una de las múltiples estrategias posibles, el estudiante puede tener éxito en la resolución de su tarea de aprendizaje.

Dado que cada criterio de logro es muy específico, el análisis del trabajo de los estudiantes permite identificar con precisión los errores que les impidieron resolver la tarea de aprendizaje o, por el contrario, los logros parciales que alcanzaron con éxito dentro de un determinado camino de aprendizaje. La observación de estos logros y errores evidencia cómo los estudiantes siguieron las distintas estrategias de solución que habíamos anticipado durante el diseño de la unidad didáctica. En este sentido, la consecución progresiva de los criterios de logro muestra que se desarrollan los objetivos de aprendizaje planteados.

En la tabla 4, presentamos el listado de los criterios de logro de nuestra unidad didáctica. Como vemos en esta tabla, los criterios de logro deben organizarse por objetivo puesto que responden a que los estudiantes puedan completar las estrategias de solución de manera exitosa. Vale la pena recalcar, además, que el criterio de logro con código 2.7 del segundo objetivo de aprendizaje engloba en sí todo el proceso que describen los criterios de logro del primer objetivo de aprendizaje. Así, tiene sentido que consideremos que el primer objetivo de aprendizaje se constituya como conocimiento previo para el segundo objetivo de aprendizaje. En la figura 2, presentamos el grafo de criterios de logro del primer objetivo de aprendizaje.

Tabla 4
Criteria de logro

Objetivo 1	
Código	Criterio de logro
1.1	Identifico qué medidas debo convertir
1.2	Elijo la unidad de medida más adecuada para el contexto y explico por qué
1.3	Uso la mejor forma de representar los datos para resolver el problema
1.4	Organizo los datos en una tabla para resolver la tarea
1.5	Hago un cálculo con regla de tres dentro del sistema métrico para resolver el problema
1.6	Uso la regla de tres para convertir entre distintos sistemas de medida
1.7	Aplico factores de conversión para convertir entre diferentes sistemas de medida
1.8	Hago cálculos adicionales para responder la pregunta
1.9	Redondeo el resultado
1.10	Escribo mi respuesta final y verifico que tenga sentido
1.11	Aplico factores de conversión para convertir unidades de longitud en el sistema métrico decimal
Objetivo 2	
2.1	Reconozco las dimensiones, escalas y relaciones entre las medidas del problema
2.2	Uso la mejor forma de representar los datos para resolver el problema
2.3	Escribo escalas numéricas con diferentes unidades de medida
2.4	Expreso una escala numérica con una misma unidad de medida
2.5	Hago conversiones con medidas no estándar y las comparo con medidas estándar
2.6	Trabajo con medidas de longitud estándar para resolver el problema
2.7	Convierto medidas de longitud de una unidad a otra
2.8	Analizo si la medida o el sistema elegido es adecuado para el problema y explico mi decisión
2.9	Propongo una solución para el problema
2.10	Explico mi respuesta final y digo por qué es correcta

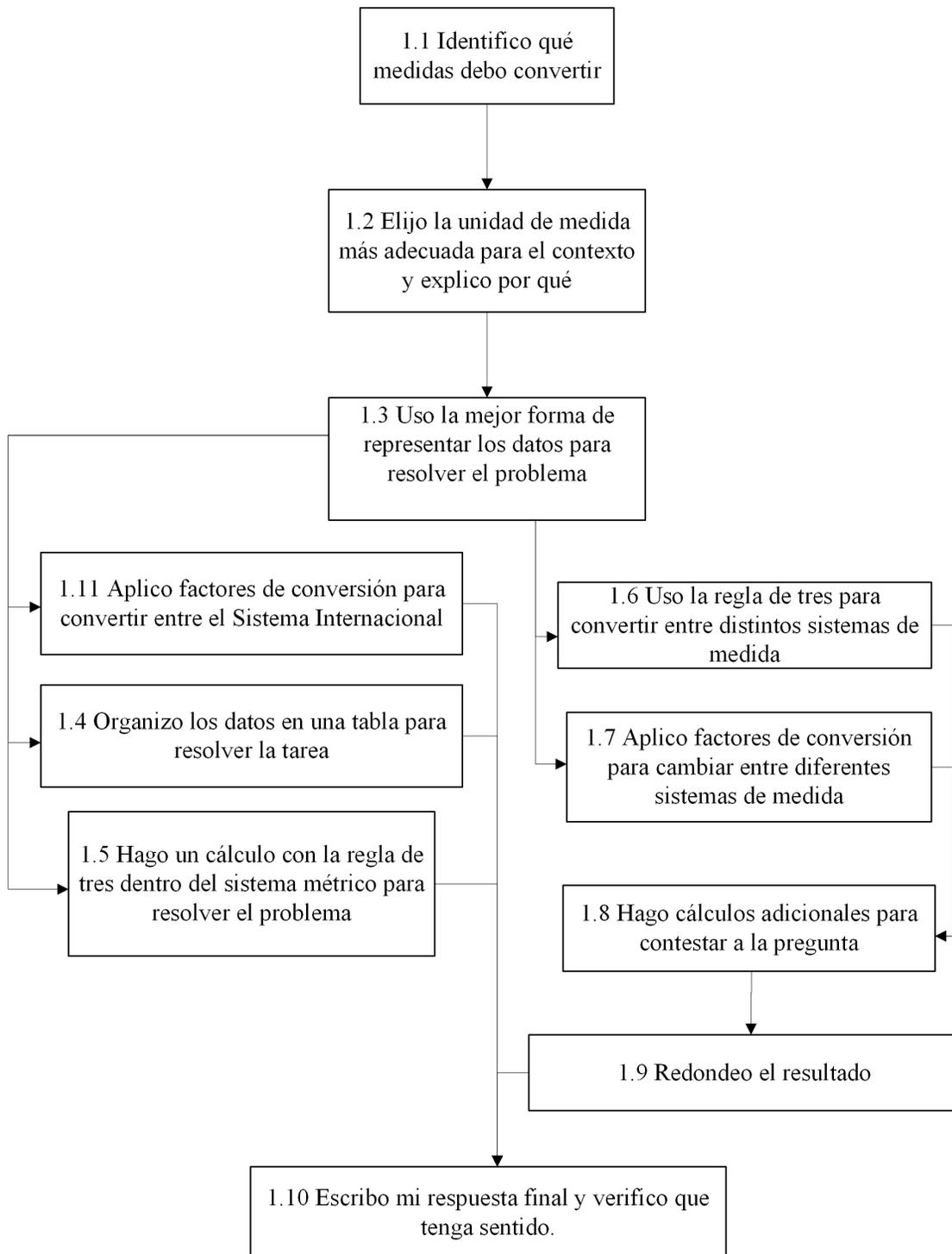


Figura 2 Grafo de criterios de logro del primer objetivo de aprendizaje

El grafo de criterios de logro del primer objetivo inicia con la identificación necesaria de las unidades de medida que deben convertirse. Después, es necesario relacionar el contexto del problema con la unidad de medida que se va a elegir. Luego, aparece el criterio de logro de decisión. El nombre se debe a que, en este punto, el estudiante elige el procedimiento que le resulta más fácil o claro para resolver la tarea. Además, aquí se separan las estrategias de solución de cada una de las tareas de aprendizaje del primer objetivo. Después del criterio de logro de decisión, vemos dos alternativas. Al lado izquierdo del grafo, están los criterios de logro relacionados con la primera tarea del objetivo que corresponde a la conversión de unidades de longitud dentro del mismo sistema de unidades. Al lado derecho, están los criterios de logro relacionados con la segunda tarea de aprendizaje del objetivo en la que se trabaja la conversión de unidades de longitud entre unidades de distintos sistemas de medida. Los dos criterios de logro que siguen son procedimientos adicionales por la naturaleza del requerimiento y el procedimiento de redondeo propio de la subestructura de conversiones redondeadas. El final del grafo es la respuesta final y la comprobación de su coherencia con el contexto de cada tarea. En este criterio de logro, también se incluyen aspectos como usar la unidad adecuada en la respuesta, proporcionar la respuesta con el nivel de precisión requerido, y que sea evidente cuál es la respuesta final del estudiante. De manera similar, presentamos en la figura 3 el grafo de criterios de logro del segundo objetivo de aprendizaje.

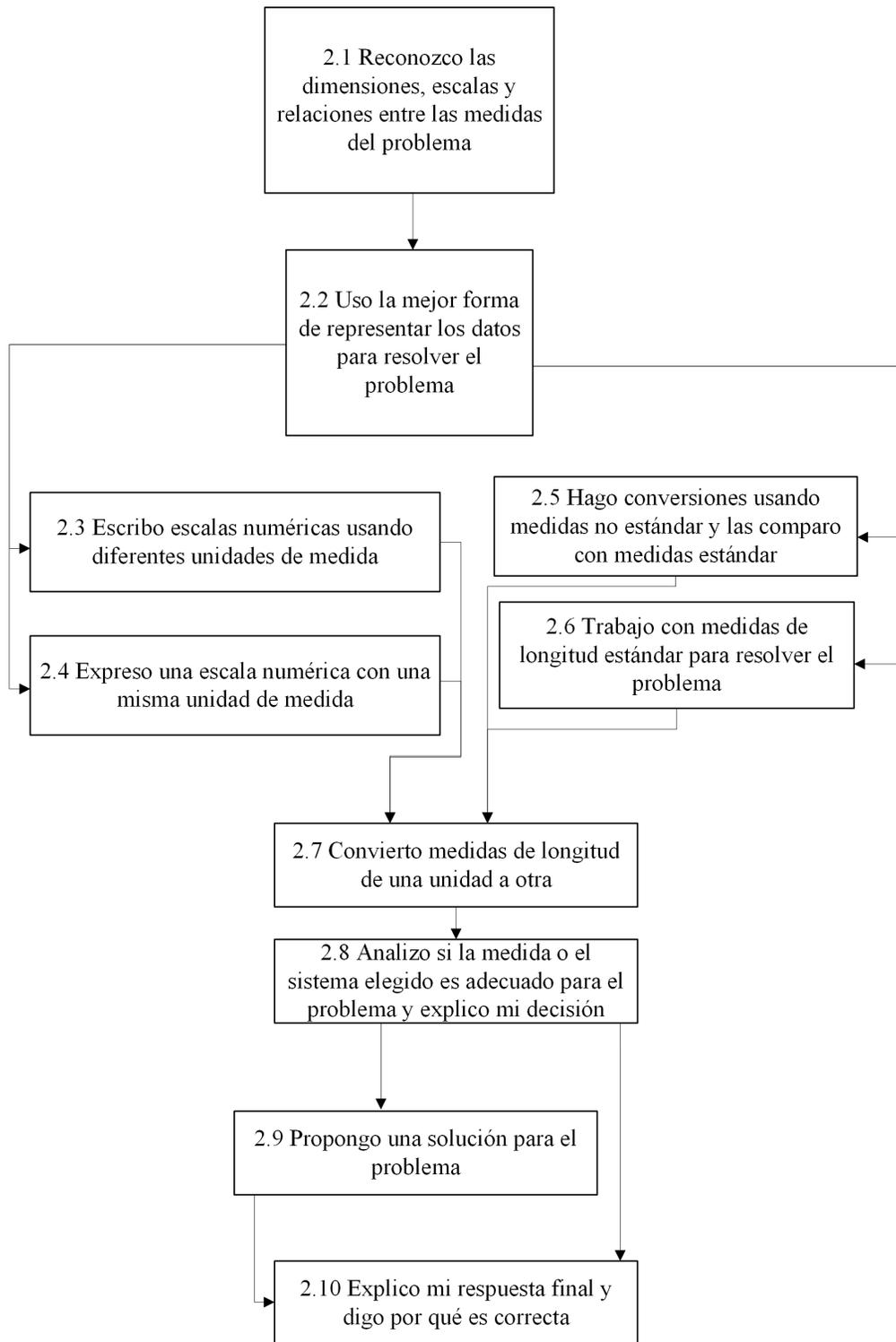


Figura 3 Grafo de criterios de logro del segundo objetivo de aprendizaje

El grafo de criterios de logro del segundo objetivo inicia con la identificación de los elementos de la tarea que son necesarios para responder al requerimiento. Inmediatamente después, está el criterio de logro de decisión de este objetivo. De nuevo, este criterio de logro es el punto a partir del cual el grafo se separa en distintas estrategias de solución. Las dos alternativas que se abren corresponden a las dos tareas del segundo objetivo, la primera a la izquierda y la segunda a la derecha. En cada alternativa se incluyen las estrategias posibles para resolver cada una de las tareas. Después, ambos caminos coinciden en el grafo donde se retoman los procedimientos propios del primer objetivo de aprendizaje, es decir, la conversión de unidades de longitud. Luego, continúa un criterio de logro de análisis en el que el estudiante debe comprobar la validez del sistema o de la unidad que ha elegido. Según la naturaleza del problema, será necesario o no proponer una solución. Cuando el problema exige obtener un resultado numérico, por ejemplo, calcular una distancia, comparar longitudes o transformar un valor a otra unidad para tomar una decisión, es necesario que el estudiante formule una solución explícita. En cambio, cuando la finalidad de la tarea es únicamente justificar la idoneidad de una unidad o sistema de medida, sin requerir un cálculo posterior, la actividad se resuelve con la argumentación y no demanda una solución numérica adicional. De manera similar al grafo del primer objetivo, el último criterio de logro es la respuesta final coherente y comprobada. Aquí también se incluyen aspectos como la justificación y explicación de la respuesta final. En el Anexo 3, presentamos los grafos en inglés.

2.5. Esquema general de la unidad didáctica

En esta sección, presentamos la estructura del nuevo diseño de la unidad didáctica. El propósito es organizar de manera clara las sesiones con el fin de garantizar la coherencia entre los objetivos de aprendizaje.

La unidad se organiza en ocho sesiones de 45 minutos cada una. En la primera sesión, se aplica una prueba diagnóstica que se retroalimenta en la segunda sesión. En esa misma sesión, se presentan los objetivos de la unidad didáctica y la metodología de trabajo que se seguirá en las diferentes tareas de aprendizaje. Las sesiones tercera a sexta se destinan al desarrollo de las tareas de aprendizaje, y comparten una estructura similar orientada a favorecer la comprensión progresiva y el aprendizaje reflexivo. La séptima sesión se dedica a la aplicación del examen final, y la octava al cierre de la unidad, en la que se entregan los resultados, se revisa el cumplimiento de los propósitos y se promueve una reflexión conjunta sobre los aprendizajes alcanzados.

En las sesiones en las que se aplican las tareas de aprendizaje (sesiones 3 a 6), la organización interna responde a una secuencia de momentos que permiten guiar el proceso de enseñanza y aprendizaje. Al inicio, se recuerda el objetivo de la sesión, lo que ocupa entre cinco y diez minutos. Este momento es necesario porque ayuda a los estudiantes a mantener claridad sobre el propósito del trabajo, a establecer conexiones con las tareas de aprendizaje previas y a comprender la relación entre la tarea y los objetivos generales de la unidad. Posteriormente, se desarrolla la tarea de aprendizaje, que constituye el eje de la sesión y ocupa aproximadamente entre veinticinco y treinta minutos. Durante este tiempo, los estudiantes trabajan de manera individual o colaborativa en la resolución de la tarea de aprendizaje, mientras el docente acompaña el proceso, orienta las estrategias, resuelve dudas y observa los procedimientos empleados. Al finalizar el desarrollo, se destina un espacio breve, de cinco a siete minutos, para la retroalimentación. Este momento busca analizar los errores y aciertos observados, discutir las estrategias empleadas y ofrecer orientaciones

que permitan a los estudiantes comprender cómo mejorar su desempeño. La retroalimentación tiene un carácter formativo, ya que se centra en los procesos más que en los resultados. Finalmente, se reserva un tiempo de tres a cinco minutos para la puesta en común, durante la que los estudiantes presentan sus procedimientos, contrastan sus razonamientos con los de sus compañeros y reflexionan colectivamente sobre lo aprendido. Presentamos la temporalización en la tabla 5.

Tabla 5
Temporalización de la unidad didáctica

Sesión	Actividad	Tiempo estimado
1	Prueba diagnóstica	45 min
2	Retroalimentación de la prueba diagnóstica Presentación de los objetivos de la unidad didáctica y la metodología de trabajo para cada una de las tareas de aprendizaje	45 min
3	Presentación del objetivo O1 Implementación de la tarea de aprendizaje T1.1 Mapa Retroalimentación de la tarea de aprendizaje T1.1 Mapa Puesta en común	45 min
4	Implementación de la tarea de aprendizaje T1.2 Caminata Retroalimentación de la tarea de aprendizaje T1.2 Caminata Puesta en común	45 min
5	Presentación del objetivo O2 Implementación de la tarea de aprendizaje T2.1 Dibujos a escala Retroalimentación de la tarea de aprendizaje T2.1 Dibujos a escala Puesta en común	45 min
6	Presentación del objetivo O2 Implementación de la tarea de aprendizaje T2.2 Nuestro sistema Retroalimentación de la tarea de aprendizaje T2.2 Nuestro sistema Puesta en común	45 min

Tabla 5

Temporalización de la unidad didáctica

7	Aplicación del examen final	45 min
8	Entrega de resultados de las tareas de aprendizaje y del examen final	45 min
	Consecución de los propósitos de la unidad didáctica	
	Reflexión de cierre de la unidad didáctica	

Estimamos que la unidad didáctica se pueda abarcar en este tiempo planificado, pero tenemos en cuenta que las dinámicas de las instituciones educativas pueden provocar variaciones en la cantidad de sesiones o en el tiempo de cada sesión. Cada sesión mantiene una estructura coherente que articula momentos de orientación, acción, reflexión y cierre. Esta organización contribuye a promover aprendizajes significativos, a fortalecer la autonomía de los estudiantes y a consolidar una comprensión más profunda de los conceptos trabajados. Cabe señalar que los tiempos adicionales requeridos para la corrección, calificación y sistematización de resultados no están incluidos en esta temporalización, ya que corresponden a actividades complementarias de los docentes.

2. TAREA DIAGNÓSTICA

Antes de iniciar el desarrollo de la unidad didáctica, consideramos importante que el profesor conozca qué saben los estudiantes. Por esto, diseñamos una tarea diagnóstica que nos permite identificar los conocimientos previos frente a las situaciones propuestas. A partir de esta información, el docente puede reconocer el punto de partida del grupo y ajustar las actividades previas al desarrollo de las tareas de aprendizaje en caso de que no se cuente con la mayoría de los conocimientos previos. En la tabla 6, presentamos el listado de conocimientos previos que consideramos deben tener los estudiantes.

Tabla 6

Listado de conocimientos previos del tema conversión de unidades de longitud

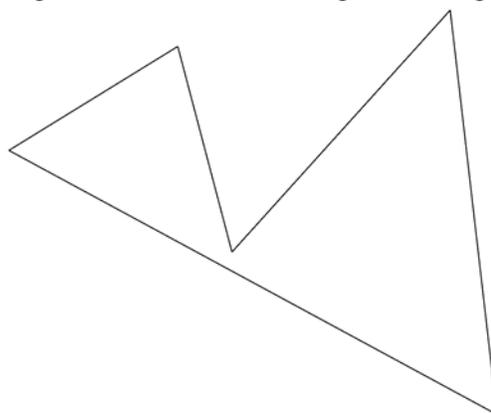
CP	Descripción
1	Reconocer las unidades de medida de longitud
2	Usar instrumentos de medición de longitud
3	Reconocer las abreviaturas y los signos que denotan las unidades de medida de longitud
4	Relacionar los múltiplos y submúltiplos del metro con el nombre de cada unidad de medida
5	Relacionar las unidades de medida del sistema imperial con partes del cuerpo
6	Realizar operaciones de multiplicación con números reales
7	Realizar operaciones de división con números reales
8	Usar la regla de tres como procedimiento
9	Usar potencias de 10 para calcular magnitudes
11	Aplicar los métodos de redondeo de enteros y decimales
12	Establecer una ecuación para resolver un problema
13	Establecer proporciones coherentes a partir de datos
14	Aplicar la proporcionalidad para calcular valores en un contexto
15	Despejar una ecuación
17	Interpretar escalas numéricas

Nota. CP: conocimientos previos.

Los conocimientos previos abarcan aspectos conceptuales, como reconocimiento de unidades de medida y sus relaciones, y aspectos procedimentales, como el uso de instrumentos de medición, operaciones básicas con números reales, potencias en base 10 o regla de tres. Adicionalmente, incluimos nociones de proporcionalidad, ecuaciones y escalas numéricas. A partir de este listado, diseñamos la tarea diagnóstica que contiene 11 actividades que permitirán identificar estos conocimientos previos. A continuación, presentamos algunas actividades que componen la tarea diagnóstica. En el Anexo 4, correspondiente a las tareas de evaluación, presentamos la tarea diagnóstica completa en español e inglés respectivamente.

Tarea Diagnóstica

Pregunta 4: Mide la longitud de cada lado de la siguiente imagen en milímetros (mm).



Pregunta 6: Un grupo de exploradores caminó 56 km en 14 horas. ¿Qué distancia recorrieron en 8 horas? Elige la respuesta correcta:

- a) 28 km
- b) 27 km
- c) 19 km
- d) 32 km
- e) 42 km

Pregunta 10: Tienes una receta para hacer 12 galletas. La receta requiere 300 gramos de harina.

- Si quieres hacer 20 galletas, ¿cuánta harina necesitas?
- Si tienes 450 gramos de harina, ¿cuántas galletas puedes hacer?

La tarea diagnóstica abarca preguntas de completar tablas, selección múltiple, clasificación y preguntas abiertas. Esta diversidad de tipos de preguntas nos ayuda no sólo a identificar los conocimientos previos, sino también el tipo de razonamientos y procedimientos que elaboran los estudiantes para aportar una solución a las actividades. Después de realizar con los estudiantes esta tarea diagnóstica, sugerimos que el docente realice la retroalimentación con todo el grupo e identifique los errores y las dificultades más frecuentes. Esto le permitirá realizar una consolidación de los conocimientos previos que aún no tienen los estudiantes. En la tabla 7, presentamos el listado

de dificultades y errores asociados a los conocimientos previos de las tres actividades que presentamos anteriormente.

Tabla 7
Conocimientos previos, dificultades y errores asociados

ECP	CP	Descripción
D1. Dificultades asociadas a las unidades de longitud		
2	2	Usar de manera incorrecta instrumentos de medición de longitud.
3		Usar un instrumento inapropiado o no emplearlo con precisión
D2. Dificultades asociadas a las operaciones matemáticas		
9	8	Usar una regla de tres en desorden.
12		Establecer una falsa igualdad.
13	12	Definir de forma incorrecta las variables.
14		Omitir datos relevantes del enunciado.
15	13	Confundir proporción con razón.
16	14	Establecer una relación de proporcionalidad incoherente con el contexto.
17	15	Confundir las operaciones necesarias para despejar la variable en una ecuación.

Nota: CP=Conocimiento previo, ECP= Error del conocimiento previo, D= Dificultad

En la tabla 7, presentamos la relación entre los conocimientos previos, las dificultades y los errores más frecuentes identificados a partir de las tres actividades enunciadas de la tarea diagnóstica. Esta clasificación nos permitió agrupar las dificultades en dos categorías: aquellas asociadas a las unidades de longitud y las relacionadas con las operaciones matemáticas. En la primera categoría, se evidencian confusiones en el reconocimiento, uso y simbolización de las unidades de medida, así como en la comprensión de sus múltiplos y submúltiplos. En la segunda, se observan errores vinculados con el manejo de operaciones básicas, la aplicación de la regla de tres, el uso de potencias de diez, el redondeo, la proporcionalidad y la resolución de ecuaciones. Esta organización facilita al profesor identificar los aspectos que requieren refuerzo y orientar la realimentación hacia la superación de los errores conceptuales y procedimentales detectados. En el Anexo 2, presentamos el listado completo de las dificultades y errores asociados a los conocimientos previos.

A partir de la aplicación y el análisis de la tarea diagnóstica, proponemos algunas sugerencias metodológicas que pueden guiar la actuación del profesor. En primer lugar, resulta conveniente analizar colectivamente los resultados obtenidos. Sugerimos destinar un espacio en clase para socializar los diferentes procedimientos empleados por los estudiantes. Este intercambio favorece que los alumnos conozcan diversas estrategias de resolución y aprendan unos de otros. En segundo lugar, recomendamos promover la metacognición al invitar a los estudiantes a explicar sus procedimientos y a comparar sus respuestas con las de sus compañeros. Finalmente, el profesor puede

organizar grupos de trabajo que integren estudiantes con distintos niveles de dominio según el desempeño de la tarea diagnóstica, de manera que quienes tengan mayor dominio conceptual o procedimental apoyen a sus compañeros, con el fin de fortalecer el aprendizaje colaborativo.

3. TAREAS DE APRENDIZAJE

Las tareas de aprendizaje son el elemento central de la unidad didáctica. En ellas, se consolida todo lo que hemos presentado en la información previa. Desde su diseño, están pensadas para que los estudiantes elijan la estrategia de solución que les sea más efectiva, y para identificar los errores en los que pueden incurrir. Presentaremos cada una de las tareas de aprendizaje que componen nuestros dos objetivos. Mostraremos cómo cada una se configura dentro de las subestructuras que planteamos en la sección anterior. Los imprimibles, en inglés y español, de todas estas tareas estarán incluidos en el Anexo 5. Presentamos las fichas de cada una de las tareas en el Anexo 6.

1. TAREA DE APRENDIZAJE T1.1 MAPA

La tarea de aprendizaje T1.1 Mapa es la primera tarea del primer objetivo de nuestra unidad didáctica. Esta tarea corresponde a la subestructura de las conversiones exactas, dentro de un mismo sistema de medidas de longitud. La tarea contribuye al cumplimiento del primer objetivo porque permite que los estudiantes apliquen la conversión de unidades de longitud dentro de un mismo sistema de medidas (en este caso, el sistema métrico). Mediante la interpretación de distancias representadas en un mapa, los estudiantes pueden transformar medidas expresadas en diferentes unidades (por ejemplo, de centímetros a kilómetros) para fortalecer su comprensión del significado de las unidades. Esta tarea promueve el uso de las conversiones en un contexto cercano, lo que facilita la comprensión del proceso y prepara a los estudiantes para abordar posteriormente conversiones entre distintos sistemas de medida. La tarea fue formulada originalmente en inglés. A continuación, presentamos los aspectos más importantes.

1.1. Descripción de la tarea

El requisito de esta tarea de aprendizaje es que los estudiantes conviertan unidades de medida de longitud dentro del sistema métrico internacional. Anticipamos que los estudiantes puedan resolver esta tarea por medio del uso de proporciones, factores de conversión, o múltiplos y submúltiplos del metro. La tarea de aprendizaje implica, entonces, los sistemas de representación simbólico, numérico y verbal. En términos de los contextos planteados por PISA (OCDE, 2012) esta tarea puede enmarcarse en un contexto social. A continuación, presentamos la formulación de la tarea de aprendizaje.

El siguiente mapa tiene una escala, en centímetros, de 1:4'000.000. Encuentra la distancia directa entre Bogotá y cada una de las ciudades a continuación. Proporciona tu respuesta en la unidad de medida más apropiada.

a. Medellín

- b. Manizales
- c. Piedecuesta



El mapa que se muestra en este documento no está a escala; simplemente es una guía visual de lo que se les presenta a los estudiantes. En la ficha de la tarea (ver Anexo 6), está el mapa con la escala correcta. En esta primera tarea, el profesor entrega a los estudiantes un mapa con su respectiva escala. El requerimiento es encontrar la distancia en la vida real entre Bogotá y otras tres ciudades del país. La formulación también incluye la instrucción de usar la unidad de medida que consideren más apropiada en sus respuestas. Los materiales necesarios para resolver esta tarea son los materiales comunes que los estudiantes ya tienen, entre los que se destaca la regla. Se puede usar la calculadora.

Esta tarea de aprendizaje involucra diversos conceptos y procedimientos matemáticos relacionados con la medición y la conversión de unidades de longitud. En cuanto a los conceptos, se trabaja con las unidades de medida de longitud y sus múltiplos y submúltiplos, así como con la comprensión de la escala numérica en los mapas, interpretada como una razón o proporción que relaciona la distancia representada con la distancia real. También se abordan las equivalencias entre unidades dentro del sistema métrico decimal. En relación con los procedimientos, los estudiantes deben medir las distancias en el mapa con el uso de la regla, aplicar la escala de razón 1:4'000.000 para obtener la distancia real y emplear proporciones o factores de conversión para transformar las unidades según sea necesario.

En el salón de clase, inicialmente se tendrá un momento para presentar la tarea en plenaria y para dar indicaciones sobre la agrupación y los tiempos de ejecución para anticipar a los estudiantes. Luego, habrá un momento de trabajo individual en el que los estudiantes trabajarán por una solución. Después, los estudiantes en parejas compararán sus respuestas. La interacción del profesor con los estudiantes es constante con miras a otorgar las ayudas que se consideren necesarias y alentar el trabajo. El docente también observa y orienta la interacción entre los estudiantes. Es necesario evitar, por ejemplo, que un estudiante le de todas las respuestas a otro o quiera hacer su trabajo en su lugar. El desarrollo y la retroalimentación de esta tarea puede hacerse en una sesión. En la tabla 8, presentamos la propuesta de temporalización de la sesión en la que se desarrolla la tarea.

Tabla 8

Temporalización de la tarea T1.1 Mapa

	Actividad	Tiempo aproximado
1	Presentación del objetivo de aprendizaje	3 minutos
2	Presentación de la meta de la tarea T1.1 Mapa	2 minutos
3	Lectura de la formulación de la tarea y solución de dudas	3 minutos
4	Desarrollo de la tarea	10 minutos
5	Puesta en común de estrategias de solución y respuestas	7 minutos
6	Retroalimentación de la tarea	10 minutos

Los tiempos establecidos en la tabla son aproximados y flexibles. Es importante notar que dentro de estos tiempos se incluye la presentación del objetivo de aprendizaje. Recordemos que esta tarea pertenece al primer objetivo de aprendizaje. Es importante relacionar qué parte del objetivo se va a trabajar con esta tarea. La quinta actividad es el momento en el que los estudiantes comparan y discuten sus respuestas.

1.2. Errores, grafo de criterios de logro de la tarea y actuación del profesor

En el desarrollo de esta tarea, los estudiantes pueden incurrir en errores como confundir los factores de conversión, establecer falsas igualdades en una proporción, o interpretar de manera incorrecta los datos del problema que se necesitan para contestar al requerimiento. Para cada error que anticipamos probable en el desarrollo de esta tarea, planeamos una ayuda. Las ayudas son elementos que entran en juego en la implementación para apoyar a los estudiantes para que puedan superar sus errores, lo que llevará a feliz término la resolución de la tarea. Las ayudas pueden ser individuales, a grupos pequeños o al grupo completo. Pueden ser preguntas orientadoras o un pedido adicional que se le hace al estudiante. El fin de las ayudas no es proporcionar la respuesta, sino permitir que el estudiante mismo caiga en cuenta del error en el que podría incurrir y lo supere. Por ejemplo, si un estudiante incurre en el error E62, que hace referencia a confundir los múltiplos y submúltiplos del metro, la ayuda que proponemos implementar es decirle al estudiante que resalte los prefijos de los nombres de las unidades. Con esto, puede tener claridad en su procedimiento. En el Anexo 7, el lector podrá encontrar la lista completa de errores que previmos para esta tarea y las ayudas correspondientes.

Al momento del diseño de esta unidad didáctica, partimos de la identificación de las capacidades que se espera desarrollar con el primer objetivo. A partir de ellas, previmos los errores en los que los estudiantes podrían incurrir al enfrentarse a las tareas de aprendizaje. Posteriormente, esas capacidades fueron reescritas como criterios de logro, de manera que resultaran comprensibles y observables para los estudiantes. Existe, por tanto, una relación estrecha entre las capacidades, los errores posibles y los criterios de logro que se activan al resolver una tarea. Por eso, presentamos a continuación, en la figura 4, el grafo de criterios de logro de la tarea. El lector reconocerá el grafo de criterios de logro del primer objetivo; hemos resaltado las alternativas de solución que el

estudiante puede tomar para resolver esta tarea. Además, dentro del recuadro de cada criterio de logro hemos escrito la lista de los errores en los que los estudiantes podrían incurrir.

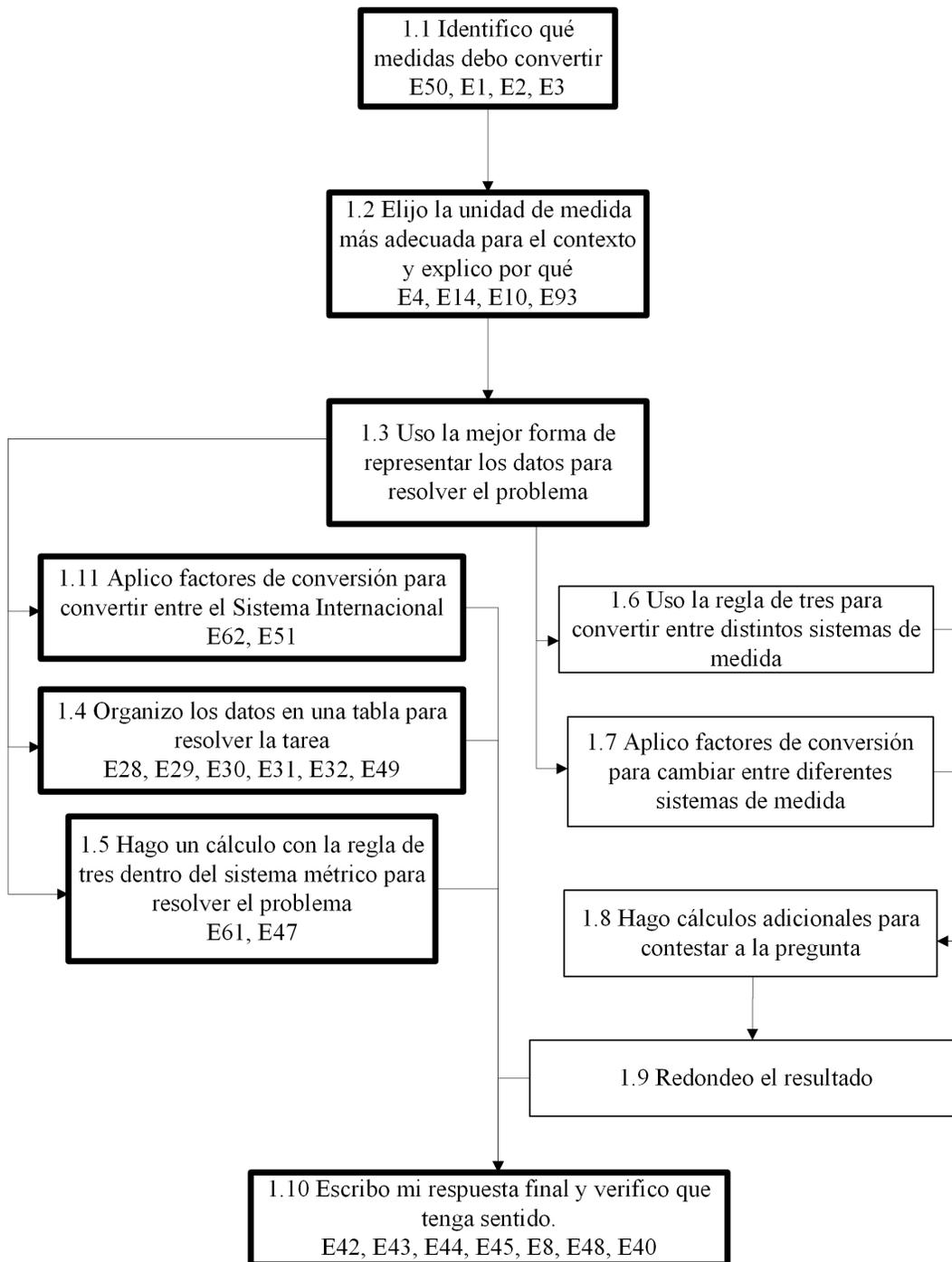


Figura 4. Grafo de criterios de logro de la tarea T1.1 Mapa

En este grafo, vemos que la resolución de la tarea puede darse mediante tres estrategias. Cada una corresponde a lo que enunciamos más atrás: proporciones, factores de conversión, o múltiplos y submúltiplos del metro. El momento de decisión por alguna de las tres opciones se ve en el criterio de logro que precede a la separación del grafo. Los tres caminos vuelven a confluir al momento de la proporción de la respuesta final.

Un error frecuente en los estudiantes se encuentra en el último criterio de logro del grafo. Este error es representar la respuesta sin interpretarla en el contexto. Así, cada error que previmos corresponde a un criterio de logro del grafo. De la misma manera, cada ayuda que proponemos se relaciona con un criterio de logro del grafo. En el grafo, se evidencian los códigos de los errores que corresponden a cada criterio del logro. Es útil contrastar este grafo con el listado de errores que presentamos en el Anexo 7.

1.3. Sugerencias metodológicas

Se puede suprimir el uso de la calculadora para esta tarea. Esto queda a discreción del docente que vaya a implementar, según las capacidades de cálculo mental de sus estudiantes y de las habilidades adicionales que quiera desarrollar con el uso de esta tarea. Esta tarea también es una buena oportunidad para repasar rápidamente los puntos cardinales, e incluso algo de geografía.

Lo más probable es que haya estudiantes más hábiles con el uso de la regla y más rápidos en sus cálculos. Por eso, se sugiere aprovechar esta situación como una oportunidad. Si observamos que algún estudiante ya terminó el trabajo, podemos pedirle el favor de que ayude a otro estudiante que tiene más dificultades.

En el momento en el que los estudiantes discuten y comparan sus respuestas, pueden surgir preguntas acerca del nivel de precisión de respuestas similares. Este es un buen momento para retomar cuestiones importantes como el uso de la regla y el concepto de aproximación. Se puede invitar a los estudiantes, por ejemplo, a reflexionar sobre qué tanto desfase estarían dispuestos a aceptar en un ejercicio como este.

Sugerimos, de ser posible, tener el mapa proyectado para el momento de la retroalimentación. En caso de no ser posible, sugerimos dirigir a los estudiantes constantemente a cada uno de sus mapas para que hagan visible el ejercicio de la retroalimentación. En esta retroalimentación, según la observación del desarrollo de la sesión por parte del docente, se pueden dar más o menos detalles con respecto al procedimiento de resolución de la tarea y las respuestas finales. En este momento, también se puede pedir la intervención de algún o algunos estudiantes.

1.4. Evaluación

Sugerimos al profesor observar durante el desarrollo de la tarea que los estudiantes midan en el mapa de manera precisa y que utilicen los valores del contexto de manera adecuada en los cálculos. Al momento de la puesta en común de los resultados, el profesor debe escuchar en las conversaciones qué tanto coinciden o difieren las respuestas y cómo los estudiantes mismos generan hipótesis que expliquen las razones de esas diferencias. Esto le permite identificar comentarios que afirman o cuestionan si una respuesta tiene sentido en relación con la realidad (por ejemplo, determinar si la distancia entre dos ciudades es mayor o menor que la distancia entre otro par). Estos comentarios constituyen indicadores positivos del proceso.

2. TAREA T1.2 CAMINATA

La tarea de aprendizaje T1.2 Caminata es la segunda tarea del primer objetivo de nuestra unidad didáctica. Esta tarea corresponde a la subestructura de las conversiones redondeadas, entre sistemas de medidas de longitud. La tarea contribuye al logro del primer objetivo porque involucra la conversión de unidades de longitud entre diferentes sistemas de medida, específicamente entre el Sistema Métrico Decimal y el Sistema Imperial. Por medio de la resolución de situaciones relacionadas con una caminata, los estudiantes deben realizar conversiones redondeadas (por ejemplo, de millas a kilómetros) en las que apliquen procedimientos aproximados que les permiten reconocer la relación entre ambos sistemas. De esta manera, la tarea favorece la comprensión de las equivalencias aproximadas y promueve el desarrollo de estrategias para estimar y comparar magnitudes en contextos reales. A continuación, presentamos sus aspectos más importantes.

2.1. Descripción de la tarea

Para abordar la tarea, los estudiantes deben ser capaces de realizar conversiones de unidades de longitud dentro del Sistema Métrico Decimal, como entre este y el Sistema Imperial. Esperamos que usen estrategias de solución como factores de conversión, regla de tres o tablas, de acuerdo con los procedimientos que sean más fáciles para ellos. Con esta tarea, buscamos que los estudiantes apliquen la conversión de unidades de longitud desde un contexto real. Este contexto involucra a dos personajes: Abby, quien realiza una caminata en Boyacá, y su amiga en Inglaterra, que desea recorrer la misma distancia en bicicleta. Los estudiantes deben determinar cuánto debe recorrer la amiga en la tercera etapa del recorrido para completar la distancia total. La tarea se ubica en un contexto social y personal según PISA (OCDE, 2012). A continuación, presentamos la formulación de la tarea.

Abby hizo una caminata en Boyacá de 20km, 75hm, 75dam, 250m en tres etapas. Su amiga en Inglaterra quiere hacer un recorrido en bicicleta de la misma distancia total. En la primera etapa, anduvo en bicicleta 4 millas y 440 yardas. En la segunda etapa, anduvo 0,65 millas más que en la primera.

¿Cuánto debe andar en la tercera etapa para completar la distancia total de la caminata de Abby?

Esta tarea activa conceptos relacionados con las unidades de longitud, los múltiplos y submúltiplos del metro, los factores de conversión entre sistemas, el uso de proporciones y el cálculo con decimales. En cuanto a procedimientos, queremos promover la identificación de magnitudes, la selección adecuada de unidades y la verificación de la coherencia del resultado con el contexto planteado. Esperamos que los estudiantes utilicen sistemas de representación simbólica, tabular o gráfica. Para el desarrollo de esta tarea, los estudiantes emplean materiales habituales del aula como cuaderno y útiles escolares. El diseño de esta tarea supone el uso de la calculadora. No se requieren materiales adicionales.

Después de la explicación de las indicaciones de la tarea por parte del docente, el desarrollo se organiza en tres momentos. Primero, los estudiantes resuelven la tarea de forma individual. Luego, discuten y comparan los resultados en parejas. Finalmente, el profesor lidera una puesta en

común en la que se resuelven posibles dudas acerca de la tarea. En la tabla 9, mostramos la temporalización de la tarea de aprendizaje.

Tabla 9

Descripción de la temporalidad de la tarea T1.2 Caminata

	Actividad	Tiempo (aprox.)
1	Presentación del objetivo O1	2 minutos
2	Presentación de la meta de la tarea T1.2 Caminata	1 minuto
3	Lectura de la formulación de la tarea y solución de dudas	2 minutos
4	Desarrollo de la tarea	25 minutos
5	Puesta en común de estrategias de solución y respuestas	5 minutos
6	Retroalimentación de la tarea	10 minutos

Es importante observar que, aunque el primer objetivo ya se había presentado con ocasión de la tarea T1.1 Mapa, se retoma la presentación aquí. Esto tiene como finalidad relacionar la tarea T1.2 Caminata con aquello del objetivo que se va a trabajar. Esta segunda tarea es un poco más larga que la primera, pero, aun así, su desarrollo y retroalimentación pueden hacerse en una sesión.

2.2. Errores, grafo de criterios de logro de la tarea y actuación del profesor

En esta tarea, algunos errores frecuentes pueden ser hacer cálculos inexactos en la demostración, proporcionar respuestas con muchos decimales, omitir datos relevantes del requerimiento, establecer operaciones de manera incorrecta y plantear una respuesta incoherente con el planteamiento. La lista completa de errores que previmos para esta tarea y sus respectivas ayudas pueden encontrarse en el Anexo 7.

En la figura 5, presentamos el grafo de criterios de logro de la tarea. El lector reconocerá, de nuevo, el grafo completo del objetivo. Hemos resaltado las alternativas de solución que tiene el estudiante para esta tarea, y hemos incluido en el recuadro de cada criterio de logro los errores en los que los estudiantes pueden incurrir.

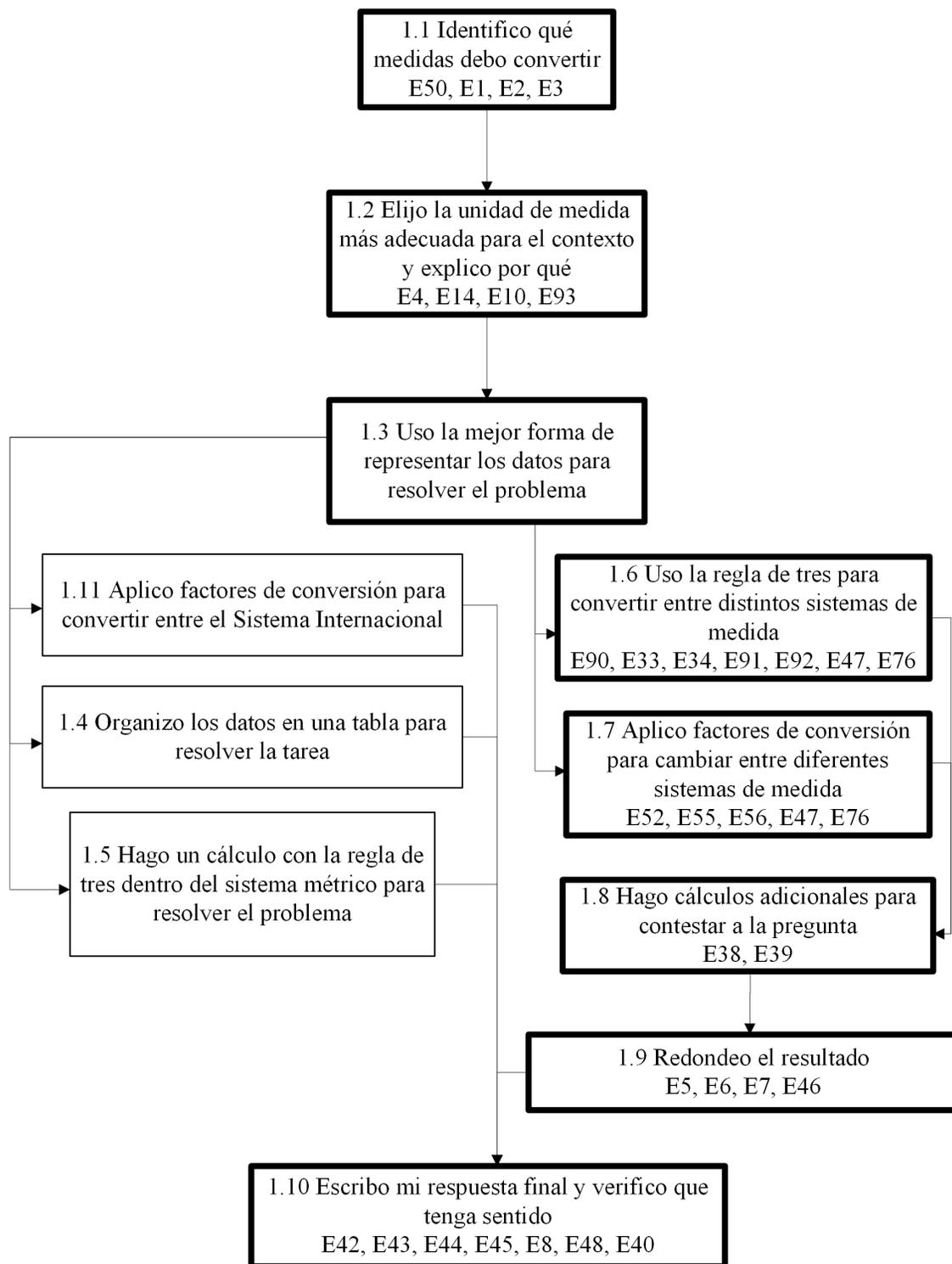


Figura 5 Grafo de criterios de logro de la tarea T1.2 Caminata

De manera similar a como lo vimos en la tarea anterior, en este grafo se hacen evidentes las alternativas de resolución para esta tarea. En efecto, en el grafo se evidencian las alternativas de solución al usar factores de conversión o regla de tres. En la resolución de esta tarea, se hace necesaria la inclusión del criterio de logro que corresponde al procedimiento del redondeo. Esto está directamente relacionado con la subestructura de conversiones redondeadas a la que pertenece esta tarea. Como el requerimiento indica una conversión entre unidades de medida de longitud de diferentes sistemas de medida, es indispensable el procedimiento del redondeo.

2.3. Sugerencias metodológicas

A diferencia de la tarea anterior, sugerimos mantener el uso de la calculadora para esta tarea como un requisito por la naturaleza de los cálculos que se requieren. Una buena manera de explicar la tarea antes de que los estudiantes inicien es proporcionar un ejemplo orientador. Se puede mostrar en el tablero cómo el mismo recorrido puede dividirse de maneras distintas con tramos de diferentes distancias. Es muy útil recurrir a ejemplos cercanos a los estudiantes. Por ejemplo, nosotras usamos el recorrido que los estudiantes hacen rutinariamente desde la entrada del colegio hasta el salón, y las diferentes paradas que dos personas distintas pueden hacer en ese recorrido. Estas aclaraciones conceptuales al inicio de la sesión son una inversión de tiempo al momento de que los estudiantes trabajan por su cuenta. Esta tarea es una buena ocasión para revisar o recordar la naturaleza de las unidades de medida de longitud. El hecho de que se utilicen unidades de medida distintas da pie para discutir algunas de las siguientes preguntas: ¿de dónde vienen los diferentes sistemas de medida? y ¿por qué en el enunciado de la tarea nos hablan de países distintos? De manera similar a la sugerencia de la tarea anterior, en el desarrollo de esta tarea también surgen algunas preguntas de los estudiantes acerca de pequeñas o grandes diferencias que pueden tener en sus respuestas. Esta es una ocasión para invitarlos a reflexionar sobre las discrepancias en sus respuestas y su relación con el hecho de tener que redondear. ¿Qué tiene que ver el redondeo con los pequeños desfases entre dos respuestas? Aquí se puede reiterar en la pregunta de cuánto margen de error están dispuestos a aceptar como válido. Estas discusiones son muy interesantes en cuanto a lo que los estudiantes concluyen acerca de la importancia de la precisión.

2.4. Evaluación

Sugerimos al profesor centrarse en los procedimientos y estrategias que los estudiantes emplean al resolver la tarea, especialmente aquellas que implican el uso y conversión de unidades de longitud, la selección de magnitudes adecuadas en cada uno de los sistemas y la aplicación correcta de operaciones matemáticas especialmente en el redondeo. El profesor deberá observar cómo los estudiantes justifican sus respuestas, interpretan las magnitudes y emplean un lenguaje matemático preciso, para aprovechar el momento de la puesta en común entre pares.

3. TAREA T2.1 DIBUJO A ESCALA

La tarea de aprendizaje T2.1 Dibujo a escala es la primera tarea del segundo objetivo de nuestra unidad didáctica. Esta tarea corresponde a la subestructura de conversiones redondeadas y propone el uso del cuerpo para medir longitudes. La tarea contribuye al logro del segundo objetivo porque

los estudiantes deben evaluar la manera más idónea de medir el patio del colegio, y eso implica establecer la unidad de medida más útil para hacerlo y poder, después, crear un dibujo a escala. Los estudiantes deben estimar y aproximar una conversión entre la medida que hayan tomado con su cuerpo y una unidad de medida estandarizada. Con esta aproximación, establecen la escala que tendrá el dibujo y dibujan el patio. De esta manera, los estudiantes evalúan la idoneidad de sus medidas y resuelven un problema de medición. Esta tarea también permite trabajar conceptos de proporcionalidad y escalas. En el Anexo 6, se encuentra la ficha de la tarea completa. A continuación, presentamos sus aspectos más importantes.

3.1. Descripción de la tarea

Para abordar la tarea, los estudiantes deben estudiar la situación para elegir una manera de medir el patio del colegio de manera eficiente y lo más precisa posible. La unidad de medida que elijan debe poder convertirse a centímetros para hacer una aproximación lo suficientemente cercana. Posteriormente, los estudiantes usarán toda la información recogida para crear un dibujo a escala del patio. A los estudiantes se les proporciona una hoja de papel milimetrado con el suficiente espacio para que puedan hacer su dibujo con la escala que elijan. Esta tarea se relaciona con los sistemas de representación gráfico, manipulativo, numérico y simbólico. La tarea se ubica en un contexto social y personal según PISA (OCDE, 2012). A continuación, presentamos el enunciado de la tarea:

En grupos de cuatro personas, midan el patio de octavo. Pueden usar los pies o pasos. Registren la información de sus mediciones.

Después, creen un dibujo a escala del patio en el papel milimetrado. Su dibujo debe incluir detalles del patio, como los juegos dibujados en el piso y las materas, y la escala que usaron.

Esta tarea promueve el trabajo colaborativo, y activa conceptos relacionados con las unidades de longitud no estandarizadas, la estimación y el redondeo, la resolución de problemas, el planteamiento y uso de escalas numéricas y el cálculo con números decimales. En cuanto a procedimientos, queremos promover la planeación de estrategias para resolver problemas, la medición correcta del espacio, la elección de una escala adecuada y la verificación de la coherencia del resultado con los requisitos de la tarea. Para el desarrollo de esta tarea, los estudiantes se organizan en grupos de cuatro y el docente les proporciona papel milimetrado. De resto, los materiales que se usan son los habituales, como lápiz, regla y calculadora. Se debe escoger de manera previa un espacio conocido por los estudiantes, no muy grande pero tampoco muy pequeño, y de manera preferente con una forma cuya medición requiera de una estrategia que los estudiantes deben evaluar antes de iniciar.

El docente presenta la tarea con los estudiantes y organiza los grupos según el criterio que mejor considere. Después, los estudiantes resuelven la tarea en grupos. Finalmente, el profesor lidera una puesta en común con todos los estudiantes para mostrar el trabajo de los distintos grupos. Aquí, se puede tomar la oportunidad para evaluar las diferencias entre los trabajos. Se pueden hacer preguntas como: ¿Qué grupos usaron pasos y cuáles pies?, ¿qué diferencias se ven entre unos dibujos y otros? Y ¿a qué creen que se deben esas diferencias? En la tabla 10, mostramos la temporalización de la tarea.

Tabla 10

Descripción de la temporalidad de la tarea T2.1 Dibujo a escala

	Actividad	Tiempo (aprox.)
1	Presentación del segundo objetivo	2 minutos
2	Lectura de la formulación de la tarea 1.3 Dibujo a escala	1 minutos
3	Conformación de grupos	2 minutos
4	Desarrollo de la tarea	30 minutos
5	Puesta en común	10 minutos

En el inicio de esta sesión, se presenta el segundo objetivo como una continuación del trabajo que ya se ha logrado con las tareas del primer objetivo. La realización de esta tarea en una sola sesión es posible y además permite que los estudiantes practiquen sus habilidades de manejo del tiempo y piensen en estrategias efectivas para resolver el problema.

3.2. Errores, grafo de criterios de logro de la tarea y actuación del profesor

En esta tarea, algunos errores frecuentes pueden ser establecer un argumento desconectado con el contexto, relacionar un contexto dado con un sistema de medidas sin justificación, plantear la demostración sin explicarla numéricamente y presentar una justificación inconcluyente. El listado completo de errores y ayudas que previmos para esta tarea puede encontrarse en el Anexo 7.

A continuación, presentamos el grafo de criterios de logro de la tarea. El lector reconocerá el grafo completo del segundo objetivo. Hemos resaltado aquí las diferentes estrategias de resolución posibles para esta tarea. Además, el lector puede encontrar los errores asociados a cada criterio de logro.

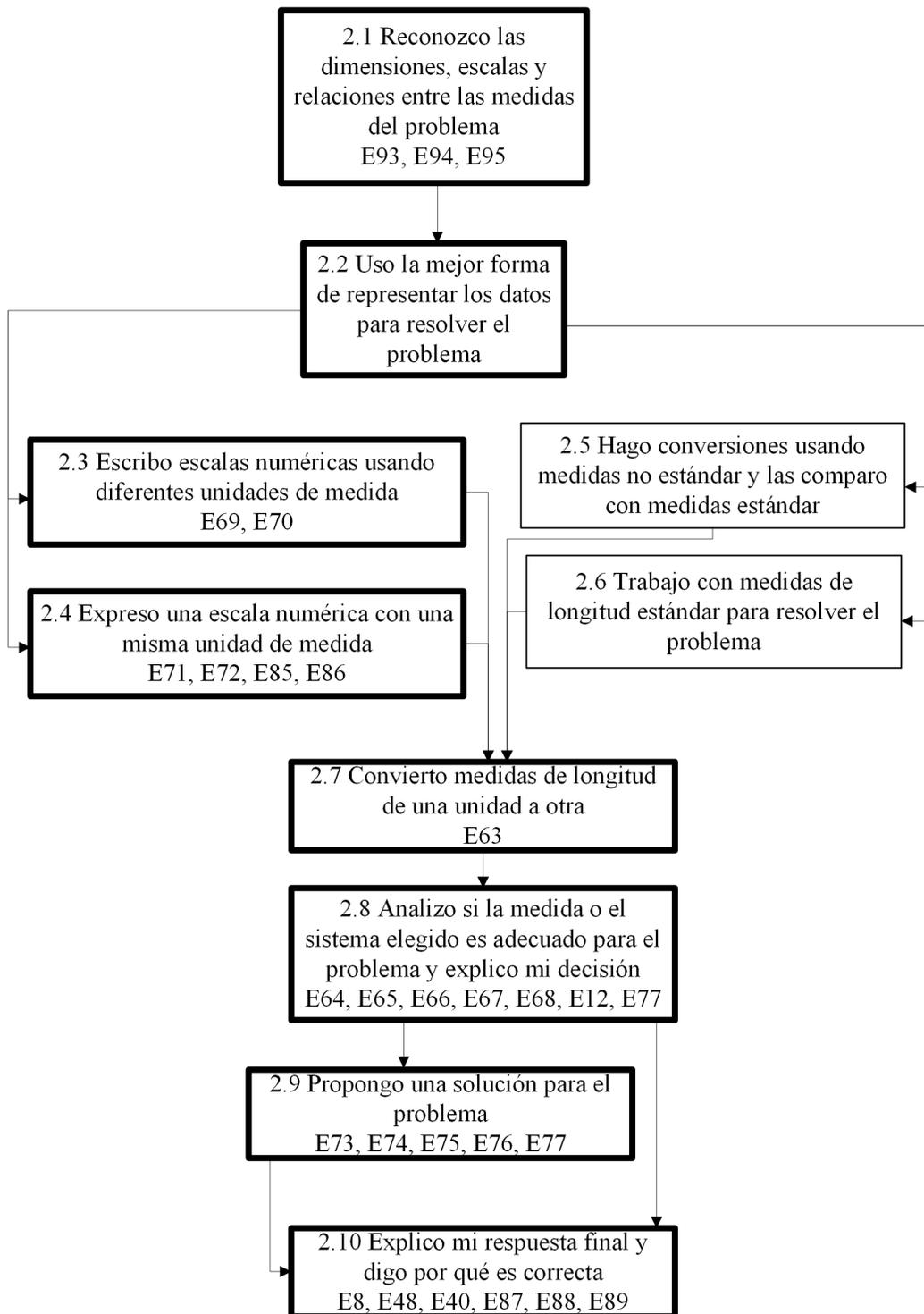


Figura 6 Grafo de criterios de logro de la tarea T2.1 Dibujo a escala

En el grafo, se hacen evidentes las dos estrategias distintas que los estudiantes pueden tomar para resolver la tarea. Por un lado, pueden incluir en la escala numérica la unidad de medida no estandarizada que usaron para medir el patio y plantearla como el factor de conversión para hacer el dibujo posteriormente. Por otro lado, pueden optar por transformar todo a una unidad de medida común y plantear la escala numérica de esa manera. Posteriormente, los estudiantes realizan el procedimiento de conversión de unidades de longitud y verifican que la proporción que eligieron cumple con los requerimientos de la tarea. Finalmente, producen su dibujo a escala. Se espera que sean capaces de explicar su dibujo y defender que está correcto y que cumple con las condiciones esperadas.

3.3. Sugerencias metodológicas

Sugerimos que la conformación de los grupos se haga según criterios que potencien el trabajo y la efectividad de los estudiantes. Una buena opción es llevar ya los grupos hechos, para optimizar el tiempo de la sesión. Esto implica que los estudiantes no conforman los grupos como prefieran, sino que el docente elige los equipos. Dentro de cada grupo, se deben definir roles que los estudiantes puedan asumir. Estos roles pueden ser asignados por el docente o explicados para que los propios estudiantes los distribuyan y los asuman dentro del grupo. Un ejemplo de los roles es un estudiante que mida; otro, que registre las medidas; otro, que se encargue de verificar la precisión del equipo; y otro, que colabore con la verificación del tiempo y los requisitos de la tarea.

De manera previa a la implementación de esta tarea es importante que el docente elija el espacio que los estudiantes van a medir. Sugerimos que sea un espacio de una forma más o menos irregular para que la tarea sea retadora, pero no tan grande o complicado que los estudiantes no tengan tiempo suficiente de medirlo. Cuando los estudiantes hayan terminado de medir, es útil recordarles que el dibujo debe ser proporcionado también con el papel que se entrega: debe caber en el espacio, pero no ser tan pequeño que quede demasiado espacio en blanco. Es importante, en esta tarea, que el docente esté pendiente del manejo del tiempo por parte de los estudiantes. Es útil anticipar a los estudiantes acerca de todo lo que deben hacer, y cada cierto tiempo indicarles cuánto tiempo les queda y qué se sugiere que deberían empezar.

Aunque en la formulación de la tarea planteamos el uso de papel milimetrado, el docente puede elegir cualquier tipo de papel o superficie que considere pertinente, necesario o útil. Se pueden usar cartulinas para exponer los dibujos posteriormente, usar el cuaderno si no existe la posibilidad de adquirir materiales adicionales, o pensar en cualquier otra opción que tenga sentido para el contexto específico del colegio.

3.4. Evaluación

Sugerimos al profesor centrarse en los procedimientos que los estudiantes usan para resolver la tarea, en particular en la elección de la unidad de medida no estandarizada, la verificación de la escala numérica y la justificación de la pertinencia de su solución. El profesor deberá observar cómo los estudiantes explican la viabilidad de su solución, aproximan los valores necesarios para la resolución de la tarea y presentan su trabajo final según los requerimientos de la tarea.

4. TAREA T2.2 NUESTRO SISTEMA

La tarea de aprendizaje T2.2 Nuestro sistema es la segunda tarea del segundo objetivo de la unidad didáctica. Esta tarea corresponde a la subestructura de conversiones redondeadas entre sistemas de medida. La tarea contribuye al logro del segundo objetivo en la medida en la que los estudiantes deben crear un sistema de medidas con objetos no estandarizados y calcular las conversiones entre los objetos y con un sistema de unidades de medida estándar. En ese sentido, los estudiantes deben seleccionar y evaluar objetos que les sean útiles para medir distancias y que puedan traducirse a medidas estandarizadas. En el Anexo 6, se encuentra la ficha de la tarea completa. A continuación, presentamos sus aspectos más importantes.

4.1. Descripción de la tarea

Para abordar la tarea, los estudiantes deben usar el conocimiento que tienen acerca de los sistemas de medida para elegir objetos con los que se puedan medir distancias y establecer relaciones de conversión entre ellos. Además, los estudiantes también deben establecer las conversiones entre los objetos que han escogido y un sistema de medidas estandarizado. Los estudiantes deben presentar su trabajo ordenada y claramente en un poster para mostrarlo a sus compañeros. Esta tarea pertenece a un contexto social dentro del marco PISA (OCDE, 2012), y está relacionada con los sistemas de representación numérico, tabular y simbólico. A continuación, presentamos el enunciado de la tarea.

Elige tres objetos con los que puedas medir distancias.

Con esos objetos, crea un sistema de medidas. Tu sistema de medidas debe tener conversiones internas y conversiones con un sistema de medidas estandarizado.

Crea un poster para mostrar tu sistema de medidas a tus compañeros.

Esta tarea activa el conocimiento conceptual acerca de los sistemas de medidas, las conversiones dentro de un mismo sistema y entre sistemas, y conceptos como la estimación y el redondeo, la resolución de problemas y la creatividad. En cuanto a procedimientos, queremos promover el cálculo de proporciones y equivalencias, la precisión adecuada para un contexto, la organización de las ideas, y la verificación de la idoneidad y de la lógica en el trabajo propio. Para el desarrollo de esta tarea, cada estudiante debe pensar, buscar y relacionar objetos con los que pueda medir distancias y encontrar las equivalencias entre ellos como unidades de medida. Debe presentar su trabajo en un poster de manera clara y ordenada para que sus compañeros lo entiendan. Como materiales, es necesario proporcionar cartulinas o papeles grandes para que los estudiantes puedan crear su poster. Esto también puede hacerse de manera digital si los medios lo permiten. Por lo demás, los estudiantes trabajan con sus útiles de clase normales.

El docente socializa la tarea con los estudiantes, y puede proporcionar algunos ejemplos de medición de longitud no estandarizados para que los estudiantes tengan ideas iniciales. Después, cada estudiante inicia su exploración y determina los objetos con los que va a trabajar. Posteriormente, deben hacer los cálculos que corresponden a las conversiones entre los objetos y entre estos y una unidad de medida de longitud estándar. El docente, en estos dos momentos, monitorea el trabajo de los estudiantes y activa las ayudas que considere necesarias. Finalmente, cada estudiante

organiza toda la información en su poster y la presenta a sus compañeros. En la tabla 11, presentamos la temporalización de la tarea de aprendizaje.

Tabla 11
Temporalización de la tarea 2.2 Nuestro sistema

	Actividad	Tiempo (aprox.)
1	Presentación del segundo objetivo	2 minutos
2	Lectura de la formulación de la tarea 2.2 Nuestro sistema y ejemplos	3 minutos
3	Desarrollo de la tarea 2.2 Nuestro sistema	25 minutos
4	Puesta en común de los posters	15 minutos

Al inicio de esta sesión, se retoma el segundo objetivo para recordar a los estudiantes que el propósito es evaluar qué tan idónea es una unidad de medida para un contexto dado. Posteriormente, se presenta a los estudiantes la tarea y se pueden proporcionar ejemplos para guiar su trabajo. El grueso de la sesión se dedica al trabajo individual de los estudiantes y a la puesta en común de los posters en clase. Esto tiene como fin que todos los estudiantes puedan ver el trabajo de sus compañeros. El tiempo de la puesta en común puede darse de diferentes maneras según las condiciones propias de cada salón. Se pueden elegir algunos trabajos para exponer, o se puede pasar este momento para otra sesión para que todos alcancen a presentar. También podría replantearse esta tarea para hacerse en grupos, y así el tiempo de puesta en común sería suficiente para que todos presenten.

4.2. Errores, grafo de criterios de logro de la tarea y actuación del profesor

En esta tarea, los errores más frecuentes o significativos pueden darse al momento en el que el estudiante analiza qué tan adecuado es el sistema que ha planteado y justifica sus decisiones. Esto incluye errores como establecer argumentos desconectados con el contexto, relacionar un contexto dado con un sistema de medidas sin explicación, establecer argumentos incoherentes con el contexto de la conversión, o plantear una demostración sin explicarla numéricamente. La lista completa de errores que previmos para esta tarea y sus ayudas correspondientes puede consultarse en el Anexo 7.

A continuación, presentamos el grafo de criterios de logro de la tarea. El lector reconocerá, de nuevo, el grafo completo del segundo objetivo. Hemos resaltado aquí las diferentes estrategias de resolución posibles para esta tarea. Además, el lector puede encontrar los errores asociados a cada criterio de logro.

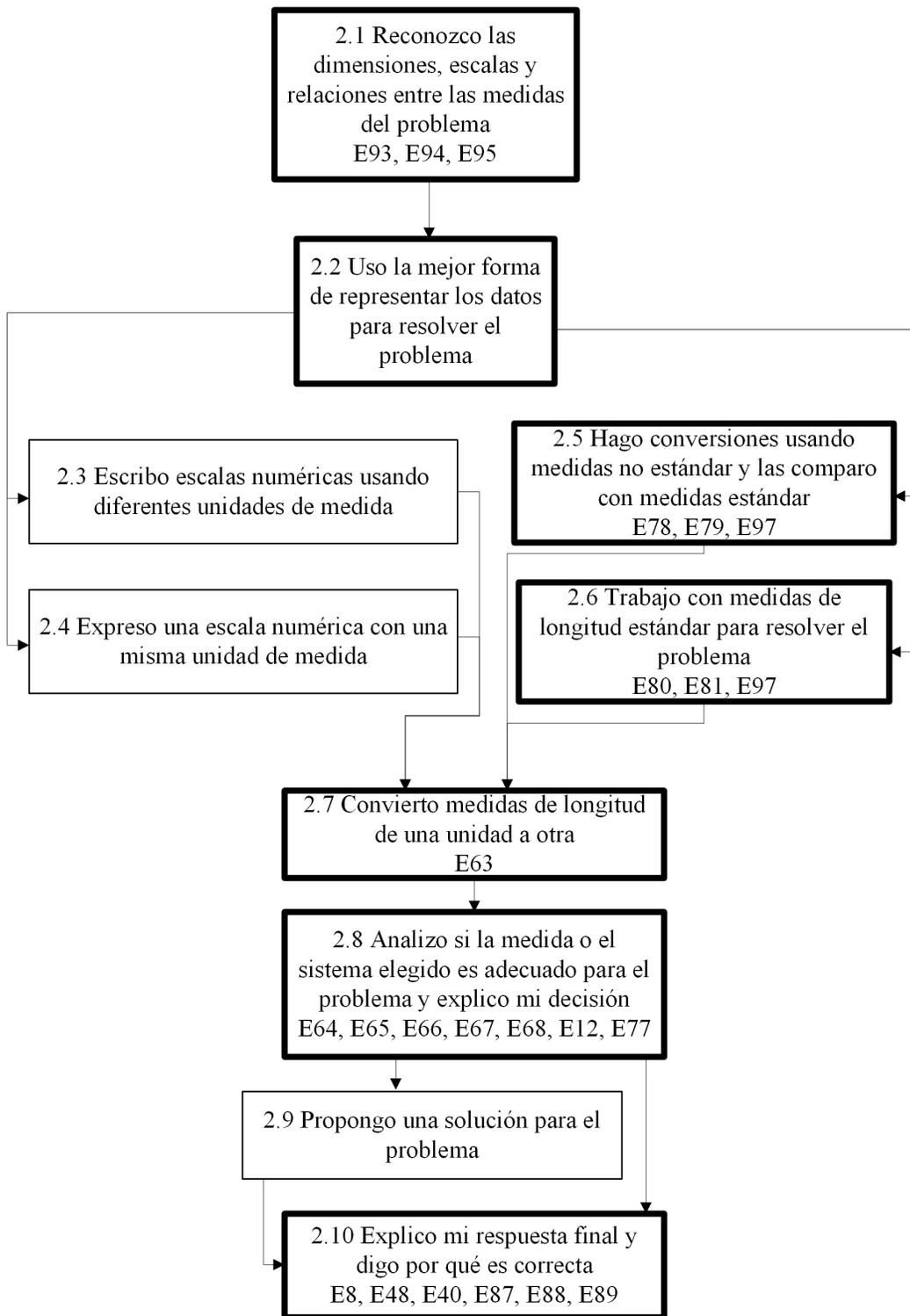


Figura 7 Grafo de criterios de logro de la tarea T2.2 Nuestro sistema

Como se ve en el grafo, prevemos que los estudiantes resuelvan esta tarea al usar una de dos maneras. Por una parte, pueden usar una combinación de medidas estandarizadas y no estandarizadas para presentar el sistema. Por otra parte, pueden tomar como base todas las medidas en una unidad estandarizada y plantear las conversiones desde allí. Después, los estudiantes evalúan y justifican su trabajo, para presentarlo finalmente y explicarlo.

4.3. Sugerencias metodológicas

Para el desarrollo de esta tarea, sugerimos al profesor permitir que los estudiantes encuentren objetos o ideas creativas y, de ser necesario, guiarlos para convertir esas ideas en el sistema que se les pide. La presentación del trabajo puede hacerse en los posters, como está planteado aquí, o puede hacerse de una manera distinta. Si los estudiantes tienen acceso a computadores, pueden hacer afiches virtuales. También se puede pensar en una dinámica de presentación en el tablero o de exposición corta por parte de cada estudiante. También se les pueden pedir los resultados a modo de informe, cartilla, tabla, imagen o cualquier otro formato. Esto dependerá de los recursos que tenga disponible el salón y de la intención que pueda tener el docente al momento de desarrollar esta tarea. El desarrollo de esta tarea permite cierta flexibilidad en términos formales. Como se indica en la ficha de la tarea, el docente puede proponer a los estudiantes una organización o plantilla para el póster. Esto también queda a su criterio.

4.4. Evaluación

Sugerimos al profesor observar los procedimientos que los estudiantes hacen al momento de establecer y calcular las conversiones. El docente deberá observar las aproximaciones que realiza el estudiante para hacer viable su sistema. También debe atender a la forma en que establece las conversiones internas y las equivalencias con una unidad estándar, y valorar la claridad con que presenta su propuesta en formato escrito y visual.

4. EXAMEN FINAL

En este apartado, presentamos la formulación del examen final, junto con su rúbrica de evaluación, estructurada en términos de criterios de logro y los posibles errores en los que pueden incurrir los estudiantes. Definimos los niveles de desempeño (bajo, básico, alto y superior) para valorar el alcance de cada uno de los objetivos propuestos. Asimismo, incluimos las orientaciones para su implementación, con el propósito de garantizar una buena aplicación. Consideramos que este examen no solo permite valorar el grado de aprendizaje alcanzado por los estudiantes, sino también reflexionar sobre la efectividad de las tareas de aprendizaje y la pertinencia de las estrategias didácticas empleadas a lo largo de esta unidad didáctica.

1. DISEÑO DEL EXAMEN

En esta sección, presentamos el diseño del examen final de nuestra unidad didáctica. Este examen tiene la finalidad de valorar el grado de comprensión y aplicación de los conceptos trabajados a lo largo de la unidad, así como a capacidad de los estudiantes de interpretar y resolver situaciones contextualizadas. El examen se estructura en torno a los dos objetivos de aprendizaje definidos. Para cada objetivo, formulamos dos preguntas que permiten evidenciar distintos niveles de desempeño. A continuación, presentamos la formulación que compone el examen final.

Pregunta 1: La tabla muestra varias distancias. Completa la tabla con una unidad de medida del Sistema Métrico Decimal que consideres más apropiada.

Distancia	Distancia en metros	Distancia en...
De Mercurio a Neptuno	4504300000 km	
Diámetro de un átomo	0.00000001 cm	
De Bogotá a Cartagena	830000 m	
Radio de un balón de fútbol	0.11145 m	
Tamaño de una hormiga	0.002 m	

Pregunta 2: Regina tiene un surco rectangular en su jardín, con una longitud de 3,7 metros. Ella desea plantar flores a lo largo del jardín. Una bolsa de semillas alcanza para cubrir 1 pie de terreno.

¿Cuántas bolsas de semillas necesita para plantar flores a lo largo de todo el jardín?

(1 pie = 0.3048 m)

Pregunta 3: La Torre Colpatria mide aproximadamente 196 m. Kaory quiere hacer un dibujo a escala del edificio en una cartulina. La cartulina mide 28,58 cm. Ella desea usar un factor de escala de 1:0,01. ¿Funciona este factor de escala? Justifica tu respuesta y, si no es adecuado, propón uno nuevo.

Pregunta 4: A continuación, se presentan las medidas aproximadas, en centímetros, de algunos objetos:

- Un tajalápiz: 1,6 cm
- Un lápiz: 8 cm
- El largo de un libro: 24 cm

La longitud de una mesa es de 90 cm. ¿Es posible expresar la longitud de la mesa en términos enteros de tajalápices, lápices y libros? Justifica tu respuesta.

Diseñamos el examen final en coherencia con los dos objetivos de aprendizaje. Cada objetivo se evalúa mediante dos preguntas que buscan evidenciar distinto niveles de desempeño, aplicación y razonamiento matemático. A continuación, explicamos el sentido de cada una de ellas y su relación con los objetivos planteados.

La primera pregunta del primer objetivo está orientada a que los estudiantes reconozcan y utilicen las unidades de medida de longitud del Sistema Métrico Decimal, para comprender su magnitud y aplicabilidad en diversos contextos. Para ello, presentamos una tabla con diferentes distancias, que van desde dimensiones astronómicas hasta medidas microscópicas, y solicitamos completar a la unidad más apropiada en cada caso. Buscamos que los estudiantes relacionen la magnitud de cada distancia con la unidad correspondiente, de modo que demuestren comprensión conceptual y eviten errores como el uso inadecuado de prefijos o confusión de escalas.

Centramos el diseño de la segunda pregunta del primer objetivo en la aplicación de procedimientos de conversión entre distintas unidades de medida. Mediante una situación práctica, los estudiantes deben determinar cuántas bolsas de semilla necesita Regina para cubrir la longitud de un jardín expresada en metros, pues una bolsa cubre un pie de este terreno. Con esta pregunta, pretendemos valorar la capacidad de los estudiantes para realizar conversiones entre sistemas, de modo que comprendan la relación entre unidades y apliquen correctamente el factor de conversión. Además, buscamos que justifiquen el procedimiento empleado y no se limiten al cálculo numérico.

Si el estudiante contesta de manera correcta las primeras dos preguntas, podemos considerar con cierto grado de confianza que ha alcanzado el primer objetivo. Al resolver estas dos preguntas, el estudiante ha usado la conversión de unidades de longitud para resolver problemas. Además, ha trabajado conversión de unidades de longitud dentro del mismo sistema y entre sistemas distintos.

Diseñamos la primera pregunta del segundo objetivo para evaluar la interpretación y representación de las relaciones de escala en contextos de medida. En este caso, proponemos el ejemplo de Kaory, quien desea realizar un dibujo a escala de la Torre Colpatria en una cartulina. Los estudiantes deben analizar si el factor de escala propuesto es adecuado y, en caso de no serlo, proponer uno nuevo. Mediante de esta situación, pretendemos evaluar el concepto de escala, la capacidad de razonamiento proporcional y la habilidad para verificar la coherencia de una representación gráfica frente a la realidad.

Finalmente, la segunda pregunta del segundo objetivo aborda la comparación y equivalencia de longitudes mediante unidades no convencionales. Presentamos las medidas de varios objetos cotidianos para el estudiante y solicitamos determinar si es posible expresar la longitud de una mesa en función de estos. Esta pregunta tiene como propósito que los estudiantes establezcan relaciones de equivalencia y proporcionalidad entre diferentes magnitudes, de modo que reconozcan que una misma longitud puede representarse con distintos referentes. De este modo, valoramos la flexibilidad en el uso de unidades, el razonamiento multiplicativo y la capacidad de justificar las respuestas con argumentos coherentes.

Al responder correctamente a estas dos preguntas, consideramos que es posible decir que el estudiante ha alcanzado el segundo objetivo. Esto es porque, en primer lugar, ya ha consolidado los conocimientos del primer objetivo y, en segundo lugar, es capaz de evaluar unidades de medida de longitud en contexto para resolver problemas. Además, es capaz de justificar, por medio de su proceso, una respuesta a una pregunta de un contexto específico.

2. RÚBRICA DEL EXAMEN FINAL

Presentamos a continuación, la rúbrica del examen final. Este instrumento tiene como propósito facilitar y orientar la evaluación del aprendizaje, frente a los objetivos propuestos. Mediante la rúbrica, el profesor puede identificar el nivel de desempeño alcanzado por cada estudiante y reconocer los errores y dificultades que emergen de esta aplicación. Definimos en nuestra rúbrica cuatro niveles de desempeño (superior, alto, básico y bajo) asociados con rangos de calificación entre 10 y 100 puntos. A continuación, presentamos, en la tabla 12, un ejemplo de la rúbrica para la primera pregunta del primer objetivo.

Tabla 12

Niveles de desempeño para la primera tarea de la evaluación final

Nivel de desempeño y rango de calificación	Indicadores
Superior (86-100)	<p>El estudiante no incurre en ningún error</p> <p>El estudiante incurre únicamente en errores asociados a la expresión de la respuesta final (CdL1.10) y que tienen que ver con escribir correctamente la unidad en algunas de las conversiones pedidas (E42, E43, E44, E40)</p>
Alto (73-85)	<p>El estudiante incurre en errores asociados a la expresión de la respuesta final (CdL1.10) y que tienen que ver con escribir correctamente la unidad en la mayoría o en todas las conversiones de la pregunta (E42, E43, E44, E40)</p>
Básico (60-72)	<p>El estudiante incurre en errores asociados a la extracción de la información del enunciado (CdL1.1) (E50, E1, E2, E3) y/o a la elección de la unidad de medida correcta para el contexto (CdL1.2) (E4, E14, E10, E93)</p> <p>El estudiante incurre en el error de presentar una respuesta final numéricamente incorrecta (CdL1.10) (E45, E8, E48)</p>
Bajo (10-59)	<p>El estudiante incurre en algún error asociado a la conversión de unidades de longitud (CdL1.4, CdL1.5, CdL1.11) (E62, E51, E28, E29, E30, E31, E32, E49, E61, E47)</p>

En la tabla 12, podemos detallar los niveles de logro junto con los indicadores que permiten valorar el desempeño de los estudiantes. Este instrumento busca reconocer las distintas formas en que los estudiantes aplican sus conocimientos sobre las unidades de medida del Sistema Métrico Decimal y su capacidad para elegir la unidad más adecuada en función del contexto. Los errores que se presentan en la tabla están relacionados con los criterios de logro, como se puede verificar en los grafos de criterios de logro, y la descripción completa puede encontrarse en el Anexo 7.

En el nivel superior, el estudiante demuestra un dominio sólido del tema, selecciona las unidades de manera precisa y justifica correctamente sus decisiones, lo que evidencia comprensión conceptual y coherencia en sus respuestas. Los errores incluidos en este nivel son errores que consideramos fáciles de corregir o de evitar en futuras ocasiones, por lo que todavía permiten un nivel de desempeño superior para el estudiante.

En el nivel alto, aunque pueden presentarse pequeños descuidos o imprecisiones, las respuestas muestran un razonamiento claro y un manejo adecuado de las equivalencias. Los errores son los mismos que en el nivel superior, pero se presentan de manera reiterativa.

El nivel básico refleja cierta inseguridad o vacilación en la aplicación de las conversiones, manifestada en errores de cálculo o en la elección poco pertinente de unidades. Los errores de este

nivel, como se muestra en la tabla, tienen más que ver con el manejo de la información del enunciado, la elección de la unidad de medida adecuada y el cálculo propio de la conversión.

Finalmente, el nivel bajo se asocia con respuestas que carecen de fundamento o que revelan confusión en la identificación de las magnitudes, lo que indica dificultades para relacionar las unidades con el tipo de distancia o medida presentada. Los errores de este nivel se relacionan directamente con el proceso de conversión de unidades de longitud, el centro del objetivo de aprendizaje.

En el Anexo 4, presentamos la rúbrica de evaluación para cada una de las preguntas del examen final. Cada una de las tareas de la evaluación final se califica en una escala de 10 a 100 puntos. La nota final del examen se establece a partir del promedio de las cuatro calificaciones obtenidas en las tareas. De esta manera, el nivel de desempeño global de cada estudiante se determina según los mismos rangos establecidos para los niveles superior, alto, básico y bajo, lo que garantiza coherencia en la valoración del aprendizaje alcanzado.

5. CONCLUSIONES

En este documento, hemos presentado nuestro trabajo de dos años en una unidad didáctica que se ocupa de la conversión de unidades de longitud. Hemos presentado el panorama general de las matemáticas que enmarca este tema y hemos puesto una lupa sobre él para examinar qué procedimientos y conceptos lo componen. Hemos presentado las expectativas de aprendizaje que nos planteamos, así como lo que pretendimos lograr con nuestros estudiantes en términos afectivos. Hemos establecido los conocimientos previos necesarios y una herramienta para determinar si nuestros estudiantes los tienen o no. Hemos diseñado una secuencia de tareas de aprendizaje que llevan a los estudiantes desde la aplicación de la conversión de unidades de longitud en situaciones cotidianas y cercanas, hasta tareas que les demandan planeación, análisis, justificación y verificación. Hemos establecido una herramienta para medir qué tanto nuestros estudiantes han avanzado y aprendido. Procuramos crear tareas de aprendizaje diversas, con distintos enfoques y agrupamientos, que usen diferentes tipos de materiales, que apelen a distintas formas de aprendizaje y que les permitan a los estudiantes, sobre todo, explorar las diferentes maneras que existen de resolver un problema. Esperamos, entonces, que este trabajo sea útil para algún colega.

Este proceso empezó con el reconocimiento de los documentos curriculares que rigen nuestro quehacer. Continuó con la delimitación de dos temas, para lo que tuvimos en consideración, por un lado, la posibilidad de implementación en nuestros respectivos contextos laborales del momento y, por otro lado, nuestros intereses personales para poder sostener el trabajo constante sobre un tema durante tanto tiempo. Después, exploramos el lugar que ocupa ese tema dentro de las matemáticas y nos hicimos conscientes de todas las conexiones entre conceptos y procedimientos que entran en juego. Luego, vino mucho tiempo de tratar de diseñar de la mejor manera posible, basadas en suposiciones y previsiones, nuestra unidad didáctica. Esto implicó, sobre todo, encontrar los espacios de superposición entre los objetivos y la estructura de la Maestría con el contexto de nuestros estudiantes, nuestro colegio y nuestras posibilidades y limitaciones como docentes dentro de un contexto muy definido. Seguidamente, fue momento de la implementación. Es necesario mencionar que los estudiantes con los que implementamos mostraron en todo momento apertura y excelente disposición, por lo cual estamos muy agradecidas. Finalmente, llegó el tiempo de consolidar y analizar los resultados de la implementación y tratar de explicar (a otros y a nosotras mismas) qué nos dicen esos resultados, para mejorar el diseño de nuestra unidad didáctica hasta tomar la forma que presentamos en este informe final.

La oportunidad de la implementación nos trajo resultados inesperados. Además de la información que obtuvimos acerca de las tareas de aprendizaje y los resultados de los estudiantes, tuvimos la oportunidad de darle una mirada rápida a ciertas dinámicas muy particulares. Teníamos previsto que los resultados nos dieran luces acerca de la percepción afectiva de los estudiantes por la estructura de la implementación propuesta desde la Maestría. Sin embargo, decidimos incluir

algunas preguntas abiertas adicionales para los estudiantes. Las respuestas dadas por los estudiantes a esas preguntas dieron cuenta de las dinámicas que mencionamos más arriba. Al observar con atención los patrones que surgieron en la sistematización de las respuestas, nos dimos cuenta de que surgía una diferencia notable entre las respuestas de los niños y las de las niñas. Cruzamos la información de las preguntas adicionales con la información de las preguntas propuestas por la Maestría y corroboramos el patrón. En el grupo específico de estudiantes con el que trabajamos, los niños tienen una percepción de su propio trabajo más positiva, tienden a calificarse con valoraciones altas, valoran el trabajo como algo “fácil” y reconocen la ayuda que brindan a otros. Además, en general fueron más escuetos con sus respuestas a las preguntas abiertas. Por otra parte, las niñas tendieron a ser mucho más autocríticas: suelen reconocer las dificultades que les implicó resolver cada una de las tareas, se valoran de manera más modesta y reconocen que necesitaron la ayuda de otros. En sus respuestas a preguntas abiertas, tienden a ser más descriptivas. Cabe resaltar que estos patrones no corresponden con el desempeño en la resolución de las tareas. Tanto en los niños como en las niñas hay variedad de logro en las tareas: hay desempeños altos, básicos y bajos tanto en niñas como en niños. Esto nos llamó mucho la atención, aunque no pudimos explorarlo mucho más a fondo porque habría implicado un enfoque completamente distinto. De todas maneras, esta información le otorgó otro matiz a nuestro trabajo como profesoras y nos empujó a hacernos otras preguntas que nos permiten reflexionar a profundidad sobre nuestro quehacer docente.

Cuando empezamos el diseño de esta unidad didáctica, queríamos responder un problema que observamos: en la práctica escolar se evidencian dificultades frecuentes en los estudiantes al realizar conversiones de unidades, especialmente cuando deben interpretar el significado de las magnitudes o aplicar los conocimientos en situaciones reales. Con nuestras tareas de aprendizaje, nos ocupamos de este problema desde varios frentes. En primer lugar, pensamos en contextos cercanos a los estudiantes, en los que ellos pudieran ver la utilidad de la conversión de unidades de longitud y que, al tiempo, reconocieran como situaciones que podrían encontrar en sus vidas diarias. En segundo lugar, les dimos espacio a los estudiantes de pensar más allá de los sistemas de unidades de medida estandarizados para pensar en la importancia de la comunicación matemática, del grado de exactitud mínimo necesario en distintos contextos, y de reconocer cómo alrededor nuestro, consciente o inconscientemente, realizamos mediciones y conversiones de medidas. En tercer lugar, fomentamos el desarrollo de hábitos saludables en el desarrollo y la práctica de las matemáticas. Nuestras tareas de aprendizaje demandan de los estudiantes la revisión constante, la verificación de que lo que hacen guarda relación con lo solicitado inicialmente y de que su trabajo es coherente y tiene sentido. También promovemos una comunicación clara de los procesos y resultados. Consideramos, además, que nuestra unidad didáctica permite que los estudiantes evidencien la importancia de la conversión de unidades de longitud en la vida diaria pero también en el contexto del trabajo matemático. En cuarto lugar, nuestras tareas están enfocadas en que los estudiantes entiendan las diferencias entre las magnitudes de las unidades de medida de longitud. Con esto, enfrentamos la dificultad que identificamos al inicio de este trabajo en nuestra maestría.

Debemos reconocer, sin embargo, que esta unidad didáctica alcanza solamente un pedazo de un tema mucho más amplio. La conversión de unidades y la medición son temas amplísimos. Varias veces en la elaboración de esta unidad didáctica tuvimos la tentación de trabajar otras aplicaciones de la conversión de unidades, otro tipo de unidades u otro tipo de aplicaciones o

procedimientos. Gracias a la ayuda de nuestros formadores, nuestra tutora y nuestros compañeros, pudimos reencaminarnos a lo que buscamos con nuestros objetivos de aprendizaje.

El programa de la Maestría en Educación Matemática nos permitió ampliar nuestra visión respecto a lo que significa enseñar matemáticas. Ahora pensamos constantemente, cuando planeamos una clase para nuestros estudiantes, en las diferentes estrategias que podrían usar para resolver un problema, en las conexiones profundas entre el tema que enseñamos y otros temas, en la telaña ordenada de conceptos y procedimientos que se implican en el tema que enseñamos, y en la organización de los fenómenos en estructuras que permiten la comprensión más allá de lo superficial de la aplicación matemática. Sentimos que nuestra predisposición ante los errores cambió. Los errores no se cometen, sino que se incurre en ellos. Los errores pueden preverse y, de la misma manera, pueden preverse maneras de mitigarlos, evitarlos, minimizarlos o ayudar a superarlos. Aunque ya éramos conscientes de que los errores son oportunidades de aprendizaje y de consolidación del conocimiento, tras todo el trabajo en esta Maestría lo comprobamos con creces. Además, el trabajo en la maestría nos ha permitido mejorar nuestra redacción y nos ha forzado a pensar siempre en comunicar lo que queremos decir de manera clara y concisa.

6. LISTADO DE ANEXOS

A continuación, presentamos la lista de anexos que serán producidos y adjuntados a la versión final.

- ◆ Anexo 1: mapas conceptuales de la articulación de contenidos.
- ◆ Anexo 2: listado de errores y dificultades para el tema conversión de unidades de longitud y para los conocimientos previos.
- ◆ Anexo 3: grafos de criterios de logro en inglés.
- ◆ Anexo 4: tareas de evaluación: Tarea diagnóstica, examen final y rúbrica de evaluación del examen final.
- ◆ Anexo 5: imprimibles de las tareas de aprendizaje en español e inglés.
- ◆ Anexo 6: fichas de las tareas de aprendizaje.
- ◆ Anexo 7: listado de errores y ayudas de las tareas de aprendizaje.

7. DECLARACIÓN DE USO DE INTELIGENCIA ARTIFICIAL

Para la preparación de la escritura de este documento, utilizamos la inteligencia artificial de Google NotebookLM. Esta herramienta funciona con archivos que el usuario proporciona, y no con datos de internet o externos. Le proporcionamos las hojas de evaluación de las actividades 1.4, 2.1, 2.2, 2.3 y 2.4, así como los comentarios individuales que recibimos de nuestros compañeros en esas mismas actividades. El sistema arroja inicialmente un resumen automático, pero le pedimos que nos proporcionara un listado detallado de las sugerencias que nos hicieron en ocasión de esos trabajos. Además, usamos la herramienta de generación automática de un informe con base en los documentos. Ese informe presentó la información de manera un poco más resumida junto con una tabla donde se organizaron las fortalezas y las sugerencias principales según las actividades que hicimos. Esto nos sirvió para asegurarnos de incluir en este, el trabajo final, las sugerencias que pudiéramos haber pasado por alto anteriormente o que no tuvimos oportunidad de actualizar antes. En general nos fue útil porque nos dimos cuenta de que muchas de las sugerencias ya las habíamos incorporado, y no tuvimos que releer completamente todos esos documentos de retroalimentación. La lista detallada fue muy precisa y el resumen del informe, sobre todo la tabla, fue muy concreto en cuanto a lo que apareció de manera más repetitiva. También fue muy útil tener la información clasificada por categorías para poderla revisar de manera ordenada.

En el enlace a continuación se pueden consultar la conversación, los documentos subidos y el informe generado:

<https://notebooklm.google.com/notebook/1cf59aac-504b-4d79-8a4e-5cea859d879b>

8. REFERENCIAS

- Gómez, P. (2018). *Formación de profesores de matemáticas y prácticas de aula: conceptos y técnicas curriculares*. Bogotá: Universidad de los Andes.
- Kaput, J. (1992). Technology and Mathematics Education. En *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (págs. 515-556).
- Ministerio de Educación Nacional. (2016). *Derechos básicos de aprendizaje*. Obtenido de Colombia Aprende: https://www.colombiaprende.edu.co/sites/default/files/files_public/2022-06/DBA_Matematicas-min.pdf
- Ministerio de Educación Nacional. (29 de Septiembre de 2020). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Obtenido de Página web del Ministerio de Educación Nacional: https://www.mineducacion.gov.co/1780/articles-116042_archivo_pdf2.pdf
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2013). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012 Matemáticas, Lectura y Ciencias*. Obtenido de 1 Library: <https://1library.co/document/q07r7wlz-marcos-pruebas-evaluaci%C3%B3n-pisa-matem%C3%A1ticas-lectura-ciencias.html>