Maestría en Educación Matemática

Comportamiento y comparación de funciones polinómicas

Nicolás López, Fitzgerald Montoya, Giovanny Zamudio y Rolando Muñoz

Bogotá, noviembre de 2025

Este documento tiene como propósito ofrecer una guía clara y fundamentada que contribuya a la enseñanza de las funciones polinómicas desde una perspectiva comprensible para la práctica educativa. Presentamos una unidad didáctica orientada a facilitar su comprensión y aplicación en diversos contextos escolares.

En nuestro caso, la propuesta está diseñada para implementarse con estudiantes de grado undécimo en instituciones educativas con características similares al Liceo Latinoamericano de Bogotá, una institución privada ubicada en la localidad de Teusaquillo. Este colegio ofrece formación desde preescolar hasta grado undécimo, en jornada completa y bajo el calendario A del sistema académico distrital. Su Proyecto Educativo Institucional (PEI) se fundamenta en los pilares de aprender a conocer, hacer, convivir y ser, orientados hacia la formación integral de los estudiantes. En este contexto, diseñamos esta unidad didáctica con el propósito de ofrecer a otros docentes una herramienta que fortalezca la enseñanza del tema y favorezca aprendizajes más significativos. La unidad didáctica fue concebida para implementarse en modalidad presencial, aunque puede adaptarse con facilidad a entornos virtuales.

El diseño de la unidad didáctica surge de la necesidad de atender una dificultad frecuente en la enseñanza del cálculo y del pensamiento variacional. Los estudiantes suelen tener problemas para establecer vínculos entre las distintas representaciones matemáticas, ya sean gráficas, simbólicas o tabulares, y los contextos de la vida real que estas intentan describir. Esta desconexión dificulta comprender cómo una transformación matemática, como la modificación de los coeficientes de un polinomio, expresa un cambio en un fenómeno del mundo. Esto limita la interpretación de las funciones como modelos que dan sentido explicativo a los procesos reales.

Con frecuencia, las prácticas de aula se concentran en la ejecución de algoritmos y ejercicios rutinarios que privilegian el dominio procedimental sobre la construcción de significado. Esto provoca que los estudiantes tengan dificultades para interpretar, justificar o predecir el comportamiento de una función y que se mantenga un desequilibrio entre el conocimiento conceptual y el procedimental, lo que genera aprendizajes poco integrados y de escasa transferencia a nuevas situaciones. Por medio del desarrollo de esta unidad didáctica, buscamos superar estas limitaciones, al promover una comprensión conceptual de las funciones polinómicas mediante estrategias didácticas que integran el uso de herramientas digitales, la exploración de diversas formas de representación y la incorporación de contextos reales y significativos, como el crecimiento de poblaciones o las trayectorias de cohetes. De esta manera, se pretende que los estudiantes analicen fenómenos de cambio, interpreten modelos matemáticos y tomen decisiones fundamentadas para fortalecer su razonamiento y su comunicación matemática.

El trabajo se articula con los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), en el campo del pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos, especialmente con el desempeño que propone analizar las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de las funciones polinómicas y racionales y de sus derivadas (p. 89). Asimismo, la propuesta retoma los lineamientos del Marco Conceptual de PISA 2012 (OECD, 2013), al vincular el estudio de las funciones con el campo de cambio y relaciones, que promueve la interpretación de patrones, dependencias y variaciones entre cantidades en contextos reales.

La unidad didáctica fue implementada durante el primer periodo académico del año 2025 con los propósitos de que los estudiantes emplearan técnicas para describir el comportamiento en los extremos del dominio de funciones polinómicas, interpretarán modelos matemáticos en distintos contextos aplicados, y analizaran y contrastaran modelos de funciones polinómicas que describen fenómenos del mundo real, para tomar decisiones fundamentadas a partir de las diferencias y similitudes identificadas.

Esta propuesta fue elaborada por docentes-investigadores en el marco de la Maestría en Educación Matemática de la Universidad de los Andes, lo que permitió estudiar el contenido, establecer expectativas de aprendizaje y estructurar una secuencia coherente de tareas de aprendizaje y evaluación. Posteriormente, se recogió y codificó la información obtenida durante la implementación, cuyo análisis permitió valorar el alcance del diseño y reconocer fortalezas y debilidades en los aspectos cognitivos y afectivos. A partir de esta reflexión, se realizaron los ajustes necesarios al diseño inicial y se elaboró una nueva versión de la unidad didáctica, sustentada en el análisis sistemático de la información recopilada.

Este documento presenta una unidad didáctica completa titulada comportamiento y comparación de funciones polinómicas. El lector encontrará un trabajo estructurado en torno al diseño, implementación y análisis de una propuesta de enseñanza dirigida a estudiantes de grado undécimo, orientada a fortalecer la comprensión conceptual de las funciones polinómicas y su interpretación en contextos reales. A lo largo del texto se presenta la fundamentación teórica y curricular de la unidad, su relación con los Estándares Básicos de Competencias del MEN (2006) y con el marco de PISA (2012). Además, se analiza el contenido desde las siguientes tres perspectivas complementarias: la estructura conceptual, los sistemas de representación y la fenomenología del tema.

También se presentan las expectativas de aprendizaje cognitivas y afectivas, las limitaciones detectadas en los procesos de los estudiantes, los criterios de logro que orientan la evaluación, y los grafos que representan las rutas cognitivas previstas. La propuesta incluye el diseño detallado de cuatro tareas de aprendizaje y una tarea diagnóstica, con sus propósitos, contextos, recursos, errores frecuentes, ayudas docentes y sugerencias metodológicas, al integrar el uso de tecnología y el trabajo manual. Finalmente, el documento ofrece una reflexión sobre la actuación del profesor, la progresión de los aprendizajes y la articulación entre teoría y práctica. De este modo, se constituye en una guía para docentes e investigadores interesados en promover una enseñanza significativa del pensamiento variacional y el razonamiento funcional mediante el estudio de las funciones polinómicas.

1. Diseño previo: descripción, fundamentación y justificación

En este apartado, establecemos las expectativas de aprendizaje a partir de la organización conceptual del tema, así como del análisis de los conceptos pedagógicos y las relaciones que estructuran su contenido. Asimismo, establecemos las posibles dificultades que los estudiantes podrían enfrentar, con el propósito de orientar la planificación y favorecer una comprensión más profunda del tema.

1. Articulación de los contenidos

En esta sección, presentamos la delimitación del tema en relación con los contextos curriculares y las orientaciones institucionales. Abordamos el estudio del contenido sobre las funciones polinómicas y su comportamiento en los extremos del dominio desde tres perspectivas complementarias, a saber: la estructura conceptual, que organiza los conceptos y relaciones principales del tema; los sistemas de representación, que muestran las diferentes maneras de expresar y comunicar las ideas matemáticas; y la fenomenología, que vincula el conocimiento con situaciones y contextos significativos para los estudiantes.

1.1. Delimitación del tema desde los contextos curriculares

Con esta unidad didáctica, buscamos que los estudiantes analicen situaciones de cambio presentes en contextos reales y reconozcan diferentes formas de representar y comprender las funciones polinómicas y su comportamiento en los extremos del dominio. Enmarcamos la propuesta en el pensamiento variacional y en los sistemas algebraicos y analíticos, según los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006). En particular, nuestra unidad didáctica contribuye al estándar que plantea analizar las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de las funciones polinómicas (p. 89). De la misma forma, nuestra unidad didáctica se enmarca en el derecho básico de aprendizaje 7 que menciona la resolución de problemas mediante el uso de propiedades de las funciones y uso de representaciones tabulares, gráficas y algebraicas.

De acuerdo con el marco conceptual de PISA 2012 (OECD, 2013), el estudio de las funciones polinómicas y su comportamiento en los extremos del dominio se enmarca en el campo de contenido cambio y relaciones, que aborda el análisis de patrones, dependencias y variaciones entre cantidades. Desde esta perspectiva, comprender el comportamiento en los extremos del dominio de una función implica interpretar cómo una variable cambia respecto a otra, reconocer tendencias y usar el lenguaje matemático para modelar situaciones reales. Así, el trabajo con funciones polinómicas fortalece las competencias de formular, emplear e interpretar la matemática en distintos contextos, al integrar el pensamiento algebraico con la comprensión de fenómenos de variación.

1.2. Estructura conceptual

En nuestras aulas de clase, dado un tema de estudio, siempre es muy importante reconocer primero los diferentes conceptos asociados a este tema, y segundo, los procedimientos que lo caracterizan. En la figura 1, presentamos la estructura conceptual que organiza los conceptos asociados a las funciones polinómicas y su comportamiento en los extremos del dominio. El mapa muestra cómo los conceptos de grado y coeficiente principal articulan el análisis de paridad y el análisis de signo, conceptos que, en conjunto, definen el comportamiento en los extremos del dominio de la función. Esta estructura evidencia que el aprendizaje del tema requiere transitar de la manipulación algebraica hacia la interpretación global de la gráfica, lo que favorece un pensamiento funcional que conecta la expresión simbólica con la representación visual.

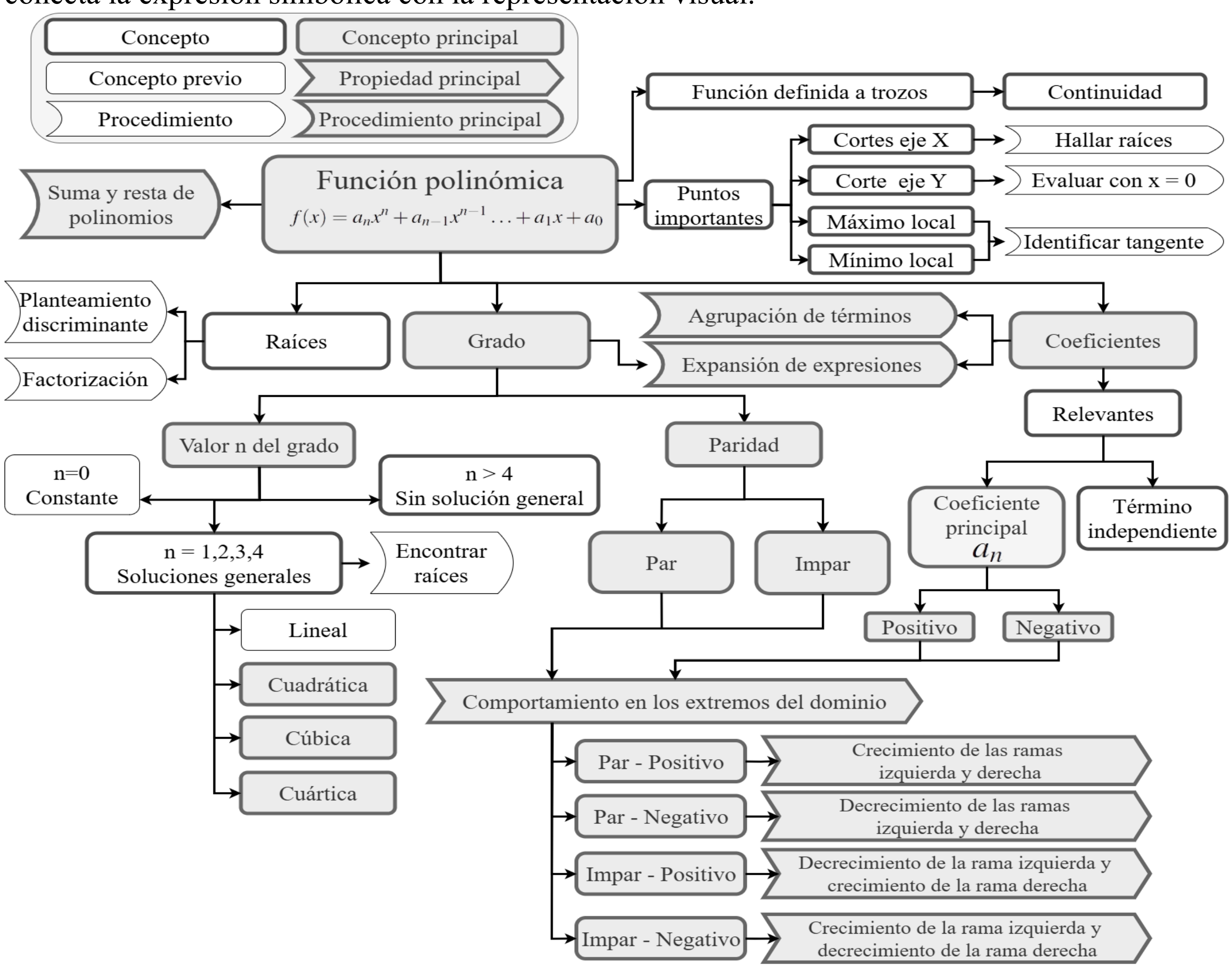

Figura 1. Estructura conceptual de las funciones polinómicas

Como se observa en la figura 1, relacionamos algunos elementos del campo conceptual del tema de funciones polinómicas a partir de la paridad de su grado, que llamaremos n de ahora en adelante, y del signo de su coeficiente principal a_n. Por tal motivo, la estructura conceptual se centra en la relación intrínseca entre estos dos elementos. De esta relación, tal como se muestra en la tabla 1, se desprenden los conceptos y procedimientos esenciales para el análisis del comportamiento en los extremos del dominio.

En la tabla 1, sintetizamos los conceptos y procedimientos esenciales del tema. En ella, observamos que cada procedimiento (por ejemplo, determinar la paridad del grado o el signo del coeficiente) tiene una función específica en la descripción del comportamiento en los extremos del dominio. Este reconocimiento permite al profesor diseñar tareas que promuevan la comprensión de cómo los rasgos algebraicos del polinomio determinan su tendencia gráfica a largo plazo.

Tabla 1
Conceptos y procedimientos clave de la unidad didáctica

Concepto clave	Procedimiento clave	Relación con el comportamiento en los extremos del dominio
Grado de la función (n)	Análisis de la paridad: determinar si n es par o impar.	Define la dirección de las ramas. Si es par, ambas ramas van en la misma dirección; si es impar, en direcciones opuestas.
Signo del coeficiente principal (a_n).	Determinación del crecimiento o decrecimiento de la función polinómica.	Define si la gráfica asciende ($a_n > 0$) o desciende ($a_n < 0$) a la derecha
Comportamiento en los extremos del dominio	Identificación del término dominante ($a_n x^n$)	Si n es par y $a_n > 0$, ambas ramas suben. Si n es par y $a_n < 0$, ambas ramas bajan. Si n es impar y $a_n > 0$, la rama izquierda baja y la derecha sube. Si n es impar y $a_n < 0$, la rama izquierda sube y la derecha baja.
Máximos y mínimos locales	Análisis del signo de la función y de la ley de signos en los extremos	Conceptos de apoyo para una descripción más precisa de la gráfica.

De acuerdo con la tabla 1, la articulación que mostramos permite que el colega comprenda que el proceso de aprendizaje requiere que el estudiante no solo identifique el grado y el coeficiente, sino que ejecute un procedimiento de análisis de signos en los extremos del dominio de la función polinómica.

1.3. Sistemas de representación

La comprensión de las funciones polinómicas depende de la capacidad para movilizar distintos sistemas de representación y traducir información entre ellos. Según Kaput (1992), los sistemas de representación constituyen medios a través de los cuales los estudiantes construyen y expresan significados matemáticos, y la comprensión surge de la coordinación entre dichos sistemas.

De acuerdo con la noción de sistema de representación propuesta por Kaput (1992), comprender una función implica la capacidad de utilizar y coordinar diferentes sistemas de representación, como el simbólico, el gráfico, el numérico o el tabular, para construir significado y establecer conexiones entre ellos. Así, el aprendizaje se orienta hacia el desarrollo de una comprensión relacional que permita al estudiante interpretar, traducir y vincular información representada de múltiples maneras, al fortalecer su pensamiento funcional y algebraico. En la figura 2 y la tabla 2, presentamos los sistemas de representación que identificamos para este tema y las traducciones clave que favorecen su comprensión. Por ejemplo, la traducción del sistema de representación simbólico al sistema de representación gráfico permite que el estudiante relacione el signo del coeficiente principal y la paridad del grado con la dirección de las ramas en los extremos del dominio de la gráfica. A su vez, la traducción del sistema de representación gráfico al sistema de representación simbólico posibilita inferir la forma algebraica de una función a partir de su tendencia visual.

El uso de herramientas digitales, como GeoGebra, se incorpora como mediador en este proceso, pues facilita la observación dinámica del cambio y el contraste de diferentes modelos polinómicos. En la unidad didáctica, las tareas promueven la coordinación entre representaciones y la argumentación basada en evidencias gráficas y algebraicas, lo que contribuye a la construcción de significado y a la consolidación del pensamiento variacional.

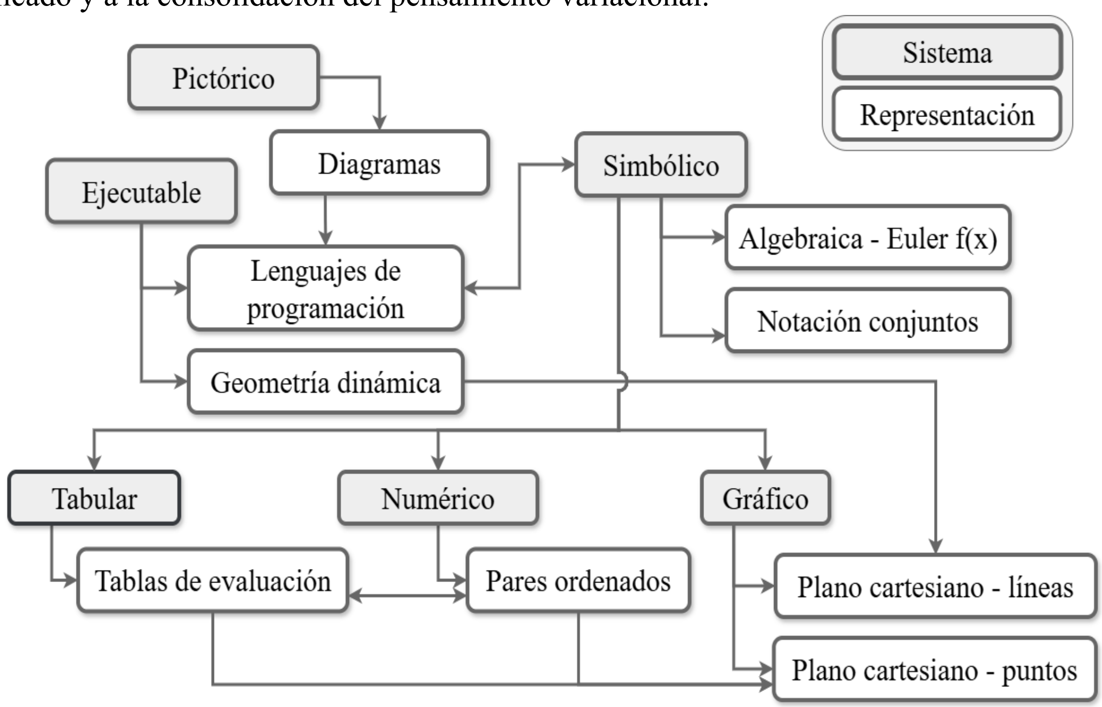

Figura 2. Relaciones entre los sistemas de representación de las funciones polinómicas

De acuerdo con la figura 2, las funciones polinómicas pueden representarse de distintas formas (simbólica, numérica, tabular y gráfica), que se relacionan entre sí y permiten comprender el comportamiento de la función. A partir de la expresión simbólica, el estudiante sustituye valores de la variable independiente y obtiene parejas ordenadas que conforman la representación numérica. Estas pueden organizarse en una tabla de valores y es posible ubicar los puntos en el plano cartesiano para construir la gráfica y observar su tendencia general.

El proceso inverso exige interpretar la gráfica para identificar valores y relaciones entre las variables, y desde ellos deducir la regla simbólica que las vincula. Este ejercicio favorece el pensamiento funcional al permitir reconocer regularidades y expresar relaciones mediante una expresión algebraica. Finalmente, el uso de herramientas digitales, como GeoGebra, facilita la visualización dinámica de estas relaciones y fortalece la comprensión de los distintos sistemas de representación.

El diseño de la unidad didáctica prioriza la traducción entre sistemas de representación como medio para construir el conocimiento. Los sistemas de representación más relevantes se muestran en la tabla 2. La prioridad en la traducción que mostramos en la tabla 2 (por ejemplo, la relación entre el sistema ejecutable y el sistema de representación gráfico para visualizar el dominio y rango) es fundamental para abordar los objetivos de nuestra unidad didáctica ya que exigen el uso de diversas representaciones.

Tabla 2
Sistemas de representación relevantes de la unidad didáctica

Sistema de representación	Signos y elementos relevantes	Traducción clave en la unidad didáctica
Simbólico	$P(x) = a_n x^n + \cdots$, notación de conjuntos (Dominio/Rango)	Simbólico → gráfico. El estudiante traduce el signo de a_n y la paridad de n en la dirección de las flechas en los extremos del dominio de la gráfica
Gráfico	Flechas de comportamiento (ramas), intersecciones con ejes (x, y), coordenadas de puntos críticos	Gráfico → simbólico. El estudiante interpreta la gráfica de GeoGebra para inferir la subestructura (n, a_n) del polinomio modelado
Ejecutable (tecnológico)	Comandos de GeoGebra	Gráfico → tabular → simbólico. Herramientas como GeoGebra facilitan la traducción al permitir la visualización rápida de la tendencia de manera dinámica.

1.4. Fenomenología

El análisis fenomenológico del tema permite reconocer los tipos de fenómenos del mundo real que dan sentido a las funciones polinómicas. De acuerdo con Cañadas, Gómez y Pinzón (2018), este análisis busca establecer la relación entre la estructura matemática del concepto y los fenómenos que esta organiza.

En este caso, clasificamos los fenómenos según la paridad del grado y el signo del coeficiente principal, lo que da lugar a cuatro comportamientos en los extremos del dominio característicos que se ejemplifican en la tabla 3. En particular, el contexto físico del fenómeno determina qué valores de la variable independiente y dependiente tienen sentido, y con ello impone restricciones naturales sobre el dominio y el rango. Por ejemplo, cuando un fenómeno describe una cantidad que solo puede tomar valores positivos (como tiempo, distancia o población), los valores negativos quedan excluidos del dominio; de igual manera, si la magnitud representada no puede disminuir por debajo de cierto límite físico, dicho límite actúa como restricción del rango.

Tabla 3
Análisis fenomenológico

Subestructura matemática	Implicación fenomenológica	Contextos fenomenológicos
Grado impar ($a_n > 0$)	El fenómeno no tiene límites globales; su rango es ilimitado (crece de −∞ a +∞).	Modelos de crecimiento ilimitado (crecimiento poblacional sin capacidad de carga, aceleración constante sin fricción, etc.).
Grado impar ($a_n < 0$)	El fenómeno no tiene límites globales; su rango es ilimitado (decrece de −∞ a +∞).	Modelos de decrecimiento ilimitado (Devaluación acelerada de una moneda, descenso continuo en contextos de movimiento, etc.).
Grado par ($a_n > 0$)	El fenómeno tiene un límite inferior o un valor mínimo que nunca se traspasa (mínimo global).	Modelos de optimización con mínimo (costos de producción, depreciación de activos con valor residual mínimo, etc).
Grado par ($a_n < 0$)	El fenómeno tiene un límite superior o un valor máximo que nunca se traspasa (máximo global).	Modelos de optimización con máximo (utilidades de una empresa, trayectoria de un cohete con altura máxima, etc.).

En la tabla, evidenciamos cómo el tema organiza fenómenos en contextos que representan estos diferentes comportamientos. Uno de los errores más comunes, detectado durante el análisis, es que los estudiantes interpretan la gráfica de forma aislada, sin relacionarla con el fenómeno que representa. Por ello, las tareas de la unidad didáctica buscan que el contexto funcione como criterio de validación de los modelos elaborados. En la figura 3, observamos que es posible establecer una relación biunívoca entre los cuatro contextos fenomenológicos, presentados en la tabla 3, y las cuatro subestructuras matemáticas que definimos según la representación simbólica de las funciones polinómicas.

$a_n > 0$
$a_n < 0$
$a_n > 0$
$a_n < 0$

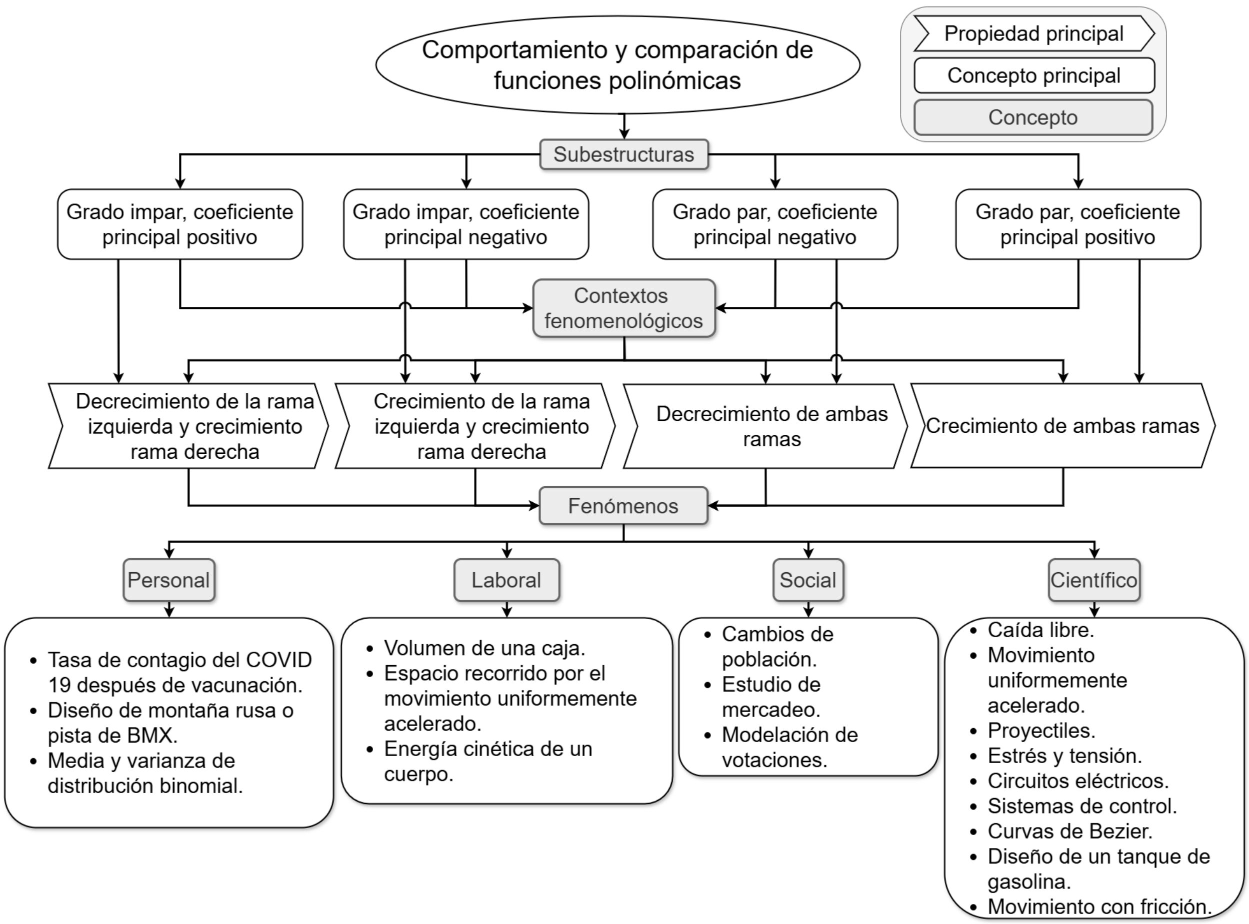

Figura 3. Fenomenología del comportamiento y comparación de las funciones polinómicas

2. Análisis cognitivo

El análisis cognitivo permite identificar las expectativas de aprendizaje que orientan el desarrollo de la unidad didáctica, las limitaciones que pueden afectar el progreso de los estudiantes y los criterios de logro que permiten evaluar su avance. Estos elementos se integran en lo que denominamos grafos de criterios de logro que muestran la progresión del aprendizaje desde el reconocimiento de las propiedades algebraicas de los polinomios hasta la comparación y argumentación sobre su comportamiento en los extremos del dominio en contextos reales.

2.1. Expectativas de aprendizaje de tipo cognitivo

Las expectativas de aprendizaje de tipo cognitivo, de acuerdo con González y Gómez (2018), se estructuran en tres niveles interrelacionados. En el nivel superior, se encuentran los procesos matemáticos y las capacidades fundamentales, entendidas como posibilidades de acción intelectual que orientan el desarrollo del pensamiento matemático. En el nivel medio, los objetivos concretan dichas capacidades en el marco de la unidad didáctica. En el nivel de base, se formulan las capacidades específicas, que movilizan conocimientos y razonamientos particulares para guiar las tareas de aprendizaje.

En la figura 3, integramos las tres componentes del análisis de contenido del tema de la unidad didáctica. En ella, se observa que los conceptos y procedimientos definen la estructura interna del conocimiento, los sistemas de representación posibilitan su expresión y traducción, y la fenomenología le otorga significado en contextos reales. Esta articulación constituye la base para formular los objetivos de aprendizaje y las tareas de la unidad didáctica, en las que se espera que el estudiante movilice los tres tipos de conocimiento para comprender y explicar el comportamiento en los extremos del dominio las funciones polinómicas. A continuación, presentamos las expectativas definidas para el tema de las funciones polinómicas.

1Procesos matemáticos, capacidades fundamentales

Las expectativas de aprendizaje de la unidad didáctica se organizan en torno a los procesos matemáticos de emplear, interpretar y evaluar, que son esenciales para el desarrollo del pensamiento variacional y funcional.

2Objetivos de aprendizaje

Las expectativas de aprendizaje de nivel medio corresponden a los objetivos propios del tema de la unidad didáctica. Los objetivos que hemos propuesto para la unidad didáctica son los siguientes:

Primer objetivo. Emplear técnicas para describir el comportamiento en los extremos del dominio de funciones polinómicas, con el fin de interpretar modelos matemáticos en diferentes contextos aplicados.

Segundo objetivo. Analizar y contrastar modelos de funciones polinómicas que describen fenómenos del mundo real, para tomar decisiones fundamentadas a partir de las diferencias y similitudes identificadas.

En la tabla 4, mostramos la contribución de nuestra unidad didáctica a las capacidades matemáticas fundamentales.

Tabla 4
Contribución de la unidad didáctica a las competencias matemáticas fundamentales

Capacidades matemáticas fundamentales (CMF)	Contribución principal de la unidad didáctica
Matematización (M)	Transformación de situaciones reales a modelos polinómicos y viceversa (ej: modelar el crecimiento de poblaciones o la trayectoria de un cohete).
Razonamiento y Argumentación (Ra)	Justificación de la elección del modelo más adecuado y de las conclusiones basadas en el comportamiento en los extremos del dominio de las funciones (CMF clave en el segundo objetivo).
Diseño de estrategias para resolver problemas (DRP)	Planificación de la secuencia de pasos para determinar el comportamiento en los extremos del dominio de las funciones polinómicas.
Comunicación (C)	Explicación de los resultados y las decisiones tomadas en el contexto de la tarea.
Representación (Re)	Uso y transición entre las representaciones algebraica, gráfica y tabular de los polinomios.
Utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico (U)	Aplicación correcta de las técnicas algebraicas (e.g., identificación del término dominante)
Utilización de herramientas matemáticas (H)	Uso de GeoGebra o software específico para graficar y analizar el comportamiento asintótico (Tarea 1.1).

Capacidades
Las capacidades (ver anexo 1) se entienden como los procedimientos característicos de un tema matemático que el estudiante aplica y que se manifiesta en conductas observables. Estas forman parte del desarrollo de los objetivos y nos permiten caracterizarlos. Estas capacidades articulan conocimientos, representaciones y razonamientos, y se agrupan para conformar los criterios de logro (ver anexo 4), que permiten valorar el grado de desarrollo de las capacidades a lo largo de la unidad didáctica.

3Limitaciones de aprendizaje
En este subapartado, explicamos qué son las limitaciones de aprendizaje, cómo clasificamos los tipos de dificultades y posteriormente presentamos el listado de errores y dificultades. Dado que el listado de errores es demasiado extenso (ver anexo 3), presentamos los errores más frecuentes y/o significativos en la tabla 5. Las limitaciones de aprendizaje se entienden como los factores o circunstancias que pueden distorsionar, ralentizar o frenar el desarrollo de las capacidades y la

consecución de los objetivos de aprendizaje. Estas se centran en las dificultades y errores que los estudiantes presentan. Los errores se manifiestan de manera observable y le permiten al docente anticipar obstáculos, comprender sus causas y planificar estrategias para superarlos. En el marco metodológico (MAD), se distinguen los siguientes dos tipos:

- Las dificultades son las circunstancias intrínsecas al contenido o al contexto que impiden o entorpecen la consecución de los objetivos de aprendizaje (ej. complejidad del objeto matemático, contexto inusual).
- Los errores son la expresión observable de las dificultades, es decir, las respuestas incorrectas o las desviaciones del camino de aprendizaje esperado.

En ese sentido, entendemos a los errores como una manifestación de las dificultades. Clasificamos los errores de acuerdo con la naturaleza de la dificultad correspondiente. Estas dificultades fueron clasificadas según las categorías propuestas por Socas (1997). Así, las categorías que concentraron la mayor atención en la unidad didáctica fueron las siguientes:

Dificultades relativas a la complejidad del objeto matemático. Estas dificultades se refieren a la necesidad de establecer la relación entre el coeficiente principal, el grado del polinomio y el comportamiento asintótico en los extremos del dominio.

Dificultades de procesamiento. Estas dificultades están relacionadas con el manejo de la información, el cálculo manual de polinomios de alto grado para el análisis a largo plazo, y la elección de representaciones adecuadas.

Tabla 5

Dificultades y errores relevantes en la unidad didáctica

Código	Dificultad	Error (Muestra)	Impacto / Origen
D1	Relacionado con la naturaleza del objeto matemático (concepto de infinito)	E1. Usar únicamente el término independiente para describir el comportamiento al ignorar el grado y el coeficiente principal.	Frecuente en O1. Muestra una comprensión incompleta de la dominancia polinómica a largo plazo.
D9	Dificultades de procesamiento y comprensión del contexto	E96. Considerar información irrelevante o ignorar restricciones del contexto (por ejemplo, tomar valores de $t<0$ para el tiempo) al modelar la situación.	Impacta la capacidad de Matematización y el criterio de logro CdL1.1 (extracción de información).

Tabla 5

Dificultades y errores relevantes en la unidad didáctica

Código	Dificultad	Error (Muestra)	Impacto / Origen
D12	Relacionado con la CMF de Razonamiento y Comunicación	E93. Comunicar o justificar la decisión final sin sustento matemático claro, o confundir las variables en la explicación de las ramas asintóticas.	Persistente en tareas del O2 (T2.3 y T2.4), donde la toma de decisiones es clave.
D14	Dificultades con el uso de la tecnología (GeoGebra)	E45. No ajustar correctamente el rango de los ejes al graficar, impide la visualización correcta del comportamiento en los extremos del dominio.	Observado en tareas de apoyo tecnológico, especialmente si el estudiante no cuenta con el conocimiento previo (CP) sobre el uso de la herramienta.

Nota. D=dificultades , .E= Errores O1= Objetivo 1, O2= Objetivo 2

Criterios de logro

Los criterios de logro (CdL) son indicadores del progreso cognitivo, al permitir al docente y al estudiante hacer seguimiento a la adquisición de las estrategias necesarias para abordar la temática. El diseño de estos criterios de logro provino de un análisis detallado de las estrategias de solución posibles para cada objetivo, al garantizar una evaluación precisa de los avances de los estudiantes.

Cada criterio de logro constituye un indicador del avance en las estrategias de resolución que los estudiantes ponen en juego al desarrollar las tareas. Su cumplimiento evidencia que el estudiante moviliza las capacidades previstas y avanza hacia una comprensión más profunda del comportamiento de las funciones polinómicas. El listado completo de criterios de logro se encuentra en el anexo 4. En la tabla 6, presentamos los criterios de logro más relevantes y significativos, que corresponden a los procedimientos clave necesarios para alcanzar los objetivos de la unidad didáctica.

Tabla 6
Criterios de logro más relevantes y significativos para alcanzar los objetivos de la unidad didáctica

Criterio de logro	Descripción (Estrategia de Solución)	Objetivo
CdL 1.3	Establece la relación entre el coeficiente principal y el grado del polinomio para determinar el comportamiento en los extremos del dominio de la función polinómica.	O1
CdL 1.6	Interpreta y justifica el comportamiento en los extremos del dominio del modelo polinómico en el contexto del problema (e.g., crecimiento poblacional, trayectoria).	O1
CdL 1.10	Selecciona el sistema de representación más adecuado (algebraico, tabular o gráfico) para analizar el comportamiento en los extremos del dominio de una función en una tarea.	O1
CdL 2.5	Determina el intervalo o punto donde una función polinómica supera a otra, a partir del análisis del comportamiento en los extremos del dominio.	O2
CdL 2.16	Toma decisiones fundamentadas con base en la información comparativa obtenida del análisis del comportamiento en los extremos del dominio de las funciones.	O2
CdL 2.17	Comunica los resultados del análisis y las conclusiones del problema de manera efectiva y coherente con el contexto.	O2

A continuación, presentamos la caracterización de los objetivos de aprendizaje en términos de sus grafos de criterios de logro. Evitamos el lenguaje técnico de capacidades y secuencias, y nos enfocamos en las estrategias de solución.

2.2. Caracterización de los objetivos de aprendizaje

En el primer objetivo (O1), esperamos que los estudiantes empleen representaciones simbólicas, gráficas y tecnológicas para identificar cómo el grado y el coeficiente principal determinan el comportamiento en los extremos del dominio de una función polinómica. Este proceso involucra criterios de logro como reconocer la estructura algebraica del polinomio, analizar su paridad, evaluar su signo y explorar su gráfica, tanto manualmente como con apoyo del software GeoGebra.

El primer objetivo se enfoca en el análisis del comportamiento en los extremos del dominio de las funciones polinómicas, particularmente en la identificación y descripción de sus ramas asintóticas. Para ello, proponemos una secuencia de estrategias que articulan procedimientos algebraicos y representaciones gráficas, orientan al estudiante a tomar decisiones sobre cuál representación resulta más útil para interpretar el comportamiento de la función. El grafo del primer objetivo, tal como se muestra en la figura 4, se caracteriza por una bifurcación temprana, lo que permite múltiples caminos de solución.

En la primera parte del grafo, el estudiante comienza por extraer la información relevante del contexto e identifica el coeficiente principal y grado del polinomio (CdL 1.1). Luego, el estudiante decide (CdL 1.2) qué sistema de representación usar para abordar el problema tabular (digital, gráfico o algebraico) (CdL 1.3-1.6), reconoce el grado del polinomio y determina el signo del coeficiente principal, al comprender cómo ambos influyen en la orientación de las ramas de la gráfica. Este paso activa la relación entre la forma algebraica y el comportamiento gráfico, clave para el análisis de los extremos del dominio.

Finalmente, el estudiante identifica las restricciones que ofrece el contexto del problema (CdL 1.7). En la siguiente parte, el estudiante decide si identifica puntos relevantes algebraica o gráficamente (CdL 1.8). Luego de determinar estos puntos (CdL 1.9-1.10), el estudiante reúne toda la información necesaria para analizar el comportamiento del polinomio (CdL 1.11). Finalmente, selecciona la rama a analizar (CdL 1.12) y tras analizar las ramas correspondientes (CdL 1.13-1.14), comunica los resultados (CdL 1.15).

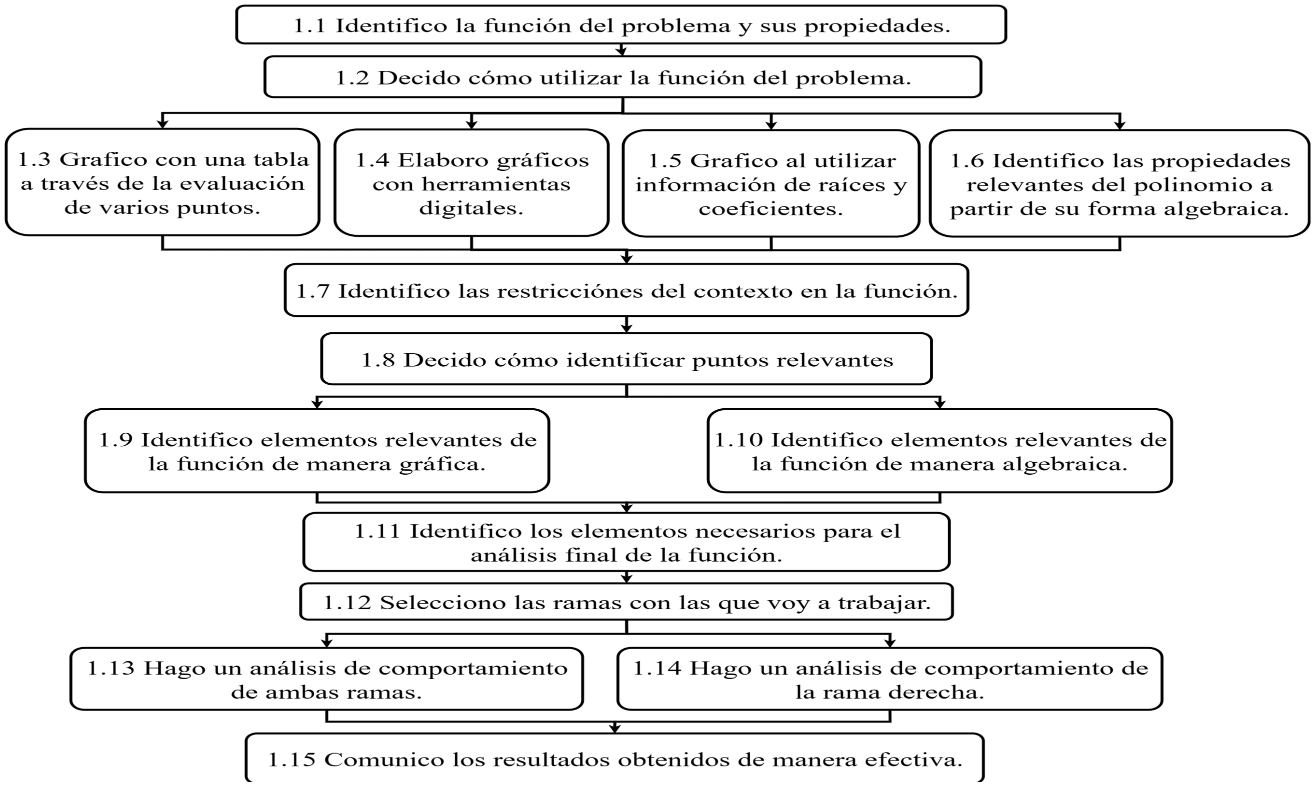

Figura 4. Grafo de criterios de logro del primer objetivo

En el segundo objetivo, buscamos que los estudiantes argumenten sobre las semejanzas y diferencias entre los modelos, y justifiquen sus conclusiones con base en evidencias algebraicas y gráficas. El segundo objetivo se centra en el análisis comparativo entre múltiples modelos y requiere un paso final de comunicación y toma de decisiones, al activar las CMF de razonamiento y argumentación. La estructura del grafo del segundo objetivo, tal como se muestra en la figura 5, es más robusta y sistémica, al integrar procedimientos del primer objetivo para luego enfocarse en la comparación, lo que permite múltiples caminos de solución.

La figura 5 representa de forma esquemática la estructura de relaciones entre los criterios de logro (CdL) que permiten alcanzar el segundo objetivo (O2) de la unidad didáctica. El punto de partida del grafo es la extracción de información inicial del contexto (CdL 2.1), que activa el análisis comparativo. A partir de allí, se bifurca en dos estrategias de solución. En el camino de comparación algebraica, el estudiante aplica el conocimiento del primer objetivo para analizar el comportamiento en los extremos del dominio de cada función (CdL 2.15). Luego, el estudiante determina dónde una función supera a otra, mediante análisis gráfico (CdL 2.11), algebraico (CdL 2.12) o tabular (CdL 2.13) Este proceso requiere comparar las tasas de crecimiento de los modelos. Seguidamente, el estudiante determina dónde una función supera a otra, mediante análisis gráfico (CdL 2.11), algebraico (CdL 2.12) o tabular (CdL 2.13). Este proceso requiere comparar las tasas de crecimiento de los modelos. Con base en el análisis anterior, el estudiante toma una decisión fundamentada según el contexto del problema (CdL 2.16). Por ejemplo, él puede decidir qué modelo representa mejor un fenómeno o cuál opción resulta más eficiente. Finalmente, ambos caminos convergen en la comunicación de resultados (CdL 2.17), que exige expresar las conclusiones de manera clara, coherente y contextualizada.

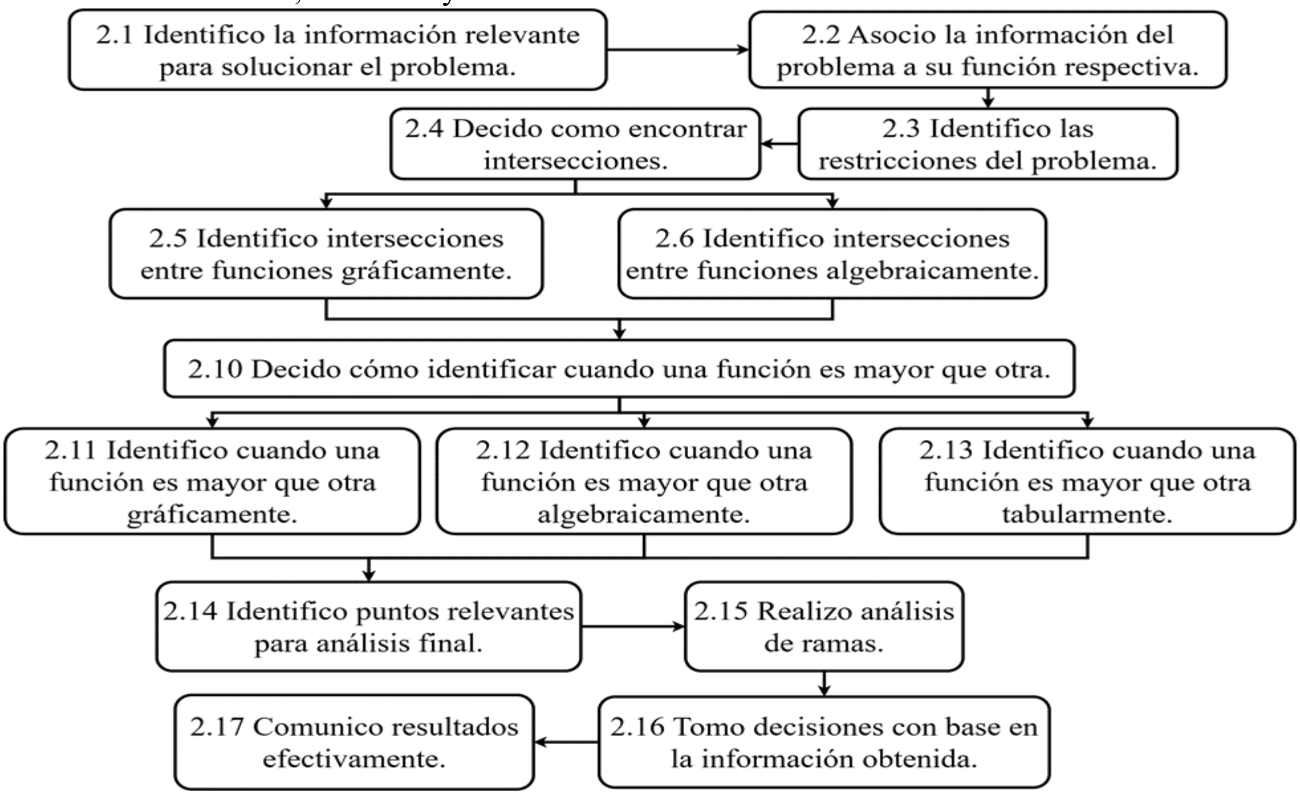

Figura 5. *Grafo de criterios de logro del segundo objetivo*

El grafo de la figura 5 refleja una estructura sistémica y robusta, en la que los procedimientos del primer objetivo se integran al análisis comparativo al destacar la importancia de la toma de decisiones fundamentada (CdL 2.16) y la comunicación matemática argumentada (CdL 2.17). La figura 5 presenta el tránsito desde la comparación algebraica y gráfica de funciones polinómicas hasta la argumentación y comunicación de decisiones basadas en evidencias, al mostrar las rutas cognitivas que los estudiantes pueden seguir para resolver tareas complejas de modelación y análisis comparativo.

2.3. Expectativas de tipo afectivo

Las expectativas de tipo afectivo expresan un tránsito desde el manejo instrumental de procedimientos algebraicos hacia la comprensión relacional entre conceptos, representaciones y fenómenos. Estas expectativas también favorecen el desarrollo de actitudes de curiosidad, argumentación y validación de resultados, aspectos coherentes con las competencias de modelación y razonamiento matemático que plantea el MEN (2006). En la tabla 7, presentamos el listado de las expectativas afectivas que nos propusimos para nuestra unidad didáctica.

Tabla 7

Listado de expectativas de tipo afectivo del tema

EA	Descripción
1	Desarrollar curiosidad al seleccionar y aplicar estrategias para resolver problemas que involucren el comportamiento en los extremos del dominio de las funciones polinómicas.
2	Desarrollar interés por formular conjeturas y representar problemas en contexto que involucren el comportamiento en los extremos del dominio de las funciones polinómicas.
3	Desarrollar curiosidad por descubrir las relaciones no conocidas entre la subestructura matemática (grado del polinomio) de una función polinómica con su comportamiento en los extremos del dominio.
4	Desarrollar el hábito del uso de las representaciones simbólicas y gráficas de las funciones polinómicas para argumentar su comportamiento en los extremos del dominio.
5	Desarrollar disposición favorable para resolver y presentar explicaciones de situaciones problema que involucren el comportamiento en los extremos del dominio de funciones polinómicas.

Nota. EA: expectativa afectiva.

2.4. Esquema general de la unidad didáctica

Tal como mostramos en la tabla 8, la unidad didáctica está organizada en cuatro tareas de aprendizaje (TAs) que contribuyen al logro de los dos objetivos definidos. La planeación contempla siete sesiones de clase de 100 minutos cada una. Inicia con una tarea diagnóstica de conocimientos previos sobre funciones polinómicas y continúa con cuatro tareas de aprendizaje que avanzan desde la exploración con apoyo tecnológico hacia la resolución manual, al pasar del trabajo individual al colaborativo y del análisis de un solo modelo al contraste entre varios. Esta secuencia favorece una comprensión progresiva del comportamiento en los extremos del dominio de las funciones polinómicas.

Tabla 8
Estructura general de la unidad didáctica

Componente	Nombre	Objetivo que contribuye	Tipo de análisis	Sesiones sugeridas
Tarea diagnóstica	Diagnóstico de conocimientos previos	N/A	Repaso de conocimientos previos	1 sesión (parcial)
T1.1	El cohete multivariable	O1	Análisis algebraico y gráfico (tecnológico)	1 sesión
T1.2	El cohete multivariable segunda parte	O1	Análisis algebraico (manual/ restringido)	1 sesión

Tabla 8
Estructura general de la unidad didáctica

Componente	Nombre	Objetivo que contribuye	Tipo de análisis	Sesiones sugeridas
T2.1	Selección de modelos	O2	Comparación de modelos (tecnológico)	1 sesión
T2.2	Selección de modelos segunda parte	O2	Análisis y contraste para la toma de decisiones (manual)	1 sesión
Evaluación	Examen Final	O1 y O2	Integración y evaluación final	1 sesión
Cierre	Sesión de Retroalimentación	N/A	Reflexión y autoevaluación	1 sesión

Las tareas T1.1 y T1.2 contribuyen al primer objetivo. Estas tareas se enfocan en la identificación de la regla dominante (coeficiente principal y grado) de una o varias funciones y la interpretación de dicho comportamiento en el contexto. La T1.1 utiliza tecnología para la visualización (análisis gráfico), mientras que la T1.2 prioriza el análisis algebraico para la rama derecha (análisis manual/restringido). El segundo objetivo también se desarrolla por medio de dos tareas: T2.1 permite utilizar un simulador para determinar intervalos y comportamientos relativos entre dos funciones; mientras que T2.2 traslada ese análisis al papel y lápiz, al promover la argumentación algebraica y la comunicación matemática. El enfoque está en el análisis de las tasas de crecimiento a largo plazo y la justificación de la decisión final.

2. TAREA DIAGNÓSTICA Y TAREAS DE APRENDIZAJE

En este apartado, presentamos la tarea diagnóstica y las tareas de aprendizaje de ambos objetivos. Para cada tarea, elaboramos una introducción que sitúa su intención y meta dentro de la unidad didáctica. Posteriormente, detallamos su descripción, que incluye los requisitos, la formulación y los recursos necesarios; anticipamos los errores y ayudas asociados a los principales desafíos de los estudiantes; presentamos el grafo de criterios de logro (CdL) y los caminos de aprendizaje previstos; e incorporamos las sugerencias metodológicas para la actuación docente. Finalmente, establecemos los criterios de evaluación que permiten al colega identificar evidencias de logro mediante procedimientos clave como la manipulación intencional de coeficientes, el análisis de términos dominantes, la traducción contextual de propiedades de funciones y la identificación de puntos de intersección para la aplicación de estrategias de solución.

1. TAREA DIAGNÓSTICA

La tarea diagnóstica tiene como propósito identificar los conocimientos previos (ver anexo 2) de los estudiantes sobre las funciones polinómicas cuadráticas y su interpretación en contextos reales. Mediante el análisis de dos modelos que representan la velocidad de ciclistas en una competencia, se busca reconocer cómo los estudiantes establecen relaciones entre variables, interpretan los coeficientes y el grado del polinomio, y describen el comportamiento de las funciones a corto y largo plazo. La tarea permite observar las estrategias iniciales de razonamiento algebraico y gráfico que los estudiantes utilizan al abordar situaciones de variación, constituyendo un punto de partida para orientar las tareas de aprendizaje posteriores de la unidad didáctica.

> Dos ciclistas participan en una competencia de montaña. Las funciones $V_1(t) = -2t^2 + 8t + 5$ y $V_2(t) = (-2t + 4)(3t + 3)$ modelan sus velocidades (en metros por segundo) para un tiempo específico (en minutos) mayor o igual a 0 minutos. Los organizadores necesitan analizar estas funciones para optimizar el desempeño de los ciclistas. Responde las siguientes preguntas basándote en las funciones $V(t)$:
>
> 1. En las funciones presentadas, ¿cuál es la variable del tiempo y cuál es la de la velocidad?
> 2. Identifica cuál es la variable dependiente y cuál la independiente en ambas funciones.
> 3. Elabora una tabla en la que evalúes 7 valores de t desde 0 hasta 5 de ambas funciones.
> 4. Identifica el coeficiente principal del polinomio V(t) en ambas funciones.

5. Identifica el grado principal del polinomio en ambas funciones.

A continuación, para la función $V_1(t) = -2t^2 + 8t + 5$ responde las siguientes preguntas:

6. Realiza una gráfica de la velocidad en función del tiempo.

7. Calcula los valores de t para los que la velocidad es igual a 0.

8. Identifica el intervalo donde la velocidad es mayor a 0.

9. Identifica el intervalo donde la velocidad es negativa.

10. Calcula el cambio de velocidad promedio (pendiente de la recta secante) entre

$t = 1$ y $t = 1.5$

11. Utiliza un software gráfico (GeoGebra u otro) para graficar la función $V_1(t)$.

12. Identifica el punto máximo de las funciones. ¿Qué significa este valor en el contexto de la competencia?

2. TAREAS DE APRENDIZAJE DEL PRIMER OBJETIVO

Las tareas T1.1 (El cohete multivariable) y T1.2 (El cohete multivariable – segunda parte) contribuyen al desarrollo de la capacidad para emplear técnicas que permitan describir el comportamiento en los extremos del dominio de funciones polinómicas, con el fin de interpretar modelos matemáticos en diferentes contextos aplicados. A continuación, presentamos la introducción y descripción para cada una, indicamos su intención en la unidad didáctica y su contribución a la meta de aprendizaje.

Tarea 1.1 El cohete multivariable

La intención de la tarea 1.1 es introducir a los estudiantes en la exploración del comportamiento gráfico de funciones polinómicas mediante un contexto lúdico y motivante: el lanzamiento de un cohete con trayectorias determinadas por polinomios de distintos grados. Esta situación permite que los estudiantes comiencen a reconocer cómo los coeficientes y el grado del polinomio influyen en la forma y dirección de la gráfica, al establecer conexiones entre la expresión algebraica y su representación gráfica.

La meta de la tarea es que los estudiantes comprendan cómo las variaciones en los coeficientes afectan la trayectoria del cohete, al favorecer una comprensión inicial del comportamiento en los extremos del dominio de las funciones. Además, la actividad sienta las bases para futuras tareas al promover el análisis visual y numérico con apoyo de herramientas tecnológicas. Esta tarea cumple una función introductoria al tema, ya que permite que los estudiantes exploren de manera inicial cómo los coeficientes modifican la forma del polinomio al manipularlos directamente en la aplicación diseñada para este propósito. Esta exploración guiada fomenta la comprensión intuitiva antes de avanzar hacia análisis más formales.

A continuación, presentamos los elementos descriptores de la tarea 1.1 que buscan precisar los aspectos estructurales, conceptuales y organizativos de la tarea, al describir los conocimientos previos requeridos, su contribución al objetivo de aprendizaje, la formulación de la actividad, los procedimientos implicados, los sistemas de representación movilizados, los recursos y materiales necesarios, así como las formas de agrupamiento, interacción y temporalidad previstas. Esta descripción permite comprender de manera integral cómo la tarea se articula con las metas de la unidad didáctica y con el desarrollo de las capacidades matemáticas que orientan el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Requisitos previos
Esperamos que los estudiantes sean capaces de evaluar funciones en puntos específicos, representarlas gráficamente con una herramienta digital y reconocer la relación entre las variables independiente y dependiente. Asimismo, los estudiantes deben manejar conceptos básicos como coeficiente, grado y término constante de un polinomio. Estos conocimientos iniciales son fundamentales para interpretar de manera adecuada la relación entre la forma algebraica y su comportamiento gráfico.

1*Aportes a los objetivos*
La tarea busca que los estudiantes comprendan cómo el signo y el grado del polinomio afectan el comportamiento en los extremos del dominio de la función. Mediante la manipulación de los coeficientes, se espera que los estudiantes identifiquen patrones que les permitan predecir el crecimiento o decrecimiento de la gráfica y establecer conexiones entre las propiedades algebraicas y las características geométricas del modelo.

Formulación de la tarea
Planteamos que cada estudiante programe un cohete que opera en cuatro modos distintos de vuelo, donde cada modo corresponde a una función polinómica de diferente grado. El reto consiste en ajustar los coeficientes de manera que el cohete atraviese un conjunto de "metas" o puntos predefinidos en el plano. Esta formulación promueve la experimentación con diferentes configuraciones de los coeficientes y favorece la comprensión de su influencia en la trayectoria del cohete.

Conceptos y procedimientos previos
Los conceptos se centran en la evaluación de funciones polinómicas, la identificación del grado y del coeficiente principal, así como en la relación entre la representación algebraica y la gráfica. Para alcanzar estos objetivos, los estudiantes deben realizar procedimientos que incluyen la evaluación numérica de funciones, la construcción de tablas de valores y la representación gráfica. A partir de estos recursos, se espera que los estudiantes analicen las variaciones de la curva cuando modifican los parámetros de la función.

2*Sistemas de representación*
Los estudiantes trabajan con representaciones algebraicas, mediante la expresión del polinomio; con representaciones gráficas, al observar la trayectoria del cohete; con representaciones numéricas, al registrar los valores de los coeficientes y las coordenadas de las metas; y con representaciones verbales, al interpretar y comunicar los resultados. Esta articulación de sistemas de representación es esencial para el desarrollo de la comprensión funcional.

Contexto
El contexto de la tarea corresponde al ámbito científico, en la medida en que los estudiantes modelan una trayectoria física y analizan el movimiento del cohete desde una perspectiva matemática. Este tipo de situación favorece la conexión entre el conocimiento escolar y fenómenos del mundo real.

3Recursos
Empleamos un simulador interactivo disponible en línea (https://nolopez338.github.io/juego_cohete/o1/index.html) que permite modificar los coeficientes del polinomio y visualizar en tiempo real los cambios en la gráfica. Este recurso tecnológico apoya el aprendizaje activo y facilita la verificación inmediata de las hipótesis formuladas por los estudiantes.

Agrupamiento y las interacciones
La actividad se desarrolla de manera individual para garantizar que cada estudiante explore de forma autónoma las variaciones de la función. La interacción entre profesor y estudiantes consiste en la presentación del simulador, la orientación de las metas y el acompañamiento durante la experimentación. Además, promovemos la interacción entre pares mediante discusiones breves sobre qué coeficiente modificar y en qué dirección hacerlo para lograr que el cohete alcance la meta.

Instrucciones clave del profesor
El docente muestra un ejemplo en el que uno de los coeficientes varía, para evidenciar cómo este cambio modifica la forma de la gráfica. A partir de esta demostración, los estudiantes pueden experimentar por sí mismos, al ajustar los coeficientes para lograr que el cohete atraviese las metas y al construir, de manera intuitiva, una comprensión del efecto que cada parámetro tiene sobre el polinomio.

4Temporalidad
La temporalidad de la tarea se distribuye de la siguiente manera: cinco minutos para la presentación del objetivo de la unidad didáctica, treinta minutos para la explicación del tema y ejemplos iniciales, cinco minutos de descanso, cinco minutos para la presentación de la tarea, cuarenta minutos para el desarrollo autónomo, y quince minutos para la retroalimentación y el cierre colectivo. Esta organización del tiempo busca equilibrar los momentos de instrucción, experimentación y reflexión.

Errores y ayudas
Los errores más frecuentes se relacionan con la identificación incorrecta del grado del polinomio y del signo del coeficiente principal, así como con la confusión entre los términos del polinomio y su efecto en la gráfica. Los errores más frecuentes son los siguientes:

- Confundir el grado de la función con el coeficiente principal (E20).
- No comprender cómo los coeficientes determinan la forma general del polinomio (E26–E28).

- Interpretar de manera incorrecta el comportamiento en los extremos del dominio de las ramas izquierda o derecha (E70–E73).
- No reconocer el papel del término constante en la traslación vertical de la gráfica (E43–E49).

Las ayudas asociadas consisten en guiar al estudiante a identificar la forma general del polinomio (A4); analizar los puntos críticos (A5) y la relación entre máximos, mínimos e inflexiones; evaluar el grado y signo del coeficiente principal para predecir el comportamiento en los extremos del dominio (A22–A25); utilizar herramientas gráficas para confirmar las predicciones (A23–A24); y comprender el dominio y rango de la función mediante la elección adecuada de escalas (A15–A18).

Grafo de criterios de logro de la tarea

En la figura 6, mostramos el grafo de criterios de logro del primer objetivo, y sobre este resaltamos el grafo de criterios de logro de la tarea 1.1. Entre los criterios de logro más relevantes se encuentran los siguientes:

- Reconocer las partes estructurales de un polinomio (CdL 1.1).
- Evaluar la función en puntos específicos (CdL 1.8).
- Interpretar el comportamiento en los extremos del dominio según el grado y el signo del coeficiente principal (CdL1.13-1.14).
- Relacionar la representación algebraica con la representación gráfica (CdL1.9-1.10).

Las estrategias para la solución de esta tarea se centran en el uso simultáneo de métodos algebraicos y tecnológicos, al favorecer la transición entre la manipulación simbólica y la comprensión visual del fenómeno. La figura 6 corresponde al grafo del primer objetivo, en el que se resaltan los criterios de logro que el desarrollo de la tarea T1.1 busca activar.

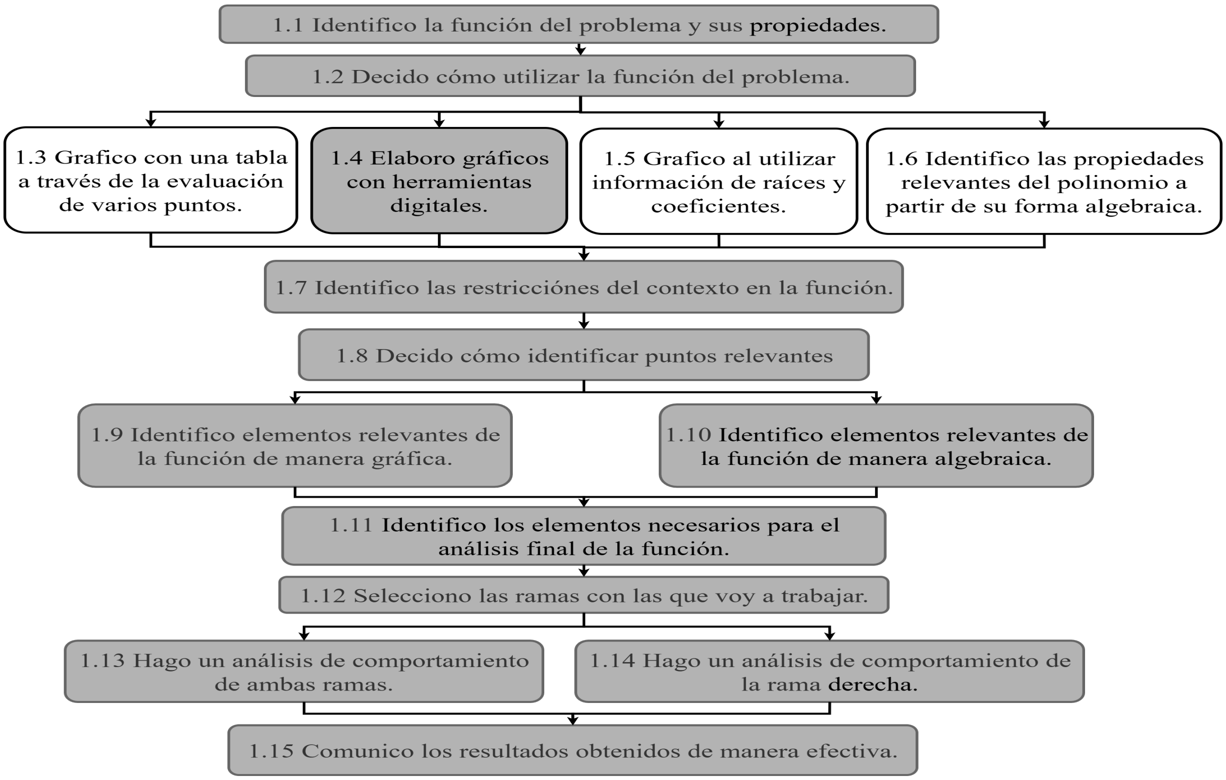

Figura 6. Grafo de criterios de logro de la tarea de aprendizaje 1.1

Durante el desarrollo de la tarea, se plantean dos posibles caminos de resolución. En el primero, el análisis se realiza de manera gráfica, dado que los estudiantes interpretan la forma general del polinomio, identifican el grado y el signo del coeficiente principal y predicen el comportamiento en los extremos del dominio de la función al observar la orientación de sus ramas. En el segundo, el enfoque es algebraico y aritmético, ya que los estudiantes buscan los polinomios que cumplen las restricciones impuestas en el rango para determinados puntos del dominio y presentan sus resultados y conclusiones a partir de los cálculos realizados. En ambos casos, la herramienta digital empleada en la actividad permite realizar y visualizar ambos procedimientos, lo que facilita la comparación entre la exploración gráfica y la exposición algebraica de los resultados.

Cada error (E26–E32, E70–E73) se asocia a un criterio de logro (ver anexo 4), como la correcta identificación del grado, la interpretación de la simetría y la predicción del comportamiento en los extremos del dominio. Los caminos de aprendizaje del grafo de criterios de logro reflejan la transición desde la exploración con un programa de geometría dinámica hacia la comprensión algebraica del modelo.

Actuación del profesor

El profesor presenta la tarea con un lenguaje accesible y contextualizado, al enfatizar la relación entre el experimento del cohete y el estudio de las funciones polinómicas. Durante el desarrollo, observa las estrategias de los estudiantes, interviene ante confusiones sobre el grado o el signo del coeficiente principal y fomenta la verificación con el simulador. El docente introduce el contexto con apoyo de animaciones y promueve que los estudiantes expliquen con sus palabras cómo los coeficientes modifican la trayectoria. Durante el trabajo individual, observa los errores comunes (especialmente en la identificación de grado y signo) y formula preguntas orientadoras como las siguientes:

- ¿Qué efecto tiene aumentar este coeficiente?
- ¿Cómo cambia la gráfica si el signo del coeficiente principal es negativo?

En la retroalimentación final, el profesor destaca los vínculos entre coeficientes y comportamiento gráfico, al guiar a los estudiantes hacia una comprensión cualitativa de la relación entre modelo y fenómeno.

Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

Es conveniente iniciar la tarea 1.1 con una breve conversación sobre el papel de las funciones polinómicas en la modelación de trayectorias físicas. Recomendamos usar ejemplos visuales (videos cortos o animaciones) que muestren distintas curvas y comportamientos.

Al presentar la tarea 1.1, es importante enfatizar que cada modo de funcionamiento del cohete representa una función de distinto grado. Esto facilitará que los estudiantes comprendan que el grado determina la forma general de la trayectoria. Durante el trabajo con la herramienta digital, sugerimos orientar a los estudiantes a predecir antes de graficar el efecto de modificar un coeficiente. De esta manera, la simulación tecnológica se convierte en una instancia de verificación de hipótesis. Recomendamos pedir que registren capturas de pantalla de sus resultados y breves descripciones escritas sobre cómo los cambios en los coeficientes afectaron el recorrido. El docente debe aprovechar los errores más comunes (por ejemplo, invertir el signo del coeficiente o confundir el término independiente) como oportunidades de discusión colectiva, al preguntar ¿qué cambió en la forma del cohete cuando modificaste este valor? Si el tiempo lo permite, puede proponerse una pequeña comparación entre trayectorias de diferentes estudiantes para evidenciar la variedad de comportamientos posibles con polinomios de distintos grados.

Evaluación

El logro de las metas de esta tarea puede identificarse a partir de las capacidades (ver anexo 1) de los estudiantes para relacionar los coeficientes del polinomio con la forma y el comportamiento de la gráfica. Las evidencias más claras surgen de los siguientes aspectos:

- Reconoce los coeficientes principales y el grado del polinomio, relacionándolos con el comportamiento en los extremos del dominio (C9, C15, C59).
- Interpreta correctamente las ramas izquierda y derecha (C17–C20) y distingue crecimiento/decrecimiento (C23, C24, C25).
- Usa la herramienta tecnológica de manera pertinente (C10, CdL1.4), al ajustar los parámetros hasta lograr la trayectoria esperada.
- Explica con claridad sus hallazgos en lenguaje comprensible (C36, C50, CdL1.15).

La evaluación de la tarea se centra en verificar si los estudiantes son capaces de relacionar los coeficientes del polinomio con la forma y el comportamiento de la gráfica, al interpretar adecuadamente el papel del grado y del signo del coeficiente principal. Las evidencias de logro se observan tanto en las producciones gráficas como en las explicaciones verbales y escritas de los estudiantes. Los criterios de logro asociados corresponden principalmente a los que describen la progresión desde la identificación de la función y sus elementos estructurales hasta el análisis de sus propiedades globales. En particular, resultan relevantes los siguientes:

- Identifico la función del problema y sus propiedades (CdL1.1).
- Gráfico mediante tabla o con herramientas digitales (CdL1.3 / CdL1.4)
- Reconozco propiedades relevantes y elementos del análisis final de la función (CdL1.6 / CdL1.11)

Entre los errores más frecuentes observados en esta tarea se destacan aquellos relacionados con la identificación estructural y el análisis gráfico de las funciones polinómicas. En particular, los estudiantes suelen confundir el grado del polinomio con el coeficiente principal (E20), ignorar el efecto del signo o la paridad en el comportamiento en los extremos del dominio de la función (E25, E29) y malinterpretar el sentido de crecimiento o decrecimiento de las ramas (E70–E73). Estos errores se asocian a las dificultades D1 (identificación estructural) y D2 (análisis de propiedades globales). Cuando aparecen, el docente debe revisar la comprensión de las relaciones entre grado, signo y curvatura.

Las expectativas afectivas que la tarea 1.1 promueve son EA1–EA3 al desarrollar curiosidad por las relaciones entre el grado del polinomio y su comportamiento en los extremos del dominio. Se observa el logro de estas expectativas afectivas cuando los estudiantes exploran y comentan espontáneamente qué ocurre al cambiar los coeficientes en el simulador. Un estudiante logra plenamente la meta si describe con precisión cómo el signo y grado determinan la orientación de las ramas y puede justificar sus afirmaciones con ejemplos.

Tarea 1.2 El cohete multivariable segunda parte

Para la segunda tarea del primer objetivo, los estudiantes ya no dependen de herramientas tecnológicas; por el contrario, se espera que verifiquen y justifiquen sus resultados mediante procedimientos algebraicos y representaciones gráficas elaboradas manualmente. La tarea cumple una función de transición dentro de la unidad didáctica, ya que articula el trabajo exploratorio con simuladores de la tarea 1.1 y la consolidación analítica que exige el estudio formal de las funciones polinómicas.

Requisitos previos

Para llevar a cabo esta tarea, los estudiantes deben poseer la capacidad de graficar y analizar funciones polinómicas de manera manual. Esto implica reconocer puntos críticos, máximos y mínimos, así como comprender la relación entre los coeficientes del polinomio y el comportamiento en los extremos del dominio de la gráfica. El dominio de estas habilidades constituye un requisito indispensable para avanzar hacia una comprensión más profunda de las propiedades algebraicas y gráficas de las funciones.

Aportes a los objetivos

La tarea contribuye de forma directa al objetivo de aprendizaje, ya que busca que los estudiantes consoliden la comprensión del comportamiento de las funciones polinómicas sin recurrir al apoyo tecnológico. En este sentido, la actividad promueve el razonamiento simbólico y la interpretación analítica, al permitir que los estudiantes verifiquen, mediante sus propios cálculos, cómo los coeficientes determinan la posición, la forma y la orientación de la gráfica.

Formulación de la tarea

Los estudiantes deben reproducir el análisis realizado en la tarea 1.1, pero esta vez sin utilizar el simulador. Con papel y lápiz, deben determinar los valores de los coeficientes que permitan que el cohete atraviese las metas asignadas en los cuatro modos de vuelo. Este proceso requiere que los estudiantes apliquen procedimientos algebraicos para evaluar la función, identifiquen los puntos donde cambia de crecimiento a decrecimiento y describan cómo estas variaciones se reflejan en la trayectoria del cohete.

Conceptos y procedimientos implicados

Los conceptos y procedimientos implicados incluyen la identificación manual de puntos críticos, el análisis de intervalos de crecimiento y decrecimiento, la aplicación de reglas de signos y operaciones con potencias, y la verificación del comportamiento en los extremos del dominio de la función. El desarrollo de estos procedimientos promueve una comprensión más precisa de las relaciones entre los elementos algebraicos del polinomio y su representación gráfica.

Sistemas de representación

La tarea integra tres sistemas de representación: el algebraico, que se expresa en las ecuaciones polinómicas; el verbal, que se manifiesta en la justificación de los resultados y en la interpretación del contexto; y el gráfico, que se construye mediante bosquejos elaborados a mano. Esta articulación entre representaciones permite a los estudiantes transitar del lenguaje simbólico al visual y al argumentativo.

Contexto

El contexto de la tarea se enmarca en el ámbito científico, pues los estudiantes deben predecir el comportamiento del cohete en función de los valores del tiempo, al analizar la correspondencia entre el modelo físico y la función matemática que lo describe.

Recursos

La tarea requiere de recursos sencillos que promueven el trabajo manual: papel cuadriculado, lápiz, calculadora científica y una hoja de trabajo física diseñada para registrar los cálculos y las gráficas.

Agrupamiento e interacción

La tarea se desarrolla en grupos de trabajo colaborativo. El docente orienta el proceso mediante instrucciones claras, al enfatizar que no deben emplearse calculadoras gráficas ni simuladores, ya que el foco es el razonamiento algebraico. Durante la actividad, fomentamos la discusión entre los miembros del grupo y la justificación explícita de las respuestas. El profesor plantea preguntas que promueven la argumentación, tales como: ¿Por qué, si el grado del polinomio es par y el coeficiente principal negativo, la función decrece hacia la derecha?

Temporalidad
La temporalidad de la tarea se organiza de la siguiente manera: cinco minutos para recordar el objetivo general de la unidad, veinticinco minutos para la revisión de los conceptos clave, cinco minutos de descanso, cinco minutos para presentar la tarea, treinta y cinco minutos para el desarrollo en grupos, quince minutos para la retroalimentación colectiva y diez minutos para el cierre final. Esta estructura temporal busca favorecer el equilibrio entre el trabajo guiado, el razonamiento autónomo y la socialización de resultados.

Errores y ayudas
Los errores más frecuentes se relacionan con la manipulación incorrecta de expresiones algebraicas y la interpretación inadecuada de las gráficas elaboradas manualmente. Entre ellos se destacan los siguientes:

- Errores en el uso de exponentes y paréntesis al elevar términos (E41–E43).
- Confundir máximos locales con globales o ignorar puntos de inflexión (E61–E67).
- Identificar erróneamente intervalos de crecimiento o decrecimiento (E68–E71).

Los errores E41–E43 y E66–E69 se asocian a los criterios de logro que implican la interpretación de la concavidad, la localización de puntos críticos (CdL 1.8-1.11), y la distinción de comportamientos crecientes y decrecientes (CdL 1.13 y CdL.1.14). Las siguientes ayudas son relevantes para resolver la tarea 1.2 y pueden verse en el anexo 5:

- Verificar la elevación de términos y uso de paréntesis (A6–A7).
- Reforzar la importancia del término constante (A8).
- Sugerir la revisión del dominio y rango antes de graficar (A15–A17).
- Guiar la identificación de extremos y puntos de inflexión (A35–A41).
- Recordar la distinción entre grado y coeficiente principal (A26–A27).

Grafo de criterios de logro de la tarea
En la figura 7, mostramos que el grafo de criterios de logro de la tarea 1.2, mantiene la estructura del primer objetivo, pero introduce una nueva ruta de aprendizaje: el paso del razonamiento tecnológico al analítico-manual. Durante el desarrollo de la tarea 1.2, esperamos que los estudiantes adopten estrategias que integren el razonamiento algebraico con la verificación gráfica.

En primer lugar, los estudiantes deben realizar cálculos manuales de la función en distintos valores de la variable, con el fin de comprobar la coherencia de los resultados obtenidos y reconocer el comportamiento en los extremos del dominio de la función. Este proceso les permite establecer una relación directa entre los cálculos numéricos y la tendencia general del polinomio, al identificar si la gráfica crece, decrece o cambia de concavidad en determinados intervalos.

En segundo lugar, los estudiantes deben identificar los puntos máximos y mínimos de la función y explicar cómo los coeficientes influyen en la curvatura de la gráfica. Esta estrategia favorece la interpretación del papel de los coeficientes en la forma global de la función y fortalece la comprensión de los conceptos de crecimiento, decrecimiento y concavidad. Mediante estas acciones, los estudiantes construyen una visión analítica del comportamiento del polinomio, fundamentada tanto en procedimientos algebraicos como en argumentos conceptuales.

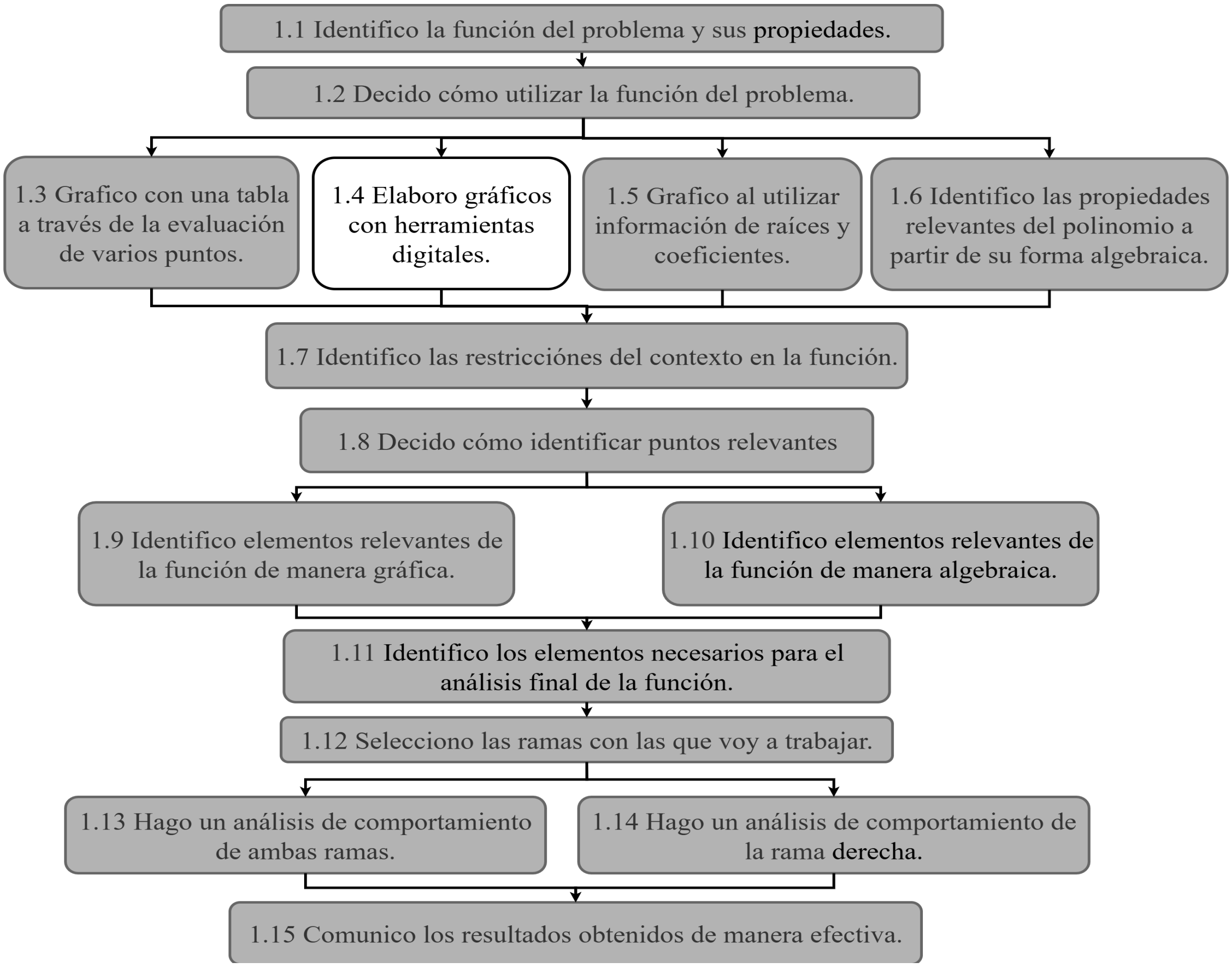

Figura 7. Grafo de criterios de logro de la tarea de aprendizaje 1.2

Actuación del profesor

El docente acompaña a los grupos, observa las estrategias y verifica que los cálculos se realicen paso a paso. También, promueve la justificación verbal de los resultados y fomenta el intercambio entre pares. En la socialización final, el educador dirige y motiva la reflexión colectiva con preguntas como las siguientes:

- ¿Qué papel cumple el signo del coeficiente principal en la forma de la curva?
- ¿Por qué tu gráfica manual difiere de la obtenida en la tarea anterior con tecnología?

Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

La tarea 1.2 es una extensión sin apoyo tecnológico. Por lo anterior, se sugiere recordar a los estudiantes los pasos al graficar manualmente antes de iniciar. Puede ser útil que el docente muestre un ejemplo completo de cálculo manual con un polinomio de segundo grado, al resaltar cómo se determinan los puntos de corte, máximos o mínimos. Es aconsejable enfatizar la relación entre la observación visual (la forma de la curva) y la explicación algebraica (el efecto de los coeficientes).

Para fortalecer la argumentación, cada grupo redacta un breve texto explicativo sobre cómo determinó los coeficientes que hacen que el cohete cruce las metas. El cierre debe centrarse en reflexionar sobre la diferencia entre resolver con tecnología y hacerlo manualmente, con la siguiente pregunta: ¿qué aprendimos sobre los cálculos y las gráficas al no usar el simulador? En la figura 7, mostramos el grafo de criterios de logro de la tarea 1.2.

Evaluación

La evaluación de esta tarea se centra en verificar si los estudiantes son capaces de reproducir manualmente el análisis y representación gráfica de polinomios al comprender el vínculo entre coeficientes y comportamiento. Entre las evidencias de logro se encuentran:

- Calcula manualmente valores de la función (C16, C31) y obtiene una representación coherente (C11, C12).
- Identifica puntos extremos (C21, C22, C27, CdL1.9–1.10) y describe correctamente la tendencia de las ramas.
- Justifica los resultados con argumentos algebraicos claros (C34, C35),

El docente puede valorar el avance al observar si el estudiante mantiene el control conceptual sin apoyo tecnológico. Un logro alto implica la capacidad de explicar con autonomía cómo los coeficientes afectan la trayectoria y un desempeño básico se reconoce cuando el estudiante solo puede replicar procedimientos sin argumentar sus efectos. Los criterios de logro más relevantes son:

- Graficar a partir de la evaluación de puntos y determinar máximos/mínimos algebraicamente (CdL1.3 / CdL1.10).
- Analizar ramas y comunicar resultados (CdL1.13–CdL1.15).

Los errores más frecuentes de esta tarea se presentan en la evaluación de la función (E41–E43); la confusión entre intervalos crecientes y decrecientes (E66–E69); y la escala inadecuada o desatención al término constante (E84–E85). En el anexo 6, incluidmos las fichas de los imprimibles y en el anexo 7, elaboramos una tabla en Excel como guía para otros colegas en la implementación de las tareas de nuestra unidad didáctica.

3. Tareas de aprendizaje del segundo objetivo

En este apartado, presentamos las tareas de aprendizaje correspondientes al segundo objetivo. Las tareas T2.1 (Selección de modelos) y T2.2 (Mejor estrategia) contribuyen al desarrollo del segundo objetivo al analizar y contrastar modelos de funciones polinómicas que describen fenómenos del mundo real, para tomar decisiones fundamentadas a partir de las diferencias y similitudes identificadas.

Las tareas 2.1 y 2.2 buscan que los estudiantes consoliden su comprensión del comportamiento de las funciones polinómicas y sean capaces de seleccionar, justificar y comparar diferentes modelos o estrategias para representar una situación. En este sentido, la tarea 2.1 se centra en la selección del modelo polinómico más adecuado para describir un fenómeno, mientras que la tarea

2.2 busca que los estudiantes analicen y valoren distintas estrategias de resolución, al identificar la más coherente y eficiente según el contexto.

A continuación, presentamos la introducción y descripción de las tareas de aprendizaje del segundo objetivo. Indicamos su intención en la unidad didáctica y su contribución a la meta de aprendizaje.

Tarea 2.1 Selección de modelos

La intención de esta tarea es que los estudiantes desarrollen la capacidad de analizar y comparar diferentes funciones polinómicas con el fin de identificar cuál de ellas se ajusta mejor a una situación contextual dada. Esta actividad busca fortalecer la comprensión conceptual y gráfica del comportamiento de las funciones, al promover el razonamiento comparativo y la interpretación de los modelos en función de los datos que representan.

Dentro de la secuencia de la unidad didáctica, esta tarea permite que los estudiantes apliquen los conocimientos adquiridos en las tareas anteriores sobre la influencia de los coeficientes, el grado y el signo en el comportamiento global de las funciones polinómicas. A continuación, presentamos los elementos de la tarea 2.1. Para resolver esta tarea, los estudiantes deben partir de un conjunto de gráficos o expresiones algebraicas que representan distintos modelos polinómicos. Se les presenta una situación (por ejemplo, el movimiento de cohetes) y deben seleccionar cuál de las funciones propuestas modela mejor el comportamiento descrito.

Conocimientos previos

Los conocimientos previos para abordar la tarea incluyen la capacidad de reconocer los elementos estructurales de un polinomio, interpretar la relación entre los coeficientes y la forma de la gráfica, y describir el comportamiento en los extremos del dominio de las ramas de la función. También se espera que los estudiantes sepan relacionar la variación de los datos con el tipo de crecimiento o decrecimiento que muestra una función.

Aportes a los objetivos

La tarea 2.1 aporta al segundo objetivo de aprendizaje al permitir que los estudiantes no solo apliquen los conocimientos adquiridos en las actividades previas (como el reconocimiento del grado, el coeficiente principal y el comportamiento en los extremos del dominio de las funciones), sino que desarrollen la habilidad de comparar y justificar la pertinencia de distintos modelos polinómicos. De este modo, la tarea contribuye al logro del objetivo porque promueve el tránsito del razonamiento algorítmico (centrado en el cálculo o representación gráfica) hacia un razonamiento analítico y argumentativo, en el que la toma de decisiones se fundamenta en relaciones entre las propiedades matemáticas y el contexto. Además, la tarea fomenta capacidades propias del pensamiento matemático como la modelación, la interpretación funcional y la argumentación, al exigir que los estudiantes expliquen por qué un modelo representa mejor el fenómeno. También favorece el desarrollo de actitudes de reflexión, colaboración y validación de ideas matemáticas en grupo.

Formulación de la tarea

Hay dos cohetes A y B. Se proporciona la trayectoria del cohete A en el cuarto modo de funcionamiento mediante un polinomio distinto para cada estudiante. El cohete B también opera en el cuarto modo, pero sus coeficientes están sin definir. El propósito de la tarea es determinar, para tres grupos de restricciones independientes, los coeficientes del polinomio del cohete B que cumplan exactamente las condiciones de cada grupo. La distancia entre dos cohetes se entiende como la diferencia vertical entre las trayectorias en un x indicado. Existen restricciones de distancia entre los cohetes en ciertos puntos del eje x.

Además de las restricciones de distancia, cada grupo de restricciones indica si, hacia el final del recorrido (al avanzar hacia la derecha del plano), el cohete B debe mantiene la misma dirección que el cohete A o toma una dirección distinta hasta el fin. La representación simbólica de la trayectoria del cohete A es $ax^3 - bx^2 + cx + d$, donde a, b, c, d son los 4 primeros números distintos de 0 de la tarjeta de identificación del estudiante. Las restricciones para cada uno de los tres grupos son las siguientes. Para el grupo 1, en el instante $x = 1$, la distancia entre ambos cohetes es menor que 5; en el instante $x = 2$, la distancia entre ambos cohetes es al menos 10; y en el instante $x = 3$, la distancia entre ambos cohetes es menor que 5 y la dirección al final es igual a la del cohete A.

Para el grupo 2, en el instante $x = 10$, la distancia entre ambos cohetes es menor que m3; en el instante $x = 50$, la distancia entre ambos cohetes es al menos m4; en el instante $x = 100$, ambos cohetes se encuentran a la misma altura. La dirección al final es distinta a la del cohete A. Para el grupo 3, en el intervalo $x \in [d1, e1]$, la distancia entre cohetes se mantiene por debajo de m5; en el instante $x = f1$, la distancia entre ambos cohetes es al menos m6; y en el instante $x = g1$, ambos cohetes se encuentran a la misma altura y la dirección al final es la que el docente especifica si debe ser igual o distinta a la del cohete A.

Los entregables son los coeficientes del polinomio del cohete B que satisfacen todas las restricciones del grupo de restricciones y la imagen del recorrido de los cohetes. Para eso, utiliza el siguiente recurso: https://nolopez338.github.io/juego_cohete/o2/index.html

La formulación de la tarea orienta a los estudiantes a analizar cada una de las funciones dadas y describir sus características principales (raíces, puntos críticos, grado y comportamiento al infinito) para comparar las funciones polinómicas entre sí, al identificar semejanzas y diferencias en su forma y en su adecuación al contexto y al justificar cuál de las funciones representa mejor la situación y explicar las razones que sustentan la elección.

Conceptos y procedimientos previos

En el desarrollo de la tarea, los conceptos y procedimientos implicados son el análisis del signo del coeficiente principal, la interpretación del grado, la identificación de máximos y mínimos relativos, la determinación de intersecciones con los ejes y el estudio del comportamiento en los extremos del dominio.

1Sistemas de representación

Los sistemas de representación que se movilizan son el simbólico (ecuaciones), el gráfico (representación visual) y el verbal (argumentación y justificación).

Contexto

La tarea plantea una situación en la que los estudiantes deben analizar diferentes modelos matemáticos (funciones polinómicas) que representan fenómenos observables, como la trayectoria de un objeto. En este sentido, involucra la comprensión de relaciones cuantitativas y el uso de las matemáticas para explicar o predecir comportamientos en fenómenos naturales o experimentales, lo que corresponde al contexto científico.

Recursos

Los recursos empleados incluyen el enunciado del problema con las tres funciones, papel cuadriculado, lápiz, calculadora científica y, opcionalmente, software de graficación para la verificación final.

Agrupamiento e interacciones

Recomendamos el trabajo en parejas o grupos pequeños, para favorecer la comparación de ideas y la construcción colectiva de argumentos.

Instrucciones clave del profesor

El docente orienta el diálogo con preguntas como las siguientes: ¿qué rasgos del modelo justifican tu elección?, ¿cómo influye el coeficiente principal en el comportamiento de la función? y ¿por qué el modelo elegido se ajusta mejor al fenómeno descrito?

2Temporalidad

La temporalidad sugerida es de 60 minutos: 10 minutos de introducción y contextualización, 35 minutos de análisis grupal y 15 minutos de socialización y cierre.

Errores y ayudas

Los errores más frecuentes (ver anexo 3) están relacionados con la dificultad para establecer correspondencias entre las características algebraicas de las funciones y la descripción del contexto. Algunos estudiantes tienden a

- Escoger la función al basarse únicamente en la apariencia de la gráfica (E20, E70).
- Confundir el grado del polinomio con el número de raíces visibles (E23).
- Reconocer de manera incorrecta el comportamiento en los extremos del dominio según el signo del coeficiente principal. (E25, E73).

Las ayudas consisten en guiar al estudiante a relacionar la exploración visual con la comprensión algebraica del modelo (A22, A25, A26). Se aplican de manera gradual y progresiva, de modo que el estudiante mantenga su autonomía en el razonamiento mientras integra ambas formas de análisis. A continuación, presentamos ayudas relevantes para esta tarea:

- Sugerir la observación del número de cambios de concavidad (A22).
- La verificación del papel del coeficiente principal (A25).
- La elaboración de una tabla de valores que confirme la coherencia entre la función y el contexto (A26).

Grafo de criterios de logro de la tarea

En la figura 8, mostramos el grafo de criterios de logro del objetivo dos, y sobre este resaltamos el grafo de criterios de logro de la tarea 2.1. Entre los criterios de logro (ver anexo 4) más relevantes se encuentran los siguientes:

- Decido cómo comparar tasas de crecimiento y realizo comparaciones gráfica o algebraicamente (CdL.2.7–2.9). Estos criterios de logro constituyen el núcleo de la comprensión funcional, al relacionar la variación de las funciones y reconocer cuál crece más rápidamente en un intervalo.
- Decido cómo identificar cuándo una función es mayor que otra y lo verifico gráfica o algebraicamente (CdL 2.10-2-12). Estos criterios de logro permiten determinar relaciones de predominio entre funciones, lo que es esencial para justificar qué modelo representa mejor el fenómeno.
- Identifico puntos relevantes para el análisis final, tomo decisiones y comunico resultados efectivamente (CdL 2.14-2-17). Estos criterios de logro corresponden al cierre del proceso, donde el estudiante sintetiza, argumenta y comunica su elección del modelo más adecuado.

Durante el desarrollo de la tarea, se espera que los estudiantes adopten dos estrategias complementarias de resolución. La primera consiste en que el estudiante comienza al interpretar la situación y decide cómo hallar las intersecciones al observar las gráficas para comparar tasas de crecimiento visualmente e identificar cuál función es mayor al observar el predominio en el plano. Finalmente, selecciona el modelo y comunica los resultados. Esta es una estrategia exploratoria y visual, muy útil para interpretar tendencias generales y justificar decisiones de forma intuitiva. La segunda estrategia implica que el estudiante establece relaciones entre datos y funciones para encontrar intersecciones al resolver igualdades entre expresiones y comparar tasas de crecimiento por medio del análisis de coeficientes y determinar cuándo una función supera a otra.

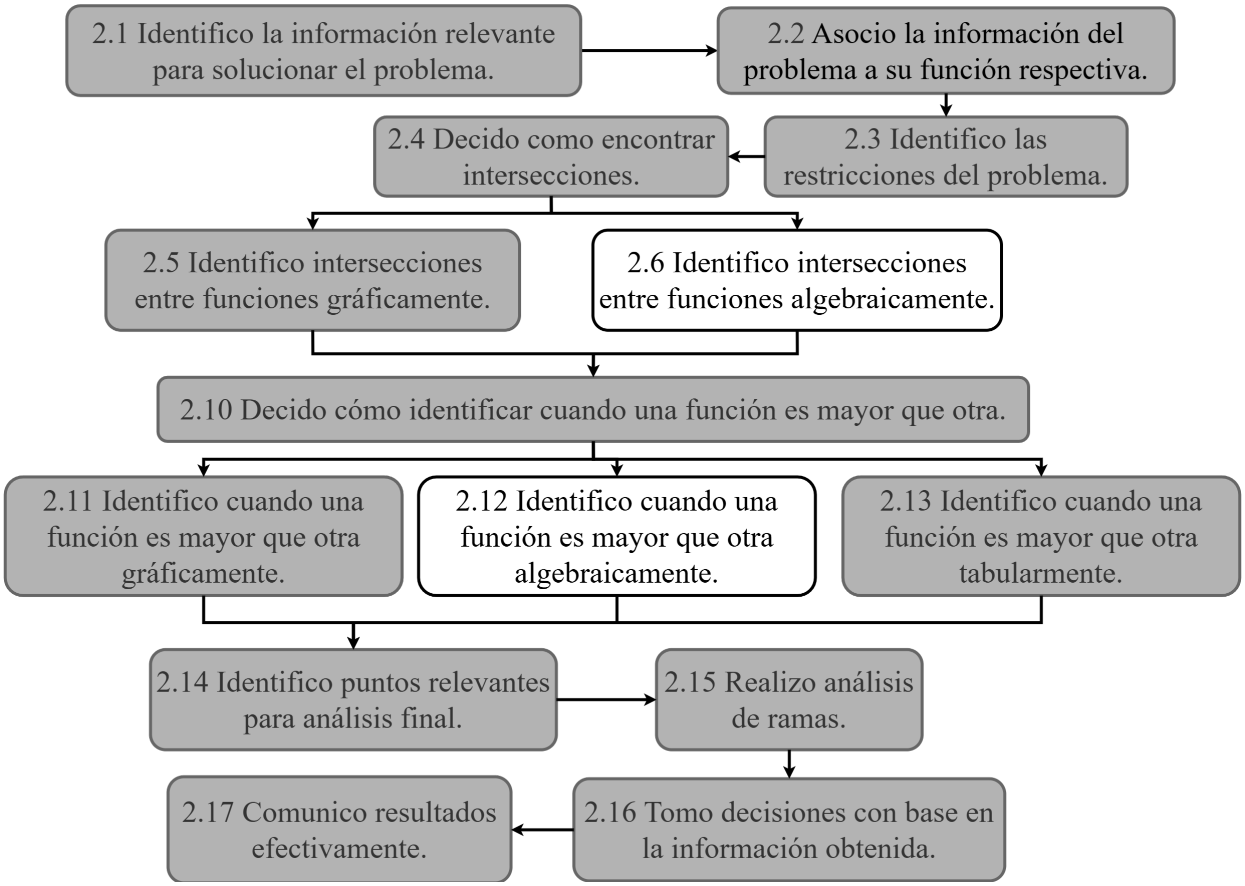

Figura 8. Grafo de criterios de logro de la tarea de aprendizaje 2.1

Actuación del profesor

Durante la implementación de la tarea, el profesor se desempeña como mediador del razonamiento comparativo de los estudiantes. Su actuación debe centrarse en orientar la reflexión sin anticipar los resultados, al promover que los estudiantes descubran por sí mismos las relaciones entre los modelos propuestos y el fenómeno descrito.

Al comenzar la actividad, el docente debe recordar con los estudiantes lo aprendido antes, especialmente qué significan el grado y el coeficiente principal de un polinomio, y cómo se comportan las funciones cuando crecen hacia el infinito. Puede iniciar con la siguiente pregunta breve y detonante: ¿qué elementos de la función nos permiten saber cómo se comportará su gráfica sin verla? Luego, presenta la situación y los tres modelos polinómicos propuestos, al asegurarse que todos comprendan las condiciones del problema.

Durante la fase de desarrollo, el profesor adopta una actitud de acompañamiento activo, recorre los grupos, observa sus procedimientos y realiza intervenciones puntuales que orientan la reflexión sin dar respuestas. Algunas preguntas que puede emplear para guiar el trabajo son las siguientes:

- ¿Qué características del modelo justifican que represente mejor la situación?

- ¿Qué diferencias encuentras entre el comportamiento gráfico y el algebraico de estas funciones?
- ¿Qué pasaría si intercambiamos los signos de los coeficientes? ¿El modelo seguiría representando el fenómeno?

Cuando los grupos se enfrentan a errores o bloqueos, el profesor puede recordar cómo se interpreta el grado de un polinomio o pedir que construyan una tabla de valores para comprobar sus conjeturas.

En la etapa de cierre, el profesor coordina una puesta en común en la que cada grupo expone su elección de modelo y la justifica. Es importante que el docente fomente la comparación de razonamientos, no solo de resultados, con preguntas como las siguiente:

- ¿Qué criterios utilizaron para decidir cuál modelo es más adecuado?
- ¿Hubo grupos que eligieron el mismo modelo por razones diferentes?
- ¿Qué aprendimos sobre cómo los coeficientes afectan el comportamiento de las funciones?

Finalmente, el profesor realiza una síntesis colectiva al destacar los criterios matemáticos que permiten seleccionar un modelo adecuado y al valorar la importancia de justificar las decisiones tomadas. Este cierre consolida el sentido de la tarea y conecta con el objetivo de la unidad que se refiere a fortalecer la capacidad de los estudiantes para analizar, comparar y argumentar sobre funciones polinómicas en distintos contextos.

Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

Durante la implementación de esta tarea, se identificaron varios aspectos que conviene tener en cuenta para orientar el trabajo docente y favorecer que los estudiantes logren los aprendizajes esperados. Es recomendable que el profesor inicie la tarea al dedicar unos minutos a explicar el contexto de la situación y a asegurar que todos los estudiantes comprendan el significado de las variables involucradas. El docente debe aclarar que el propósito no es solo comparar curvas, sino analizar cómo los parámetros del modelo polinómico explican o predicen el comportamiento del fenómeno mediante una breve conversación inicial en la que los estudiantes interpreten verbalmente el contexto para ayudar a activar los conocimientos previos y orientar el sentido de la tarea.

Recomendamos mantener el trabajo en grupos pequeños (de tres o cuatro estudiantes), ya que esta modalidad favorece el intercambio de ideas y la comparación de argumentos. En las implementaciones previas, evidenciamos que la discusión entre pares permitió a los estudiantes contrastar diferentes formas de razonar (gráficas, algebraicas o tabulares). El profesor puede asignar roles dentro del grupo (como lector, graficador, analista y relator) para promover la participación equitativa y evitar que un solo estudiante dirija la solución.

Durante el desarrollo de la tarea, sugerimos el uso de papel cuadriculado y calculadora científica para promover el análisis y la comparación de modelos. Sin embargo, recomendamos que el profesor disponga también de una copia impresa o proyectada de las tres funciones polinómicas con sus respectivas gráficas, de modo que los estudiantes puedan visualizar de forma simultánea los comportamientos de las funciones y realizar comparaciones más precisas.

En grupos que presentan dificultades con la visualización, el docente puede permitir breves consultas en software gráfico solo en la etapa de verificación final, al enfatizar que el razonamiento principal debe ser manual y argumentado. Esta estrategia puede ayudar a fortalecer la confianza en las propias conclusiones y a verificar la coherencia entre los razonamientos algebraicos y las observaciones visuales.

El profesor debe promover interacciones dialógicas que conduzcan a la argumentación y la justificación. Asimismo, se sugiere que el profesor evite confirmar o negar directamente las respuestas de los grupos. En lugar de ello, puede redirigir las discusiones hacia la verificación entre pares, al promover el uso de argumentos matemáticos. Para prevenir errores frecuentes en la interpretación del grado del polinomio, en la determinación de intersecciones y en la identificación del comportamiento en los extremos del dominio, el profesor puede recordar cómo se determina el comportamiento de una función a partir del grado y del signo del coeficiente principal y pedir que los estudiantes elaboren una tabla de valores para comprobar si los puntos calculados corresponden con lo esperado en la gráfica.

En la socialización final, recomendamos que cada grupo presente su elección de modelo y la justifique públicamente, al enfatizar en los criterios usados para la selección. El profesor debe guiar la discusión colectiva para que los estudiantes identifiquen los elementos comunes entre las estrategias exitosas y reconozcan los razonamientos que los llevaron a decisiones correctas o erróneas. Una práctica sugerida es que el docente pida a los estudiantes que elaboren un resumen escrito breve donde expliquen qué modelo seleccionaron, qué características lo hicieron más adecuado y qué aprendizajes obtuvieron del proceso de comparación.

Evaluación

El logro de las metas de esta tarea puede identificarse a partir de las capacidades de los estudiantes para identificar, analizar, comparar y justificar modelos polinómicos (ver anexo 1). Las evidencias de aprendizaje surgen de los siguientes aspectos:

- Reconoce las características del modelo polinómico (grado, coeficiente principal, forma de la gráfica) (C2-4, C9)
- Utiliza diferentes registros (algebraico, gráfico, tabular) para expresar el comportamiento de la función (C10-12)
- Examina el comportamiento de los modelos, considerando crecimiento, decrecimiento y comportamiento en los extremos del dominio (C17-20)
- Contrasta las propiedades de distintos modelos para determinar cuál se ajusta mejor al contexto (C13-16)
- Argumenta la elección del modelo con base en propiedades matemáticas y en la coherencia con el fenómeno descrito (C36-39)

El propósito principal de la evaluación es determinar si los estudiantes son capaces de analizar, comparar y justificar la pertinencia de diferentes modelos polinómicos, con base en argumentos matemáticos y en la interpretación de la situación. Esto implica observar cómo los estudiantes articulan representaciones (gráfica, algebraica y verbal), cómo utilizan los conceptos del grado y del coeficiente principal y cómo sustentan sus decisiones a partir de evidencia razonada. Según el grafo de criterios de logro de la tarea 2.1, los criterios de logro más relevantes para la evaluación son los siguientes:

- Comparo distintos modelos en relación con el contexto planteado (CdL.11).

- ♦ Verifico el ajuste del modelo al fenómeno descrito mediante procedimientos gráficos o algebraicos (CdL.12).
- ♦ Selecciono el modelo que considero más adecuado y justifico mi elección (CdL.13).
- ♦ Explico mi razonamiento utilizando distintos registros de representación (CdL.14).
- ♦ Reviso y valido la elección del modelo contrastándola con la de otros grupos (CdL.15).

Entre los errores más frecuentes observados en esta tarea, se destacan aquellos que se relacionan con confusiones conceptuales, procedimientos incompletos o interpretaciones inadecuadas del comportamiento de los polinomios (E52-E63).

Tarea 2.2 Mejor estrategia

La segunda tarea de aprendizaje del segundo objetivo, denominada mejor estrategia, tiene como propósito que los estudiantes compararen y justifiquen diferentes estrategias para resolver una situación modelada con funciones polinómicas. A partir de los aprendizajes construidos en las tareas anteriores, los estudiantes deben analizar y determinar cuál procedimiento resulta más adecuado y eficiente para representar o resolver el problema planteado.

El propósito central de esta tarea es consolidar la comprensión del comportamiento de las funciones polinómicas en contextos aplicados y fomentar la argumentación matemática como medio para justificar decisiones. Esta tarea cierra el ciclo de actividades del segundo objetivo de aprendizaje y permite valorar si los estudiantes logran integrar los conocimientos algebraicos, gráficos y contextuales adquiridos, al aplicarlos en la selección de métodos y modelos pertinentes.

Para abordar esta tarea, los estudiantes deben enfrentarse a una situación que puede resolverse de diversas maneras, todas ellas relacionadas con el uso de funciones polinómicas. Se les presentan diferentes estrategias de solución, algunas de tipo gráfico y otras algebraicas, y deben analizar cuál de ellas resulta más adecuada según la información disponible y el propósito del problema.

Conocimientos previos

Los requisitos previos para desarrollar la tarea incluyen el reconocimiento de los elementos estructurales del polinomio, la comprensión del efecto de los coeficientes sobre la gráfica y la habilidad para interpretar el comportamiento en los extremos del dominio de las funciones. Además, los estudiantes deben haber trabajado previamente en la identificación de máximos, mínimos y raíces, y en la comparación entre distintos modelos polinómicos.

Formulación de la tarea

Se tienen dos cohetes, A y B. El cohete A opera en el cuarto modo de funcionamiento y su trayectoria está representada por un polinomio dado por el docente en la hoja de trabajo. El cohete B también opera en el mismo modo, pero sus coeficientes deben ser determinados por los estudiantes. Para dos grupos de restricciones independientes, el propósito es determinar los coeficientes del polinomio del cohete B que cumplan con todas las condiciones de cada grupo, realizando el trabajo únicamente con cálculos manuales y el apoyo de la calculadora.

La distancia entre los cohetes en un instante dado corresponde a la diferencia vertical entre sus trayectorias en ese valor de x. Además de las restricciones de distancia, cada grupo especifica si, hacia el final del recorrido (al avanzar hacia la derecha del plano), el cohete B debe mantener la misma dirección que el cohete A o tomar una dirección distinta.

Las restricciones para el grupo 1 son las siguientes: en el instante $x = a1$, la distancia entre ambos cohetes es menor que $m1.$;en el instante $x = b1$, la distancia entre ambos cohetes es al menos $m2$; y, en el instante $x = c1$, ambos cohetes se encuentran a la misma altura. La dirección al final es igual a la del cohete A.

Las restricciones para el grupo 2 son los siguientes: en el instante $x = a2$, la distancia entre ambos cohetes es menor que m3; en el instante $x = b2$, la distancia entre ambos cohetes es al menos m4; y, en el instante $x = c2$, ambos cohetes se encuentran a la misma altura. La dirección al final es distinta a la del cohete A.

Cada grupo debe escribir de manera explícita los coeficientes del polinomio del cohete B que cumplen con todas las restricciones, mostrar los cálculos realizados, al justificar cómo se verificó cada restricción, y entregar la resolución en papel, con procedimientos claros y ordenados.

La formulación de la tarea orienta a los estudiantes a analizar cada función para identificar sus características principales (raíces, puntos críticos y comportamiento en los extremos del dominio); evaluar los modelos al utilizar diferentes estrategias como la comparación de valores, análisis gráfico o interpretación de los coeficientes; y elegir la estrategia que les parezca más adecuada para justificar su decisión y argumentar su selección tanto de manera verbal como escrita, sustentando sus conclusiones en las propiedades matemáticas del polinomio y en la coherencia con el contexto planteado.

Aportes al objetivo

La tarea 2.2 aporta al segundo objetivo al reflexionar sobre por qué un método resulta más apropiado que otro, al comparar los efectos de las decisiones algebraicas, gráficas o numéricas sobre el resultado final. La tarea contribuye así al desarrollo de competencias como la resolución de problemas, la argumentación y la toma de decisiones fundamentadas, al tiempo que fortalece la autonomía y la capacidad de justificar los propios procesos de pensamiento matemático. Además, refuerza las expectativas afectivas al incentivar la confianza en el razonamiento personal y la valoración del trabajo colaborativo como espacio de confrontación y validación de ideas.

Conceptos y procedimientos implicados

Los conceptos y procedimientos implicados incluyen el análisis del grado y del signo del coeficiente principal, la identificación de intervalos de crecimiento y decrecimiento, la localización de máximos y mínimos, y la interpretación del modelo más adecuado según los datos o el contexto.

Sistemas de representación

Los sistemas de representación que se movilizan en esta tarea son el algebraico (al comparar y operar con las expresiones polinómicas dadas), el gráfico (al representar las funciones o analizar sus curvas), el verbal (al formular argumentaciones justificadas sobre la selección de la mejor estrategia), y el numérico, al calcular y comparar valores de las funciones en puntos determinados.

Contexto

El contexto corresponde al ámbito científico y tecnológico, pues la tarea está enmarcada en un proceso de modelación en el que los estudiantes deben justificar decisiones sobre la adecuación de los modelos.

Recursos

Los materiales y recursos que se utilizan incluyen las expresiones de los modelos propuestos, papel milimetrado o cuadriculado, lápiz, calculadora y, opcionalmente, software gráfico para la verificación final.

Agrupamiento e interacción

La tarea se desarrolla en grupos pequeños, lo que permite contrastar diferentes estrategias de razonamiento. El docente orienta la discusión y promueve la comparación de ideas. Durante el trabajo, los estudiantes deben argumentar por qué una estrategia es más efectiva que otra para describir el fenómeno, al evaluar sus ventajas y limitaciones.

Instrucciones clave para el profesor

En esta tarea, el docente cumple un papel mediador que favorece la reflexión sobre la pertinencia de los métodos y la justificación de las decisiones. En la introducción, el profesor recuerda a los estudiantes que existen múltiples formas de abordar un problema y que el objetivo es determinar cuál estrategia resulta más coherente con el contexto y los principios matemáticos implicados.

Durante el desarrollo, el profesor observa las interacciones, interviene con preguntas orientadoras y promueve la comparación entre procedimientos. Su labor consiste en hacer visible el razonamiento de los estudiantes y en resaltar la relación entre las estrategias empleadas y los resultados obtenidos. En la etapa final, el docente conduce la discusión colectiva para comparar las estrategias propuestas por los grupos y destacar los criterios que hacen que una estrategia sea mejor.

Temporalidad

La temporalidad sugerida es de 70 minutos distribuidos en las siguientes tres fases: 10 minutos para la presentación de la tarea y el contexto, 45 minutos para el trabajo en grupo y 15 minutos para la socialización de resultados y cierre.

Errores y ayudas

Los errores comunes (ver anexo 3) se relacionan con la dificultad para justificar la elección de la estrategia o para vincular los resultados con el contexto. Entre los más frecuentes, se encuentran los siguientes:

- Seleccionar una estrategia solo por conveniencia visual o rapidez (E61–E63).
- Suponer que una única estrategia conduce al resultado, sin considerar alternativas (E66).
- Confundir raíces con máximos o mínimos (E67–E69).
- No considerar el efecto del signo del coeficiente principal en la forma de la gráfica (E70–E73).

Las ayudas buscan guiar la reflexión sobre la coherencia y validez del procedimiento. El docente puede sugerir la comparación de resultados entre estrategias (A35–A37), recordar la influencia del coeficiente principal (A22–A25), pedir la elaboración de una tabla de valores para comprobar la correspondencia con el contexto (A18–A20), o solicitar que los estudiantes expliquen por qué su estrategia es más eficaz (A40–A41).

3Grafo de criterios de logro de la tarea

El grafo de la tarea 2.2 muestra una red de criterios organizados en torno a la toma de decisiones, la comparación de estrategias y la justificación argumentada. Los criterios de logro más relevantes de la tarea 2.2 son las siguientes.

Identifico estrategias posibles para resolver el problema (CdL. 2.18). Este criterio de logro marca el punto de partida, en el que el estudiante reconoce que existen varias maneras de abordar la situación y las diferencia conceptualmente.

Selecciono la estrategia que considero más eficiente (CdL 2.19). Este criterio de logro representa una decisión consciente: elegir el método que mejor se ajusta a la información disponible y a la naturaleza del problema.

Aplico la estrategia elegida para resolver el problema (CdL 2.20). Este criterio de logro supone poner en práctica los procedimientos algebraicos, gráficos o numéricos correspondientes.

Comparo los resultados obtenidos con los de otras estrategias (CdL 2.21). Este criterio de logro constituye el núcleo analítico de la tarea: evaluar y contrastar los métodos, observando ventajas y limitaciones.

Justifico por qué la estrategia seleccionada es la más adecuada (CdL 2.22). Este es el criterio central de aprendizaje, pues requiere argumentar con base en las propiedades del polinomio y en la coherencia contextual por qué un método resulta más eficaz.

Comunico los resultados y conclusiones del análisis (CdL 2.23). Este criterio de logro cierra el proceso con la comunicación de la decisión y de las razones que la sustentan, tanto de forma oral como escrita.

Estos criterios reflejan la progresión desde el reconocimiento y selección de estrategias hasta la argumentación y validación de resultados, que es el objetivo cognitivo fundamental de esta tarea. Del análisis del grafo, tal como se muestra en la figura 9, se desprenden tres estrategias principales de resolución, que representan distintos niveles de formalización y de integración de representaciones.

En la primera estrategia, el estudiante utiliza la representación visual de las funciones para observar comportamientos, intersecciones o puntos de cambio para comparar las gráficas resultantes de las diferentes estrategias y elegir aquella que mejor se ajusta a la situación descrita. Esta es una estrategia exploratoria, que facilita la comprensión conceptual, pero puede carecer de rigor algebraico.

En la segunda estrategia, el estudiante emplea procedimientos algebraicos o simbólicos (igualación, derivación, análisis de coeficientes) para resolver la situación con cada estrategia para evaluar la precisión, consistencia y generalidad de los resultados obtenidos y comparar la validez de los métodos desde una perspectiva formal. Esta es la estrategia más rigurosa y sistemática; evidencia un pensamiento estructural y reflexivo.

En la tercera estrategia, el estudiante evalúa valores puntuales de las funciones en una tabla o con calculadora, y compara resultados de manera empírica. Combina observación gráfica con comprobación numérica para justificar su elección. Esta es una estrategia intermedia entre la intuición y la formalización, propia de estudiantes en transición hacia un razonamiento algebraico consolidado.

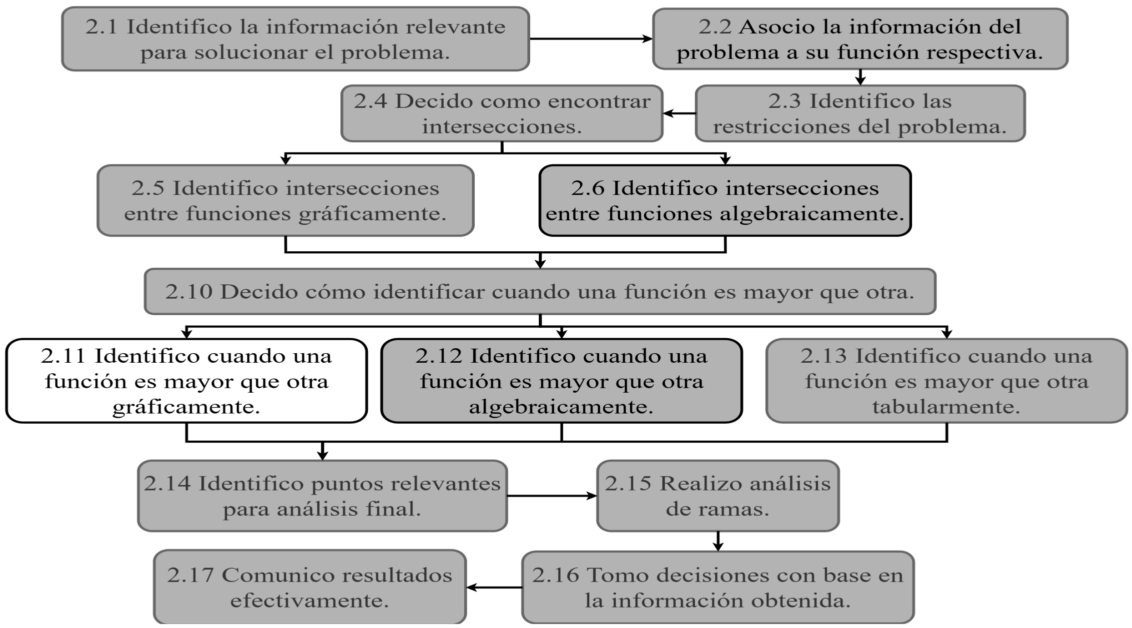

Figura 9. Grafo de criterios de logro de la tarea de aprendizaje 2.2

Los errores más frecuentes que aparecen en la tarea 2.2 están relacionados con la evaluación inadecuada de las estrategias y la dificultad para justificar la decisión final, y se presentan a continuación:

- ♦ Realiza procedimientos paso a paso sin verificar si el método elegido corresponde al tipo de función o problema, y no contrasta los resultados con el contexto (E61–E63).
- ♦ Utiliza siempre el mismo procedimiento, incluso cuando se le presentan situaciones donde otros enfoques podrían ser más eficientes o apropiados, y descarta o ignora alternativas de resolución (E66).
- ♦ Mezcla los pasos para hallar máximos, mínimos o raíces con su significado (E67–E69).
- ♦ Realiza los cálculos sin tomar en cuenta si el coeficiente principal es positivo o negativo, lo que lo lleva a interpretar de forma incorrecta la apertura, sentido o comportamiento global del polinomio (E70–E73).

El grafo de criterios de logro de la tarea 2.2 de la figura 9, permite identificar dos caminos principales de aprendizaje, con un punto de convergencia en la toma de decisiones y la justificación.

En el primer camino, el estudiante inicia al identificar posibles estrategias (CdL.2.18), prueba una de ellas de forma intuitiva o visual (CdL.2.20), y contrasta sus resultados con los de otras (CdL.2.21). Su aprendizaje se centra en la experimentación y observación, con un tránsito hacia la argumentación parcial. Puede culminar en la comunicación de resultados (CdL.2.23) sin una justificación formal completa. En el segundo camino, el estudiante parte también de la identificación de estrategias (CdL.2.18), pero selecciona deliberadamente una que considera más eficiente (CdL.2.19), la aplica formalmente (CdL.2.20) y compara los resultados (CdL.2.21). Luego, justifica su elección con base en criterios matemáticos (CdL.2.22) y comunica sus conclusiones (2.23). Este camino implica un razonamiento más estructurado, en que el aprendizaje se consolida en la capacidad de evaluar y justificar la pertinencia de los métodos.

Actuación del profesor

Durante la implementación de esta tarea, el profesor debe desempeñar un rol de mediador reflexivo, al orientar a los estudiantes hacia la comparación crítica de estrategias matemáticas y la argumentación sobre la elección de la más adecuada. La intervención docente no se limita a supervisar la ejecución, sino que busca generar un espacio de análisis y diálogo en el que los estudiantes expliciten y contrasten sus razonamientos. A partir del enunciado del problema, el docente plantea las siguientes preguntas que permitan activar los conocimientos previos: ¿de cuántas formas distintas podríamos resolver esta situación? y ¿qué criterios usarían para decidir cuál método es mejor?

Estas preguntas iniciales invitan a los estudiantes a reconocer que existen varias estrategias posibles y que la meta de la tarea no es solo encontrar una respuesta correcta, sino analizar y justificar el procedimiento más pertinente. Durante el trabajo en grupos, el profesor es orientador porque escucha, pregunta, provoca el contraste de ideas y evita resolver el problema por los estudiantes, al permitir que sean ellos quienes construyan el argumento de por qué una estrategia es más adecuada. En la etapa final, el profesor organiza una puesta en común en la que los grupos exponen las estrategias empleadas y las razones de su elección. El docente debe fomentar que los estudiantes escuchen y comparen los razonamientos de sus compañeros, al resaltar que diferentes caminos pueden ser válidos si están bien argumentados.

Sugerencias metodológicas y aclaraciones de la tarea

Antes de iniciar la tarea 2.2, el profesor debe dejar explícito que el objetivo no es simplemente aplicar una fórmula o hallar un resultado, sino comparar procedimientos y argumentar por qué uno resulta más adecuado que otro. El foco de la tarea 2.2 está en la evaluación de estrategias de resolución. Por ello, es importante que el docente formule preguntas iniciales como ¿qué significa que una estrategia sea mejor? El docente debe asegurarse que los estudiantes comprendan en qué consiste cada una de las estrategias presentadas en el problema. El profesor puede pedir a los estudiantes que describan oralmente, con sus propias palabras, qué hace cada estrategia, qué información utiliza y qué tipo de razonamiento implica (gráfico, algebraico o numérico).

El trabajo en grupos pequeños debe centrarse en la discusión y contraste de estrategias, más que en el cálculo mecánico. El docente puede proponer que cada grupo analice una estrategia diferente y, tras un tiempo determinado, realice una puesta en común para comparar resultados y razonamientos. Finalmente, se recomienda que el profesor solicite una reflexión escrita individual en la que cada estudiante explique qué aprendió sobre su forma de razonar y cómo puede mejorar su manera de elegir estrategias en futuros problemas.

Evaluación

La tarea 2.2 tiene como propósito que los estudiantes analicen distintas formas de resolver una misma situación polinómica, comparen los procedimientos empleados y justifiquen cuál de ellos resulta más eficiente o coherente con el contexto. Su evaluación se orienta a identificar si los estudiantes logran valorar críticamente los procesos de resolución y argumentar su elección con fundamentos matemáticos. Las capacidades (ver anexo 1) implicadas son C55, C56, C57 y C58, que remiten al razonamiento algebraico, la comparación y justificación de estrategias y la comunicación matemática de conclusiones. En esta tarea, los estudiantes deben no solo aplicar un procedimiento correcto, sino reflexionar sobre por qué una estrategia resulta más adecuada, al evaluar sus ventajas y limitaciones.

Los criterios de logro (ver anexo 4) asociados corresponden a los CdL 2.18 a 2.23, que describen la secuencia cognitiva desde la identificación de estrategias posibles hasta la justificación y comunicación del razonamiento. En particular, los criterios de logro 2.19, 2.21 y 2.22 son los más relevantes para la evaluación, pues evidencian el tránsito del estudiante desde la comparación de métodos hacia la argumentación de la elección final. El logro se reconoce cuando los estudiantes comparan estrategias con sentido matemático, verifican resultados y justifican con argumentos coherentes su selección.

3. EXAMEN FINAL

El examen final fue diseñado para evaluar los dos objetivos de la unidad didáctica, al cumplir con la restricción institucional de que al menos el 70% de las preguntas sean de opción múltiple. El examen final (ver anexo 9) consta de 7 preguntas que abordan los objetivos de la unidad didáctica. Para evaluar el primer objetivo se dispone de dos preguntas de opción múltiple y una pregunta abierta. La evaluación del segundo objetivo comprende dos preguntas de opción múltiple y dos preguntas abiertas.

La valoración del examen se realiza al analizar los criterios de logro activados por los estudiantes en sus respuestas. Algunos ejemplos relevantes para evaluar el objetivo 1 comprenden el criterio de logro CdL 1.1, al utilizar las propiedades del coeficiente principal y el grado para determinar el comportamiento en los extremos del dominio de la función (evaluada en las preguntas P1y P2) y el criterio de logro CdL 1.3, al interpretar el significado de las ramas del polinomio en el contexto de la tarea (evaluada en la pregunta P3).

Por ejemplo, en la segunda pregunta, hay tres parlantes que tienen diferentes capacidades de potencia según la frecuencia de onda a la que emiten. Entonces, la potencia la podemos describir como: rojo $(-\frac{3}{2}x^2 + 5x + 1)$; verde $(\frac{6}{100}x^3 - \frac{2}{10}x^2 + 1)$; $a$zul $(-\frac{11}{100}x^3 + \frac{6}{10}x^2 + \frac{4}{10}x + 1)$. La potencia total está dada en Watts y x representa la frecuencia en KHz.

Posteriormente, les presentamos a los estudiantes cuatro opciones de gráficas y ellos deben seleccionar la gráfica correcta asociada a estas funciones polinómicas. El procedimiento para resolver la segunda pregunta se resume en analizar el comportamiento de la gráfica en sus extremos (comportamiento final), que es la característica más importante de una función polinómica.

Este análisis se realiza sin necesidad de dibujar la gráfica completa, solo observando la parte dominante de la función. De cada función polinómica, solo necesita fijarse en el término con el exponente más grande. Una vez identificado el término principal, se analiza su exponente (grado) y su signo (coeficiente principal) para determinar hacia dónde apuntan los extremos de la gráfica tal como se muestra en la tabla 9.

Tabla 9

Determinación del comportamiento final de las funciones polinómicas de la segunda pregunta

Parlante (Color)	Grado	Coeficiente principal	Comportamiento final
Rojo	2 (Par)	Negativo	Ambas ramas van hacia abajo.

Tabla 9

Determinación del comportamiento final de las funciones polinómicas de la segunda pregunta

Parlante (Color)	Grado	Coeficiente principal	Comportamiento final
Verde	3 (Impar)	Positivo	La rama derecha va hacia arriba y la izquierda hacia abajo.
Azul	3 (Impar)	Negativo	La rama derecha va hacia abajo y la izquierda hacia arriba

El último paso es observar las opciones de gráficas y elegir aquella en la que la línea de cada color coincida con la tendencia de sus extremos establecida en el análisis: la gráfica roja debe ser la que termina y comienza en la parte inferior; la gráfica verde debe ser la que sube hacia la derecha y baja hacia la izquierda; y la gráfica azul debe ser la que baja hacia la derecha y sube hacia la izquierda. Por lo tanto, la selección correcta era la opción A, tal como se muestra en la figura 10.

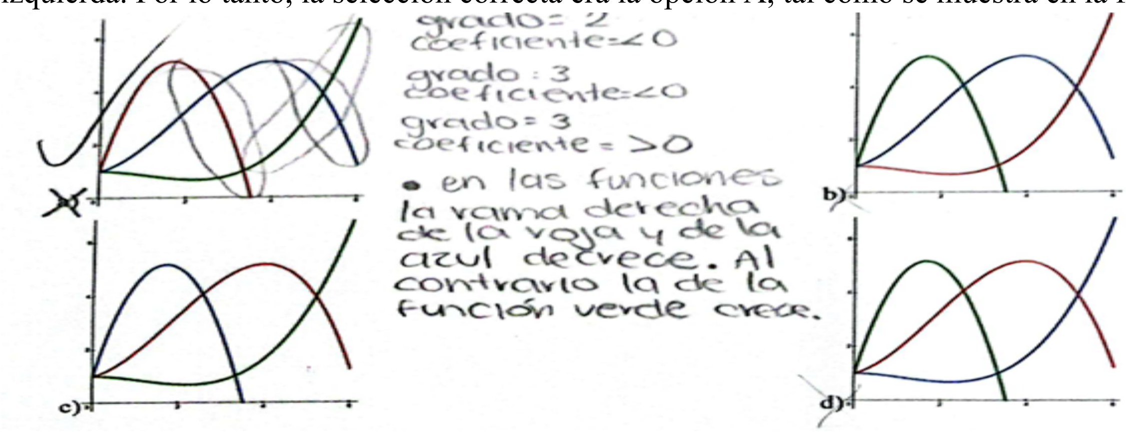

Figura 10. Selección de la respuesta correcta del examen por parte de una estudiante de once

Los criterios de logro para evaluar el objetivo 2, comprenden el criterio de logro CdL. 2.1, al comparar dos funciones polinómicas para determinar cuál tiene mayor crecimiento a largo plazo (evaluada en la pregunta P4); el criterio de logro CdL 2.4, al resolver inecuaciones o sistemas de ecuaciones para hallar puntos de intersección o intervalos en los que una función domina a otra (evaluadas en las preguntas P5, P6); y el criterio de logro CdL 2.5, al esbozar el gráfico manualmente y justificarlo con el análisis algebraico (evaluada en la pregunta P7). El examen está diseñado para ser aplicado en una sesión de 105 minutos. Recomendamos permitir la calculadora básica para cálculos aritméticos. En las preguntas abiertas (P3, P5, P7), la valoración debe dar un peso significativo a la justificación contextual y algebraica (capacidades de comunicación y razonamiento) por encima de la respuesta numérica final. El error en la justificación implica una activación parcial del criterio de logro, incluso si la respuesta final es correcta.

4. Conclusiones

Esta unidad didáctica se estructura en torno a una secuencia de tareas de aprendizaje, agrupadas en dos objetivos. El objetivo 1 busca que los estudiantes describan el comportamiento en los extremos del dominio de las funciones polinómicas, y se desarrolla por medio de las tareas T1.1 y T1.2. Estas tareas se apoyan en el uso de herramientas tecnológicas, al enfocarse en la visualización y la interpretación gráfica de modelos de crecimiento de poblaciones o trayectorias, lo que fortalece la capacidad de representación. El objetivo 2 avanza hacia un nivel superior, al retar a los estudiantes a analizar y contrastar modelos en contextos de toma de decisiones. Las tareas asociadas, T2.1 y T2.2 (selección de modelos y mejor estrategia), ponen el énfasis en las capacidades de razonamiento y argumentación y comunicación, ya que el foco pasa del cálculo a la decisión y su justificación.

El diseño de la unidad didáctica es el resultado de un riguroso proceso iterativo basado en la metodología de la maestría de Educación Matemática de la Universidad de los Andes. El proceso inició con un análisis de contenido que interconecta los elementos conceptuales, históricos, de representación y fenomenológicos del tema de las funciones polinómicas y su comportamiento final. Este análisis se centra en el grado y el signo del coeficiente principal como los conceptos esenciales que definen el comportamiento final de la función polinómica. Identificamos cuatro subestructuras matemáticas que resultan de la combinación de la paridad del grado (par o impar) y el signo del coeficiente principal (positivo o negativo). Seleccionamos cinco sistemas de representación clave: simbólico, numérico, tabular, gráfico y ejecutable. El análisis de contenido articula la historia de los polinomios con una comprensión profunda de su estructura conceptual, sus diversas representaciones y los contextos de la vida real que modelan. Este balance sirvió de base para el posterior análisis cognitivo, en el que se establecieron los fundamentos teóricos, como la definición de los objetivos, la creación de un listado exhaustivo de errores asociados a las dificultades del tema, y el diseño de los grafos de criterios de logro para cada tarea, al mapear los caminos de aprendizaje. Posteriormente, se formularon las tareas y se crearon los instrumentos para el seguimiento y la evaluación. Esto incluyó la tarea diagnóstica y el examen final que permiten registrar sistemáticamente el desarrollo afectivo y cognitivo. La fase más crítica fue la evaluación de la implementación. Los resultados empíricos validaron el diseño del objetivo 1 (77.6% de logro), pero revelaron un bloqueo cognitivo severo en la tarea T2.3 del objetivo 2, que solo alcanzó un 31.2% de activación, al demostrar que la complejidad del análisis manual superó la capacidad de los estudiantes.

Esta evidencia empírica generó la necesidad de la fase de rediseño final, en la que los fallos detectados sirvieron como base para realizar ajustes en los grafos de los criterios de logro, la ponderación del sistema de evaluación y la secuencia de tareas, al producir la versión final de la unidad didáctica. La propuesta didáctica ofrece una solución robusta al problema común de la enseñanza de las funciones polinómicas, que a menudo se limita a la manipulación algebraica descontextualizada. La principal virtud es que esta no es una propuesta teórica, sino una unidad didáctica probada y corregida. Los colegas implementarán una versión que ya ha sido verificada en el aula, para la que se identificaron y subsanaron sus debilidades, especialmente las que generaron el bloqueo en la tarea de análisis manual. Además, la unidad didáctica promueve las capacidades de razonamiento y argumentación al centrarse en la toma de decisiones justificada sobre modelos reales, más allá del mero cálculo. La unidad didáctica también ha demostrado su capacidad para contribuir positivamente a la dimensión afectiva del estudiante, pues el análisis de la implementación mostró una correlación directa entre el diseño de tareas con alto reto cognitivo y el desarrollo de la motivación y las actitudes positivas hacia el aprendizaje. El diseño incluye, de forma explícita, todas las ayudas didácticas necesarias (grafos de criterios de logro, listado de errores, sugerencias para el profesor), al facilitar su implementación incluso para un colega que no esté familiarizado con la terminología de MAD.

Aunque la unidad didáctica ha sido rigurosamente rediseñada, aún persisten dos limitaciones principales. La primera se refiere a la transición del análisis tecnológico al análisis manual en el objetivo 2. Aunque el diseño final ya incorporó ajustes para corregir el bloqueo, es importante que los colegas que la implementen presten atención a las debilidades del estudiante en esta transición. La segunda limitación es el contexto de implementación. El diseño original se realizó para un colegio de educación virtual y el sistema de evaluación final está condicionado por los requerimientos específicos de la institución (el 70% de las preguntas del examen deben ser de opción múltiple). Esto implica que un colega en un entorno presencial o con diferentes normativas de evaluación debe adaptar el nivel de apoyo tecnológico y la estructura del examen para alinear el diseño con su propio contexto institucional.

El programa de la maestría en Educación Matemática de Uniandes ha tenido un impacto transformador en nuestra práctica docente, al marcar un cambio fundamental desde una pedagogía basada en la intuición o la experiencia personal hacia una práctica sistemática, rigurosa y basada en evidencia. El modelo de formación dota al docente no solo de conocimientos sobre el contenido, sino de una caja de herramientas analíticas precisa: la capacidad de descomponer un objetivo de aprendizaje en secuencias de capacidades (grafos de criterios de logro), prever todos los posibles errores de los estudiantes y diseñar instrumentos de evaluación que miden el aprendizaje en dimensiones tanto cognitivas como afectivas.

Para los colegas que deseen continuar y complementar el trabajo, se sugieren la validación del rediseño. De forma inmediata sugerimos implementar las tareas del segundo objetivo y evaluar si los ajustes realizados eliminaron el bloqueo cognitivo. Este paso es necesario para la validación definitiva de la unidad. También motivamos el diseño de una extensión de la unidad que explore el uso crítico de la IA por parte del estudiante para modelar funciones o contrastar soluciones. Recomendamos ampliar la unidad didáctica para incluir tareas de regresión polinómica, en las que los estudiantes puedan seleccionar la función de mejor ajuste para datos reales. Esto fortalecería la capacidad de matematización y le daría un mayor nivel de sofisticación a la unidad didáctica. La inteligencia artificial fue utilizada durante gran parte del proceso de creación de esta unidad didáctica. En una primera etapa, se empleó para resumir y reorganizar información en documentos más sintéticos y claros en términos de redacción, lo que facilitó la consolidación del marco conceptual de la propuesta. En otras ocasiones, permitió profundizar en conceptos amplios, descomponerlos en subconceptos y procedimientos, y clarificar las relaciones entre ellos. Asimismo, la inteligencia artificial apoyó el diseño de tablas y grafos que permitieron organizar de manera estructurada la información trabajada a lo largo de la unidad. Finalmente, contribuyó al desarrollo del recurso digital ya introducido, una aplicación web educativa sobre funciones polinómicas, que integra la introducción de datos, la representación gráfica de la función, la interpretación de su comportamiento al infinito y la presentación de mensajes de apoyo a la comprensión. De este modo, su uso acompañó el proceso completo de diseño de la unidad, desde la organización conceptual inicial hasta la elaboración de recursos de apoyo para el aula.

5. LISTADO DE ANEXOS

Describimos, en la tabla 10, los archivos de los anexos de la unidad didáctica. El anexo 7 ofrece una guía para implementar de manera eficiente la unidad didáctica.

Tabla 10
Lista de los anexos de la unidad didáctica

Nombre	Titulo	Descripción
Anexo 1	Listado de capacidades	Capacidades que conforman las bases conceptuales para el desarrollo de nuestra unidad didáctica.
Anexo 2	Listado de conocimientos previos	Conocimientos previos que los estudiantes deben tener para que posteriormente gestionen las capacidades.
Anexo 3	Listado de errores (E) y dificultades (D)	Limitaciones de aprendizaje de los estudiantes durante el desarrollo de nuestra unidad didáctica.
Anexo 4	Listado de criterios de logro	Procedimientos observables que describen las acciones que el estudiante realiza durante una tarea.
Anexo 5	Listado de ayudas para las tareas de aprendizaje del primer objetivo	Ayudas para las tareas de aprendizaje del primer objetivo
Anexo 6	Ficha de imprimibles	Documentos listos para imprimir de las tareas de aprendizaje del objetivo 1
Anexo 7	Guía para la aplicación de las tareas	Documento en Excel que muestra la tabla de guía de la aplicación de las tareas de la unidad didáctica.
Anexo 8	Ficha de imprimibles	Documentos listos para imprimir de las tareas de aprendizaje del objetivo 2
Anexo 9	Evaluación final	Formulación de la evaluación final

6. Referencias

Cañadas, M. C., Gómez, P. y Pinzón, A. (2018). Análisis de contenido. En P. Gómez (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 53-112). Bogotá: Universidad de los Andes.

Kaput, J. J. (1992). *Technology and mathematics education*. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 515–556). Macmillan.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2013). *Marcos y pruebas de evaluación de pisa 2012: Matemáticas, lectura y ciencias.* Descargado el 30/1/2014, de https:// goo.gl/IaJzV9.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas.* Bogotá: Autor.

OECD. (2013). *PISA 2012 assessment and analytical framework: Mathematics, reading, science, problem solving and financial literacy.* OECD Publishing.

Socas, M. M. (1997). Dificultades, errores y concepciones en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125–154). Barcelona: Horsori.