

MATEMÁTICAS ESCOLARES CON GEOGEBRA

Orlando Aya Corredor

Profesor Universidad Pedagógica Nacional

Bogotá D.C., Colombia

oaya@pedagogica.edu.co

Armando Echeverry Gaitan

Profesor Universidad Pedagógica Nacional

Bogotá D.C., Colombia

aecheverri@pedagogica.edu.co

Resumen

El documento que se presenta a continuación, tiene como propósito fundamental realizar una propuesta frente a la enseñanza de las cónicas a un nivel introductorio, en los cursos de educación media e incluso en los programas de licenciatura de la Facultad de Ciencia y Tecnología de la Universidad Pedagógica Nacional, particularmente para ofrecer una alternativa al paso de las representaciones sintéticas y analíticas de las cónicas. La propuesta está apoyada en una serie de actividades con el uso de herramientas computacionales (en particular el software geogebra).

Palabras Claves

Cónicas, representación sintética, representación analítica, geogebra.

Herramientas y Matemáticas: el software geogebra

En los procesos de aprendizaje, y de enseñanza, de cualquier disciplina, se requiere de herramientas tanto conceptuales como físicas para su desarrollo, éste hecho está ampliamente documentado en la literatura de la psicología cognitiva y de las didácticas específicas de cada disciplina. En las ciencias experimentales las herramientas no han sido únicamente un requisito para los procesos de aprendizaje sino que han impulsado el desarrollo de la propia disciplina científica, la tecnología nos ha dado numerosos ejemplos de ello como es el caso de la invención, casi paralela, del telescopio por Huygens y del microscopio por Leeuwenhoek.

Aunque lo mencionado anteriormente parece bastante obvio y evidente en el caso de las ciencias físicas, para las matemáticas la evidencia no parece tan rotunda, *para hacer matemáticas siguen siendo las herramientas físicas esenciales, lápiz y papel*. Moreno (2002). Hoy los programas de software educativo, y la globalización ofrecida por el Internet, ofrecen unas posibilidades que a la vez representan nuevos retos a los docentes y estudiantes, y en general a las comunidades educativas a tal punto que esto implica aspectos tan globales como repensar el currículo.

En esta dirección los computadores, y más específicamente, los software para matemáticas escolares constituyen una herramienta hoy ampliamente disponible y con vastas posibilidades de uso por parte de los maestros de matemáticas para el diseño de actividades que ayuden a superar dificultades en el aprendizaje y den luces sobre posibles acciones en la enseñanza. Así el problema del profesor de matemáticas, en todos los niveles de la escolaridad, no es, si incorporar o no estas herramientas en el desarrollo de sus cursos, ya que esto no admite siquiera discusión, su problema es como formase un criterio para una adecuada selección de la herramienta mas apropiada para las necesidades de su contexto específico y resolver como generar las condiciones logísticas para su utilización. Balacheff (2000)

En esta propuesta aparece como herramienta mediadora, o instrumento de mediación instrumental, el software de geometría dinámica Geogebra; un software libre creado específicamente

para fines educativos en las matemáticas escolares. Este programa integra la Geometría dinámica (SGD) y los sistemas de álgebra computacional (CAS), es decir es posible hacer construcciones desde la geometría dinámica a la manera de programas como Cabri o Regla y Compás o generar representaciones de objetos matemáticos a partir de la ecuación de los mismos a la manera de derive o matlab; pero cualquiera que sea la entrada que se use para los objetos (geométrica o analítica), éstos pueden ser sometidos a cambios a través del uso de la herramienta arrastre, y al variar su posición en el plano, el programa presenta simultáneamente la variación en la representación algebraica de los mismos; pero también es posible variar la representación algebraica de los objetos y visualizar el efecto en la representación geométrica.

De otra parte, el programa cuenta con un diseño bastante amigable que funciona bajo Windows y Linux, ofrece además un menú de ayuda amplio y fácil de consultar, una página Web (ver referencias bibliográficas) con información acerca del funcionamiento del programa, actividades diseñadas por la comunidad de educadores matemáticos y un foro en diferentes idiomas que permite el intercambio constante con la comunidad de usuarios en diferentes partes del mundo.

Las cónicas como objeto de enseñanza

Ha sido usual, en una concepción convencional del currículo de matemáticas hasta la propuesta de los lineamientos curriculares, que la geometría plana aparezca como objeto de estudio hasta el grado 9. En grado 10 aparece otra geometría notoriamente diferente de la geometría plana para los estudiantes e incluso para muchos profesores, y los contenidos de ésta son las razones entre lados de triángulos, y la representación de objetos geométricos a partir de la ecuación; esto hace que de alguna manera no haya una continuidad entre los contenidos de la geometría plana, la trigonometría y geometría analítica. Esta ruptura se ve reflejada en las dificultades que experimentan los estudiantes al abordar los objetos de estudio de lo que se ha denominado “*geometría analítica*” y en particular en lo referente a las cónicas.

En el desarrollo del estudio de las cónicas, generalmente se parte de una representación de ellas como las secciones transversales que aparecen al realizar cortes con un plano a un cono circular recto; posteriormente se presentan como lugares geométricos (idea por demás nada clara para el estudiante) a partir de unas definiciones, y se termina con una representación como relaciones de las mismas donde se plantean usualmente dos tipos de problemas: dada la ecuación de la cónica hallar sus lugares geométricos y por lo tanto su representación gráfica en el plano cartesiano, y dado los lugares geométricos encontrar la expresión algebraica. (Nótese la ambivalencia de la palabra “lugar geométrico”).

Los problemas se tornan generalmente repetitivos y cae en rutinas de sustitución algebraica y de manipulación algorítmica. En un caso identificar la forma general de la ecuación de acuerdo con una clasificación y sustituir en un juego de ecuaciones los elementos conocidos de la cónica para luego desarrollar cuadrados y simplificar la expresión algebraica.

En otro tipo de ejercicios se da la ecuación en lo que se denomina forma canónica y con procesos de “complementación de cuadrados” se lleva a una forma de representación algebraica de tipo estándar y por comparación se determinan los elementos constitutivos de la cónica. Este tipo de problemas si bien son importantes se ha mostrado que no aportan a la comprensión misma de las cónicas y, que por el contrario, el énfasis en el paso entre dos representaciones de tipo algebraico sin hacer una representación de la cónica como lugar geométrico sino únicamente como una

representación geométrica, genera dificultades en la comprensión de las cónicas. Benítez (2005).

Otro aspecto relevante de este objeto de enseñanza es que el desarrollo de los ejes temáticos de la geometría analítica y particularmente de las cónicas, se deja para ser desarrollada en las partes finales de los cursos, con lo cual este casi nunca es abordado realmente en la secundaria. Esta falencia en la aproximación inicial al estudio de las cónicas se ve reflejada en los primeros semestres de todas las carreras donde el estudiante debe enfrentar un curso de precalculo, y particularmente en los cursos de matemáticas en los programas de licenciatura.

Finalmente en cuanto a las aplicaciones de las cónicas a diferentes campos de la ciencia, el vacío es aun mayor y se terminan aplicando principios que no son comprendidos como propiedades de las cónicas. Para citar solo un caso, cuando se analizan fenómenos ópticos en física y particularmente los espejos parabólicos (o denominados en genérico “esféricos”) se dicen cosas como:

- i. un rayo que incide por el foco se refleja paralelo al eje.
- ii. un rayo que incide paralelo al eje se refleja por el foco. . .

y se aplican para la determinación y construcción de imágenes pero no hay una comprensión de estas “reglas” como una propiedad del lugar geométrico que se esta estudiando.

La Propuesta

Dado que Geogebra permite generar representaciones geométricas de objetos matemáticos desde la construcción geométrica o desde la ecuación, entonces se puede pensar en describir los lugares geométricos de las cónicas desde la construcción y desde la ecuación, es decir el trabajo en la geometría analítica básica que se hace en educación media, en el cual hay que darle sentido a cada uno de los elementos constitutivos de un lugar geométrico y relacionarlo con lo que significan tanto en la representación geométrica y en la ecuación.

Ejemplo 1: Explorando las cónicas desde su representación algebraica canónica.

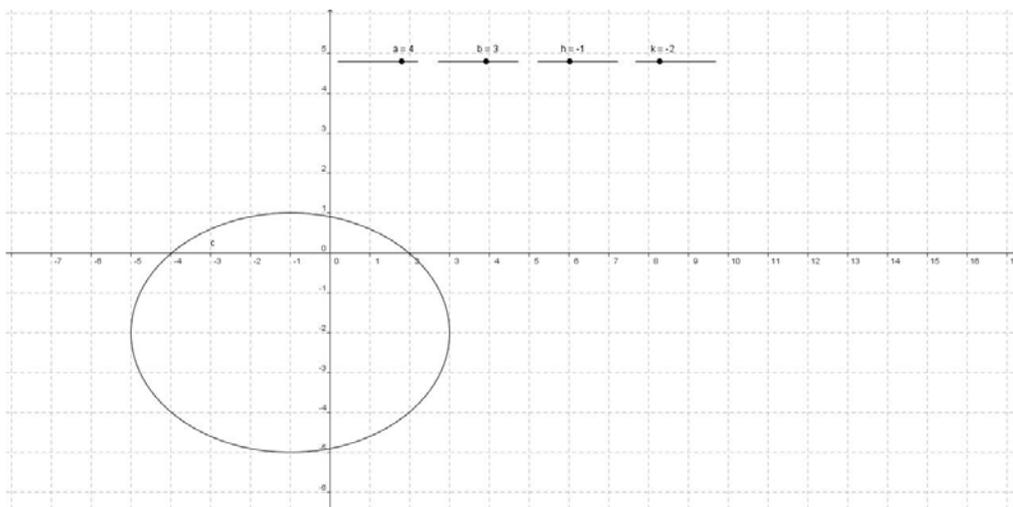
Se utiliza la barra de entrada algebraica y se escriben las expresiones canónicas de las cónicas, los deslizadores permitirán ver el efecto que tienen los parámetros de cada una de las cónicas por ejemplo en la elipse $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, analizar el efecto de h, k, a, b .

Ejemplo 2: Las cónicas como lugar geométrico.

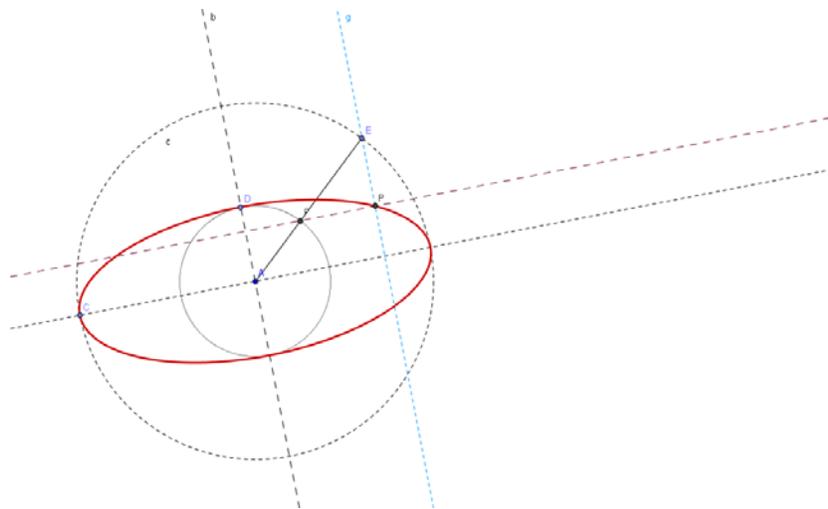
Tomemos el caso de una elipse, una definición matemática, y en particular geométrica como lugar geométrico, de la misma es:

“Una elipse es el lugar geométrico de los puntos P tales que la suma de las distancias P a dos puntos fijos es constante. Los dos puntos fijos se llaman focos” (Allendoerfer 1978)

En esta parte de la propuesta se abordan diferentes formas de construir las cónicas y el propósito es explorar por que dicha construcción da cuenta de la definición dada a la cónica. Por ejemplo a continuación se presentan dos posibles formas de construir la elipse



i. Primera Construcción

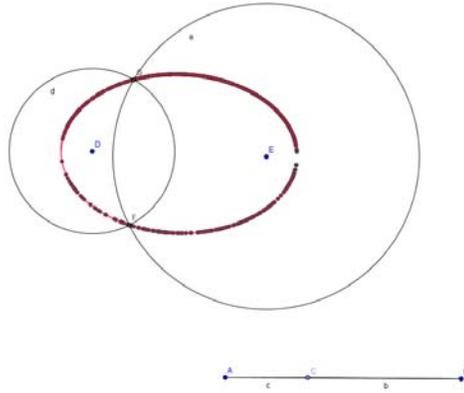


Se pide mostrar el protocolo de la construcción y explicar por que el lugar geométrico generado es una elipse.

- Segunda construcción. Aquí se invierte un poco el proceso se dan los pasos de la construcción para ser realizada en geogebra así:

- Construir un segmento AB
- Construir un punto (con punto sobre objeto) C sobre AB
- Localizar dos puntos D y E sobre el plano tales que $DE < AB$
- Construir una circunferencia con radio AC y centro D
- Construir una circunferencia con radio CB y centro E

Una vez realizada la construcción, cuya representación es:



se plantea la siguiente pregunta: ¿Por qué la elipse es el lugar geométrico que determinan los dos puntos de intersección de las circunferencias respecto al punto C ? .Se plantean actividades afines con las otras cónicas.

La segunda actividad puede replantearse con una variante según las dinámicas del grupo de estudiantes, se puede preguntar primero? ‘Cual es el lugar geométrico del punto de intersección de las circunferencias al desplazar el punto C ? de forma tal que antes de usar las herramientas del programa para dar respuesta a éste interrogante, los estudiantes formulen conjeturas e hipótesis, discutiendo acerca de estas, y luego pueden verificar, con la herramienta traza, sus conjeturas; y posteriormente con lugar geométrico. Se debe tener en cuenta que para el caso de los lugares geométricos, el programa no presenta la ecuación en la ventana de álgebra, lo cual es una ventaja para la continuación de la actividad.

Ejemplo 3: Pasando de la representación sintética a la analítica y viceversa.

En esta fase se pretende realizar el paso entre las representaciones sintética y analítica de las cónicas, particularmente se pretende abordar el problema de ¿como podemos obtener mediante la construcción del lugar geométrico una cónica que coincida con la que se obtiene mediante la ecuación analítica dada, de la cónica?

Aquí el estudiante deberá tener claro a que proceso de construcción particular de la cónica esta haciendo referencia, pues en cada construcción sintética se ponen en juego unos elementos particulares de la cónica en cuestión. Así a manera de ejemplo para la elipse (primera construcción) se evidencia la existencia de la medida de los semiejes y a partir de ella se genera la construcción.

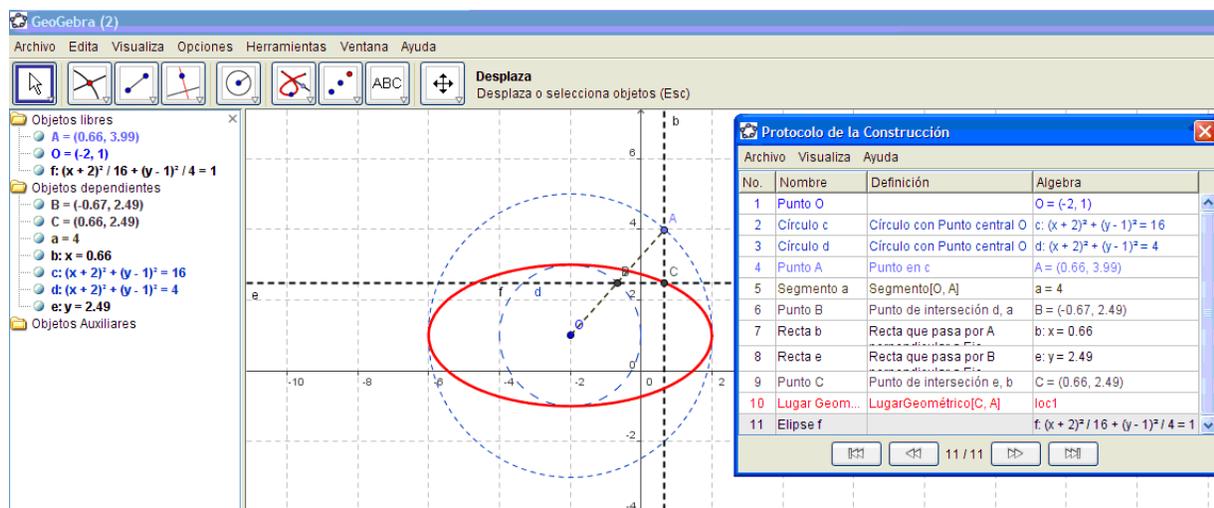
Adicionalmente esta actividad implica el establezca el significado de cada uno de los términos de esta ecuación y otras representaciones algebraicas asociadas a las partes constitutivas de una elipse, como la que permite establecer el valor absoluto para la abcisa u ordenada de la coordenada de los focos, y que relacione estas con el objeto equivalente en la construcción geométrica; y que cobre sentido la definición como lugar geométrico.

Hache el programa, con sus dos entradas (álgebra y geometría) le permite ir poniendo a prueba sus hipótesis, ir las descartando o refinando hasta encontrar una solución al problema planteado. Adicionalmente se pueden calcular los elementos característicos de la cónica y luego verificar

con el software las hipótesis y cálculos elaborados con la herramienta **comando** la cual permite encontrar eje principal, eje secundario, asintotas (para las hipérbolas), vértice(s), foco(s), longitud de los semiejes.

No obstante, y entendiendo nuevamente la mediación instrumental, se debe ser precavido en el uso del programa ya que no es la solución a todo, por ejemplo, un problema recurrente en el cálculo de una de las características de la elipse y la hipérbola como lo es la excentricidad el comando excentricidad arroja valores que no corresponden con la definición de la misma.

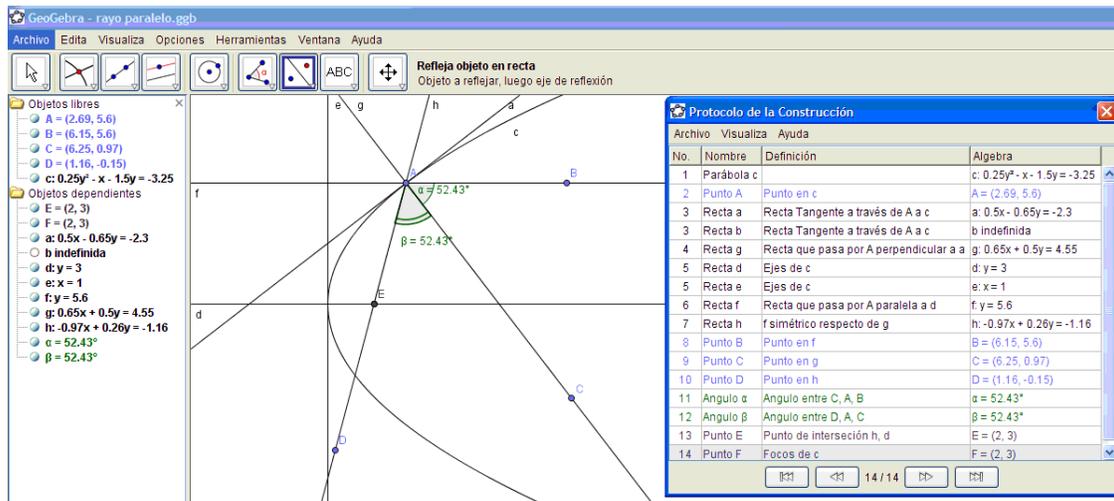
A manera de ejemplo se puede solicitar que se realice la construcción para generar la elipse que coincida con la elipse cuya ecuación es $x^2 + 4y^2 + 4x - 8y - 8 = 0$. Luego de hacer el tratamiento algebraico esta ecuación se puede expresar como $\frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$. Con lo cual $a = 4$ y $b = 2$ (y los demás cálculos correspondientes usuales).



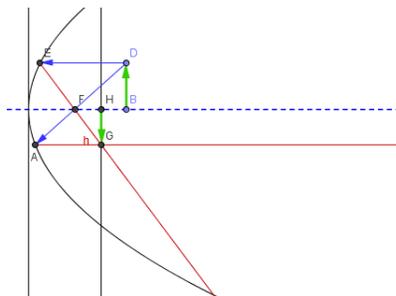
Ejemplo 4: Explorando algunas propiedades básicas de las cónicas.

En esta fase se pretende explorar algunas propiedades básicas de las cónicas en forma general, y en particular algunas aplicaciones dentro de campos de conocimiento específicos. A continuación se analizará la propiedad de la recta tangente a una parábola y de la recta normal a la misma en un punto dado, y analizar su aplicación en la física para la construcción de imágenes (como se había mencionado en la parte inicial de la propuesta) en espejos parabólicos. Se aplica la ley de la reflexión midiendo el rayo de incidencia y de reflexión con respecto a la normal como lo estipula la ley de Snell de la reflexión.

Se analiza inicialmente un rayo que incide paralelamente al eje del espejo, el cual, según la teoría, debe reflejarse por el foco. Se realiza la construcción y se pide determinar el punto de intersección del rayo reflejado y el eje de la parábola; con la herramienta *comando* se determina el foco de la parábola y estos puntos deben coincidir.



Ahora se considera el caso de un rayo que incide por el foco, recurriendo a la misma propiedad se verifica que el rayo reflejado debe ir paralelo al eje. El software permite que utilizando el menú relación entre dos elementos se verifique dicha propiedad.



Unos comentarios finales

El propósito de esta propuesta es presentar una de las posibilidades de uso del software Geogebra en la cual se trata de aprovechar al máximo la posibilidad que ofrece de representar objetos matemáticos desde la entrada de álgebra y la entrada de geometría, procurando promover en los estudiantes una actitud hacia las matemáticas de indagación, exploración, y verificación de conjeturas e hipótesis, en la cual la actividad con la geometría analítica trascienda las tareas de asociación de una ecuación con determinada figura geométrica.

El paso de una representación a otra de cualquier objeto matemático siempre encarnara unas dificultades de tipo cognitivo que se pueden constituir en un obstáculo para el aprendizaje, pero que adicionalmente comporta las dificultades para tener una aproximación mas clara al objeto de estudio.

El uso de una u otras actividades deben estar dentro de un contexto fundamental de investigación es decir que la aplicación de una propuesta no esta por fuera de un contexto específico del aula; esto hace que las actividades deben ser repensadas y reformuladas constantemente una vez que están siendo sometidas a la aplicación, fundamentalmente por que, a través de

la indagación por lo que el estudiante este comprendiendo del objeto de estudio, la actividad exigirá reformulaciones.

La introducción de software educativo no debe hacerse por novedad sino respondiendo a unas ideas bien específicas y con unos objetivos específicos. Esto implica una gran responsabilidad pues entre otras cosas requiere un nivel bastante bueno del programa que ha de servir como mediador, reconocer sus potencialidades pero igualmente sus limitaciones.

Bibliografía

- [1] Allendoefer y Oakley (1978). *Fundamentos de Matemáticas Universitarias*. (3ª Ed). Bogotá: Mc Graw Hill
- [2] Balacheff, N (2000) Entornos informáticos para la enseñanza de las matemáticas: complejidad didáctica y perspectivas. En N. Gorgorió, Delofeu J (Eds) *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional* (Pp 91-109). Barcelona, Grao
- [3] Benítez, D. (2005) Resolución de problemas de cónicas con el apoyo de la geometría dinámica. En *Memorias del XVI Encuentro de Geometría y sus aplicaciones y IV encuentro de aritmética* (Tomo I, pp. 77-88). Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional
- [4] Espina, P. (2005) Geogebra. *Revista Números 64*
- [5] Moreno, L (2002) Instrumentos matemáticos computacionales. En *Memorias Seminario Nacional de Formación de docentes: Uso de nuevas tecnologías en el aula de matemáticas*. Bogotá, Ministerio de Educación Nacional.

www.geogebra.at