

DESARROLLO DE HABILIDADES BÁSICAS PARA LA COMPRENSIÓN DE LA GEOMETRÍA

CLAUDIA GALINDO

Este artículo presenta aspectos generales de un proyecto de enseñanza-aprendizaje de la geometría que se basó en la Tabla de habilidades básicas en geometría elaborada por Hoffer. Esta tabla toma en cuenta habilidades que conviene desarrollar en los estudiantes de geometría y las relaciona con los niveles de razonamiento que plantea el modelo de Van Hiele. Por medio de un ejemplo se muestra cómo se utilizó la tabla en la construcción de actividades para enseñar un tema específico, la rotación, a un grupo de alumnos de grado sexto.

ASPECTOS GENERALES DEL PROYECTO

La necesidad de hacer el proyecto¹ del cual hablaré en este artículo surgió de mi experiencia personal con el aprendizaje de la geometría, durante años de formación marcada por una enseñanza rígida. En esa época tenía la impresión de que la enseñanza de la geometría a nivel escolar no se ocupaba apropiadamente de la motivación de los estudiantes para lograr un buen aprendizaje y que se hacía de manera rígida (*i.e.* el profesor no propone actividades que le ayuden al estudiante a construir su propio conocimiento geométrico, más bien, le presenta el conocimiento como algo terminado, estático, con un enfoque axiomático). Con el objeto de comprobar qué tan diferente podía ser la situación actual (en el momento en que se llevó a cabo el proyecto) con respecto a la que yo viví, se realizó un estudio estadístico para lo cual se hizo una encuesta a alumnos de sexto grado de acuerdo con la propuesta curricular del Ministerio de Educación Nacional (MEN) y una encuesta a docentes de matemática, cuyas preguntas estaban formuladas según nuestras inquietudes.

La encuesta a los alumnos puso de manifiesto su poco dominio de los conceptos geométricos. A su vez, la encuesta a los maestros mostró princi-

1. La experiencia que aquí se relata hace parte de la monografía realizada por Nydia Barbosa y la autora para optar al título de licenciadas en matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas (Colombia). Se desarrolló en sexto grado en la Unidad Básica Rafael Uribe Uribe jornada de la mañana, con la colaboración de Mercedes Lotero, profesora de dicha institución y bajo la dirección y supervisión de Alberto Campos, Profesor Especial del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad Nacional de Colombia.

palmente que la enseñanza de la geometría se ha desplazado a un segundo nivel debido a la poca intensidad horaria y a la fusión con la aritmética o el álgebra dentro del programa de matemática actual. Esta situación se ve agravada por varios hechos: la falta de un currículo coherente para la enseñanza de la geometría desde el preescolar hasta el último grado de la escolaridad, la falta de material didáctico para apoyar a los profesores en la enseñanza de la geometría y además la deficiente preparación del docente en esta área de la matemática.

Durante la práctica docente² en geometría realizada en la Unidad Básica Rafael Uribe Uribe, antes de iniciar el proyecto, nos dimos cuenta una vez más del poco dominio de la materia que los alumnos poseían y de nuestro desconocimiento de una metodología de enseñanza.

Conscientes de nuestras deficiencias y apoyadas en los resultados arrojados por las encuestas, decidimos revisar bibliografía que nos ayudara a mejorar nuestra práctica docente y por ende, el aprendizaje de nuestros estudiantes. En la búsqueda bibliográfica encontramos el artículo “La geometría es más que demostración” (Hoffer, 1990) en el cual se plantea el cuadro sintético del modelo de Van Hiele. Este cuadro se convirtió en el eje central del proyecto.

MARCO CONCEPTUAL DEL PROYECTO

Algunos profesores de matemática experimentamos sentimientos de impotencia frente a los reducidos progresos que muestra una parte más o menos importante de nuestros alumnos. Jaime y Gutiérrez (1990) describen esa realidad al destacar que algunas veces no hay manera de que los alumnos comprendan un nuevo concepto; en ocasiones, parece que han captado los conceptos o propiedades recién introducidos, pero sólo son capaces de utilizarlos en situaciones idénticas a las presentadas por el profesor. Es frecuente que los alumnos puedan resolver con bastante facilidad problemas concretos, pero carezcan de ideas cuando se trata de resolver los mismos problemas planteados en un contexto algo diferente; todos los alumnos tienden a memorizar las demostraciones de los teoremas o las formas de resolver problemas, etc.

Preocupados por este problema dos profesores holandeses de matemáticas, en enseñanza media, Pierre Marie Van Hiele y Dina Van Hiele-Geldof, estudiaron en profundidad la situación para tratar de encontrarle solución. De su iniciativa surgió el modelo de Van Hiele, hoy reconocido como uno de los más efectivos para la enseñanza de la geometría.

2. Asignatura de séptimo semestre de la Licenciatura en Matemáticas.

El modelo de Van Hiele establece que la comprensión de la geometría pasa por cinco formas de ver los conceptos geométricos; formas que denominan *niveles de razonamiento*. Aunque en este artículo no se entrará en detalle sobre las características del modelo, es importante subrayar que el progreso en la comprensión de los conceptos geométricos siempre se produce desde el primer nivel, y de manera ordenada, a través de los niveles siguientes (Jaime, 1995). Para que los estudiantes se desempeñen adecuadamente en uno de los niveles avanzados deben haber dominado los niveles previos. No es posible alterar el orden de adquisición de los niveles ya que cada nivel lleva asociado un lenguaje y el paso de un nivel al siguiente se produce en forma continua y pausada.

Una somera descripción de los niveles encontrada en Hoffer (1990) se presenta a continuación:

Nivel 1 (Reconocimiento). El estudiante aprende algo de vocabulario y reconoce una figura como un todo. En este nivel, por ejemplo, un estudiante reconocerá el dibujo de un rectángulo pero quizás no será consciente de muchas propiedades de los rectángulos.

Nivel 2 (Análisis). El alumno analiza las propiedades de las figuras. Por ejemplo, en este nivel un estudiante puede darse cuenta de la congruencia de los lados opuestos de un rectángulo, pero no notará cómo se relacionan los rectángulos con los cuadrados o con los triángulos rectángulos.

Nivel 3 (Ordenamiento). El estudiante ordena lógicamente figuras y comprende la interrelación entre figuras y la importancia de definiciones exactas. Por ejemplo, en este nivel el estudiante podrá entender por qué cada cuadrado es un rectángulo, pero no podrá explicar por qué las diagonales de un rectángulo son congruentes.

Nivel 4 (Deducción). El estudiante comprende el significado de la deducción y el papel de los términos indefinidos, postulados, teoremas y demostraciones. En este nivel, por ejemplo, el estudiante será capaz de emplear un criterio de congruencia triangular pero no comprenderá la necesidad de postular la condición.

Nivel 5 (Rigor). El estudiante comprende la importancia de la precisión cuando trata con las bases y las interrelaciones entre estructuras. Este nivel más avanzado se alcanza rara vez en los estudiantes escolares. En este nivel el estudiante comprende, por ejemplo, cómo el postulado euclidiano de las paralelas se relaciona con la existencia de rectángulos y que en una geometría no-euclidiana los rectángulos no existen.

En su artículo Hoffer (1990) critica el hecho de que la enseñanza de la geometría enfatice desde su comienzo el desarrollo de la habilidad para hacer demostraciones formales, la que exige que la comprensión del individuo se ubique en un nivel alto de desarrollo mental. Por eso, propone que la enseñanza de la geometría debe fomentar el desarrollo de otras habilidades que pueden ser más prácticas y que tienen una naturaleza claramente geométrica. Entre ellas destaca cinco, a saber:

Habilidad visual. Hace referencia a la capacidad de obtener información a partir de lo que el estudiante observa, ya sean objetos reales o representaciones de éstos.

Habilidad verbal. Hace referencia a la capacidad para emplear apropiadamente el lenguaje de la geometría.

*Habilidad para dibujar*³. Hace referencia a la capacidad para interpretar las ideas y representarlas a través de dibujos o esquemas.

Habilidad lógica. Hace referencia a la capacidad para armar argumentos que siguen las reglas de la lógica formal y para reconocer cuándo un argumento es válido o no lo es.

*Habilidad para modelar*⁴. Hace referencia a la capacidad de describir y explicar fenómenos de la vida real por medio de modelos.

Tales habilidades alcanzan un estado específico de desarrollo a través de los diferentes niveles del modelo de Van Hiele. Por ejemplo, la habilidad visual manifiesta características específicas para los niveles de reconocimiento, análisis, ordenamiento, deducción y rigor. En la siguiente tabla construida por Hoffer se describen las habilidades dentro de los niveles de Van Hiele. Cabe señalar la necesidad de interpretar el cuadro. Por ejemplo, la palabra “figura” debe ser interpretada como una idea geométrica o un dibujo de un objeto geométrico o incluso como un símbolo.

Para la experiencia docente que nos proponíamos realizar tomamos en cuenta esta tabla y de acuerdo con ella diseñamos los diferentes talleres.

3. La traducción consultada del artículo de Hoffer (1990) la nombra como “habilidades de dibujo”.

4. La traducción consultada del artículo de Hoffer (1990) la nombra como “habilidad aplicada”.

		Nivel				
		I	II	III	IV	V
		Reconocimiento	Análisis	Ordenamiento	Deducción	Rigor
Habilidad	Visual	Reconocer diferentes figuras en un dibujo. Reconocer información contenida en una figura.	Notar las propiedades de una figura. Identificar una figura como parte de una mayor.	Reconocer interrelaciones entre diferentes tipos de figuras. Reconocer las propiedades comunes de diferentes tipos de figuras.	Utilizar información de otra figura para deducir más información.	Reconocer supuestos injustificados hechos al usar figuras. Concebir figuras relacionadas en varios sistemas deductivos.
	Verbal	Asociar el nombre correcto con una figura dada. Interpretar frases que describen figuras.	Describir adecuadamente varias propiedades de una figura.	Definir palabras adecuada y concisamente. Formular frases que muestren relaciones entre figuras.	Comprender las distinciones entre definiciones, postulados y teoremas. Reconocer qué información da un problema y qué información hay que hallar.	Formular extensiones de resultados conocidos. Describir varios sistemas deductivos.
	Para dibujar	Hacer dibujos de figuras, nombrando adecuadamente las partes.	Traducir información verbal dada en un dibujo. Utilizar las propiedades dadas de una figura para dibujarla o construirla.	Dada cierta figura construir otras relacionadas con la primera.	Reconocer cómo y cuándo usar elementos auxiliares en una figura. Deducir de información dada cómo dibujar una figura específica.	Comprender las limitaciones y capacidades de varios elementos de dibujo. Representar gráficamente conceptos no estándar en varios sistemas deductivos.
	Lógica	Darse cuenta de que hay diferencias y similitudes entre figuras. Comprender la conservación de las figuras en distintas posiciones.	Comprender que las figuras pueden clasificarse en diferentes tipos. Notar que las propiedades sirven para distinguir las figuras.	Comprender las cualidades de una buena definición. Usar las propiedades para determinar si una clase de figura está contenida en otra.	Utilizar las reglas de la lógica para desarrollar demostraciones. Poder deducir consecuencias de la información dada.	Comprender las capacidades y limitaciones de supuestos y postulados. Saber cuándo un sistema de postulados es independiente, consistente y categórico.
	Para modelar	Identificar formas geométricas en objetos físicos.	Reconocer propiedades geométricas de objetos físicos. Representar fenómenos en un modelo.	Comprender el concepto de un modelo matemático que representa relaciones entre objetos.	Poder deducir propiedades de objetos de información dada. Poder resolver problemas relacionados con objetos.	Usar modelos matemáticos para representar sistemas abstractos. Desarrollar modelos matemáticos para describir fenómenos físicos, sociales y naturales.

Tabla N° 1. Habilidades básicas en geometría según Hoffer (1990)

LA EXPERIENCIA

Se planteó un programa de geometría para sexto grado. El objetivo era dominar las transformaciones geométricas y aplicarlas en la construcción de teselados. Se tuvieron en cuenta temas prerrequisitos tales como: primeros conceptos de geometría euclidiana (punto, recta y plano), manejo del transportador, concepto y clasificación de ángulos, paralelismo y perpendicularidad, polígono y región poligonal, triángulo, cuadrilátero, translación, rotación, reflexión y aplicaciones de las transformaciones en los mosaicos de M. C. Escher⁵ (S. A., 1990).

Para cada tema se diseñó un taller con base en la tabla de habilidades básicas para el aprendizaje de la geometría de Hoffer. Las actividades propuestas en los talleres partían de la manipulación de material concreto y avanzaban hasta el ordenamiento de propiedades captadas por los alumnos. De esa manera, se pretendía que el alumno fuera del nivel 1 (reconocimiento) hasta el nivel 3 (ordenamiento) en la búsqueda de objetivos específicos para cada nivel. Para determinar hasta dónde debían llegar los alumnos en su comprensión del tema (según el modelo de Van Hiele) se tuvo en cuenta el nivel en el que se encontraban en el momento de comenzar el proyecto. La selección de las preguntas para los talleres se hizo de acuerdo con el análisis anterior y su formulación se basó en bibliografía variada y en ideas propias de quienes desarrollamos el proyecto.

Los alumnos desarrollaron los diez talleres del proyecto en dos porciones del año escolar. La primera durante el segundo semestre de 1994, con una intensidad de 1 hora semanal que luego se complementó con 2 horas los días sábados. La segunda porción se realizó durante el primer semestre de 1995, con 2 horas semanales incluidos los sábados.

Ejemplo: la rotación

A través de un ejemplo, se presentan detalles que muestran cómo se utilizó la tabla de Hoffer en la construcción de los talleres. El ejemplo se refiere al tema específico de las rotaciones y se centra en el desarrollo de la habilidad visual para los tres primeros niveles de razonamiento del modelo de Van Hiele. Se explicitan los objetivos a lograr en cada uno de los niveles para la actividad escogida, se describen globalmente las actividades diseñadas y se presentan los resultados logrados con los estudiantes.

5. Escher gastó muchos años aprendiendo cómo utilizar las traslaciones, rotaciones y reflexiones sobre una cuadrícula de triángulos equiláteros, hexágonos regulares o paralelogramos para crear teselaciones de pájaros pescados, reptiles, humanos, etc.

Nivel 1

Objetivo. En el primer nivel se pretendía que los estudiantes visualizaran el movimiento de la rotación, tanto para el reconocimiento de figuras rotadas (punto de vista estático) como para la realización de rotaciones (punto de vista dinámico).

Desarrollo de las actividades. La palabra “rotación” es un término muy común en el vocabulario cotidiano. Por eso, se plantearon actividades para que los estudiantes tomaran conciencia de las diferentes acepciones. Es así como, los alumnos experimentaron el movimiento de la rotación con su propio cuerpo, respecto a otro compañero, con figuras geométricas y objetos giratorios. Se hizo énfasis en el trabajo con diferentes centros de rotación a partir de la manipulación de figuras. Por ejemplo, se recortó un cuadrado que se hacía girar poco a poco respecto a un punto fijo. Los siguientes dibujos muestran las diferentes posiciones del cuadrado rotado (ver Figura N° 1).

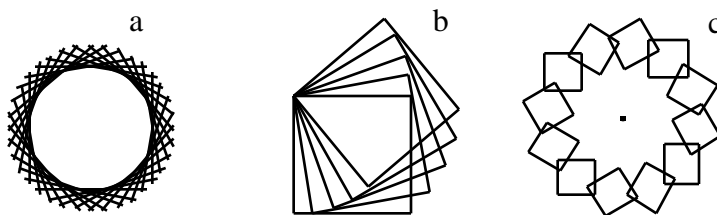


Figura N° 1. Cuadrado rotado con respecto a:
a) punto interior, b) punto frontera, c) punto exterior

Resultados. La evaluación de la comprensión que los estudiantes alcanzaron en este nivel se basó en la recolección de los cuadernos de los alumnos en donde se revisaba cuántos habían desarrollado correctamente las actividades. Igualmente se tuvo en cuenta las justificaciones orales brindadas por los alumnos en la solución de los ejercicios. Este nivel fue logrado por todos los niños ya que reconocieron globalmente el movimiento de la rotación desde el punto de vista estático y dinámico. Entonces se concluyó que la mayoría de los alumnos habían dominado el primer nivel.

Nivel 2

Objetivo. Se pretendía que los estudiantes emplearan correctamente conceptos geométricos en el descubrimiento y análisis informal de los elementos de la rotación. Es decir que los alumnos notaran las características de la rotación (centro, sentido, amplitud de la rotación y conservación de la figura rotada) con base en el dominio del nivel anterior.

Desarrollo de las actividades. Se mostraron diferentes parejas de figuras rotadas y no rotadas, y se pidió a los alumnos que identificaran a cuáles se les había realizado el movimiento de la rotación. Se hizo énfasis en la justificación que los alumnos dieron. Luego de la discusión grupal del por qué se habían escogido ciertas figuras, se discutieron las características encontradas en las figuras escogidas y a su vez se debatió qué características no poseían las figuras no seleccionadas. Luego se hizo un acuerdo acerca de cuáles eran las características observadas y a ellas se les asignó un término geométrico. Se hizo énfasis en la rotación de las figuras respecto a diferentes centros de rotación (punto interior, exterior y frontera) y a la equivalencia entre número de vueltas y medida en grados sexagesimales de los ángulos principales (90, 180, 270, 360 grados).

Resultados. Los alumnos comprendieron conceptos que caracterizan a la rotación, a saber: magnitud (medida en número de vueltas o grados), centro y sentido de la rotación (positivo o negativo). La evaluación se realizó con base en la recolección de cuadernos, el trabajo en clase y en las justificaciones orales brindadas por los alumnos.

Nivel 3

Objetivo. En este nivel se pretendía que los alumnos tomaran consciencia de la relación existente entre la figura inicial, la transformación efectuada y la figura final.

Desarrollo de las actividades. Se mostraba a los alumnos diferentes tipos de figuras (polígono y segmentos de recta) a las cuales se les debía realizar cierta rotación, por ejemplo $3/4$ de vuelta o 270° en sentido positivo o negativo o se les solicitaba encontrar la transformación, dada la figura inicial y la figura resultante. Bajo el supuesto de que los estudiantes comprendían los dos procesos (directo e inverso) trabajados previamente, se introdujo a los niños en el mundo de los teselados⁶. Se realizó la construcción conjunta de un teselado de Escher con la intención de que luego los niños inventaran uno propio.

Resultados. El tercer nivel no fue logrado por la gran mayoría dado que no hubo comprensión del proceso inverso. Es decir, dadas dos posiciones diferentes de una figura, los alumnos no pudieron determinar las características de la transformación que les permitía pasar de una figura a la otra. Aunque en la construcción de los teselados, donde se utiliza el proceso directo, se vio gran comprensión, creatividad e ingenio por parte de los alumnos.

6. Se dice que una pieza es teselante cuando es posible acoplar varias entre sí, sin huecos ni fisuras, hasta recubrir por completo el plano; la configuración que en tal caso se obtiene recibe el nombre de mosaico o teselado.

REFLEXIONES GENERALES

En lo que sigue quiero exponer algunas de las reflexiones a las cuales nos llevó la realización del proyecto. Primero haré referencia a las actividades desarrolladas, luego al proyecto y finalmente a mi experiencia en cuanto docente.

Debe ser claro que las actividades mencionadas no son las únicas posibles ni necesariamente las más adecuadas para los fines previstos. El conocimiento que cada profesor tenga de sus alumnos, así como una dosis de teoría geométrica, son los mejores ingredientes para el diseño de las actividades más fructíferas.

En la experimentación con los alumnos de sexto grado de la Unidad Básica Rafael Uribe Uribe, vimos cómo el interés de algunos por aprender es básico; para otros, es simplemente un requisito u obligación impuesta por los padres. El anhelo por aprender hizo que el trabajo desarrollado fuera más motivante, esto trajo como consecuencia la facilidad para alcanzar resultados positivos. En el transcurso de la experimentación hubo momentos agradables durante los cuales se hizo manifiesta una contribución así fuera con un granito de arena al mejoramiento del proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría.

En el desarrollo del proyecto la gran mayoría de alumnos logró encuadrar su conocimiento geométrico dentro de los dos primeros niveles y no dentro del tercero debido al poco tiempo de experimentación y a la escasa formación previa en la asignatura.

Como en todo trabajo, hubo aciertos y desaciertos; se podría decir, muchos aciertos puesto que los niños manifestaron creatividad e ingenio. Entre los desaciertos se podrían citar aspectos ajenos a la capacidad de los niños, pero que influyeron notablemente en el proceso. Entre ellos se puede destacar la falta de tiempo para realizar experiencias clínicas sobre las respuestas de los niños y luego replantear las preguntas. Fue imposible realizar conversaciones individuales que habrían sido importantes para ahondar un poco más en las dificultades de comprensión de los estudiantes. Esta fue la principal falla del proyecto. Otra falla consistió en la frecuente ausencia de los alumnos los días sábados.

En términos generales, la experiencia vivida con los niños fue gratificante puesto que los objetivos propuestos se cumplieron en su gran mayoría. Además el trabajo me permitió un enriquecimiento tanto en lo personal como en lo profesional en la medida en que pude ver que la geometría puede ser comprendida cuando su enseñanza se basa en actividades lúdicas y constructivas.

Una de las riquezas que me dejó el haber realizado el proyecto fue entender que las habilidades básicas son útiles para describir los procesos de asimilación y adecuación en el aprendizaje de la geometría puesto que describen en forma gradual el desarrollo mental de los alumnos. Además fue satisfactorio encontrar que la Tabla de Hoffer aporta pautas claras para plantear actividades constructivas que favorecen la comprensión y la motivación de los estudiantes. La formación matemática que así se logra es valiosa para cursos en matemática avanzada, en ciencias y en varias carreras, puesto que proporciona un desarrollo en la percepción visual y espacial, puede servir como vehículo para estimular y ejercitar habilidades generales de pensamiento y capacidades para la solución de problemas, formación de valores estéticos y culturales que se derivan de su estudio.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bishop, A. (1989). ¿Cuáles son algunos de los obstáculos para el aprendizaje de la geometría? *Notas de Matemática*, 27, 13-49.
- Burger, W. y Shaugnessy M. (1989). Caracterización de los niveles de desarrollo en geometría según Van Hiele. *Notas de Matemática*, 28, 1-41.
- Burger, W. y Shaugnessy M. (1990). Trabajo preliminar a la deducción en geometría. *Notas de Matemática*, 30, 19-39.
- Hoffer, A. (1990). La geometría es más que demostración. *Notas de Matemática*, 29, 10-24.
- Jaime, A. (1995). ¿Por qué los estudiantes no comprenden la geometría? En A. Gutiérrez y A. Jaime. *Geometría y algunos aspectos generales de la educación matemática*. Bogotá: "una empresa docente" y Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 23-43.
- Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: el modelo de Van Hiele. En S. Llinares y M.V. Sánchez (Eds.). *Teoría y práctica en educación matemática*. Sevilla: Alfar.
- NCTM (1988). The Van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education*. Monograph number 3.
- Prevost F. (1990). La geometría en el bachillerato. *Notas de Matemática*. 30, 1-18.
- (S. A.) (1990). Tessellations. *Arithmetic Teacher*, 7, 364-378.

Claudia Galindo
Gimnasio Femenino
Carrera 7 N° 131-20
Tel.: 2582434/74/94
Bogotá, Colombia