



VOL. 18, Nº 2 (mayo-agosto 2014)

ISSN 1138-414X (edición papel)

ISSN 1989-639X (edición electrónica)

Fecha de recepción 24/09/2013

Fecha de aceptación 10/12/2014

ANÁLISIS DE LOS PROCESOS DE JUSTIFICACIÓN Y GENERALIZACIÓN DE LA FÓRMULA DEL ÁREA DEL RECTÁNGULO POR ALUMNOS DEL GRADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Analysis of justification and generalization processes of the rectangle area formula by primary education students



Matías Arce, Laura Conejo y Tomás Ortega

Universidad de Valladolid

E-mail: arcesan@am.uva.es, lcconejo@am.uva.es, ortega@am.uva.es

Resumen:

En el presente artículo se describe una investigación desarrollada con alumnos del Grado de Educación Primaria de la Universidad de Valladolid basada en el análisis de una tarea sobre la justificación y generalización de la fórmula para el cálculo del área de un rectángulo de base y altura racionales. El análisis de las producciones de los alumnos se realiza desde dos perspectivas diferentes. Por una parte, se consideran los esquemas de prueba de Harel & Sowder (1998) y las pruebas preformales de Van Asch (1993), para tratar de descubrir las intenciones de generalización de los alumnos y su resultado. Por otra, con el análisis de contenido (Bardin, 1996) se identifican los errores cometidos por los alumnos. Los resultados más notables son la ausencia de intencionalidad de generalización y la gran presencia de errores relacionados con el concepto de unidad de superficie.

Palabras clave: Esquemas de prueba, pruebas preformales, generalización, análisis de contenido, área del rectángulo, grado de Primaria.

Abstract:

In this paper, we describe a research developed with prospective elementary teachers in the University of Valladolid. The study is based on the analysis of a task about the justification and generalization of the formula to calculate areas of rectangles when its base and height are rational numbers. The analysis of students' productions was carried out from two different perspectives. On one hand, we consider Harel & Sowder's proof schemes (1998) and Van Asch's (1993) pre-formal proofs to try to discover the intentions of generalization in these students and their outcomes. On the other hand, we use content analysis (Bardin, 1996) to identify the mistakes made by students. The most notable conclusions are the lack of intention to generalize in a majority of students and the abundance of errors related to the concept of unit of area measurement.

Key words: Proof schemes, pre-formal proofs, generalization, content analysis, rectangle's area, prospective elementary teachers.

1. Introducción

Este artículo se centra en un contenido importante de las matemáticas y, en particular, del bloque de geometría en la Educación Primaria: el concepto de área de una superficie. En el Decreto 40/2007, que establece el currículo de Educación Primaria en Castilla y León, se introduce este concepto en el segundo ciclo, junto con su estimación y cálculo en figuras planas sencillas, ampliando esos contenidos a su cálculo tanto en polígonos elementales como en figuras circulares en el tercer ciclo.

Es evidente que el maestro de Primaria debe tener un conocimiento sólido sobre el concepto de área y de su enseñanza, y también debe saber los métodos de cálculo en las figuras planas propias de los contenidos curriculares de esta etapa educativa desde una perspectiva superior. Esto supone distinguir con claridad el concepto de los distintos métodos de cálculo y su fundamentación. Por tanto, consideramos necesario que el proceso de formación inicial de los Estudiantes del Grado de Educación Primaria (EGP) trate estos temas científicamente.

¿Existe realmente ese conocimiento sólido en futuros profesores de Primaria? Estudios como los de Baturo y Nason (1996) o Liñán y Contreras (2013) han puesto de manifiesto carencias en la comprensión del concepto de área por estos estudiantes, así como importantes dificultades de éstos al trabajar con unidades de medida. Esa falta de comprensión también provoca, por ejemplo, confusiones frecuentes entre área y perímetro y las posibles relaciones entre ellos (Liñán y Contreras, 2013; D'Amore y Fandiño, 2007).

En este artículo se analizan las respuestas de los EGP a una tarea sobre el cálculo del área de un rectángulo y su justificación. Los objetivos de la investigación son:

- Descubrir las concepciones de estos alumnos en relación a los procesos de justificación que fundamenten la generalización.
- Analizar qué tipo de errores tanto en la comprensión del concepto de área como en la justificación y generalización del método de cálculo son cometidos por estos estudiantes.

Sólo la detección y clasificación de estas concepciones y errores pueden ayudarnos a promover situaciones de prevención y superación de los mismos, que ayuden a estos estudiantes a mejorar la comprensión del concepto de área, sobre el cual suelen tener algunas ideas intuitivas, pero poca base conceptual (Murphy, 2012). Asimismo, la

identificación del concepto con su método de cálculo impediría la justificación de dichos métodos y puede influir en las propuestas didácticas elaboradas por los EGP, a través de aproximaciones demasiado procedimentales, mediante fórmulas de aplicación tendente en el alumnado pero con poco significado para ellos, con una visión meramente computacional de las matemáticas (Baturó y Nason, 1996; Murphy, 2012). También ayuda al profesorado universitario sobre las dificultades de aprendizaje que tienen asociados estos procesos, contribuyendo así a la mejora de la formación inicial de los futuros maestros.

2. Marco teórico

2.1. Esquemas de prueba y pruebas preformales

Los estudiantes del Grado de Educación Primaria deben distinguir entre el concepto de área, el método de cálculo y su justificación. Es evidente que en el campo de las matemáticas, el método de justificación por excelencia es el deductivo (demostración matemática), proceso que, entre otras funciones (De Villiers, 1993; Ibañez y Ortega, 2003), muestra la veracidad de una afirmación con rigor y precisión. Sin embargo, a veces es un proceso complejo para ciertos alumnos, sobre todo para aquellos que no están familiarizados con entornos especializados en matemáticas, como son estos estudiantes (Pence, 1999). Por esta razón, consideramos en este artículo el concepto de Esquemas de Prueba (EP), en lugar de demostración, porque son procesos más apropiados para este fin. Harel & Sowder (1998) analizan la demostración matemática desde la perspectiva de los alumnos y consideran el concepto de EP e Ibañez y Ortega (2001) analizan el aprendizaje de la demostración basándose en este concepto. Para estos autores, el EP de una persona consiste en lo que constituye persuasión y convencimiento para esa persona, entendiendo como convencimiento el proceso utilizado por un individuo para eliminar sus dudas sobre la veracidad de una afirmación y como persuasión el proceso utilizado por un individuo para eliminar las dudas de otros sobre la veracidad de una afirmación. Harel & Sowder dan una clasificación de estos esquemas y, más tarde, Ibañez y Ortega la ampliaron y consideraron que los tipos más interesantes son: los inductivos (de uno o de varios casos y sistemáticos), los experimentales y los analíticos (transformacionales y axiomáticos, que coinciden con las pruebas formales).

Otros autores como van Asch (1993) consideran otro tipo de pruebas, denominadas pruebas preformales (PP) que, según González (2012), son pruebas muy interesantes para los alumnos; que prefieren éstas a las formales porque, entre otras cosas, son más significativas para ellos y las entienden mejor.

“By a preformal proof we understand a line of reasoning which can be formalized to a formal proof, but in which the essential idea is already present” (van Asch, 1993, p. 310).

Así pues, consideramos que las PP son más adecuadas para los alumnos del Grado que las pruebas formales, y no están tan alejadas de éstas porque mantienen las características de su línea de razonamiento. Además, una de las características del razonamiento inductivo es la generalización (Barrera y Castro, 2007; Trujillo, Castro, y Molina, 2009; Castro, Cañadas y Molina, 2010) y el uso de ejemplos por estos autores, que se corresponden con los esquemas de prueba inductivos de un caso da lugar a las abstracciones que conducen a enunciados de patrones encaminados a la generalización. Las pruebas preformales que también persiguen una generalización, aportan una línea de razonamiento más profundo que la que se deriva de la comprobación de resultados particulares de los que, de forma inductiva, se infiere la generalización.

2.2. Bases teóricas

Consideramos que el área de una superficie es el número de cuadrados de lado unidad que contiene. En este trabajo nos fijaremos en este concepto en un tipo concreto de superficie, los rectángulos, pues hemos considerado que es la figura rectilínea a partir de la cual se derivan los correspondientes métodos de cálculo para el resto de figuras rectilíneas (cuadrado, triángulo, rombo, romboide, trapecio y polígonos regulares). Así, el área de un rectángulo es, por tanto, el número de cuadrados de lado unidad que contiene. Como es claro, ese número de cuadrados es diferente según cuál sea la unidad de longitud, u , fijada para ello, por lo que la expresión numérica de la cuantía del área depende de la unidad de longitud escogida. Aunque contar ese número de cuadrados sea algo que, a priori, pueda resultar complicado en algunos casos; existe un método de cálculo bastante sencillo, válido para cualquier rectángulo. Fijada una unidad de longitud, u , el área de esta figura se calcula multiplicando la longitud (es decir, el número de veces que contiene al segmento unidad) de su base, b , por la longitud de su altura, a . Obviamente, estas cuantías numéricas pueden ser números reales positivos. Así pues, la siguiente fórmula calcula el área del rectángulo:

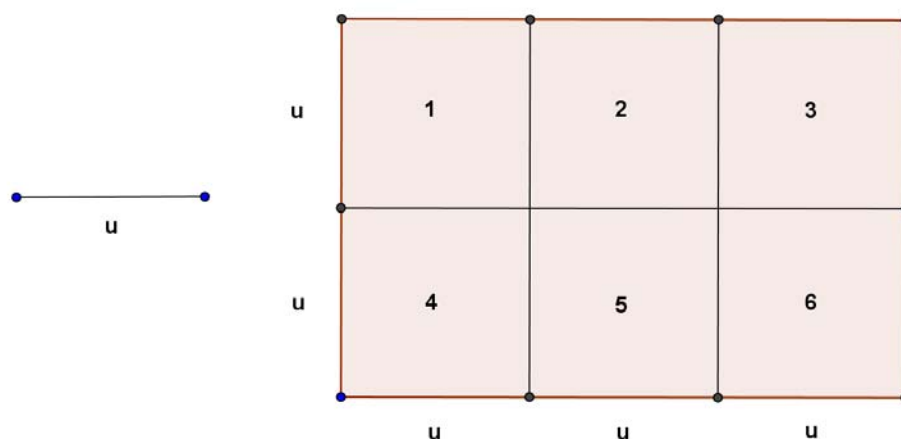
$$\text{Área rectángulo} = b \cdot a \cdot u^2 \text{ (unidades cuadradas)}$$

Sin embargo, ¿está justificado que, en cualquier caso, esta fórmula nos permita calcular el área del rectángulo, para a y b reales positivos arbitrarios, independientemente de su tipología numérica (números enteros, racionales o irracionales)? Esa justificación es más complicada cuando las longitudes de la base o de la altura no son números naturales, pues al tratar de recubrir el rectángulo dado por cuadrados de lado unidad, aparecen porciones incompletas de dicho cuadrado. A continuación, vamos a justificar que, sea cual fuere el rectángulo, la fórmula antes indicada es válida para calcular su área. Se distinguen tres casos:

1. Las longitudes a y b son números enteros positivos:

En este caso es sencillo contar el número de cuadrados unitarios que contiene el rectángulo, puesto que tanto la base como la altura contienen un número exacto de veces al segmento unidad fijado. Así, la multiplicación $b \cdot a$ equivale a contar el número de cuadrados unidad que contiene el rectángulo y, por tanto, su área es $A = b \cdot a \cdot u^2$. En la figura 1 se muestra este conteo en el caso de que $b = 3u$ y $a = 2u$, dando como resultado $6 = 3 \cdot 2 \cdot u^2$.

Figura 1. Rectángulo de longitudes enteras

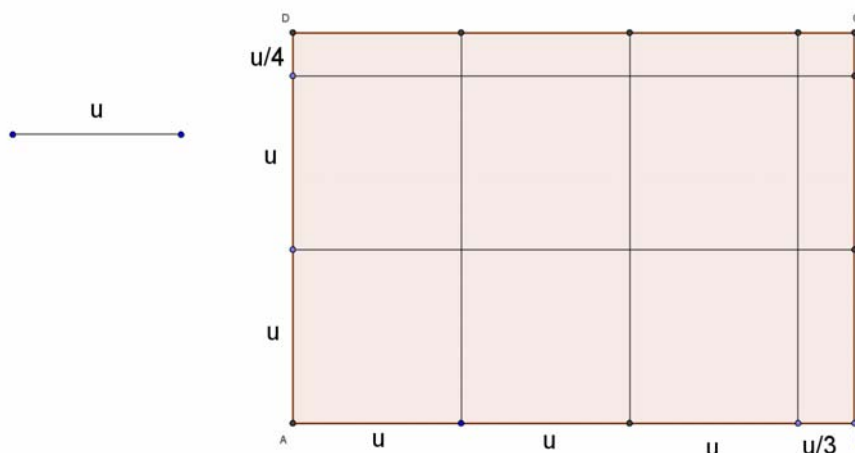


II. Las longitudes a y b son números racionales positivos:

Habida cuenta de que los números racionales se pueden representar por fracciones, utilizaremos estas representaciones para establecer el resultado anterior. Fijada una unidad de medida, consideramos que las longitudes de la base y de la altura de un rectángulo se representen a través de sendas fracciones.

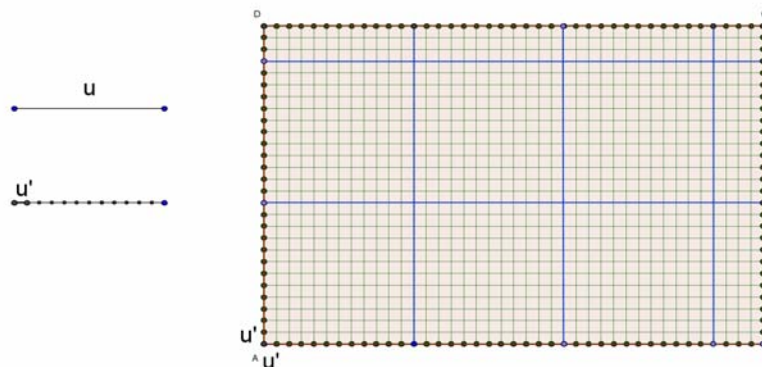
Estableceremos el resultado a través de una prueba preformal, desarrollando la justificación para un ejemplo concreto: un rectángulo cuya longitud de la base es $b=10/3 u$ y cuya longitud de altura es $a=9/4 u = (2+ 1/4) u$. En la figura 2 aparece representado este rectángulo descomponiendo las unidades de sus lados.

Figura 2. Rectángulo de longitudes racionales



Aquí, a diferencia del caso anterior, ni la base ni la altura contienen un número exacto de veces a la unidad de medida fijada, u , y, por tanto, no se puede contar el número de cuadrados unidad directamente. Si queremos que esto suceda de forma simultánea en base y altura, necesitamos realizar un cambio en la unidad de medida, considerando un divisor común de las divisiones de cada lado (de los tercios y de los cuartos). En este caso basta con tomar una unidad de medida u' que cumpla que $u'=u/(3 \cdot 4)$, o bien, $u=3 \cdot 4 u'$ (multiplicamos los denominadores de las fracciones de a y b). Por tanto, u' es la doceava parte de la unidad anterior. En la figura 3 se ha representado el rectángulo anterior y los cuadrados unidad que contiene, utilizando la nueva medida, u' .

Figura 3. Paso a un rectángulo de unidades enteras.



Para esta nueva unidad, las longitudes de base y altura son números enteros positivos, al contener éstas un número exacto de veces al nuevo segmento unidad u' . Así, $b=40 u'$ y $a=27 u'$. En este caso (longitudes enteras), ya hemos justificado que el área del rectángulo se calcula multiplicando dichas longitudes, por lo que $A=40 \cdot 27=1080 (u')^2$. Para calcular el área del rectángulo en la unidad de medida inicial, u , observemos, como podemos confirmar en el dibujo, que $1 u^2 = 12 \cdot 12 (u')^2 = 144 (u')^2$, por lo que $A=1080 (u')^2 = 40 \cdot 27 (u')^2 = (40 \cdot 27) / (12 \cdot 12) u^2 = (40/12) \cdot (27/12) u^2 = (10/3) \cdot (9/4) u^2$. El valor del área vuelve a ser igual al producto de las longitudes de base y altura.

Para un caso general, donde la longitud de la base sea p/q unidades u , y la de la altura $r/s u$, (con p, q, r y s enteros positivos), es suficiente considerar una nueva unidad de medida u' , fracción de la anterior, de tal forma que $u'=u/(q \cdot s)$, o bien, $u = q \cdot s u'$ (producto de los denominadores). Aunque la unidad fracción de u más grande que garantiza que las longitudes de base y altura sean números enteros positivos en esa base se obtiene tomando u'

$$= \frac{1}{mcm(q, s)} u$$
. En cualquiera de los dos casos, repitiendo de manera análoga el procedimiento seguido en el ejemplo, conseguimos establecer que el área del rectángulo es el producto de las longitudes de su base y de su altura.

III. Las longitudes a y b son números reales positivos:

Todo número real puede escribirse como límite de sucesiones de números racionales monótonas convergentes. Por ejemplo, dado un número real, basta con construir la sucesión (a_n) de números racionales obtenida tomando, en el lugar n -ésimo de la sucesión, el número decimal resultante de truncar al número real considerado, despreciando todos los decimales que siguen a la posición n -ésima. Por tanto, existirán dos sucesiones (b_n) y (a_n) de números racionales (representaciones fraccionarias) que convergen a las longitudes de sus lados, es

decir, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ respectivamente.

Para cada número natural n , llamamos R_n al rectángulo con longitud de base $b_n u$ y altura $a_n u$, y A_n al área de dicho rectángulo. Como las longitudes de la base y de la altura de estos rectángulos son números racionales (fracciones), A_n se calcula como antes hemos justificado, es decir: $A_n = b_n \cdot a_n u^2$. Así, se crea una sucesión (A_n) de números racionales (fracciones), que representa las áreas de los sucesivos rectángulos. Por ejemplo: si $b = \pi$ y $a = \sqrt{2}$, los primeros términos de la sucesiones (a_n) , (b_n) y (A_n) son fáciles de calcular y aparecen en la Tabla 1, tanto en forma decimal como fraccionaria.

Tabla 1. Primeros términos de las sucesiones en el ejemplo propuesto

	$n=1$	$n=2$	$n=3$...
(b_n)	$3'1 = 31/10$	$3'14$	$3'141$...
(a_n)	$1'4 = 14/10$	$1'41$	$1'414$...
(A_n)	$3'1 \cdot 1'4 = 4'34 = 434/100$	$3'14 \cdot 1'41 = 4'4274$	$4'441374$...

La sucesión (A_n) es monótona creciente y está acotada superiormente (por $b \cdot a$), por lo que es convergente y, por ser el producto de dos sucesiones convergentes,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) = b \cdot a \text{ (Fischer, 1983, pp.131-132).}$$

Ahora bien, a medida que n va aumentando, estos rectángulos R_n se van aproximando al rectángulo de partida, R , por lo que es razonable definir el área del rectángulo inicial como

el límite de la sucesión (A_n) , con lo que: Área de $R = \lim_{n \rightarrow \infty} (A_n) u^2 = b \cdot a u^2$. Siguiendo con el ejemplo propuesto, base $b = \pi u$ y altura $a = \sqrt{2} u$, el área es $A = \pi \cdot \sqrt{2} u^2$, límite de la sucesión producto (A_n) cuyos primeros términos aparecen en la Tabla 1. Queda así establecida de forma deductiva la fórmula para el cálculo del área sean cuales fueren las longitudes de los lados del rectángulo y la unidad de medida considerada.

3. Planteamiento del análisis, metodología y contexto

La experimentación se ha llevado a cabo en la asignatura sobre Fundamentos y Didáctica de la Geometría, 2º curso del Grado de Educación Primaria (Facultad de Educación y Trabajo Social de Valladolid). En el aula se estudió el concepto de área de una superficie y se justificó la “fórmula para calcular el área del rectángulo” utilizando pruebas preformales, tanto en el caso donde las longitudes de base y altura fueran números naturales ($b=7 u$ y $a=4 u$) como con números racionales sencillos (la descrita en el apartado “Bases teóricas”). Se optó por este tipo de justificación al considerar que sería más significativa, más atractiva y fácil para los alumnos (González, 2012), conservándose la línea de razonamiento general. Para analizar la capacidad de justificación y generalización de los alumnos, se les propuso la siguiente tarea:

“Tarea: Justifica que el área de un rectángulo de base $9/4$ unidades y altura $7/3$ unidades es $63/12$ unidades cuadradas (se cuentan cuadraditos de lado $1/12$ del cuadrado de partida, pues $12 = m.c.m. (3,4)$) explicando los pasos seguidos y el caso general.”

La tarea fue desarrollada por los alumnos fuera del aula, bien de manera individual o por grupos. La tarea fue entregada por 23 alumnos de manera individual (A1, A2, ..., A23) y por 27 forma grupal, repartidos en ocho grupos (tres grupos de dos estudiantes, uno de tres, dos de cuatro y dos de cinco) y numerados del A24 al A50.

Para realizar el análisis de las tareas de los 50 alumnos, se ha utilizado la metodología de análisis de contenido. Andréu Abela (1998) considera el análisis de contenido como una técnica de interpretación de textos capaces de albergar un contenido que, leído e interpretado adecuadamente, nos permitirá conocer mejor diversos aspectos y fenómenos. La técnica funciona mediante procedimientos sistemáticos y objetivos de descripción analítica de mensajes, con el objetivo de inferir conocimientos a partir de ellos (Bardin, 1996), a través de su interpretación. Para Krippendorff (1990) el análisis de contenido es una herramienta válida y fiable para el tratamiento de los datos y resalta su contribución al conocimiento, destacando dos aspectos que deben tenerse en cuenta: la importancia del contexto en que se desarrolla y su carácter reproducible.

Cada tarea es una unidad de registro: segmento de contenido tomado como base para el análisis (Bardin, 1996; Krippendorff, 1990). Se ha considerado, en primer lugar, el tipo de justificación realizada por los alumnos, teniendo como referencia la clasificación de los esquemas de prueba (EP) y el concepto de prueba preformal. En segundo lugar, se vuelve a analizar cada tarea para detectar los diferentes errores cometidos al resolverla, entendiendo por error cualquier conocimiento deficiente e incompleto detectado (Rico, 1995). Después, en la fase de categorización se inventariaron tanto los EP existentes como todos los errores

cometidos por los alumnos, de diversa naturaleza. La clasificación de unos y otros, como indica Bardin, se ha hecho a través de una categorización de tipo inductivo, a partir de la clasificación analógica y progresiva de los diferentes elementos extraídos en el análisis.

4. Análisis de las producciones de los alumnos desde el punto de vista de los esquemas de prueba y las pruebas preformales

La tarea que se propuso a los alumnos consiste específicamente en realizar un razonamiento que permita probar una conjetura muy concreta. Como vemos, ya en el enunciado aparece la acción "justificar" lo que implica que la respuesta tiene que ser un razonamiento que muestre la veracidad de la afirmación.

Considerando los conceptos de esquema de prueba y Prueba Preformal (PP), descritos antes, pensamos que la clasificación de las respuestas de los alumnos no será directa, ya que la instrucción docente consistió en justificar y generalizar la fórmula mediante una PP. Sin embargo, en el análisis de las producciones de los alumnos trataremos de descubrir si sus respuestas se aproximan más a un esquema de prueba inductivo de un caso (EPind1) o a una PP. Es evidente que encontraremos respuestas incompletas y con errores, pero aún así, consideraremos que la respuesta implícita en la tarea es un EPind1 cuando su intención sea la de comprobar el resultado y, por el contrario, será una PP cuando trate de establecerlo, de justificar que la fórmula se puede aplicar a cualquier rectángulo sean cuales fueren las longitudes racionales de sus lados. Desde esta perspectiva, no entraremos a valorar la corrección o incorrección de los razonamientos, sino en detectar si se limita a realizar los cálculos aritméticos con la intencionalidad de comprobar la fórmula o, por el contrario, se fijan en que el procedimiento seguido no depende de las cuantías numéricas y, por tanto, se puede inferir la fórmula para calcular el área de cualquier rectángulo, pero esto se hará después. Primero, analizaremos si los alumnos han transcrito correctamente el enunciado o han hecho una modificación del mismo, ya que si han considerado otro enunciado alternativo, la observación del mismo les puede haber llevado a seguir un procedimiento acorde con éste y diferente al que correspondería al enunciado original.

Tabla 2. *Intención de los alumnos para afrontar la justificación y la generalización*

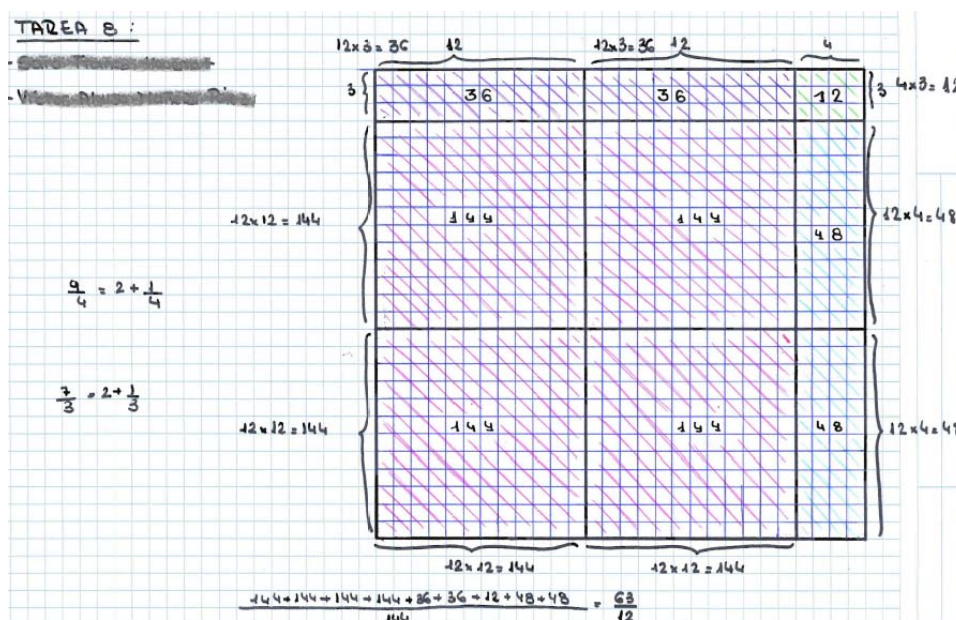
Desarrollos Enunciados	AD: No compara el conteo con el Resultado de Aplicar la Fórmula (RAF).	CD: Compara el conteo con el RAF, pero no generaliza.	JD: Indican que la fórmula se puede generalizar.
AE: No hay enunciado o éste no tiene acción verbal	A13, A21, A32, A33, A39, A40, A41.	A9, A10, A11, A17, A19, A22, A44, A45, A46, A47, A48.	
CE: Halla gráficamente, calcula el área, calcular.	A2, A6.		A7.
JE: Demostrar, justifica, justificación geométrica, justificar, demuestra.	A3, A4, A5, A12, A14, A20, A28, A29, A30, A31, A34, A35, A36, A37, A38.	A1, A8, A15, A16, A18, A23, A42, A43, A49, A50.	A24, A25, A26, A27.

La revisión de las transcripciones del enunciado son susceptibles de ser clasificadas en tres niveles desde la perspectiva de la acción a realizar implícita en ellas: ausencia de intencionalidad (no hay enunciado o éste no contiene una acción verbal, AE), intención de calcular (CE), intención de justificar (JE). Otros indicadores de las intenciones de los alumnos los encontramos en las expresiones que indiquen explícitamente si lo que hacen es un mero cálculo, si calculan y comparan sus resultados con el resultado de aplicar la fórmula o si el

razonamiento descrito se puede generalizar a otros rectángulos de dimensiones racionales. Análogamente a la clasificación descrita para los enunciados, podemos encontrar tres niveles de intencionalidad en el desarrollo de la tarea: ausencia de intencionalidad (AD), intención de calcular (CD) e intención de justificar (JD). La tabla 2 clasifica a los alumnos según estas categorías y sus indicadores.

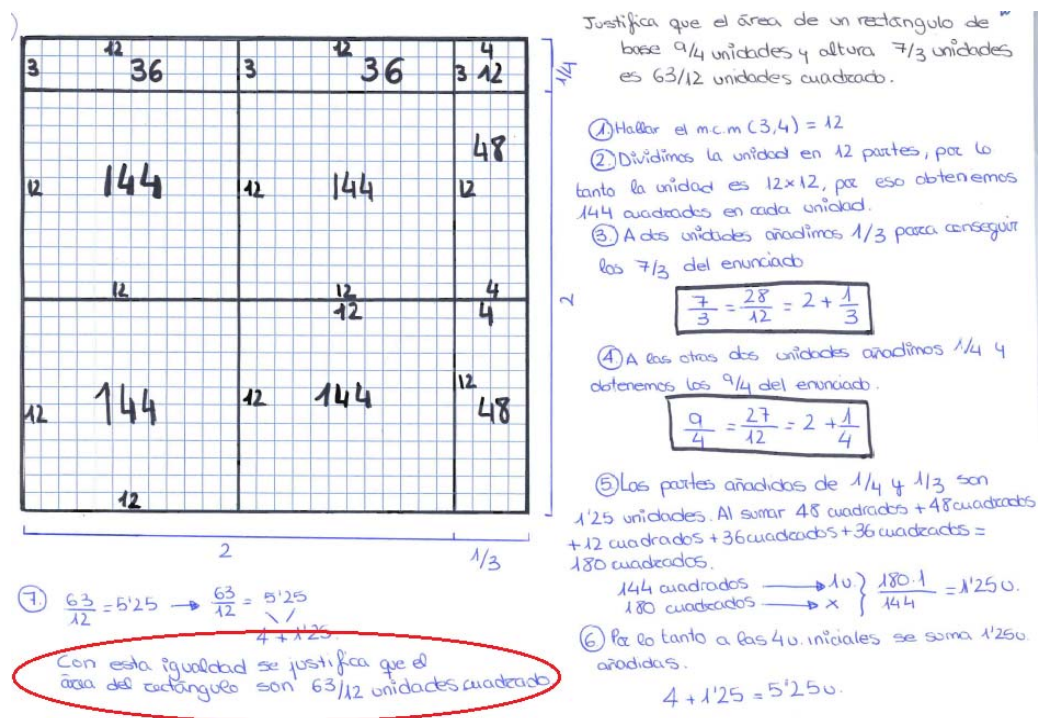
De los 50 alumnos, 18 (36%) no transcriben el enunciado o éste carece de acción verbal y, por tanto, desconocemos el problema que el alumno quiere o pretende resolver. No obstante, ninguno de éstos refleja una intencionalidad de generalización en el desarrollo, por lo que consideramos que la ausencia de intencionalidad en el enunciado se considera en el sentido de calcular (figura 4). Por su parte, 3 alumnos (6%) escriben acciones como “hallar” y “calcular”, lo que, en principio, no llevarían al alumno a la justificación en su desarrollo. 29 alumnos (58%) transcriben correctamente el enunciado o utilizan un verbo que implica justificación, situación que se corresponde con la intención del enunciado y de la instrucción descrita en clase.

Figura 4. A32 y A33 no transcriben ningún enunciado y únicamente realizan el conteo de cuadraditos



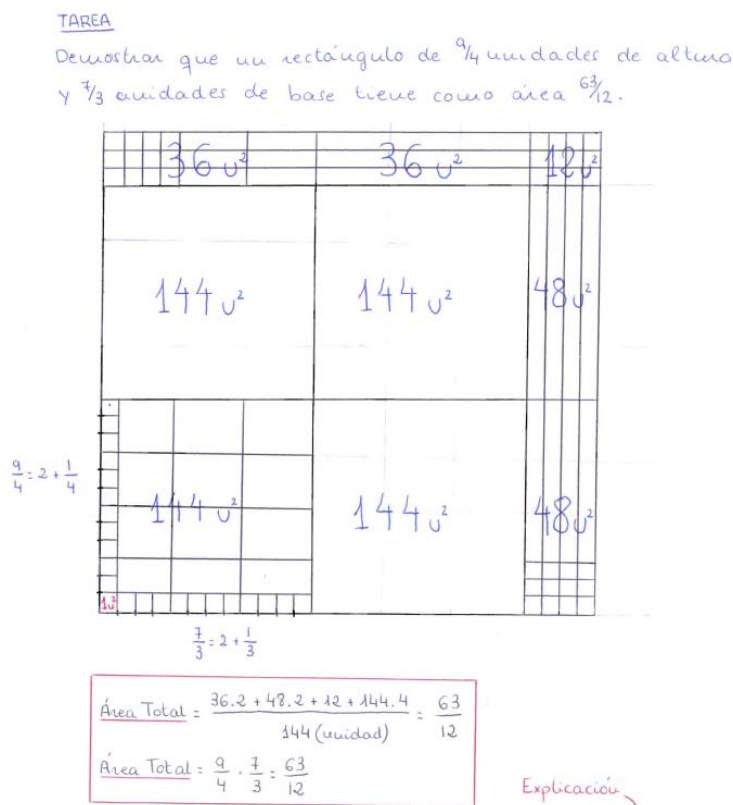
Independientemente del enunciado transcrito, hay 24 alumnos (48%) que únicamente realizan el conteo de cuadraditos, es decir, repiten el método observado en clase de dividir el rectángulo en unidades más pequeñas (aunque no justifican dicha división) y realizan el conteo de las nuevas unidades, pero no lo relacionan con el resultado de aplicar la fórmula en dicho rectángulo. Cabría esperar que los alumnos que no reflejaron la intención de justificar la validez en el enunciado no lo hicieran, pero sí era esperable en aquellos que escribieron dicha acción en el enunciado. Sin embargo, hay 16 alumnos (32%) que han expresado en el enunciado esa intención y luego no la han llevado a cabo, lo que nos indica que lo que hayan transcrito en el enunciado no tiene especial relevancia para estos alumnos en el desarrollo de la tarea (figura 5).

Figura 5. A34 a A38 enuncian justificar, consideran que han justificado, pero no comparan con el resultado de aplicar la fórmula.



Hay 21 alumnos (42%) que comparan los resultados de realizar el conteo con el obtenido al aplicar la fórmula, aunque no lo generalizan a otros rectángulos (figura 6). De estos 21, 11 (22% de toda la muestra) no han transcrito ningún enunciado o éste carece de acción verbal, por lo que suponemos que realizan la tarea de acuerdo a la instrucción recibida, aunque no lo hayan reflejado en el enunciado.

Figura 6. A15 enuncia "demostrar", compara ambos resultados, pero no generaliza



Por último, sólo 5 alumnos (10%) indican que el resultado se puede generalizar a otros rectángulos de dimensiones racionales. Curiosamente, uno de estos alumnos, el A7, muestra en el enunciado la intención de calcular y no la de generalizar. Sin embargo, sí que realiza una generalización (figura 7). Este proceder, que es contrario al referido anteriormente, vuelve a poner de manifiesto que los enunciados que han transcrito de la tarea a realizar no tienen una significación real para ellos. La cuestión es ahora tratar de esclarecer cuál es la razón de este fenómeno.

Figura 7. Justificación y generalización de A7

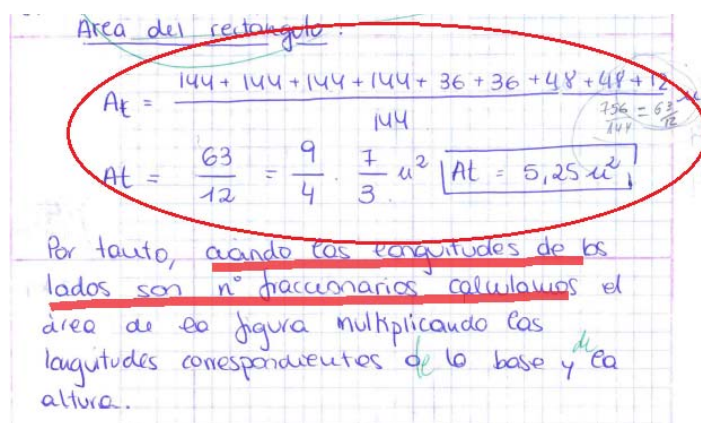
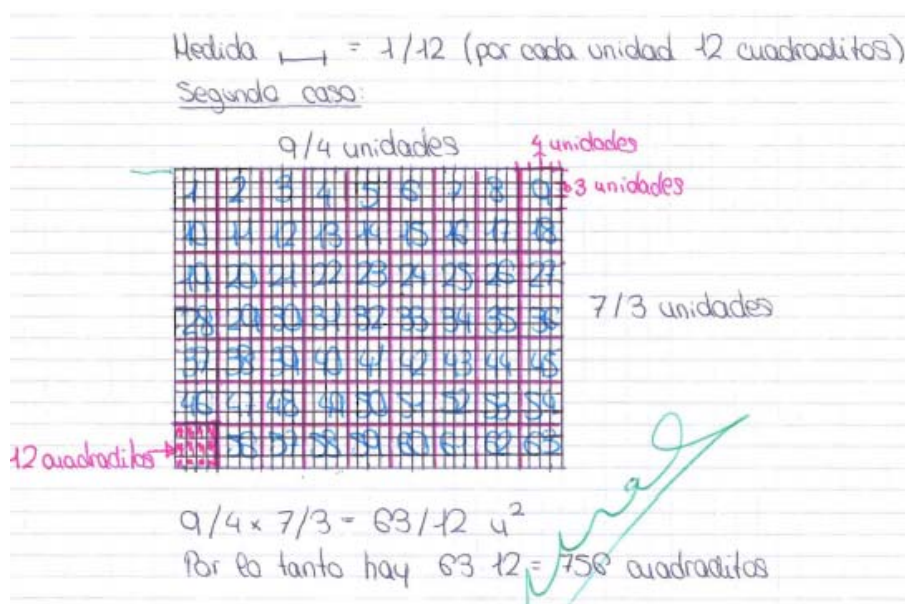


Figura 8. Ejemplo de razonamiento erróneo. A49 y A50



En la clasificación anterior se han reflejado las intencionalidades de los alumnos en función de lo que expresan en sus enunciados y desarrollos, independientemente de la corrección de las respuestas. Ahora describimos el análisis de éstas desde la perspectiva de los esquemas de prueba y de las pruebas preformales, teniendo en cuenta también los errores que contienen sus respuestas. Con este análisis hemos encontrado tres categorías excluyentes de clasificación de las respuestas:

- EP0: no justifican la fórmula. Con el análisis realizado se descubren tres casos:

- Alumnos que realizan el conteo, pero que no comparan su resultado con el que se obtendría con el resultado de aplicar la fórmula (RAF).
 - Alumnos que comparan únicamente su resultado con el resultado dado en el enunciado, pero no realizan el producto de las longitudes de los lados.
 - Alumnos que expresan un razonamiento erróneo. Algunos de éstos, aunque han realizado mal el razonamiento, intentan comparar su resultado con el RAF. La figura 8 es un ejemplo de estas respuestas, que son numerosas.
- EPind1 incompleto: los alumnos que comparan su solución con el RAF se ajustan a un esquema de prueba inductivo de un caso (EPind1), ya que lo consideran como un ejemplo que cumple la fórmula y no llegan a generalizar. Además, todos los desarrollos son incompletos, ya que no expresan la transformación de la unidad inicial de medida en una unidad menor que les permita el conteo. Por tanto, no se producen EPind1 completos. Un ejemplo de estas respuestas es la que proporciona la alumna A9 que se presenta en la figura 9. En ella se percibe que únicamente calcula y compara su resultado con el que se obtiene con el RAF.

Figura 9: Parte final de la respuesta de A9

$$\text{Área total} = \frac{36 \cdot 2 + 48 \cdot 2 + 12 + 144 \cdot 4}{144} = \frac{63}{12}$$

$$\text{Área total} = \frac{9}{4} \cdot \frac{7}{3} = \frac{63}{12}$$

- PP incompleta: son los alumnos que inducen una generalización del resultado, como por ejemplo la alumna A7 (figura 7). Si bien estas respuestas se ajustan más al sentido de la tarea, pero, como en el caso anterior, ningún alumno justifica la transformación de unidades, y que la división en cuadraditos más pequeños genera una nueva unidad de medida de área.

En la tabla 3 se sintetizan las categorías descritas anteriormente y se distribuyen las respuestas de los alumnos en las mismas:

Tabla 3. Categorías de respuestas de los alumnos

Tipos de esquema	Características	Alumnos
EPO	Realizan el proceso de conteo, pero no comparan.	A2, A4, A6, A12, A13, A14, A21, A28, A29, A30, A31, A32, A33
	Realizan el proceso de conteo y comparan únicamente con el resultado final, pero no con el producto.	A34, A35, A36, A37, A38
	Realizan un razonamiento erróneo, y ni siquiera realizan el conteo correctamente.	A3, A5, A20, A22, A39, A40, A41, A49, A50
EPind1 incompleto	No logra establecer la equivalencia, sino que únicamente compara resultados, y además, no realiza todas las comprobaciones pertinentes.	A1, A8, A9, A10, A11, A15, A16, A17, A18, A19, A23, A42, A43, A44, A45, A46, A47, A48
PP incompleta	Considera que el razonamiento es válido cuando base y altura son fraccionarias. Sin embargo, no realiza todas las etapas del razonamiento.	A7, A24, A25, A26, A27

5. Clasificación de los errores encontrados al resolver la tarea

Como ya se ha indicado en la metodología, hemos inventariado todos los errores (según Rico, 1995) en los que han incurrido los estudiantes participantes al resolver la tarea propuesta. Posteriormente, se hizo una categorización de forma inductiva (Andréu Abela, 1998) como resultado de la clasificación analógica y progresiva de estos errores encontrados. Así, hemos obtenido seis categorías distintas de errores cometidos al resolver la tarea. Son éstas:

5.1 Errores relacionados con el concepto de área y sus unidades de medida

En esta categoría hemos agrupado los errores relacionados con la comprensión del concepto de área y sus unidades de medida y, también, los errores cometidos al realizar un cambio en la unidad de longitud utilizada (y, por tanto, de superficie) o al expresar estas unidades.

En relación a la comprensión del concepto de área, hemos encontrado cinco alumnos (10%) que identifican el área de un rectángulo con su método de cálculo. Un ejemplo es el alumno A19, que comienza su resolución indicando que: "El área del rectángulo es el producto de sus dos lados perpendiculares, que reciben el nombre de base y altura". También hay un número apreciable de alumnos (nueve, 18%) que muestran importantes dificultades en la comprensión de aspectos relacionados con el concepto de unidad de medida (ya sea de longitud o de superficie). Estos alumnos cometen errores tales como considerar unidades de superficie no cuadradas (en esta tarea, rectángulos con longitudes de los lados $4u$ y $3u$), usar unidades de superficie para medir longitudes, confundir las divisiones en el lado del cuadrado unitario con divisiones en la propia superficie de dicho cuadrado y considerar inalterable la relación existente entre dos unidades de longitud y las correspondientes unidades de superficie que generan. Varios de estos errores pueden verse en la figura 8 anterior y en la figura 10.

Figura 10. Errores en los conceptos de unidad de longitud y de superficie de A22

$$b = \frac{9}{4} = \frac{27}{12}$$

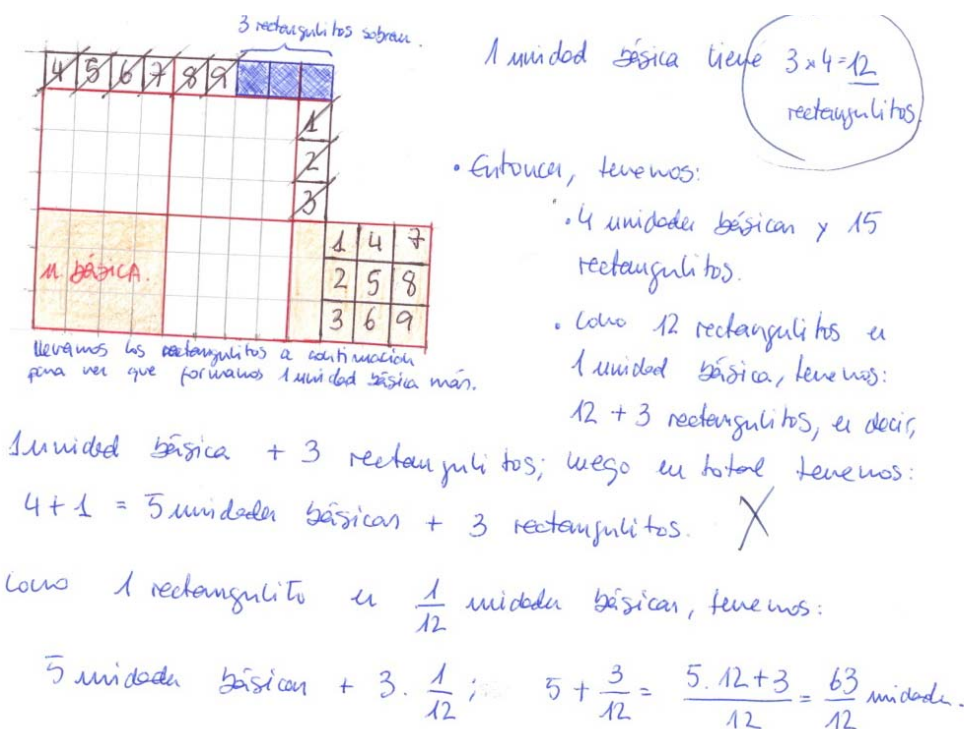
$$h = \frac{7}{3} = \frac{28}{12}$$

$$a = b \cdot h = \frac{9}{4} \cdot \frac{7}{3} = \frac{63}{12}$$

- Lo primero que debemos hacer es sacar como unidad básica un cuadrado que tenga de lado $\frac{1}{12}$, y para ello hemos hecho un rectángulo y lo hemos dividido en 12 cuadrados.
 Después de hacer esto, hemos calculado cuantos cuadrados de lado $\frac{1}{12}$ necesitaba la base (27) y la altura (28).
 Hacemos el dibujo y vemos que el rectángulo tiene 63 cuadrados de lado $\frac{1}{12}$, igual que nos sale al multiplicar $\frac{9}{4} \cdot \frac{7}{3} = \frac{63}{12}$.

Ningún alumno que resolvió la tarea ha hecho mención explícita en su explicación al cambio en la unidad de medida existente durante la prueba. Únicamente 18 alumnos (36%), aunque implícitamente, hacen referencia a la existencia de dos unidades de medida; sin embargo, prácticamente todos llaman de la misma manera a ambas unidades, sin diferenciarlas (alumna A9: "En realidad, la unidad sería de $1 \times 1 u^2$, pero lo hacemos de $12 \times 12 u^2$ para obtener un número entero"). Únicamente la alumna A8 hace una distinción al nombrar las unidades, utilizando los términos de "unidades 12×12 " y "unidades 1×1 " aunque intercambia la manera en que se refiere a la unidad mayor y a la menor durante su explicación, por lo que su asignación es difusa. La mitad de los alumnos expresa que considera una división del cuadrado unidad en "partes" de él, aunque sin especificar que lo que está realizando es un cambio de unidad (alumna A2: "Tendremos que dividir cada unidad en $12 \times 12 = 144$ partes"). De ellos, la mayoría utilizan como "partes" cuadrados más pequeños; no obstante, en algunos casos las "partes" no son cuadradas, sino rectangulares; así, la división realizada es incompatible con la que proporcionaría un cambio en la unidad de superficie. La figura 11 muestra el trabajo de los alumnos A39, A40 y A41, que dividen el cuadrado unidad en doce rectángulos iguales. Aunque la estrategia de conteo y cálculo que realizan resulta correcta, ésta es inadecuada atendiendo a la tarea que se pedía resolver, la justificación, y al cambio a una unidad de superficie más pequeña.

Figura 11. Estrategia de cálculo de A39, A40 y A41



Otros errores al expresar las unidades son: la omisión en un número abundante de alumnos, (en 33, un 66%) de la unidad junto a la expresión numérica de la cuantía de una longitud o de una superficie y los errores al referirse a las unidades cuadradas simplemente como "u" o "unidad" en 17 alumnos (34%) o utilizando el término "cuadrados" en lugar de unidades cuadradas. También hay cinco alumnos que indican erróneamente que el m.c.m. de los denominadores de las longitudes de los lados del rectángulo (en este caso, $12 = m.c.m(3,4)$) es una unidad común, cuando en realidad la unidad común se obtiene con el inverso (es la doceava parte de la unidad inicial).

5.2 Errores relacionados con la conceptualización de las figuras geométricas que intervienen

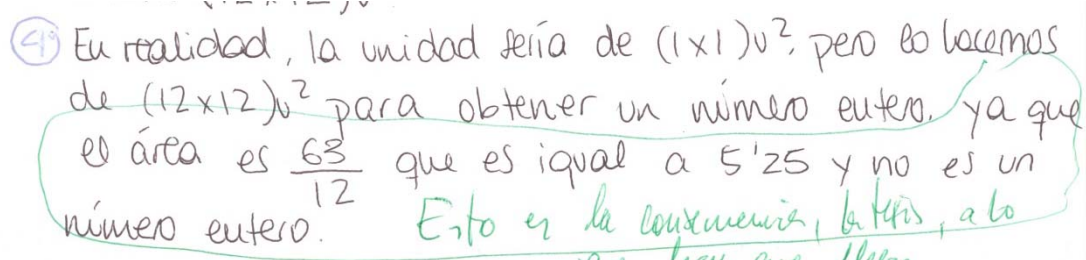
A pesar de que las figuras planas de la tarea son sencillas, encontramos algunos errores relacionados con la nomenclatura y la discriminación de estas figuras y sus elementos. No obstante, éstos no han sido abundantes. Hemos encontrado cinco alumnos (10%) que se refieren a alguno de los rectángulos que aparecen a lo largo de la tarea como cuadrados. También hay dos alumnos que consideran que la base de un rectángulo siempre debe ser mayor que la altura: "Puesto que observamos que $7/3 > 9/4$, colocamos $7/3$ como base del rectángulo y $9/4$ como altura" (alumna A23). Pensamos que la restricción considerada por estos dos alumnos puede estar favorecida por la representación prototípica de esta figura utilizada en los manuales y en la docencia. En relación al término cuadrado, encontramos una alumna que se refiere a los cuadrados como "cuadrados regulares" y otra que utiliza en varias ocasiones la palabra "cuadro" en lugar de cuadrado.

5.3 Errores relacionados con la hipótesis y la tesis del resultado que se pide justificar

En esta categoría incluimos aquellos errores que hemos encontrado relacionados con el establecimiento de la hipótesis o de la tesis del resultado que se pedía justificar a través de una prueba preformal: "Si las longitudes de la base y altura de un rectángulo son racionales, el área del mismo se obtiene multiplicando dichas longitudes".

En el apartado anterior ya hemos indicado los problemas de algunos alumnos al transcribir el enunciado (éste no se transcribe, o hay errores en la acción verbal) y la falta de establecimiento en varios de ellos de la relación entre el resultado obtenido y el producto de las longitudes de base y altura. Además, encontramos siete alumnos (14%) que cambian en sus explicaciones la hipótesis del enunciado: indican que el cambio de unidad debe realizarse porque el área del rectángulo (proporcionado en el enunciado de la tarea) es un número racional (que no tiene por qué ser así), en lugar de considerar como punto de partida que son racionales las longitudes de la base y de la altura del rectángulo. La figura 12 ejemplifica este hecho. Esta hipótesis "alternativa" no cubre todos los posibles casos en los cuales es necesario el cambio de unidad, puesto que el área de un rectángulo puede ser un número natural aunque las longitudes de su base y su altura sean racionales. Por ejemplo, si $b=9/2 u$ y $h=4/3 u$, el área del rectángulo es $6 u^2$, pero es necesario aplicar el cambio en la unidad de superficie para realizar el conteo de cuadraditos.

Figura 12. En este extracto de A9 observamos la hipótesis "alternativa"



④ En realidad, la unidad sería de $(1 \times 1) u^2$, pero lo hacemos de $(12 \times 12) u^2$ para obtener un número entero, ya que el área es $\frac{63}{12}$ que es igual a $5,25$ y no es un número entero. Esto es la consecuencia, la tesis, a lo

5.4 Otros errores en el desarrollo, interpretación y explicación del proceso realizado para la justificación

En esta categoría incluimos aquellos errores relacionados con el desarrollo, la interpretación o la explicación del proceso seguido para justificar el resultado, pero que no se ajustan a ninguna de las tres categorías anteriores.

Aquí, el error más repetido (en 9 alumnos, 18%) es la indicación de que la división en tercios y/o en cuartos es realizada sobre la longitud completa del lado, en lugar de en cada una de las unidades de éste. Seis alumnos no explican adecuadamente la existencia de cuatro cuadrados unitarios completos en el rectángulo (utilizando la unidad de medida inicial), ya que escriben que quedan “cuatro cuadrados de $2u$ de lado” (en lugar de un cuadrado de lado dos unidades, o cuatro cuadrados unitarios). Otros dos alumnos, al sumar los cuadraditos para obtener el área con la unidad de medida más pequeña, hacen la suma como si sólo existiera un cuadrado unitario completo para la unidad inicial, olvidando los otros tres. Aún así, uno de ellos dice obtener el resultado requerido, lo que podría mostrar que no ha comprobado si efectivamente se obtiene en su desarrollo el resultado para el área especificado en el enunciado.

En relación con las porciones de cuadrado unidad (para la unidad inicial) existentes en el rectángulo, encontramos una alumna, A6, que relaciona el número de cuadraditos existentes en la porción de cuadrado de la parte superior derecha (cuyos lados son los excedentes de unidad en la base y la altura del rectángulo) con el valor del m.c.m. de los denominadores. En este caso, la coincidencia es cierta al ser los denominadores primos entre sí y ser unitarias las fracciones excedentarias con respecto a las unidades enteras de longitud en la base y en la altura. Sin embargo, sin las condiciones anteriores no tiene por qué cumplirse esa relación. Además, otra alumna, A8, hace referencia de manera deficiente a las áreas de estas porciones, escribiendo que: “Falta por sumar al área la parte fraccionaria de $1/4+1/3$ ”.

5.6 Errores aritméticos

En esta categoría incluimos todos aquellos errores relacionados con cálculos o procesos aritméticos que hemos encontrado.

Existen algunos errores al expresar el cálculo del mínimo común múltiplo de los denominadores; en este caso, 3 y 4. Cinco alumnos (10%) escriben en sus explicaciones que han realizado el m.c.m. de las longitudes de base y altura (en lugar de los denominadores). Un ejemplo: “Para obtener *cuadrados regulares*, realizamos el m.c.m. de las dos fracciones” (alumna A7). Estos alumnos no se percatan de que el concepto de m.c.m. pierde su sentido al hablar de números racionales. Otros cinco alumnos no indican en ningún momento de qué números hay que realizar el mínimo común múltiplo.

Además, hay ocho alumnos (16%) que muestran en su resolución una necesidad de trabajar con las expresiones decimales de las fracciones, sobre todo del área y del número de cuadraditos unitarios (figura 5), lo cual complica que puedan relacionar el valor del área obtenido con el producto de las longitudes de base y altura, al corresponderse la expresión numérica de la cuantía de la longitud de la base con un decimal periódico puro. De hecho, ninguno de estos alumnos indica esa relación, estableciendo directamente la igualdad entre el resultado dado en el enunciado para el área y el que obtienen contando.

Entre los errores en la notación de las operaciones, destacamos el cometido por un grupo de cuatro alumnas al indicar el producto de dos fracciones, escribiendo que “ $9/4$ y $7/3=63/12$ ”.

5.7 Errores en la representación gráfica

En esta categoría incluimos todos aquellos errores encontrados en las representaciones gráficas de los alumnos al resolver la tarea propuesta.

Los más frecuentes están relacionados con el uso en el gráfico de una unidad de longitud distinta en la base y en la altura al representar el rectángulo. Estos errores están relacionados con los comentados en la primera categoría de errores, donde se indicaba el uso de unidades de medida rectangulares, en lugar de cuadradas, para medir superficies.

Los alumnos A49 y A50 también cometen un error en su representación gráfica (figura 8), puesto que para dibujar, por ejemplo, la base, con una longitud de $9/4$ u, parece que dibujan 9 u y luego dividen éstas en cuartos (algo similar hacen con la altura). Observamos también el uso de una unidad de superficie no cuadrada.

Otros errores son: dibujar erróneamente los excedentes respecto de las unidades enteras al representar la base y la altura del rectángulo, intercambiar en la representación las longitudes de la base y la altura respecto de lo indicado en el enunciado transcrito, no completar la cuadrícula al realizar el cambio a una unidad de medida menor (figura 6) o realizar 14 divisiones (en lugar de 12) en una de las unidades de longitud.

6. Conclusiones

En relación con el enunciado de la tarea, podemos afirmar que no hay una comprensión adecuada del texto, ya que, por una parte, es transcrito erróneamente (o no transcrito) por varios alumnos y, por otra, no se desarrolla la tarea conforme al texto transcrito por ellos en un número bastante alto de los Estudiantes del Grado de Educación Primaria (EGP), que tras indicar en el enunciado de la tarea la necesidad de demostrar o justificar la fórmula, simplemente realizan el conteo de cuadraditos, sin compararlo con el resultado de aplicar la fórmula, ni establecer la generalización a otros casos. Esto puede indicar una falta de comprensión en los EGP de los términos matemáticos asociados a los procesos de justificación.

Como se ha corroborado también en este estudio, muchos alumnos tienen dificultades para distinguir los procesos asociados a la justificación, en particular, confunden las demostraciones con los esquemas de prueba inductivos de un caso (Ibañez y Ortega, 2003). En este caso, estos esquemas han prevalecido en los EGP sobre la realización de la justificación a partir de la prueba preformal, que requieren cierto nivel de abstracción.

Hemos observado, además, que la inmensa mayoría de los alumnos que han realizado algún esquema de prueba incompleto, limitándose en muchas ocasiones a reflejar los pasos o procedimientos de naturaleza mecánica, sin justificar el porqué se hacen esos cálculos y qué persiguen. Se aprecia la tendencia indicada por Baturo y Nason (1996) en los EGP de querer dar una respuesta numérica a las tareas, de buscar un resultado (en este caso de intentar llegar al resultado numérico del área expuesto en el enunciado de la tarea, aunque fuera a través de razonamientos o cálculos erróneos). La presencia en muchos de los EGP de esta

visión de las matemáticas meramente computacional, con un conocimiento sobre medida de áreas ligado a fórmulas, en muchos casos no significativas para ellos e incuestionables (desconocimiento sobre cómo se generan y justifican) puede limitar el alcance de sus propuestas didácticas futuras y su posibilidad de desarrollar aprendizajes significativos de conceptos y procesos matemáticos en el alumnado de Primaria (Baturó y Nason, 1996; Murphy, 2012).

El paso que ha resultado ser más complicado, al menos eso indica el hecho de que nadie lo indique explícitamente, es establecer el cambio de unidad necesario para poder realizar el conteo de cuadraditos. La mitad de alumnos se limitan a indicar que dividen la unidad en “partes”, pero sin indicar que están realizando un cambio en la unidad ni el propósito del mismo. Además, encontramos una serie de errores frecuentes relacionados con las unidades de medida, como considerar unidades de superficie no cuadradas, usar unidades de superficie para medir longitudes, confundir divisiones de la unidad de longitud con divisiones de la superficie del cuadrado unitario o considerar inalterable la relación entre unidades de longitud y las correspondientes unidades de superficie que generan. Estamos de acuerdo con Liñán y Contreras (2013) en que estas importantes dificultades pueden deberse a una falta de trabajo con los EGP del proceso natural de medir como comparación con una referencia establecida, que se refleja sobre todo al tratar de medir una superficie o volumen o realizar un cambio entre este tipo de unidades, no identificándose el razonamiento subyacente a su creación y cambio. También, pueden ser reflejo de dificultades asociadas al sistema de numeración decimal.

Desde nuestra perspectiva, descubrimos que el uso de patrones inadecuados detectado por Merino, Cañadas, y Molina (2013) en alumnos de 5º curso de Educación Primaria permanece en los alumnos del Grado de esta especialidad. También descubrimos que con la instrucción recibida, lo mismo que en Barrera y Castro (2007), nuestros alumnos siguen utilizando razonamientos erróneos. Si bien Trujillo, Castro y Molina (2009) detectan dificultades para expresar generalizaciones de forma algebraica y Castro, Cañadas y Molina (2010) aseguran que el paso más costoso del razonamiento inductivo es la generalización, en nuestra investigación detectamos que no fundamentan la formulación algebraica conocida previamente.

Referencias bibliográficas

- Andréu Abela, J. (1998). *Las técnicas de análisis de contenido: una revisión actualizada*. [Documento en línea]. Recuperado de <http://public.centrodeestudiosandaluces.es/pdfs/S200103.pdf>
- Bardin, L. (1996). *El análisis de contenido*. Madrid: Akal (2ªed.).
- Barrera, V.J. y Castro, E. (2007). Razonamiento inductivo en un aula de formación de maestros. En Camacho, M., Bolea, P., Flores, P., Gómez, B., Murillo, J. y González, M.T. (Eds.) *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XI Simposio de la SEIEM*, 197-206. Tenerife: SEIEM.
- Baturó, A. y Nason, R. (1996). Student teacher's subject matter knowledge within the domain of area measurement. *Educational Studies in Mathematics*, 31 (3), 235-268.
- Castro, E., Cañadas., M. C. y Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 54, 55-67.