

JUGANDO CON LA PROBABILIDAD

Sandra Gallardo sandrag@ugr.es María Consuelo Cañadas mconsu@unizar.es
Manuel J. Martínez-Santaolalla m_santaolalla@hotmail.com Marta Molina
martamg@ugr.es María Peñas mtroyano@ugr.es

RESUMEN

En este trabajo planteamos una serie de juegos como recurso didáctico en el aula de matemáticas. Estos juegos nos permiten introducir algunos conceptos de probabilidad en Secundaria y, además, pueden incitar a los alumnos a plantearse numerosas cuestiones que les ayuden a comprender los diversos problemas donde el azar está inmerso.

INTRODUCCIÓN

El estudio de la probabilidad tiene gran importancia en la actualidad al ofrecernos un modo de medir y tratar la incertidumbre. Gracias a la probabilidad se han llegado a desarrollar y comprender diversos métodos estadísticos que son de múltiple utilidad en campos como el científico, profesional y social (Godino, Batanero y Cañizares, 1991). Este desarrollo ha supuesto que sea esencial un conocimiento básico sobre probabilidad y de análisis de datos para llegar a ser un ciudadano informado así como un consumidor inteligente (NCTM, 2003). La probabilidad, en particular, juega un papel destacado en la toma de decisiones en situaciones que involucran cierto grado de incertidumbre.

Desde una perspectiva educativa, los Principios y Estándares para la Educación Matemática (NCTM, 2003) incluyen el estándar de “Análisis de datos y Probabilidad”, el cual plantea que los alumnos deben desarrollar la capacidad de comprender y aplicar conceptos básicos de probabilidad (p. 51). *“Los profesores deberían proporcionar a los alumnos numerosas oportunidades de poner en práctica el pensamiento probabilístico en situaciones simples, a partir de las cuales puedan desarrollar nociones de azar”* (p. 258).

En el actual currículo de secundaria (Decreto 148/2002, de 14 de mayo) se pretende dar un mayor empuje al estudio de los numerosos fenómenos sujetos al azar y que están presentes en nuestro día a día, siendo uno de los objetivos generales para la educación Secundaria: *“Utilizar los métodos y procedimientos estadísticos y probabilísticos para obtener conclusiones a partir de datos recogidos en el mundo de la información.”*

Godino, Batanero y Cañizares (1991) consideran los fenómenos sujetos al azar dentro de las numerosas preguntas para las cuales no existe una única respuesta clara y sencilla. Los fenómenos aleatorios entran dentro de los problemas que plantean este tipo de preguntas.

Desde la Didáctica de la Matemática se destaca el interés que puede suscitar el estudio de la probabilidad trabajando con diversos recursos didácticos. Para Batanero y Serrano (1995) se debe secuenciar el trabajo con “materiales manipulativos con propiedades de simetría como dados o monedas, para pasar progresivamente al estudio de materiales que no tengan estas propiedades –ruletas con áreas desiguales; chinchetas-;” (p. 26).

En este sentido, observamos como los currículos escolares de las últimas décadas han incluido el estudio de la estadística y la probabilidad, pero recientemente se ha tendido a hacerla más experimental (Batanero, en prensa). Siguiendo esta tendencia, en este trabajo sugerimos un enfoque centrado en el uso de juegos para la introducción de algunos de los conceptos probabilísticos más básicos.

LA PROBABILIDAD EN EL CURRÍCULO DE SECUNDARIA

Uno de los cinco núcleos temáticos de la materia de matemáticas de Educación Secundaria es el Tratamiento de la Información Estadística y del Azar. El Decreto 148/2002, de 14 de mayo, propone comenzar con una revisión de términos usados frecuentemente en la vida ordinaria, matizando los distintos significados según los contextos y tratando de reconocer situaciones de incertidumbre. Además, los alumnos deberán reconocer y trabajar ciertas experiencias de carácter aleatorio, manejando expresiones como poco o muy poco probable, muy probable o casi seguro, más o menos probable que... En segundo curso se trabajan situaciones de incertidumbre a través del estudio de las aplicaciones de la estadística en la vida cotidiana y la ciencia.

En tercer y cuarto curso se plantean el estudio de los experimentos aleatorios y el trabajo con conceptos como suceso, frecuencia y probabilidad de un suceso. También se trabaja el cálculo de probabilidades mediante la ley de Laplace. La práctica adquirida, mediante simulaciones y asignación de probabilidades experimentalmente, dará paso al cálculo de la probabilidad de sucesos. El cálculo de la probabilidad de un suceso puede requerir que se efectúen recuentos. Se utilizarán preferentemente los diagramas de árbol u otras herramientas que permitan representar los casos posibles y seleccionar, a partir de ellos, los que sean favorables.

Siguiendo estas indicaciones, identificamos los siguientes conceptos relacionados con la probabilidad en el currículo español para Educación Secundaria: Suceso, Tipos de sucesos, Frecuencia, Probabilidad de un suceso y Cálculo de probabilidades (Ley de Laplace).

JUEGOS PROPUESTOS

Planteamos a continuación algunos juegos que pueden ayudar a los alumnos a entender los distintos aspectos sobre la probabilidad que se plantean en el currículo.

1. Sucesos equiprobables y no equiprobables

Juego 1: Cruzar el río

Para el trabajo con sucesos equiprobables y no equiprobables, comenzamos con el siguiente juego cuyo objetivo final es cruzar un río como se observa en la Figura 1:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
											
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Figura 1

Descripción del material didáctico: La franja central que se observa en la Figura 1 representa un río y a cada lado doce casillas numeradas del 1 al 12. Para este juego se necesitan 24 fichas y dos dados.

Instrucciones y objetivo del juego: En este juego han de participar dos jugadores; cada uno de los cuales dispone de 12 fichas. Se debe colocar cada ficha en cada una de las doce casillas (una ficha por casilla). El primer jugador lanzará dos dados, sumará los puntos obtenidos en las caras superiores de los mismos y pasará al otro lado del río la ficha que esté situada en la casilla que tenga el número que ha obtenido al realizar la suma. A continuación lanzará los dos dados el segundo jugador quien deberá repetir el mismo proceso. Así se deberá continuar hasta que alguno de los jugadores pase todas sus fichas al otro lado del río. ¿Es esto posible? No, el objetivo de pasar todas las fichas no se cumple para la primera posición, nunca pasará el río.

Propuesta para los alumnos: En primera instancia, a los alumnos se les plantea la actividad con el objetivo (imposible) que se ha mencionado con anterioridad. Cuando

identifiquen la imposibilidad de la propuesta, los alumnos volverán a jugar buscando el mismo objetivo pero ahora situando las fichas donde ellos quieran (desde situarlas cada una en un lugar hasta ponerlas todas en la misma casilla). Realizarán el juego varias veces de manera que ellos mismos puedan descubrir que hay posiciones desde las que es más fácil pasar al otro lado (mayor probabilidad de ocurrencia) y posiciones menos probables o imposibles (casilla 1).

Objetivos didácticos del juego: Los aspectos más importantes tratados en este juego son los de no equiprobabilidad de sucesos, suceso imposible y suceso más o menos probable. También se puede trabajar la introducción a la representación gráfica de los resultados obtenidos del juego, como por ejemplo el histograma (ver figura 2).

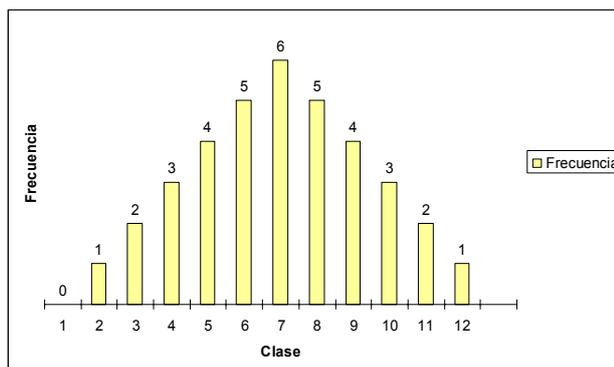


Figura 2

2. La regla de Laplace

Juego 2: Probabilidad con urnas

Descripción del material didáctico: Tenemos una urna con 10 bolas del mismo tamaño pero de distintos colores. Hay 2 bolas rojas, 1 bola verde, 2 bolas amarillas, 3 bolas azules y 2 bola marrón.

Instrucciones y objetivo del juego: Se realiza el experimento de sacar una bola al azar (sin mirar) y, considerando un suceso determinado, averiguar cuáles son equiprobables.

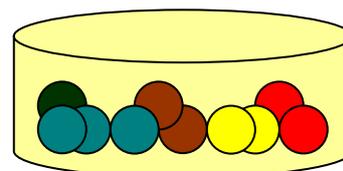


Figura 3

Propuesta para los alumnos:

Considerando los siguientes sucesos:

- a) Sale bola roja b) Sale bola verde c) Sale bola roja, amarilla o marrón
 d) Sale bola azul o verde e) Sale bola amarilla

¿Cuáles de estos sucesos son equiprobables?

Objetivos didácticos del juego: Motivar la introducción de la regla de Laplace. Si consideramos el suceso "sacar bola roja", al número de bolas rojas que hay en la urna se le llama "número de casos favorables" (favorables al suceso), y al número total de bolas que hay en la bolsa se le llama "número de casos posibles". La regla de Laplace se expresa $P(A) = \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}}$.

Roja y verde Verde y amarilla Verde y marrón	Roja y amarilla Roja y marrón Verde y azul Amarilla y marrón	Roja y azul Amarilla y azul Azul y marrón Roja, verde y amarilla Roja, verde y marrón Verde, amarilla y marrón
Roja, verde y azul Roja, amarilla, marrón Verde, amarilla y azul	Roja, amarilla y azul Roja, azul y marrón Amarilla, azul y marrón Roja, verde, amarilla y marrón	Roja, verde, amarilla y azul Verde, amarilla, azul y marrón

Figura 4: Solución

La figura 4 nos muestra la solución del juego.

Juego 3: Probabilidades con dados

Descripción del material didáctico: Se dispone de tres dados: uno de 8 caras, otro de 12 y otro de 20 tal y como se indica en la figura 5.

Instrucciones y objetivo del juego: Lanzar uno de los dados, definir el suceso y calcular la probabilidad de cada suceso.



Figura 5

Propuesta para los alumnos:

A) Si lanzamos un dado de 8 caras, ¿Cuáles de los siguientes sucesos son equiprobables?

- | | |
|------------------------|------------------------|
| a) Salir el 5 | b) Salir el 8 |
| c) Salir el 9 | d) Salir el número par |
| e) Salir múltiplo de 3 | f) Salir el 4 |

Calcula la probabilidad teórica de cada uno de estos sucesos.

B) Si lanzamos un dado de 12 caras, ¿Cuáles de los siguientes sucesos son equiprobables?

- | | |
|---------------------------------|---------------------|
| a) Salir el 1 | b) Salir número par |
| c) Salir múltiplo de 4 | d) Salir el 10 |
| e) Salir el 15 | f) Salir el 7 |
| g) Salir un número entre 5 y 11 | |

Calcula la probabilidad teórica de cada uno de estos sucesos.

C) Si lanzamos un dado de 20 caras, ¿Cuáles de los siguientes sucesos son equiprobables?

- | | |
|----------------------------------|---------------------------------|
| a) Salir el 2 | b) Salir múltiplo de 10 |
| c) Salir el 25 | d) Salir el 13 |
| e) Salir número impar | f) Salir un número menor que 15 |
| g) Salir un número mayor que 11 | h) Salir el 20 |
| i) Salir un número entre 10 y 17 | |

Calcula la probabilidad teórica de cada uno de estos sucesos.

Objetivos didácticos del juego: Definir sucesos, calcular la probabilidad teórica de sucesos e identificar procesos equiprobables.

3. Azar y probabilidad: Sucesos compatibles e incompatibles.

Juego 4: Probabilidades con cartas

Descripción del material didáctico: Una baraja de cartas española.

Instrucciones y objetivo del juego: Dado un experimento, se trata de calcular de un suceso determinado.

Propuesta para los alumnos

En el experimento “extraer una carta de una baraja española”, ¿cuál es la probabilidad de que salga:

- | | | | |
|------------------|---------------|--------------------|--------------|
| a) El as de oros | b) Un caballo | c) El rey de copas | d) Un basto? |
|------------------|---------------|--------------------|--------------|

Si la carta es el seis de espadas, han ocurrido también otros muchos sucesos como "salir una espada", "salir un seis", "salir un número menor que 7", etc. En cambio no habrán ocurrido otros muchos sucesos como "salir el seis de oros", "salir el siete de espadas", "salir una copa", etc.

Algunos sucesos pueden ocurrir simultáneamente y otros no.

Entre los sucesos del apartado anterior, ¿hay algunos que pueden ocurrir a la vez?



Figura 6

Fijate en los siguientes sucesos:

A = Salir una figura (sota, caballo o rey)

B = Salir un oro

Compara de forma análoga los pares de sucesos del apartado anterior, o sea:

A = Salir el as de oros y salir el rey de copas

B = Salir un caballo y salir un basto

Y deduce si son o no compatibles.

Objetivos didácticos del juego: Reconocimiento de sucesos compatibles e incompatibles.

Resumiendo todo lo anterior, diremos que dos sucesos son compatibles si pueden ocurrir simultáneamente, y diremos que son incompatibles si no pueden ocurrir simultáneamente.

4. Probabilidad condicionada

Juego 5: Dados, monedas y urnas

Descripción del material didáctico: Una moneda, un dado y dos urnas con bolas de colores.

Descripción del juego (1ª parte):

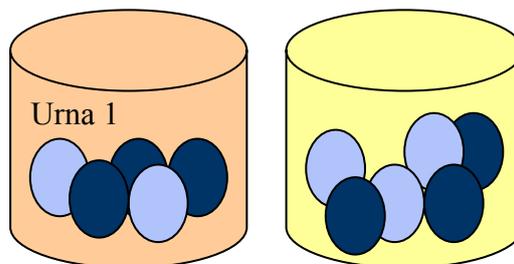
Lanzamos la moneda y anotamos el resultado de la cara superior y, a continuación, lanzamos el dado anotando también el resultado.

Propuesta para los alumnos:

- a1) ¿Cuál es la probabilidad de que salga un 2 en el lanzamiento del dado si ha salido cara en la moneda?
- a2) ¿Y la probabilidad de que salga 2 en el dado si lo que salió en la moneda fue cruz?
- a3) ¿Influye el resultado obtenido en el lanzamiento de la moneda en el resultado obtenido al lanzar el dado?

Descripción del juego (2ª parte):

Disponemos de dos urnas que contienen bolas de diferentes colores. Conocemos el contenido de cada una de las urnas, pero no podemos verlo.



Lanzamos la moneda, anotamos el resultado. Si sale cara extraemos bola de la Urna 1, si sale cruz extraemos bola de la Urna 2.

Propuesta para los alumnos:

- b1) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea de color azul si sabemos que salió cara al lanzar la moneda?
- b2) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea de color azul si lo que ha salido al lanzar la moneda es una cruz?
- b3) ¿Influye el resultado del lanzamiento de la moneda en la probabilidad de obtener bola de un determinado color?

Imagina que en vez de lanzar la moneda lanzamos el dado. Si sale 1, 2, 3 o 4, extraemos bola de la Urna 1 y si sale 5 o 6, la bola es extraída de la Urna 2.

- c1) ¿Existe la misma probabilidad de extraer bola de una urna que de la otra?
- c2) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea de color azul si sabemos que salió un 2?
- c3) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea de color azul si lo que ha salido ha sido un 6?

Objetivos didácticos del juego: Trabajar con experimentos aleatorios compuestos. Diferenciar entre sucesos dependientes e independientes. Aplicar correctamente la fórmula $P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A)$ cuando trabajemos con sucesos compuestos.

Soluciones:

- a1) $P=1/6$; a2) $P=1/6$; a3) No
- b1) $P=1/2 \times 2/5$; b2) $P=1/2 \times 1/6$; b3) Sí, ya que la composición de las urnas es diferente;
- c1) No, la probabilidad de extraer bola de la Urna 1 es de $2/3$ y $1/3$ la de extraer bola de la Urna 2; c2) $P=2/3 \times 2/5$; c3) $P=1/3 \times 1/6$.

CONCLUSIONES

Los enfoques prácticos, como los aquí propuestos, que involucran al alumno lanzando dados o seleccionando bolas o cartas son útiles para revelar la naturaleza impredecible del azar (Graham, 2006). Estos juegos permiten aproximarse de forma intuitiva a algunas de las ideas básicas de la probabilidad y proveen de un contexto significativo en el que nociones teóricas propias del estudio de la probabilidad pueden ser introducidas.

La selección de juegos presentada permite ilustrar la riqueza de estos contextos para abordar los contenidos de Probabilidad propios de la Educación Secundaria.

A continuación describimos, a modo orientativo, los niveles educativos concretos para los que recomendamos cada uno de los juegos propuestos.

Juego	Contenido	Curso (E.S.O.)
Juego 1: Cruzar el río	Sucesos equiprobables y no equiprobables	Segundo Curso
Juego 2: Probabilidad con urnas	La regla de Laplace	Tercer y Cuarto Curso
Juego 3: Probabilidades con dados	La regla de Laplace	Tercer y Cuarto Curso
Juego 4: Probabilidades con cartas	Azar y probabilidad: Sucesos compatibles e incompatibles.	Segundo curso
Juego 5: Dados y monedas	Probabilidad condicionada	Cuarto curso

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Batanero, C. (En prensa). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. En R. Farfán y cols. (Eds.). *Investigaciones sobre enseñanza t aprendizaje de las matemáticas. Un reporte Iberoamericano*. Comité Latino Americano de Matemática Educativa.
- Batanero, C. y Serrano, L. (1995). La Aleatoriedad, sus Significados e Implicaciones Educativas. UNO 5, 15-28.
- Graham, A. (2006). *Developing thinking in Statistics*. London: The Open University y Paul Chapman Publishing.
- Godino, J.D., Batanero, C. y Cañizares, M.J. (1991). *Azar y Probabilidad*. Ed. Síntesis.
- Junta de Andalucía (2002). Decreto 148/2002, de 14 de mayo, por el que se establecen las enseñanzas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía.
- NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Eds. SAEM Thales.