

## VISUALIZACIÓN CON GEOMETRÍA DINÁMICA COMO ESTRATEGIA DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE EN LOS CONCEPTOS DE VECTORES EN EL PLANO

Fabiana G. Montenegro, María Elina Díaz Lozano  
Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas de la Universidad Nacional del Litoral  
Argentina

[montenegrofabiana@yahoo.com.ar](mailto:montenegrofabiana@yahoo.com.ar)  
Nivel Medio, Terciario y Universitario

### Resumen

Se describe una propuesta didáctica sobre el tema ‘Vectores en el Plano’, destinada a alumnos de la primera asignatura de matemática en una carrera de ingeniería, con el objeto de favorecer la comprensión de los conceptos mediante la articulación de registros geométricos y analíticos y la incorporación de la imagen animada que brindan los elementos de la tecnología. La experiencia se realizó en una clase de laboratorio y el instrumento utilizado para concretar la acción didáctica fue el software Geogebra. Las respuestas de los alumnos brindaron elementos de juicio sobre el aporte de la visualización dinámica de los objetos de aprendizaje.

Palabras clave: vectores planos, visualización, Geogebra.

### Introducción

En los últimos años, el estudio y la reflexión sobre el algebra lineal por parte de la comunidad matemática se ha incrementado, debido fundamentalmente al poco éxito de los alumnos en dichos cursos. Distintos investigadores mencionan algunas de las dificultades que explican esta realidad:

- Dorier (1995) sostiene que los conceptos del algebra lineal que son de naturaleza epistemológicamente sofisticada y abstracta. A modo de ejemplo la creación de la teoría axiomática de espacios vectoriales no se debió, como otros elementos matemáticos, a la búsqueda de solución a un problema no resuelto; sino que el objetivo principal fue generalizar y unificar y consecuentemente simplificar conceptos anteriores.

- Chargoy Espínola, Oktac y Cordero señalan:

El estudiante de algebra lineal debe entender una gran cantidad de símbolos, definiciones, propiedades, conceptos y teoremas que requieren en algunos casos, de un alto grado de abstracción, en otros de calculo, además de razonamientos....Analizando la problemática de los símbolos se observa que en algebra lineal un mismo símbolo puede representar diferentes elementos, por ejemplo, el símbolo  $(1,0)$  representa diferentes vectores en diferentes bases. En algunos casos los estudiantes no pueden ver la diferencia entre un punto y un vector en  $\mathbb{R}^2$  o en  $\mathbb{R}^3$ . (Chargoy Espínola, Oktac y Cordero, 2000, p. 163).

El propósito de este trabajo es presentar una propuesta que enriquezca la enseñanza del tema ‘Vectores Planos’ superando dificultades que puedan presentarse en su aprendizaje.

La importancia de este tópico estriba en cuestiones intra y extra matemáticas. Al interior de esta ciencia una de particular importancia es aquella asociada a la correspondencia que se establece debido a la doble existencia de los vectores del plano y del espacio permitiendo un tránsito natural y enriquecedor, entre la Geometría Vectorial y la Geometría Analítica. Asimismo dentro del Álgebra Lineal el estudio de los espacios vectoriales no es demasiado diferente del estudio de  $\mathbb{R}^n$  (del cual  $\mathbb{R}^2$  es un caso particular) de modo que es plausible

aprovechar la intuición y la experiencia geométrica con  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$  para visualizar y entender conceptos generales. Y por otro lado es indiscutible que los vectores desempeñan un papel importante en física, ingeniería, procesamiento de imágenes, gráficas computarizadas, etc.

Es usual que los conceptos asociados a vectores planos se enseñen haciendo uso prioritariamente de definiciones y procedimientos algorítmicos, a los que se incorporan, en menor medida y a modo de ilustración, algunas representaciones geométricas. Ello propicia que los alumnos manipulen los conceptos en forma rutinaria, perdiendo de vista su significado; en particular, su significación geométrica. Dado que Vectores es un tema que ilustra fuertemente la vinculación de elementos geométricos con algebraicos, es importante el trabajo en ambos contextos.

En el punto 2, se reseñan los lineamientos conceptuales en los que se encuadra la propuesta que se describirá. Dicha descripción se realiza en el punto 3, detallando los elementos conceptuales y metodológicos empleados. Finalmente, algunas consideraciones se expresan a modo de conclusión en el punto 4.

### **Fundamentación**

Tal como sostienen investigaciones anteriores la visualización es un medio para conseguir comprensión en el aprendizaje de los conceptos matemáticos. Y aunque es reconocida la importancia de las imágenes visuales en las actividades cognitivas, las representaciones visuales permanecen en segundo término tanto en los desarrollos de la matemática como en su enseñanza. La preferencia de los alumnos en el empleo de argumentos no visuales no es accidental: para el estudiante el argumento analítico proporciona resultados seguros, es fácil de aprehender y aplicar a ejercicios procediendo mecánicamente en los cálculos; para el profesor, es fácil de enseñar, no requiere preparación gráficas o programas (Eisenberg y Dreyfus, 1991)

Esta realidad acentúa una dificultad presente en la comprensión de toda noción matemática, que es la de articular los diferentes registros semióticos. Bosch (2000) señala la no preeminencia entre registros desde el punto de vista de su función en el trabajo matemático: todos tienen igual valor. Más aún, según Blázquez y Ortega (2001), dominar un concepto consiste en conocer sus principales representaciones y traducir unas en otras. Coincidimos con Cantoral y Montiel en que “La visualización es la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y el lenguaje del que aprende” (Cantoral y Montiel, 2003, p. 6).

El aprovechamiento de las nuevas tecnologías de información y comunicación (TIC'S) constituye un modo atractivo de potenciar el acercamiento a los diferentes registros semióticos de una noción matemática y su visualización. En la experiencia que se relata se utilizó un software de geometría dinámica de uso libre, para lograr la transposición didáctica de las nociones de vectores en el plano a contextos computacionales. Los ambientes dinámicos hacen posible la experimentación en dominios que anteriormente eran inaccesibles y tienen la capacidad de hacer visible lo que es difícil de ver o imaginar. En base a ello, las actividades propuestas intentan posibilitar una mayor comprensión de las definiciones y la validación de propiedades, mediante la manipulación de los objetos matemáticos representados por el software e intentando articular las representaciones algebraicas, gráficas y numéricas de las nociones de vectores en  $\mathbb{R}^2$ .

### Descripción de la experiencia

La clase en el laboratorio de informática se desarrolló posterior a las correspondientes clases teórica y práctica de este tópico y la invitación fue abierta para todos los alumnos de Ingeniería en Informática de la Universidad Nacional del Litoral.

En un primer momento del encuentro, que se desarrolló en 3 horas, se procedió a enseñar a todo el grupo el manejo básico del soft. Posteriormente se proporcionó a los alumnos una guía con instrucciones de una secuencia didáctica que debían ejecutar con Geogebra. En algunas consignas además se les proponía que efectuaran cálculos a fin de ratificar la respuesta del programa; en otras que completaran ideas a partir de la observación.

La secuencia didáctica incluyó las actividades que se mencionan a continuación:

- \* Localización en la ventana gráfica de dos puntos y posterior uso de las herramientas para dibujar los vectores determinados por ellos.
- \* Ingreso a través de la barra de entrada, de coordenadas cartesianas o polares de vectores; observación de las coordenadas y conjetura sobre cómo se obtienen.
- \* Cálculo de la longitud y la dirección de un vector mediante el empleo de herramientas o el ingreso de comandos en la barra de entrada.
- \* Construcción de vectores equivalentes usando comandos del soft.
- \* Aprovechamiento de la animación que ofrece Geogebra con el objeto de:
  - Observar cómo se modifican las coordenadas de un vector de longitud fija al variar su dirección, tal como se ilustra en la Figura 1.

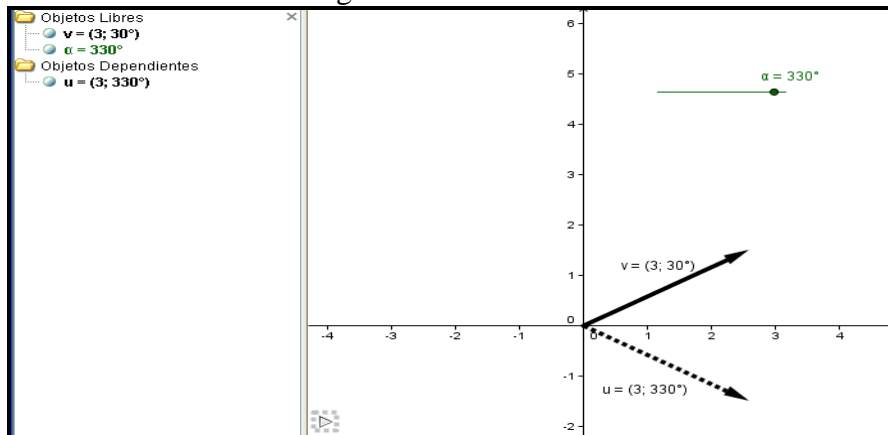


Figura 1

- Observar las coordenadas de un vector que tiene dirección fija y longitud variable como se visualiza en la Figura 2.

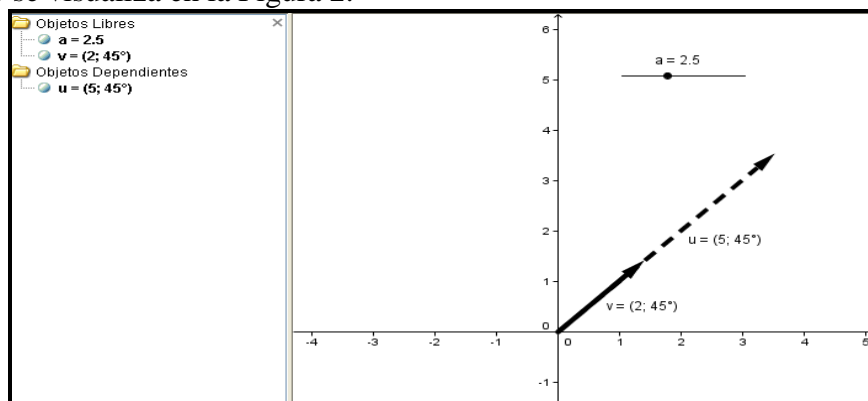


Figura 2

- Visualizar los múltiplos de un vector considerando todas las posibilidades acerca del signo y el valor del escalar por el cual se multiplica. En la figura 3 se ilustra dos de dichas posibilidades.

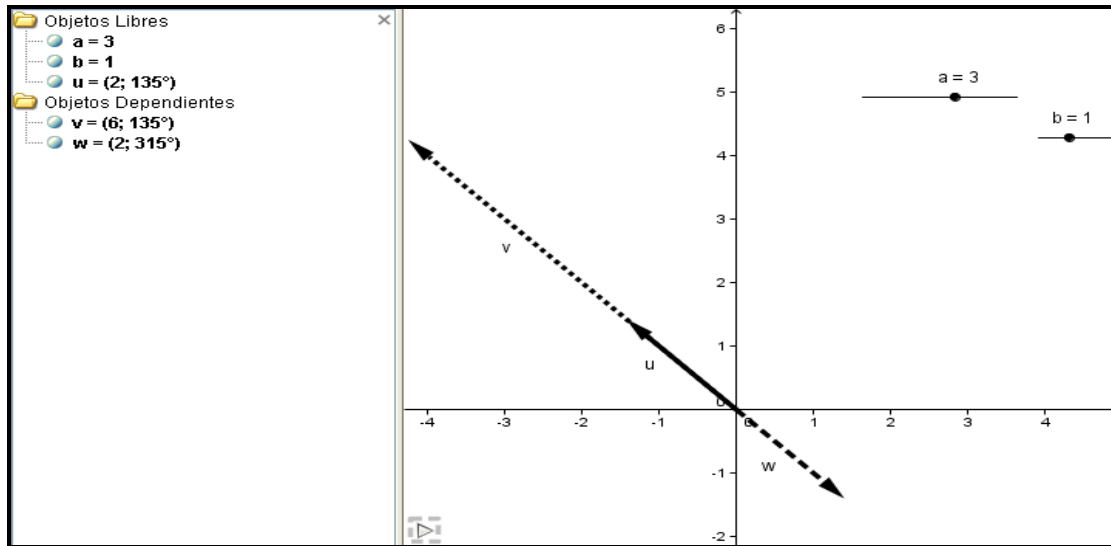


Figura 3

- \* Construcción de un paralelogramo con lados en dos vectores dados. Posterior cálculo de su suma y su resta, a fin de observar la relación con las diagonales del paralelogramo. Cálculo de longitudes de lados y del vector suma, a fin de constatar la desigualdad triangular.
- \* Cálculo de operaciones que incluían suma de vectores y multiplicación de un vector por un escalar.
- \* Construcción de la proyección de un vector sobre otro en las distintas situaciones que pueden presentarse y relacionando el signo del producto escalar con las mismas. La figura 4 muestra a  $w$  como proyección de  $u$  sobre  $v$ .

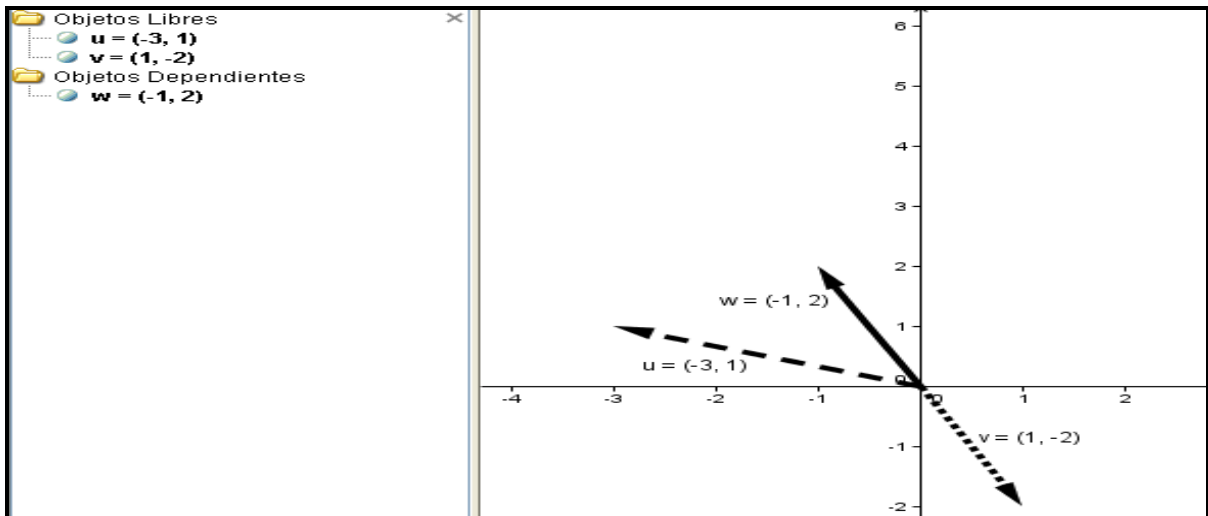


Figura 4

### **A modo de conclusión**

El 100% de los alumnos que participaron de la experiencia, consideraron que las actividades propuestas le sirvieron de ayuda para el aprendizaje del tópico en cuestión, en los siguientes sentidos: el 28% considera que contribuyó a reforzarlo, el 14% a aclararlo y el 58% a su visualización.

También el 100% evaluó como muy útil la utilización del software elegido, según las siguientes opciones: al 21% le ayudó a reforzar, al 28% a aclarar y al 51% a visualizar.

El análisis anterior aporta elementos de juicio sobre la contribución a la comprensión y consolidación de los conceptos que brinda la incorporación de la visualización dinámica de los objetos de aprendizaje.

Los autores consideran que la secuencia, con las modificaciones pertinentes, resulta factible de aplicación en clases de matemática y de física de la actual escuela secundaria.

Se concluye reflexionando que aunque los soportes informáticos ofrecen interesantes posibilidades para la enseñanza, la validez de los instrumentos, cualquiera sea su naturaleza, dependerá de la manera en que sean incorporados en cada situación concreta, de sus características y de la forma en que el docente haga uso de los mismos organizando y dirigiendo la interacción del alumno con la computadora.

### **Referencias Bibliográficas**

- Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza de límite. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 4, 219-236.
- Bosch, M. (2000). Un punto de vista antropológico: la evolución de los instrumentos de representación en la actividad matemática. En L. Contreras González, J. Carrillo Yañez y N. Climent Rodríguez (Eds). *Cuarto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 15-28). Huelva: Universidad de Huelva.
- Cantoral, R. y Montiel, G. (2003). Visualización y pensamiento matemático. *Números*, 55, 3 – 22.
- Chargoy Espínola, R., Oktac, A. y Cordero, F. (2000). Modos de pensamiento sintético y analítico: el caso de la base de un espacio vectorial. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13, 163-171.
- Dorier, J. (1995). Meta level in the teaching of unifying and generalizing concepts in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 29, 175-197.
- Eisenberg T. y Dreyfus T. (1991). On the Reluctance to Visualize in Mathematics. En W. Zimmermann y S. Cunningham (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematic* (pp. 25-37). Washington: Asociación Matemática de América.