

## Análisis Teórico Para La Construcción Del Concepto De Ecuación Diferencial Ordinaria De Primer Orden Mediante La Descomposición Genética

Abel Medina Mendoza, Alejandro Miguel Rosas Mendoza  
Instituto Tecnológico de Comitán, Instituto Politécnico Nacional

### **Resumen**

El presente documento muestra un avance del primer componente, planteado en el diseño metodológico del proyecto de investigación doctoral en Matemática Educativa, que tiene el objetivo de desarrollar en los estudiantes, la competencia específica de construir el concepto de ecuación diferencial ordinaria de primer orden, mediante la descomposición genética para su aplicación en la solución de problemas de circuitos eléctricos; fundamentándose del marco teórico y la metodología de la teoría APOE (acción, proceso, objeto y esquema).

**Palabras Claves:** APOE, Descomposición Genética, Ecuación Diferencial.

### **Introducción**

Se presenta la problemática haciendo un análisis de investigaciones. En primer término se aborda el desarrollo de competencias en Matemática Educativa, al respecto Benítez (2011), muestra la importancia de las competencias tanto para la comprensión del discurso de las ciencias como para su aplicación en la solución de problemas. En segundo término investigaciones que muestran dificultades en la comprensión o aplicación del concepto de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), al respecto, Perdomo (2011), realiza la comparación de la enseñanza y aprendizaje de las EDO, mediante la formación tradicional del concepto y la formación mediante resolución de problemas, la tecnología y la interacción en el proceso de aprendizaje, Villar-Liñan y Llinares-Ciscar (1996), mencionan las dificultades al definir el concepto de la ecuación diferencial (ED), de igual forma Rasmussen (2001) y Zandieh y McDonald (1999), describen las dificultades en la concepción de la solución de una ED. Guerrero, Camacho y Mejía (2010), abordan

las dos dificultades anteriores en problemas del concepto matemático para su aplicación de nuevos contextos de conocimiento, como el bosquejo de campos de direcciones y la interpretación de soluciones, así mismo Rodríguez (2012) y Codes y Perdomo (2012), experimentan con el uso de la tecnología para la introducción y visualización del concepto de EDO, para facilitar la solución de las dificultades antes planteadas.

Con la aportación de las investigaciones se establece la problemática mediante la determinación de las preguntas de investigación, principal y auxiliares que contemplan las dimensiones: desarrollo de competencias en Matemática Educativa, dificultades en la comprensión o aplicación del concepto de EDO, la Teoría APOE en la Matemática Educativa, que conducen a determinar los elementos teóricos y metodológicos.

Dentro del apartado de elementos teóricos se aborda en específico una teoría, de tipo cognitivo-constructivista llamada Teoría APOE, con sus construcciones mentales: Acción, Proceso, Objeto y Esquemas. Así mismo se aborda la descomposición genética como eje de aplicación de la Teoría APOE.

Partiendo de los elementos teóricos, la Teoría APOE tiene su metodología de investigación asociada para garantizar la confiabilidad de los resultados. De tal forma que se presenta la metodología fundamentada en el ciclo de investigación dado por la Teoría APOE.

### **Problemática**

En este apartado se presenta un análisis de investigaciones en el contexto de competencias en Matemática Educativa, esto permitirá enmarcar las dimensiones de las preguntas de investigación.

### **Desarrollo de competencias en Matemática Educativa**

En el trabajo de Benítez (2011), su objetivo fue identificar los niveles de competencias matemáticas, que se refieren al dominio, por parte del estudiante,

de los conocimientos, habilidades, valores y actitudes que son indispensables tanto para la comprensión del discurso de las ciencias, las humanidades y la tecnología, como para su aplicación en la solución de los problemas de su vida escolar, social y laboral, adquiridos cuando se promueve el estudio de contextos evocados introductorios; (D'amore, Fandiño y Marazzani, 2003), definen que los contextos evocados introductorios son aquellos que se presenta al inicio del proceso de instrucción donde se han enseñado los objetos matemáticos necesarios para la resolución del problema, y cuyo propósito es que el alumno vea las aplicaciones de las matemáticas al mundo real. Las representaciones (Duval, 1999) juegan un papel fundamental para dicho trabajo. La investigación se ubica en un paradigma de investigación cualitativo, los instrumentos utilizados para la recolección de datos fueron: reportes escritos elaborados de manera individual y por equipo, grabaciones en audio y reportes elaborados por el profesor-investigador. La autora señaló en las conclusiones, que durante el proceso de aprendizaje en contextos simulados, sufrió altas y bajas, principalmente en las actividades para construir o interpretar las situaciones que se planteaban. El análisis de los datos permitió identificar tres niveles de Competencias Matemáticas: Identificación que el estudiante hace de las características relevantes de la situación, el establecimiento de relaciones en las representaciones para construir un modelo matemático y el uso que hace del modelo para conseguir el objetivo predeterminado.

Este análisis nos lleva a considerar las dificultades en la comprensión o aplicación del concepto de EDO, ya que nos permitiría contextualizar la importancia del desarrollo de competencias en el aprendizaje.

### **Dificultades en la comprensión o aplicación del concepto de EDO**

Distintas investigaciones en el campo de la Educación Matemática han revelado un conjunto de dificultades que los estudiantes se han encontrado en el proceso de aprendizaje de las EDO, de las cuales se pueden citar:

En el artículo de Perdomo (2011), presenta una investigación relacionada con los procesos de enseñanza y aprendizaje de las EDO, donde se distinguen dos partes principales: análisis de la forma en que un grupo de estudiantes que han recibido una formación tradicional del concepto utilizan sus conocimientos matemáticos para resolver problemas y responder a cuestiones relacionadas con las EDO y, el análisis del papel que la resolución de problemas, la tecnología y la interacción juegan en el proceso de aprendizaje. El análisis de los datos obtenidos en la primera fase, permitieron constatar que el enfoque de enseñanza habitual, en el que se introduce el concepto a partir de su definición formal y los métodos algebraicos de resolución, no favorece el desarrollo de la comprensión del concepto. El análisis con el uso de la herramienta tecnológica y el modelo de trabajo en el aula, contribuyeron a crear un clima de indagación, reflexión, planteamiento de conjeturas y verificación.

Villar-Liñan y Llinares-Ciscar (1996), establecen el modo en que los estudiantes son capaces de definir el concepto de ED y la proximidad entre esta definición y la definición formal. Los resultados de esta investigación muestran que aunque sólo la décima parte de los estudiantes definió de forma precisa el concepto de ED, señalando con ejemplos diferentes EDO de variables separadas o lineales, casi la mitad de los alumnos propuso ejemplos correctos de ED. Esto llevó a los autores a concluir que “el hecho de no definir una noción no es obstáculo para su identificación en un determinado contexto” y que “la imagen del concepto (de ecuación diferencial que tienen los alumnos) está muy ligada a expresiones formales, casos particulares y ejemplos concretos” (p. 99).

Rasmussen (2001), hace referencia a las dificultades que entraña el concepto de solución de una ED. Estas dificultades las asocia con el hecho de que es un espacio formado por funciones y no por valores numéricos. Esta conclusión la extrae de un estudio sobre la concepción que tienen los estudiantes acerca de las soluciones de equilibrio de una EDO, las aproximaciones numéricas y la estabilidad. Zandieh y McDonald (1999), identificaron esta misma dificultad en una investigación. Los autores apuntan como posible causa de estos errores

conceptuales al hecho de que en muchas de las actividades que realizan los estudiantes no es necesario pensar en la variable, considerando ecuaciones de la forma  $y' = f(x, y)$ , como una solución o una función.

Guerrero, Camacho y Mejía (2010), también observaron que los estudiantes consideraban las funciones constantes sólo como números y no como funciones. Estos autores realizan una investigación haciendo uso del registro gráfico como medio de solución de EDO. Los resultados de esta investigación muestran que los estudiantes recuerdan las definiciones de algunos conceptos de cálculo pero les resulta imposible aplicarlas en un nuevo contexto de conocimiento, en este caso, el bosquejo de campos de direcciones y la interpretación de soluciones.

En el trabajo de Rodríguez (2012), que tiene como objetivo que el alumno comprenda el modelo para representar, comprender y estudiar diversos fenómenos de naturaleza social, química, mecánica y eléctrica, así como la importancia de la visualización de representaciones de diversos aspectos de la ED a través del uso de tecnología. La autora realiza la investigación de tipo cualitativa. Concluyendo que el diseño de las actividades como observación, videgrabaciones, realización de reactivos permitió alcanzar los objetivos previstos para el proceso de modelación matemática y la tecnología utilizada constituye un apoyo importante en la transición entre el dominio físico y matemático así como el desarrollo de competencias tecnológicas.

En el taller “Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias a partir del análisis de fenómenos de variación” de Codes y Perdomo (2012), presentan un conjunto de actividades tanto para realizar de forma individual como en pequeños grupos con lápiz y papel y, con el software de cálculo simbólico Maple, para introducir el concepto de EDO. Los resultados obtenidos sirvió para reflexionar sobre los conocimientos previos necesarios (como Algebra), para el diseño de cuestionarios y actividades de trabajo en el aula.

El análisis realizado de cada una de las investigaciones presentadas sobre las dificultades en la comprensión o aplicación del concepto de EDO, me permitió

visualizar el papel tan importante que juega la resolución de problemas, el uso de tecnología y la interacción en el proceso de aprendizaje, de igual forma que la comprensión del concepto matemático está muy ligada a expresiones formales y modelación de casos contextuales en donde el uso de registros gráficos son un medio adecuado para la solución de EDO. Lo anterior permite que los estudiantes logren comprender el concepto de EDO, aunque en un inicio se veía muy distante.

### **Pregunta principal**

¿Cómo desarrollar la competencia de construir el concepto de ecuación diferencial ordinaria de primer orden para su aplicación en la solución de problemas de circuitos eléctricos en los estudiantes de Ingeniería en Sistemas Computacionales del Instituto Tecnológico de Comitán?

### **Y las preguntas auxiliares:**

- ¿Con el desarrollo de la competencia específica, que aborda la problemática, el estudiante comprende el concepto de la EDO de primer orden?
- ¿Con la construcción del concepto de ED el estudiante logra aplicarlo adecuadamente en la solución de problemas de circuitos eléctricos?
- ¿Cómo estimular en los estudiantes, el desarrollo de la competencia específica de construir el concepto de EDO de primer orden?

### **Marco Teórico**

Partiendo de la problemática de investigación que es “Desarrollar la competencia específica de construir el concepto de ecuación diferencial ordinaria de primer orden mediante la descomposición genética para su aplicación en la solución de problemas de circuitos eléctricos”, los elementos teóricos a considerar se enmarcan en la Teoría APOE.

La Teoría APOE es una teoría de tipo cognitivo-constructivista iniciada por Dubinsky y continuada por el grupo de investigadores llamados *Research in Undergraduate Mathematics Education Community* (RUMEC); El APOE se inició en Estados Unidos y se ha extendido a otros países (entre ellos México) a partir de la formación del RUMEC, cuya investigación está centrada en cómo un sujeto construye conceptos matemáticos y adquiere habilidades para enfrentar y resolver problemas (Miranda, 2003). Encontrando que la Teoría APOE (por sus siglas en inglés: Acción, Proceso, Objeto, Esquema) resulta ser un marco teórico ideal debido a que, por un lado ha demostrado su eficiencia en trabajos de investigación.

La descomposición genética, según Badillo (2003) es el eje de la aplicación de la Teoría APOE en estudios sobre la comprensión de objetos matemáticos porque permite estructurar el concepto matemático, orienta a la organización del contenido a enseñar y el diseño de actividades y tareas que contribuyan a la construcción de las estructuras que se busca que los estudiantes desarrollen.

### **Metodología**

La Teoría APOE tiene una metodología de investigación fundamentada en el ciclo metodológico de investigación de dicha teoría (Análisis teórico, Diseño y aplicación de instrumentos y; Análisis y verificación de datos).

**Análisis teórico:** El objetivo central es diseñar la descomposición genética de los conceptos matemáticos de la investigación.

**Diseño y aplicación de instrumentos:** Una vez definida la descomposición genética original, es necesario documentarla. El objetivo central es el diseño y aplicación de instrumentos que ayuden a construir los conceptos matemáticos de la investigación y posteriormente el diseño y aplicación de los instrumentos que nos ayudarán a validar la propuesta didáctica e identificar las construcciones mencionadas en la descomposición genética.

**Análisis y verificación de datos:** El objetivo central es llevar a cabo el análisis de los datos empíricos obtenidos de la componente anterior. En este punto determinar si fueron adecuados los elementos considerados de la descomposición genética de los conceptos matemáticos de la investigación.

En el presente trabajo, se aborda parte del primer componente (Análisis teórico) como avance del proyecto de investigación doctoral, para estructurar una definición analítica del concepto de EDO de primer orden, se realiza una revisión en siete libros en la temática de ecuaciones diferenciales. A continuación se describe cada una de las definiciones que se abordan:

Zill (1988,1997), afirma que si una ecuación contiene las derivadas o diferenciales de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes, se dice que es una ED. Clasifica a las ED de acuerdo con las tres propiedades:

- ✓ Tipo: ED ordinaria como aquella que contiene solo derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente y la ED parcial como aquella ecuación que contiene las derivadas parciales de una o más variables dependientes de dos o más variables independientes.
- ✓ Orden: Precisa que el orden de una ED es el orden de la más alta derivada de la ED.
- ✓ Linealidad: Hace notar que las ED lineales se caracterizan por dos propiedades, la variable dependiente y junto con todas sus derivadas son de primer grado, esto es la potencia de cada término en  $y$  es 1, y cada coeficiente depende sólo de la variable independiente  $x$ . Y concluye que una ecuación que no es Lineal se dice No Lineal.

Nagle, Saff y Snider (2005), definen que una ecuación que contiene algunas derivadas de una función incógnita es una ED. No clasifican de manera directa a las ED, pero citan que una ecuación diferencial ordinaria es aquella que sólo

implica derivadas ordinarias con respecto a una sólo variable independiente y que ED que implica derivadas parciales con respecto más de una variable independiente es una ED parcial. Así mismo mencionan que el orden de una ED es el orden de las derivadas de orden máximo que aparecen en la ecuación. Consideran que es útil clasificar las EDO como lineales y no lineales, una ED lineal es aquella en que la variable dependiente  $y$  y sus derivadas sólo aparecen en combinaciones aditivas de sus primeras potencias, de lo contrario es una ED no lineal.

Edwards y Penney (2009), definen que la ED es aquella ecuación que relaciona una función desconocida con una o más de sus derivadas. De la misma manera que en Nagle, Saff y Snider (2005), no hacen una clasificación general de las ED, pero a lo largo del contenido, mencionan que cuando una ED es ordinaria significa que la función desconocida (variable dependiente depende de una sola variable independiente), si la variable dependiente es una función de dos o más variables independientes entonces aparecerán derivadas parciales, si es así la ecuación se llama ED parcial. El orden de una ED es el orden de la derivada más alta que aparece en ella. Citan que la ED es lineal si la función es lineal en la variable dependiente  $y$  y en sus derivadas  $y'$  y  $y''$ , de lo contrario la ED será no lineal.

En el libro de Ecuaciones Diferenciales con problemas con valores en la frontera de Zill y Cullen (2009), se define que una ED es una ecuación que contiene derivadas de una o más variables respecto a una o más variables independientes, y se clasifican:

- ✓ Tipo: Si una ecuación contiene sólo derivadas de una o más variables dependientes respecto a una sola variable independiente se dice que es una EDO, una ecuación que involucra derivadas parciales de una o más variables dependientes de dos o más variables independientes se llama ED parcial.
- ✓ Orden: El orden de una ED es el orden de la mayor derivada en la ecuación.

- ✓ **Linealidad:** Una ecuación diferencial de  $n$ -ésimo orden se dice que es lineal si la función es lineal. Una ED es no lineal cuando las funciones de la variable dependiente o de sus derivadas son no lineales.

Carmona (2011), define que la ED es aquella ecuación que contiene derivadas o diferenciales. Clasifica en tres categorías a las ED:

**Tipo:** Define que una ED ordinaria es aquella que contiene derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente y la ED parcial contiene derivadas parciales de una o más variables dependientes con respecto a dos o más variables independientes.

**Orden:** Lo define como la derivada de mayor orden contenida en la ecuación.

**Grado:** Es la potencia a la que esta elevada la derivada de mayor orden.

Ibarra (2013), describe que una ED es una ecuación que contiene la derivada o las derivadas de una o más variables dependientes respecto de una o más variables independientes. Menciona que básicamente, las ecuaciones pueden clasificarse por su tipo, orden, linealidad y grado. De acuerdo con su tipo, las ED pueden clasificarse en ordinarias, una ED se dice ordinaria si contiene la derivada o las derivadas de una o más variables dependientes respecto de una sola variable independiente y una ED se denomina parcial si contiene la derivada o las derivadas de una o más variables dependientes respecto de dos o más variables independientes. El autor define el orden de una ED como el orden de la derivada más alta que aparece en la ecuación. De igual forma, una ED lineal tiene propiedad que la variable dependiente y todas sus derivadas están elevadas a la potencia 1, de lo contrario la ED es No Lineal. Por último señala que el grado de una ED es la potencia más grande a la cual está elevada una variable dependiente, o bien alguna de sus derivadas.

Çengel y Palm (2014), especifican que una ecuación que incluye las derivadas de una o más funciones se llama ED. De manera general explican la clasificación de las ED, donde mencionan que las EDO son aquellas que contienen derivadas

ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente, y la ED es parcial cuando la ecuación incluye derivadas parciales con respecto a dos o más variables independientes. A su vez que, una ED puede incluir distintas derivadas de varios órdenes de una función incógnita en donde el orden de la derivada más alta determina el orden de la ED y que, una ED es lineal si la variable dependiente y todas sus derivadas son de primer grado y sus coeficientes solo dependen de la variable independiente.

Aún no se cuentan con resultados, pero retomando las definiciones anteriores se logró definir el concepto de ecuación diferencial ordinaria de primer orden:

*Es la expresión matemática que contiene las derivadas o diferenciales, de orden uno, de una o más funciones desconocidas (variables dependientes) con respecto a una variable independiente.*

## **Conclusiones**

Con el análisis bibliográfico se avanzó con una parte del primer componente (Análisis teórico) de la metodología del trabajo de investigación doctoral. Donde se llega a las siguientes consideraciones:

- ✓ En ninguno de los materiales revisados se aborda el concepto de ecuación diferencial considerando su descomposición genética.
- ✓ Por lo anterior se requiere hacer revisión del concepto de ecuación diferencial en trabajos de investigación o bibliografía de Matemática Educativa para poder concretar dicho concepto.
- ✓ La importancia de evaluar los conocimientos previos que se tienen contemplado realizar en éste mismo componente (actividad de cuestionario a estudiantes).

## **Referencias**

- Badillo, E. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemáticas de Colombia* (Tesis de Doctorado no publicada). Universidad Autónoma de Barcelona. España.
- Benítez, A. (2011). La Importancia de los Eventos Contextualizados en el Desarrollo de Competencias Matemáticas. *Acta Latinoamérica de Matemática Educativa*, 51-59.
- Carmona, I. (2011). *Ecuaciones Diferenciales* (5ª ed.). México: PEARSON Educación.
- Çengel, Y. y Palm, W. (2014). *Ecuaciones Diferenciales para Ingeniería y Ciencias*. México: Mc GRAW-HILL/INTERAMERICANA.
- Codes, M. y Perdomo J. (2012, febrero). *Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias a partir del análisis de fenómenos de variación*. Taller presentado en el III Seminario del Grupo de Investigación en Didáctica del Análisis Matemático, Salamanca, España.
- Duval R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues For Learning. In F. Hitt (Ed.), *Proceedings of the Twenty-first Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 3-26). Morelos: ERIC
- D'Amore, B., Fandiño, M.I. y Marazzani, I. (2003). Ejercicios anticipados y Zona de desarrollo próximo: comportamiento estratégico y lenguaje comunicativo en actividad de resolución de problemas. *Epsilon* 57, 357-378.
- Edwards, H. y Penney, D. (2009). *Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera* (4ª ed.). México: PEARSON Educación.

Guerrero, C., Camacho, M., y Mejía, H. (2010). Dificultades de los estudiantes en la interpretación de las soluciones de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias que modelan un problema. *Enseñanza de las Ciencias*, 28(3), pp.341–352.

Ibarra, J. (2013). *Matemáticas 5 Ecuaciones Diferenciales*. México: Mc GRAW-HILL/INTERAMERICANA.

Miranda, E. (2003). La construcción de un concepto matemático. *Renglones*, 54, 20-24.

Nagle, K., Saff, E. y Snider, A. (2005). *Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera* (4ª ed.). México: PEARSON Educación.

Perdomo, J. (2011). Módulo de enseñanza para la introducción de las ecuaciones diferenciales ordinarias en un ambiente de resolución de problemas con tecnología. *Números*, 78, 113-134.

Rasmussen, C. (2001). New directions in differential equations. A framework for interpreting students' understandings and difficulties. *Journal of Mathematical Behavior*, 20, 55-87.

Rodríguez, R. (2012, mayo). *Competencias de modelación y uso de tecnologías en ecuaciones diferenciales*. Proyecto de investigación presentado en la Corporación Universitaria para el Desarrollo de Internet A.C., Baja California, México.

Villar-Liñan, M. T., y Llinares-Ciscar, S. (1996). Análisis de errores en la conceptualización y simbolización de ecuaciones diferenciales en alumnos de químicas. *Educación Matemática*, 8(2), 90-101.

Zandieh, M., y McDonald, M. (1999). Student Understanding of Equilibrium Solution in Differential Equations. En F. Hitt y M. Santos (Eds.). *Proceedings of the Twenty-one Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 253-257). Columbus, OH: ERIC.

Zill, D. (1988). *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones* (2ª ed.). México: Iberoamérica.

Zill, D. (1997). *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones* (3ª ed.). México: Iberoamérica

Zill, D. y Cullen, M. (2009). *Ecuaciones Diferenciales con problemas con valores en la frontera* (7ª ed.). México: CENGAGE Learning.