

# **DIFICULTADES DE LOS ESTUDIANTES DE GEOMETRÍA EN LA CONSTRUCCIÓN DE TRIÁNGULOS CON REGLA NO GRADUADA Y COMPÁS**

Ana María Zamagni, Cecilia Crespo Crespo  
Instituto Superior del Profesorado “Dr. Joaquín V. González”, Argentina.  
zamagni@hotmail.com, crccrespo@gmail.com

## **RESUMEN**

Para poder realizar construcciones de figuras geométricas con regla no graduada y compás se deben utilizar muchos conceptos y propiedades de las mismas.

En este trabajo se muestra lo observado en un aula de primer año del Profesorado de Matemática donde, mediante diversas actividades de construcción de triángulos dados ciertos datos, se trata de analizar cuáles son las dificultades que presentan los estudiantes.

Este análisis conducirá a encontrar estrategias de enseñanza acordes a las dificultades observadas, que favorezcan el aprendizaje de los alumnos.

**PALABRAS CLAVE:** Construcciones. Triángulo. Regla no graduada. Compás.

## **INTRODUCCIÓN**

En la clase de Geometría métrica, en un curso de primer año del Profesorado de Matemática, se observa que los estudiantes presentan dificultades para construir triángulos con regla no graduada y compás partiendo de algunos datos dados.

Son varios los pasos que intervienen en una construcción y pueden ser distintas las dificultades, si se tienen en cuenta o no las propiedades en el momento de realizar una figura de análisis y si esas consideraciones se emplean en la construcción.

Mediante este trabajo se espera:

- Identificar la existencia de obstáculos epistemológicos relacionados con las figuras geométricas.
- Generar una propuesta didáctica para solucionar las dificultades encontradas.

Es importante que los estudiantes puedan relacionar temas estudiados previamente y aplicarlos en la construcción de triángulos, no sólo la definición de triángulo y sus propiedades sino también por ejemplo nociones de congruencia de segmentos y ángulos, punto medio de un segmento, perpendicularidad y paralelismo.

Todos estos conceptos deben utilizarse en el momento de hacer una construcción y de justificar si dicha construcción es posible o no. Lo importante es que el estudiante esté en condiciones de analizar la figura.

En el curso de Geometría métrica se espera que los estudiantes puedan adquirir las estrategias para realizar construcciones de figuras geométricas considerando las propiedades de las mismas. Las construcciones geométricas deben reafirmar las propiedades de las figuras.

## **MARCO TEÓRICO**

Existen muchas investigaciones sobre como aprenden los niños y sobre cómo va evolucionando el pensamiento cuando los niños pasan a jóvenes y luego a adultos, pero centrado en la Geometría el modelo más específico y que se ajusta más a las situaciones que se plantean en las aulas, cuando los alumnos están aprendiendo, es el que formularon los esposos Pierre y Dina Van Hiele.

Este modelo incluye dos aspectos:

- Descriptivo: a través de la definición de cinco niveles de razonamiento.
- Prescriptivo: da pautas a seguir en la organización de la enseñanza para que los estudiantes avancen en las etapas del razonamiento, mediante cinco fases de aprendizaje.

Sus principales características son:

- ✓ Secuencialidad en la adquisición de los niveles, los objetos de un nivel se convierten en el objeto de estudio del siguiente nivel.
- ✓ Especificidad del lenguaje.
- ✓ Si el estudiante está en un nivel y la instrucción en otro diferente, puede que no se dé el aprendizaje deseado y el progreso.
- ✓ El estudiante puede estar en distintos niveles para conceptos diferentes.
- ✓ El progreso en los niveles no depende de la edad.

## Niveles de razonamiento

*Primer nivel:* La consideración de los conceptos es global. No se tienen en cuenta elementos ni propiedades.

*Segundo nivel:* Los conceptos se entienden y manejan a través de sus elementos, esto hace posible la identificación y generalización de propiedades como características del concepto en cuestión. (Sin establecer relaciones entre ellas)

*Tercer nivel:* Se establecen relaciones entre propiedades

*Cuarto nivel:* Se caracteriza por la comprensión y el empleo del razonamiento formal. La aplicación, según las leyes de la lógica, de propiedades ya verificadas para obtener nuevas propiedades.

*Quinto nivel:* El estudiante puede trabajar varios sistemas axiomáticos, se pueden estudiar diversas geometrías, Se ve la geometría en abstracto.

## Fases de aprendizaje

*Primera:* Información recíproca profesor-alumno

*Segunda:* Orientación guiada, el profesor dirige a los alumnos para que éstos vayan descubriendo lo que van a constituir en el nivel.

*Tercera:* Explicitación. Que los estudiantes sean conscientes de las características y propiedades aprendidas.

*Cuarta:* Orientación libre. Consolidar los aspectos básicos del nivel.

*Quinta:* Integración. Tiene como objeto establecer y completar la red de relaciones de ese nivel.

Dentro de estos conceptos se analizarán los procesos didácticos y cognitivos.

Estas fases de aprendizaje se pueden dar en cada uno de los niveles de razonamiento.

Se pretende analizar cuáles son los niveles de razonamiento de los estudiantes en el momento de realizar las construcciones de triángulos con regla no graduada y compás con el fin de detectar los obstáculos epistemológicos y considerar si es posible orientarlos en sus fases de aprendizaje.

Los estudiantes adquieren un concepto y se forman determinada imagen del mismo, por haber estudiado el tema con anterioridad o por relacionarlo con temas afines. Ante nuevas situaciones podrán modificar dicho concepto, “Se crea un conflicto entre la precedente imagen, que el estudiante creía definitiva, relativa a dicho concepto, y la nueva; esto sucede especialmente cuando la nueva imagen amplía los límites de aplicabilidad del concepto, o proporciona una versión más completa” (D’Amore, 2005, p. 47). Si el estudiante logra comprender esta nueva versión del concepto podemos decir que pasa de un nivel a otro de razonamiento acerca del mismo.

## **PROPÓSITO DE ESTE TRABAJO**

La idea principal de este trabajo es:

Analizar las dificultades de los estudiantes cuando tienen que realizar construcciones de triángulos con regla y compás dados tres de sus elementos, que son las primeras construcciones después de las construcciones básicas como transporte de segmento y transporte de ángulo.

Observar si ponen en juego las definiciones y las propiedades de triángulos en general.

Considerar si utilizan figuras generales o alguna en particular que no alcance para generalizar a todo tipo de triángulo.

Analizar si se utilizan otros conceptos que intervienen en la construcción de figuras en general como: lugar geométrico, paralelismo y perpendicularidad. Cuáles son las condiciones de las figuras de análisis que resultan útiles para la construcción y cuáles pueden ser un obstáculo epistemológico, didáctico o cognitivo.

## **CONCEPTOS INVOLUCRADOS EN LAS CONSTRUCCIONES**

Las figuras de análisis son fundamentales como guía para realizar las construcciones.

“Cuando se habla de figuras de análisis se entiende por ellas, aquellos dibujos que pueden ser realizados a mano alzada o con el uso de regla pero sin respetar la medida o estar elaborada según una determinada escala numérica. Es decir, figuras o bosquejos que no poseen rigurosidad geométrica, en donde se vuelca la información dada como primer paso ya sea para resolver un problema geométrico, una demostración o realizar una construcción geométrica.” (Micelli, p.11)

El método utilizado en primera instancia es el de la intersección de dos lugares geométricos.

Algunas construcciones se pueden realizar sólo con regla no graduada:

- ✓ Trazado de una recta por dos puntos
- ✓ Intersección de dos rectas
- ✓ Transporte de segmento

Es necesario el uso del compás para realizar otras construcciones como:

- ✓ Trazar una circunferencia de centro y radio dados
- ✓ Hallar la intersección de una recta y una circunferencia
- ✓ Hallar la intersección de dos circunferencias

Si la construcción no se puede realizar de forma directa se recurre a una figura auxiliar o a una figura semejante.

Puig Adam en su Curso de Geometría Métrica considera el método reductivo donde plantea *reducir* las condiciones dadas a otras que lleven a problemas conocidos, “conviene sustituir las condiciones de partida por otras equivalentes a ellas, con objeto de no omitir soluciones ni introducir soluciones extrañas.” (Puig Adam, 1980, p. 195).

### **DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD**

Este trabajo se desarrolla en primer año del Profesorado de Matemática con alumnos que cursan Geometría I y que provienen de distintos colegios secundarios, algunos de capital, otros del gran Buenos Aires y algunos pocos provenientes de otras carreras universitarias o terciarias.

La investigación se desarrolló en dos años de cursada considerando los mismos ejercicios para observar si se mantenían los errores, si provenían del discurso matemático escolar o dependía del grupo de estudiantes. En el segundo año se agregó una encuesta para conocer las representaciones que traen los estudiantes de escuela media.

### **CONSIDERACIONES PREVIAS.**

Para tener en cuenta las ideas previas que traen los estudiantes, al inicio de la cursada se les dio un cuestionario en el que se incluía la pregunta. “¿Son suficientes la regla no graduada y el compás para construir figuras geométricas?”

Algunos respondieron “no sé” otros “creo que sí” sin poder dar alguna explicación. Otras de las respuestas fueron las siguientes:

- ✓ Sí, porque si quiero hacer líneas rectas utilizo la regla y si quiero hacer algo circular uso el compás.

- ✓ No, porque para algunas figuras es necesaria una escuadra. Pero a la vez el compás no es necesario, con tener un pedazo de hilo uno ya puede graficar.
- ✓ No, ya que para hacer polígonos como el heptágono se necesita precisión.
- ✓ Sí, porque no es necesario que las figura sea perfecta.
- ✓ Para construir un polígono regular yo precisaría también un transportador ya que aprendí a realizarlos a partir de su ángulo central.
- ✓ Si, todas las figuras o bien tienen lados rectos o bien son curvilíneas o una combinación de ambos.
- ✓ Si tengo que hacer un ángulo recto necesito la escuadra para trazar la perpendicular. También necesito la escuadra para trazar dos rectas paralelas.
- ✓ No, porque para construir triángulos debo conocer la medida de los lados.

Se evidencia que algunos traen el concepto de medida relacionado con la regla graduada o el transportador y sobre ello basan la construcción y no consideran el compás para tomar la distancia entre dos puntos. Otros piensan que la figura construida no es perfecta o precisa, tomando en cuenta el dibujo en vez del ente geométrico con sus propiedades.

También imaginan que la única posibilidad de trazar perpendiculares es con una escuadra.

Estos son algunos de los obstáculos epistemológicos que presentan los estudiantes en el momento de realizar las construcciones geométricas. A veces es más difícil deshacer conceptos erróneos a que logren construir nuevos conceptos.

Las respuestas muestran que los estudiantes están entre el primer y segundo nivel de razonamiento de acuerdo al modelo de Van-Hiele. Se espera que después del estudio de triángulos y sus propiedades en el momento de la construcción de los mismos puedan mediante las fases de aprendizaje alcanzar el tercer nivel en el que relacionen las propiedades estudiadas.

La actividad se desarrolla en clases sucesivas. En una primera etapa, con intención de reafirmar el uso del compás para transportar distancias a partir del concepto de lugar geométrico de la circunferencia y el uso de la regla no graduada para trazar rectas uniendo dos puntos, se presentan las siguientes actividades:

- 1 – Construir un segmento congruente a otro dado.
- 2 – Construir un sector angular congruente a otro dado.

En una segunda etapa se realizan construcciones de triángulos con distintos niveles de dificultad.

Los estudiantes deben tener en cuenta definiciones y propiedades de las figuras y de sus elementos, por ejemplo en el caso de construir la altura de un lado del triángulo se espera que estén en condiciones de construir la mediatriz de un segmento con regla y compás.

Los primeros ejercicios para que puedan justificar los pasos son:

1 – Construir un triángulo equilátero dado el lado. (Construcción hecha en Elementos de Euclides).

“Construir un triángulo equilátero sobre una recta finita dada” (Euclides, 2007, p.15)

2 - Construir un triángulo, dados dos lados y el ángulo comprendido.

Una vez reafirmados los pasos de las construcciones se pueden presentar ejercicios donde se deba construir una figura intermedia.

3 - Construir un triángulo, dados dos lados y la mediana correspondiente al tercer lado.

Y donde sea más importante la evidencia de las propiedades de las figuras, tengan diferentes condiciones de posibilidad y/o el número de soluciones dependa directamente de los datos dados.

4 - Construir un triángulo, dados dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

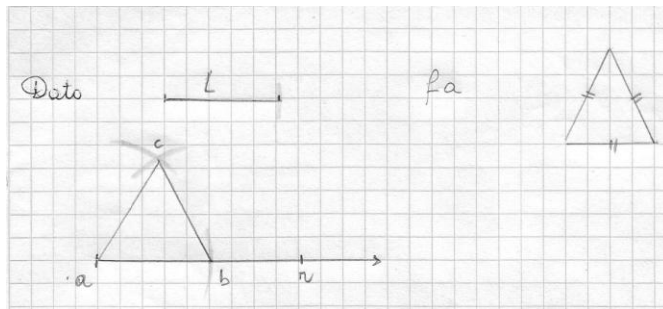
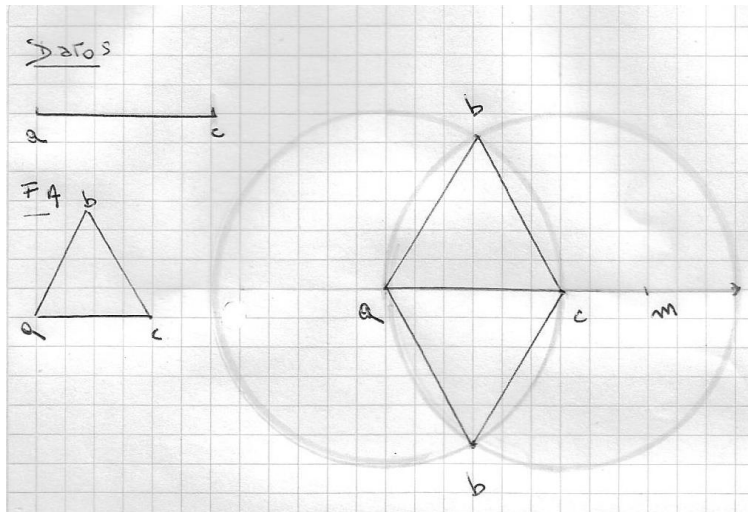
Las respuestas que se esperan de los estudiantes están relacionadas con su nivel de razonamiento que puede ser distinto para conceptos diferentes.

## **RESULTADOS DE LA ACTIVIDAD EN EL AULA**

Luego de las primeras actividades, queda fijado el concepto de transportar segmentos a partir de una circunferencia de radio congruente al segmento dado.

A partir del enunciado: Construir un triángulo equilátero dado el lado.

Los estudiantes trabajan tratando de reproducir los procedimientos que utilizaron anteriormente, de todas maneras se presentan casos diferentes:



De los alumnos que trazaron las circunferencias completas sólo uno dibujó los dos triángulos el resto dibujó sólo un triángulo.

Se concluye que la distancia del segmento se debe trazar con toda la circunferencia para obtener todos los posibles segmentos congruentes al segmento dado, porque de otro modo se pierden soluciones.

Se completan los pasos de la construcción y sus correspondientes justificaciones y se pasa al siguiente ejercicio.

Construir un triángulo, dados dos lados y el ángulo comprendido.



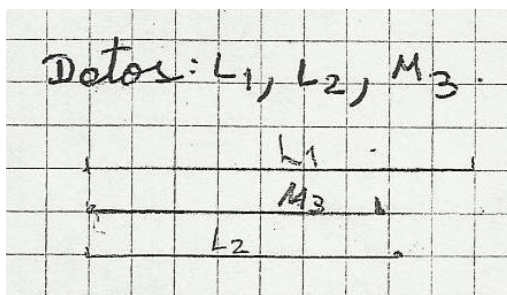
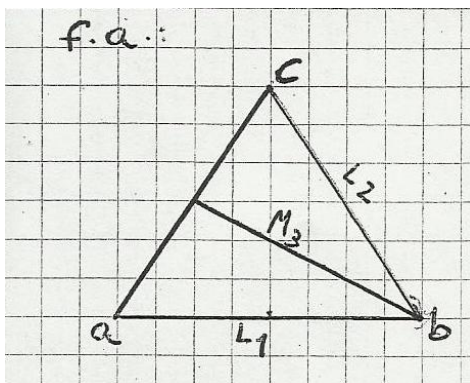
Algunos estudiantes dijeron que no se podía construir porque al transportar los lados obtenían dos circunferencias concéntricas que por lo tanto no tenían puntos de intersección o intentaron hacer centro con el otro vértice sin tener en cuenta el ángulo. Fue necesario aclarar que primero debían transportar el ángulo para fijar los puntos en el plano donde podrían transportar el segundo lado.

Se evidencia que los alumnos están en distintos niveles de razonamiento, en este ejemplo el alumno no tuvo en cuenta elementos ni propiedades, estaría en un primer nivel de razonamiento, es necesario que el profesor pueda ir guiándolo para que el alumno vaya descubriendo lo que va a constituir en el nivel.

Se realizan ejercicios para reafirmar propiedades de perpendicularidad y luego se presenta el siguiente.

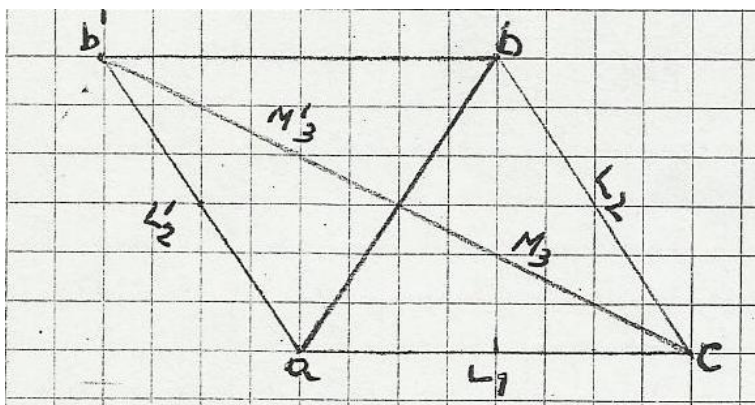
Construir un triángulo, dados dos lados y la mediana correspondiente al tercer lado.

Los estudiantes no lograban entender como relacionar los datos, sólo pudieron armar la figura de análisis y los datos:



Algunos preguntaron si no era necesario utilizar otro dato, otros dijeron que era necesario tener un ángulo sin aclarar cuál y sin darse cuenta que agregando ese dato se podría hacer imposible la construcción, no pensaron en construir una figura auxiliar que los llevara al triángulo definitivo.

Fue necesario hacer una puesta en común e ir guiándolos a la resolución, construir un triángulo con un lado que represente dos veces la mediana y utilizar propiedades de paralelogramos. A partir de esto armaron una nueva figura de análisis.



A pesar de que pudieron hacer la construcción, algunos estudiantes no pudieron completar la descripción de los pasos de construcción, es decir poner en palabras lo que habían hecho.

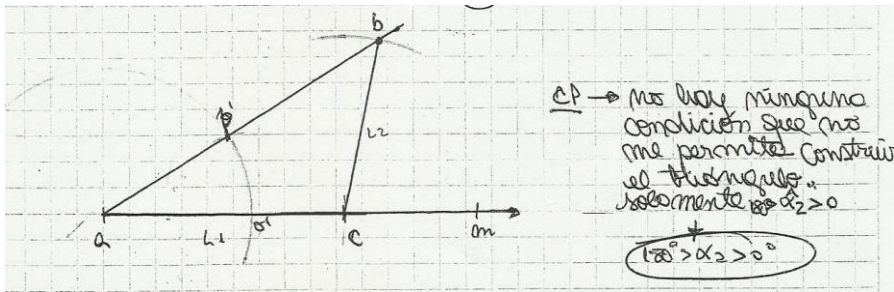
En este ejercicio la mayoría de los alumnos se encuentran en un primer nivel de razonamiento del modelo de Van Hiele y en las dos primeras fases de aprendizaje, no pudieron llegar a la tercera fase de explicitación.

El último de los ejercicios que se les pide es:

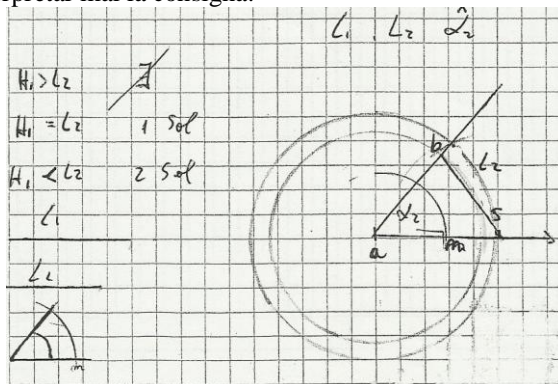
Construir un triángulo, dados dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

Para resolverlo se les dio más tiempo para trabajar en grupos y discutir las posibilidades. Se espera que utilicen todo lo observado en casos anteriores, pero presentaron diferentes dificultades.

Muchos alumnos se limitaron a la solución que encontraron sin analizar si era la única posibilidad.



Repiten el error de no trazar la circunferencia completa  
 Otra dificultad fue interpretar mal la consigna:

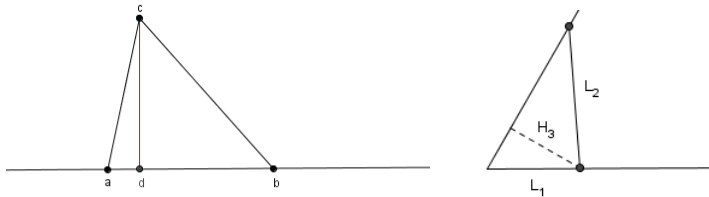


Este estudiante construye la circunferencia de radio lado 2 con centro en a obteniendo dos circunferencias concéntricas y marcando el lado que debería ser el opuesto al ángulo, sobre el otro lado del ángulo, pero cuando lo nombra en el dibujo lo hace considerando el lado opuesto a  $\hat{\alpha}$ . Los pasos de construcción están incompletos por lo tanto no explica lo que realizó.

También crearon condiciones de posibilidad que no corresponden a este caso, incluyen la propiedad triangular sin tener en cuenta que desconocen como dato los tres lados.

Cabe hacer notar que si bien los datos los puede elegir cada alumno respetando la consigna, cuando eligen un ángulo siempre es agudo sólo una alumna tomó como dato un ángulo obtuso.

A los alumnos también les costó identificar la distancia desde el vértice al lado opuesto, esto es parte de una dificultad de visualización, problema con el que se debe trabajar mucho. Cuando se estudia distancia de un punto a una recta generalmente se explica el tema con un gráfico con la recta en posición horizontal.



No lo pudieron visualizar en el triángulo que se formó. Cuando se les preguntó, dijeron que no lo vieron o no se dieron cuenta, quizás porque se encontraba en otra posición o porque sólo relacionaron los lados sin tener en cuenta la distancia, ya que la distancia no era dato.

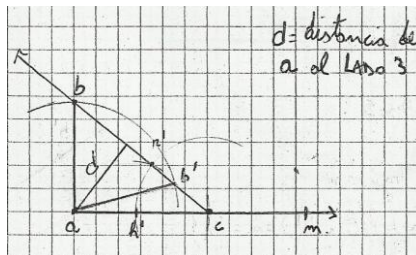
A pesar de que se aclararon las dificultades y que el grupo en general aseguró entender los conceptos utilizados, cuando en un examen final se tomó este mismo ejercicio algunos estudiantes cometieron los mismos errores, otros dejaron sin responder las condiciones de posibilidad y otros contestaron todo correctamente.

El hecho de que entendieran, es decir llegaron a la tercera fase de aprendizaje, según Van Hiele, en que los estudiantes son conscientes de las características y propiedades aprendidas, no favoreció que pudieran alcanzar el tercer nivel de razonamiento de establecer relaciones entre propiedades.

En busca de más respuestas el siguiente año se volvió a realizar el trabajo con un nuevo grupo de alumnos del mismo curso, este grupo presentaba las mismas características que el del año anterior. En esta ocasión se repitieron los errores del curso anterior.

A dos grupos de alumnos se les pidió que analizaran todas las condiciones de posibilidad del ejercicio para una próxima clase y se obtuvieron respuestas más completas.

Un grupo analizó las posibilidades y las relacionó con las soluciones en forma general con una sola construcción en forma abstracta.



Condiciones de Posibilidad.

Si  $d_2 < 90^\circ \Rightarrow L_2 \geq d$

Si  $d_2 = 90^\circ \Rightarrow L_2 > d$

Si  $d_2 > 90^\circ \Rightarrow L_2 > L_1$

Nº de Soluciones:

Si  $d_2 < 90^\circ \Rightarrow 2$  por Semiplano

Si  $d_2 = 90^\circ \Rightarrow 1$  por Semiplano.

Si  $d_2 > 90^\circ \Rightarrow 1$  por Semiplano.

Otro grupo consideró tres casos y realizó un dibujo para cada posibilidad además cumplió con la consigna de trabajar con hoja lisa.

Dibujaron para cada variación del ángulo cuales eran las posibilidades según iban variando los lados, para lo cual realizaron nueve dibujos.

No dibujaron las circunferencias, con radios igual a los lados dados, completas pero de todas formas pudieron encontrar las intersecciones para las soluciones. En este trabajo se evidencia la comprensión y la aplicación de propiedades ya verificadas.

## CONCLUSIONES

Se presentó en este trabajo una investigación sobre las dificultades que presentan los estudiantes cuando tienen que construir triángulos con regla no graduada y compás.

Estas construcciones se realizan desde la antigüedad, están en los Elementos de Euclides que como todos sus conceptos geométricos han llegado a nuestras aulas.

No son necesarios más que estos dos elementos para poder construir triángulos a pesar de los pre-conceptos que traían los estudiantes.

Se observó que les cuesta mucho relacionar las propiedades, que al grupo de alumnos que se les dio mayor tiempo para estudiar el ejercicio lograron mejores resultados, hay que tener en cuenta que la Geometría llevó muchos años de estudio.

En ambos grupos hubo alumnos en diferentes niveles de razonamiento según Van Hiele, algunos alcanzaron pasar de un nivel a otro pero en general no pasaron del tercer nivel donde logran establecer relaciones entre propiedades.

Las dificultades se relacionan con el número de soluciones obtenidas y las condiciones de posibilidad de construcción. En los pasos básicos de construcción, por ejemplo transportar segmentos o ángulos, no hubo dificultades en la utilización de la regla y el compás.

Los errores más frecuentes observados son:

- ✓ Trazar parte de la circunferencia, donde pierden todos los posibles segmentos que se pueden construir a partir de un extremo dado.
- ✓ Considerar sólo la condición de posibilidad que se relaciona con el ángulo sin considerar los lados, cuando todos son datos.
- ✓ Considerar condiciones de posibilidad no relacionada con los datos.
- ✓ Relacionar el número de soluciones sólo al ejemplo construido.
- ✓ No analizar todas las posibilidades.

Queda pendiente de investigar si la utilización de un software de Geometría dinámica puede ayudar a los estudiantes a visualizar la relación de las propiedades con las figuras geométricas.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- D'Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática*. México: Editorial Reverté S.A.
- Euclides, (1982). *Elementos*. Madrid: Editorial Gredos S.A.
- Micelli, M. (2010). *Las figuras de análisis en Geometría. Su utilización en el aula de Matemática*. Tesis que para obtener el grado de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa no publicada. Cicata – IPN. México.
- Puig Adam, P. (1980). *Curso de Geometría Métrica*. Madrid: Gómez Puig, Ediciones.
- Zamagni, A.M. (2012). *Dificultades de los estudiantes de Geometría en la construcción de triángulos, en hoja lisa, con regla no graduada y compás*. Diplomatura Superior en Matemática Educativa. Instituto Superior del Profesorado Joaquín V. González. Argentina.