

Articulações Internas à Matemática: a Parábola e a Função Quadrática com o Geogebra



Rosilângela Lucena
Verônica Gitirana

Resumo

A parábola, como gráfico da função quadrática ou como curva na geometria analítica, evoca diferentes significados e registros de representação, apesar de ser um mesmo tipo de objeto matemático. Esse artigo apresenta e discute uma sequência de atividades que explora a parábola, por meio do Geogebra, para favorecer a correspondência entre as diferentes características da parábola. A sequência de atividades foi experimentada em uma oficina, tendo como participantes licenciandos de um curso de matemática de uma instituição pública de ensino superior. As construções propostas na sequência contribuíram para que os estudantes percebessem articulações internas à matemática relativas à parábola, assim como as potencialidades da tecnologia para tal abordagem.

Palavras-chave: Geometria dinâmica. Parábola. Função quadrática. Múltiplas representações. Lugar geométrico.

Introdução

Apesar dos gráficos de funções quadráticas serem um tipo de parábola, conteúdo da geometria analítica, seu estudo tem sido realizado de forma fragmentada. Essa abordagem dificulta a exploração do caráter integrador dos conceitos matemáticos em jogo. Muitos procedimentos adotados para se traçar o gráfico de uma função quadrática têm por base seu conhecimento como curva geométrica, por exemplo, o fato de se bastar três pontos para se traçar o gráfico de uma função quadrática. O que se percebe, porém, é um ensino que prioriza o tratamento algébrico e deixa a desejar a interpretação geométrica do objeto matemático representado, o que dificulta um aprofundamento maior dos conceitos em foco.

Este artigo apresenta e discute uma sequência de atividades para a formação de professor que busca a articulação entre as características da parábola no campo das funções e no da geometria analítica, com incentivo à mobilização de múltiplos registros de

¹Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da UFPE

²Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da UFPE

representações semióticas. Além de uma discussão teórica da sequência, trazem-se, também, alguns resultados de sua aplicação em uma turma de Licenciatura em Matemática.

Os registros de representação e o ensino de matemática

Duval (2003) afirma que, por seu caráter abstrato, um conceito matemático só é acessado por meio de sua representação. Nesse sentido, eles aparecem imbricados. É necessário mobilizar ao menos dois registros de representação semiótica para que um indivíduo consiga apreender conceitos e diferenciar características que são da representação das características do conceito em si. Sendo assim, é relevante que o professor de matemática valorize o uso de múltiplas representações e evite priorizar um tipo de representação no ensino de um conceito (LUCENA et al, 2016).

Além de defender o uso de múltiplas representações desses objetos, Duval (2011) chama a atenção para o fato do simples uso de diferentes registros de representação não resolver as dificuldades em se aprender matemática, nem tampouco permitir que o indivíduo tenha uma aprendizagem global do conhecimento. É necessário, também, saber transformar tais registros.

As transformações de registros semióticos são denominadas de tratamento e conversão. O tratamento ocorre quando há a transformação de uma representação dentro de um mesmo registro semiótico. Como exemplo, temos o cálculo das raízes de uma função quadrática por meio do tratamento algébrico de sua fórmula. E na conversão, há a transformação de um registro de representação para outro; por exemplo, traçar o gráfico a partir de sua fórmula. No estudo das funções, apesar de se trabalhar diferentes registros de representação, tais como: o registro algébrico, o tabular, o gráfico, as abordagens priorizam o tratamento ou um tipo de conversão, sem levar em conta as características significantes da função quando representadas de formas distintas.

Comumente, o estudo de como se obter o gráfico de uma função a partir de sua fórmula é feito por meio do traçado de vários pontos para identificar o tipo de curva gerada. Após essa abordagem, é comum se assumirem algumas características da curva (geométrica) para definir um procedimento rápido para traçar o gráfico, sem explicitar tal articulação. Por exemplo, para a função afim, é comum, após o estudante perceber que o

gráfico ponto a ponto produz uma reta, partir-se para o procedimento que calcula dois pontos a partir da equação e traça uma reta unindo os dois pontos como gráfico da função afim. Este procedimento leva em conta uma característica da reta como curva geométrica - *Por dois pontos distintos, passa uma e somente uma reta*. Considera-se, ainda, o conhecimento da Geometria Analítica que corresponde cada reta do plano a uma equação do 1º grau $Ax+By=C$. No entanto, isto é feito, algumas vezes, sem o professor perceber o conhecimento que está utilizando e que o estudante não o tem.

Lucena et al (2016) salientam também a necessidade, que Duval (2011) aponta, da conversão nos dois sentidos da operação. Cada registro de representação possui características próprias e revela novos conhecimentos.

Geogebra

Há larga defesa na literatura do uso de múltiplas representações articuladas no ensino de funções e da geometria analítica, o qual vem sendo facilitado com o uso de *softwares* educacionais. Esses permitem tal articulação e, muitas vezes, algumas automações de processos. Desde os anos 90, surgiram *softwares* de geometria dinâmica e de exploração de funções que permitem o trabalho com diversas representações de forma articulada e com alterações simultâneas, como é o caso do Cabri-géomètre; do Modellus; do Geogebra; do Cinderela; dentre outros.

O Geogebra é um *software* gratuito que permite o uso de representações distintas do mesmo objeto matemático, de forma dinâmica e articulada, possibilitando ao usuário a visualização de tais representações em uma única tela. Pode-se, por exemplo, construir uma cônica que passa por cinco pontos dados e ver sua forma, algébrica, gráfica, em língua materna, tabular etc. Depois alterar um dos pontos e ver a alteração provocada na curva.

O Geogebra dispõe de duas janelas de visualização e uma de álgebra, que podem ser vistas simultaneamente. Assim como os outros, o Geogebra é um recurso importante para uma abordagem do conceito de parábola que busque articular os dois subcampos da matemática, como também, que articule diferentes representações.

A sequência de atividades

Com base nas perspectivas já apresentadas, uma sequência de atividades de formação de professores foi elaborada visando: (a) promover o uso de registros distintos para representar a parábola; (b) articular os diferentes enfoques do estudo da parábola, como gráfico de funções quadráticas e como curva, por meio da geometria analítica; (c) favorecer a mobilização de múltiplos registros de representações semióticas de forma articulada; (d) explorar características do objeto matemático e sua aparência em diferentes registros de representação semiótica. Para isso, todas as atividades foram planejadas para serem desenvolvidas com o Geogebra.

Construção Mole e Construção Robusta

Consideramos que um mesmo objeto matemático quando estudado em várias áreas da matemática, de forma articulada, auxilia a ampliar o seu entendimento. Desse modo, partimos do conhecimento da parábola como “*lugar geométrico dos pontos que equidistam de uma reta (denominada de diretriz) e de um ponto (denominado de foco)*” para chegar a ela como gráfico de uma função quadrática. É importante, também, partir da expressão que define uma função quadrática para encontrar elementos de extrema relevância no campo da geometria, por meio da geometria analítica, inclusive, para entender a construção da parábola.

Para tanto utilizamos método de construção mole e de construção robusta. Laborde (2005, apud ARAÚJO, 2001) argumenta que:

Construções robustas são construções que preservam suas propriedades quando usamos o modo de arrastar. Tais construções devem ser feitas usando os objetos geométricos e as relações que caracterizam a construção que queremos obter. Em tais construções a variação é usada como um meio de verificação. Nas construções moles, a variação é parte da construção em si e uma propriedade somente se torna visível quando a outra está satisfeita. (LABORDE, 2005, p.1, apud ARAÚJO, 2001, p.101)

Desse modo, ao partir das construções moles e da construção do conhecimento da curva como lugar geométrico, o estudante pode chegar às construções robustas, após a identificação de propriedades que garantam as construções geométricas.

ARTICULAÇÕES INTERNAS À MATEMÁTICA:
A PARÁBOLA E A FUNÇÃO QUADRÁTICA COM O GEOGEBRA

A sequência de atividades

A sequência de atividades (LUCENA; GITIRANA, 2015) possui três atividades: (a) obtenção da parábola como lugar geométrico mole; (b) traçado da parábola obtida com a construção robusta e (c) identificação do gráfico de uma função quadrática como lugar geométrico.

A figura 1 apresenta a atividade 1 e uma imagem obtida a partir da realização dos comandos da atividade no Geogebra - construção mole de uma parábola a partir das propriedades que de fato a definem como um lugar geométrico.

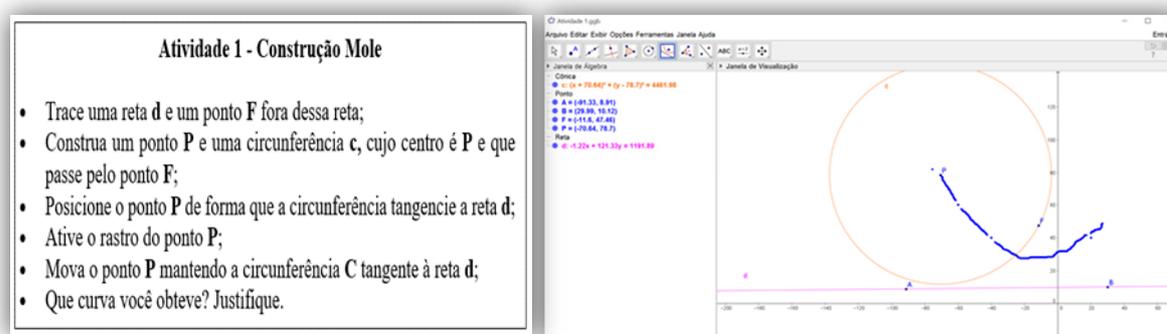


Figura 1 - Descrição da atividade 1 e um resultado da sua construção no Geogebra.
Fonte: Lucena e Gitirana (2015)

A sequência de instruções pretende que o estudante: (a) determine a reta d (que será diretriz da parábola) e um ponto F (que será Foco); (b) trace um ponto P , o qual, quando arrastado, deixará um conjunto de pontos que forma a curva, e uma circunferência que o ajudará a manter as propriedades de equidistância a F e a reta diretriz; (c) ao posicionar a circunferência como tangente a reta d , garante-se a equidistância; (d) ao mover o ponto mantendo a tangência com o rastro de P ativado, obtenha o conjunto dos pontos equidistantes de F e da reta d .

Contemplamos, essencialmente, registros simbólicos para identificar os objetos construídos (ponto, reta, circunferência etc.), registros gráficos criados pelo Geogebra e pelo estudante à mão livre com auxílio da função rastro, ao arrastar o ponto P , buscando manter a circunferência próxima à reta tangente. Além desses, na janela de álgebra do *software*, à medida que os elementos gráficos são construídos na janela de visualização, os valores numéricos e as equações algébricas referentes a estes são inseridos.

O estudante obtém uma curva aproximada da parábola, que será feita com o arrasto, mantendo propriedades apenas pela observação das mesmas. A aproximação da curva

**ARTICULAÇÕES INTERNAS À MATEMÁTICA:
A PARÁBOLA E A FUNÇÃO QUADRÁTICA COM O GEOGEBRA**

obtida e a invariância das propriedades (no caso a equidistância) lhe permitirá seguir para uma construção robusta. Após a construção, os estudantes são questionados sobre que curva construíram. Naturalmente, ao verem a construção, é esperado que a reconheçam como a parábola, a partir do seu conhecimento perceptual da curva.

Na Figura 2, temos a descrição da atividade 2 e uma imagem construída no Geogebra a partir de sua execução. Nela, o estudante é desafiado primeiro a construir a parábola desenhada a partir dos comandos do Geogebra – com uma construção robusta do lugar geométrico antes construído pelo arrasto. Ao escolher o comando parábola e clicar no foco F e na reta d , o Geogebra constrói rapidamente a curva solicitada. A depender de como o estudante constrói a curva, à mão livre, a parábola que o Geogebra traça fica muito próxima da que ele traçou.

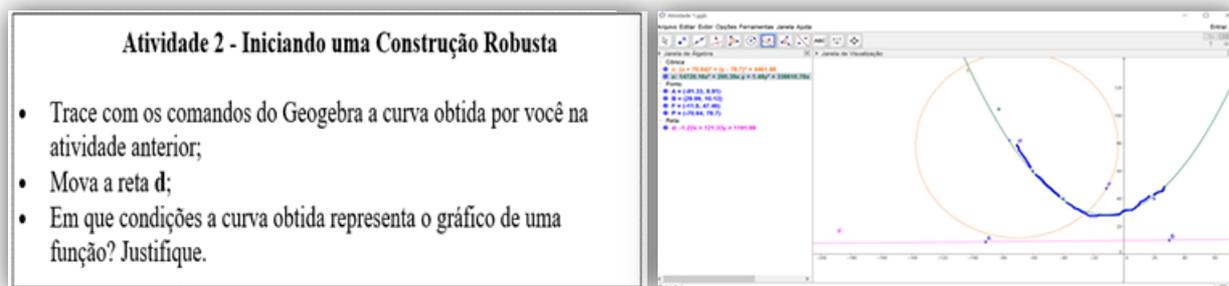


Figura 2 - Descrição da atividade 2 e o resultado da sua construção no Geogebra.
Fonte: Lucena e Gitirana (2015)

Após construir a curva, o estudante é desafiado a mover a reta diretriz e buscar em que situações o gráfico de uma função quadrática é obtido. São duas respostas corretas, ele pode considerar o gráfico de y em função de x e o gráfico de x em função de y . Porém, pela familiaridade com y em função de x , o mais comum é que o estudante considere as parábolas obtidas apenas quando a reta diretriz é paralela ao eixo- x , o eixo horizontal.

Após discutir a correspondência entre parábolas como curva geométrica e os gráficos das funções quadráticas, buscamos uma atividade que explore a articulação no sentido inverso. Ter-se função quadrática e obter-se o foco e a reta diretriz. E mostrar que qualquer ponto do gráfico da função é equidistante ao foco e a reta diretriz traçada. Desafia-se agora o estudante a entender como achar o foco e a reta diretriz.

**ARTICULAÇÕES INTERNAS À MATEMÁTICA:
A PARÁBOLA E A FUNÇÃO QUADRÁTICA COM O GEOGEBRA**

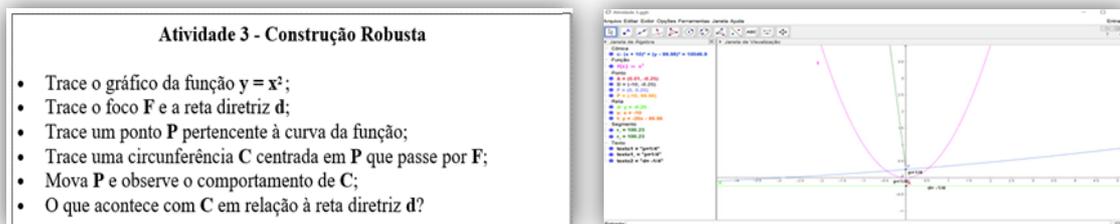


Figura 3 – Descrição da atividade 3 e um resultado da sua construção no Geogebra.
Fonte: Lucena e Gitirana (2015)

Nessa atividade, para se ter um caso mais simples, escolheu-se trabalhar com a função quadrática protótipo, $y = x^2$. Além disso, é suposto que, durante a construção do lugar geométrico, o estudante perceba que, assim como qualquer ponto, o vértice também é equidistante do foco e da diretriz, e que se a ordenada do foco for y_f a reta diretriz será $y = -y_f$. Com a noção de parábola como lugar geométrico, o estudante pode escolher um ponto $P = (x,y)$ da função diferente do vértice e identificar o valor de y_f como $\frac{y}{4}$, sabendo que tal ponto é equidistante à reta diretriz e ao foco. Após identificar o foco e a diretriz, o estudante é desafiado a checar a equidistância dos pontos da parábola ao foco e a reta diretriz escolhidos.

Experimentação

A sequência de atividades foi aplicada em um encontro de 3h/a com uma turma da Licenciatura presencial em Matemática, de uma instituição federal de ensino. Participaram a professora da disciplina, as duas autoras deste trabalho e 10 estudantes. A aula, à distância, contou com interações por meio do chat da plataforma do *Google drive*, na qual foram disponibilizados: um texto, que tratava da importância do uso dos registros de representação semiótica para o ensino e aprendizagem da matemática (LUCENA et al, 2016), e uma apresentação, com as orientações e as atividades da sequência. Após as atividades serem realizadas, os estudantes responderam a um questionário, por meio do formulário do *gdrive*, que visava entender os pontos de vista dos estudantes sobre as atividades realizadas, no que concerne a: as distintas representações da parábola e o papel do *software* nesse processo.

Questão 1 - *As atividades de construção propostas anteriormente nos ajudam a perceber que a geometria analítica amplia o estudo da parábola, ultrapassando os conhecimentos vistos no estudo da função quadrática. Quais aspectos confirmam essa afirmação?*

**ARTICULAÇÕES INTERNAS À MATEMÁTICA:
A PARÁBOLA E A FUNÇÃO QUADRÁTICA COM O GEOGEBRA**

Questão 2 - *Ao fazer as construções solicitadas, procure recordar de todo percurso realizado por você, considerando as dificuldades, os conhecimentos prévios, as informações disponibilizadas, enfim, todo contexto. Quais relações você poderia fazer entre os objetos construídos? Que significados você atribuiria a estes objetos?*

Questão 3 - *Para fazer as construções geométricas solicitadas, sugerimos o uso do software de geometria dinâmica - Geogebra - como suporte. Qual a relevância do uso desse recurso para realização das atividades propostas?*

Alguns resultados

Discutiremos, aqui, algumas das respostas dadas pelos estudantes ao questionário, por revelarem contribuições à formação dos professores. Algumas respostas dos estudantes, à primeira questão, revelam a importância dada por eles à **articulação de diferentes perspectivas de um mesmo conceito**.

Estudante 1 - *“(...) o fato de poder construir a parábola através de outros elementos que estão ocultos na álgebra como o Foco e a reta diretriz. Estes objetos dão uma nova visão de construção e manipulação da parábola, acentuando uma visão mais geométrica”.*

Estudante 2 - *“(...) percebi que achamos a parábola como consequência de um lugar geométrico quando movemos o ponto para que fique tangente a reta, seguindo a circunferência, então isso nos mostra que não precisamos partir da parábola em si e sim podemos chegar até ela por outros meios”.*

O Estudante 1 mostra claramente a importância que ele passou a perceber, os elementos geométricos da parábola, passando a considerar a perspectiva e elementos geométricos dessa curva. Já a fala do estudante 2 revela a sua mudança de perspectiva para um conhecimento geométrico da parábola, porém, ele atribui à “parábola em si” o traçado da curva como gráfico da função quadrática, por meio de sua fórmula algébrica.

As respostas dos licenciandos à questão 2 revelam suas considerações sobre as atividades de **conversão como fonte para o desenvolvimento do conhecimento conceitual**.

Estudante 3 - *“O fato de uma atividade propor ao educando que construa, nesse caso, uma parábola, sem a lei de formação da função/equação, e apenas fornecendo elementos, como o círculo, reta e dois pontos, sem sombras de dúvidas é de um nível de complexidade superior, já que exige que o indivíduo resgate e mobilize competências e habilidades vistas anteriormente, ou até mesmo que ele passe a possuí-las através dessa atividade”.*

Estudante 4 - *“Outro ponto importante, seria o fato do aluno não só construir a representação, mas compreender o que está fazendo e perceber os conceitos teóricos e gráficos que ele utilizou e o que eles representam”.*

ARTICULAÇÕES INTERNAS À MATEMÁTICA:
A PARÁBOLA E A FUNÇÃO QUADRÁTICA COM O GEOGEBRA

O estudante 3 aponta o desafio da articulação de diferentes perspectivas de uma mesmo conceito e passa a reconhecer a importância do processo de construção de conhecimento inerente à realização da atividade. A mudança do enfoque processual da construção da representação para o entendimento conceitual permitido é ainda mais bem explicitada na resposta do estudante 4. Isso corrobora o que aponta Duval (2003) sobre a importância do trabalho com conversão de diferentes representações para o entendimento conceitual.

As respostas dos licenciandos à questão 3 revelam o reconhecimento deles sobre o **papel do recurso tecnológico para esse tipo de abordagem**. A manipulação de objetos construídos no Geogebra, garantida pelo caráter dinâmico do *software*, é um dos grandes diferenciais à abordagem de conceitos matemáticos, o que é impossível de se fazer no quadro, por exemplo. Ao mover a curva e seus elementos, pode-se acompanhar não apenas o comportamento gráfico, mas também o de todas as outras representações do objeto manipulado.

Estudante 5 - “(...) pelo fato do Geogebra ser um ambiente dinâmico podemos transitar com maior facilidade entre as diferentes representações e em cada uma delas o software oferece ferramentas para que possamos modificá-las e perceber qual o papel de cada elemento de criação da figura geométrica. Contudo o software exige do usuário certo tempo de dedicação para aprender a manipulá-lo.”

A fala do estudante 5, contribui com nossa análise, ao enfatizar a facilidade que se tem para transitar entre representações diferentes do mesmo objeto no Geogebra. É possível visualizar diversas funções quadráticas e seus respectivos gráficos, movendo-se algum elemento da representação gráfica ou modificando algum valor na lei de formação.

Considerações finais

Este artigo discutiu teoricamente uma sequência de atividades e os resultados obtidos com professores em formação, para exploração da parábola, por meio do Geogebra, que favorece a correspondência entre suas características enquanto gráfico da função quadrática e curva, na perspectiva de lugar geométrico, na geometria analítica. De acordo com os licenciandos, com as atividades realizadas, eles conseguiram correlacionar as duas perspectivas do mesmo objeto matemático; perceber a importância do trabalho multirrepresentacional, com valorização de conversões em duplo sentido para o entendimento conceitual e ter acesso a potencialidade de recursos de *software*.

Referências

ARAÚJO, A. A. **Abordagem de alguns lugares geométricos planos em ambientes de geometria dinâmica**. São Paulo: [2.n.], 2011.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. **Aprendizagem em matemática: Registros de representação semiótica**. São Paulo: Papirus Editora, p.11-33. 2003.

DUVAL, R. Gráficos e equações: a articulação de dois registros **REVEMAT**, ISSN 1981-1322, Florianópolis (SC), v. 6, n. 2, p. 96-112, 2011.

HOHENWARTER, M.; **Geogebra 5.0 Software**. International GeoGebra Institute, Linz, Austria Disponível em: <http://www.geogebra.org/download> Acesso em: 05/11/2015.

LUCENA, R.; GITIRANA, V. **Geometria analítica com o Geogebra**. Material didático da disciplina de Metodologia do Ensino de Matemática 4., Centro de Educação - UFPE, 2015. Disponível em: em www.academia.edu/. Acesso em: 05/11/2015.

LUCENA, R.; MARIANO, R.; SANTOS, R. T. . Representação e Conhecimento Matemático. In: GITIRANA, V.; BELLEMAIN, P. B.; LINS, W. C. B.. (Orgs.). **Metodologia do Ensino da Matemática: livro-texto para a educação a distância**. 1ed. EDUMATEC/UFPE, Recife: 2016, p. 48-60.



Veja mais em www.sbem.org.br

SOCIEDADE BRASILEIRA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA