http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2013v8nespp246

Atividades para a cônica hipérbole

Activities for the conical hyperbole

Neder do Carmo Pereira Habib

Nederh@gmail.com

Resumo

As cônicas são utilizadas atualmente em astronomia, engenharia, arquitetura, física e em várias outras áreas. Porém, o estudo das cônicas fica restringido ao Ensino Médio, e na maioria dos casos, nem no Ensino Médio é trabalhado. Em muitos livros didáticos encontrados nas escolas, o ensino das cônicas se restringe a memorização de fórmulas sem o entendimento das propriedades e conceitos por trás delas. Este texto apresenta breve análise da abordagem usada por alguns livros didáticos assim como algumas atividades para enriquecimento da abordagem para a cônica hipérbole que fazem uso de material concreto, assim como uma atividade que envolve o software Z.u.L.

Palavras-chave: Hipérbole. Ensino. Material concreto. Régua e compasso.

Abstract

Conics are currently used in astronomy, engineering, architecture, physics and many other areas. However, the study of conic sections is restricted to high school, and in most cases, not in high school is working. In many textbooks found in schools, the teaching of conic restricted to memorizing formulas without understanding the properties and concepts behind them. This paper presents a brief analysis of the approach used by some textbooks as well as some activities to enrich the approach to conical hyperbole that make use of concrete materials, as well as an activity that involves software Z.u.L.

Keywords: Hyperbole. Teaching. Concrete materials. Ruler and compass.

1. Introdução

Neste estudo, pretende-se apresentar opções de abordagem enriquecedora para a cônica hipérbole através de atividades práticas para construção da mesma, possibilitando assim que o assunto não fique apenas como um "decorar de fórmulas".

2. Atividades de construção da hipérbole

Os professores da atualidade têm um grande desafio, que é o de ensinar a matemática em um mundo dominado pela alta tecnologia. Portanto, devemos modificar as nossas ações e técnicas para que possamos ensinar matemática de forma que ela fique mais interessante para os alunos.

As cônicas são curvas especiais em que se podem destacar a elipse, a parábola e a hipérbole. Elas foram estudadas a fundo no século III pelo matemático grego Apolônio. Atualmente elas são aplicadas na geometria, astronomia, por meio do dos movimentos elípticos dos planetas, na física, na óptica, por meio de telescópios espaciais, na engenharia, na arquitetura e nas novas tecnologias, por meio de antenas parabólicas ou hiperbólicas.

No ensino básico as cônicas só aparecem no terceiro ano do Ensino Médio, mas muitas vezes nem são trabalhadas pelos professores. Quando é ensinado, muitas vezes o conteúdo é restringido a um amontoado de fórmulas que na maioria das vezes é decorado pelo aluno e raramente é entendido. Muitas das vezes as cônicas são trabalhadas somente com centro na origem, esquecendo assim das cônicas com centros em outros pontos e que as cônicas também podem estar rotacionadas. As elipses e as hipérboles são trabalhadas por meio dos parâmetros a, b e c e as parábolas do parâmetro p. No ensino superior elas voltam a ser estudadas em cálculo, para a construção de superfícies no espaço, em geometria analítica, com enfoque nas equações analíticas e álgebra linear, onde é feita uma ligação delas com vetores e matrizes.

Deve-se despertar no aluno um cento gosto pela matemática, tornando-a real e mais simples, utilizando materiais concretos e de interesse dos mesmos.

Historicamente as cônicas ocupam um capítulo importante e antigo no desenvolvimento da matemática. Menaecmus, astrônomo e geômetra grego, foi o primeiro a utilizar duas curvas: a parábola e a hipérbole. No século IV a.C., ele solucionou o problema da "duplicação do cubo" que consistia em encontrar um cubo cujo seu volume fosse igual a dois, utilizando-se dessas duas curvas. Consequentemente, a elipse surgiu mais tarde quando se seccionou uma superfície cônica perpendicularmente a sua geratriz. Por isso o nome secções cônicas.

Apolônio de Perga (262-190 a.C.) escreveu um importante documento sobre as cônicas. Neste documento, acrescentou aos estudos de Menaecmus várias proposições, mas de forma puramente geométrica. Pode-se destacar uma proposição sobre a posição do plano secante em relação ao eixo de rotação ou à geratriz de uma superfície cônica de revolução.

Apolônio foi o autor que mais contribuiu para o estudo das cônicas. Ele escreveu oito livros, dos quais os quatro primeiros apresentam resultados de outros matemáticos anteriores e os quatro últimos apresentam resultados desenvolvidos por ele mesmo. Apolônio é o primeiro a unificar as secções cônicas e afirmar que elas poderiam ser obtidas a partir de um único cone. Ele também duplicou o cone e daí a hipérbole passa a ter duas folhas.

Mas o ensino das cônicas não está, nos dias atuais, à altura de sua importância histórica.

Claro que nem todos os professores de matemática ensinam, orientam, trabalham da mesma maneira os conteúdos/habilidades matemáticas com seus alunos. Cada um carrega consigo particularidades, traços pessoais. Mas, no tocante à metodologia de ensino e didática, quem acompanha o cotidiano escolar, professores, pais ou até mesmo os próprios alunos sabem que muitos dos professores, seguem uma rotina pedagógica, às vezes chamada de "cuspe e giz", onde as aulas são apenas expositivas. São inúmeras as razões que podem vir a justificar tal postura e tais razões não vem ao caso.

Nas aulas expositivas de matemática o livro didático assumiu e ainda hoje assume papel extremamente importante. Chagas (2004) corrobora tanto a presença de aulas expositivas quanto a importância do livro didático nas aulas de matemática ao dizer que:

> Não é raro encontrarmos, dentro do trabalho cotidiano das escolas, professores de matemática ensinando esta disciplina de forma "rotineira", onde os conteúdos trabalhados são aqueles presentes no livro didático adotado e o método de ensino se restringe a aulas expositivas e a exercícios de fixação ou de aprendizagem (CHAGAS, 2004, p. 242).

Huete e Bravo (2006) vão além de atestar, consideram muito negativa a rotina no ensino de matemática e a predominância do livro didático quando dizem que

> A ausência, nos professores, de um sólido conhecimento teórico leva-os a dirigir a tarefa escolar (de resolução de situações problemáticas) de forma rotineira, cujo único objetivo é chegar à solução esperada [...]. As situações problemáticas, as quais aparecem em algumas apostilas ou nos livros-texto selecionados, distanciam-se consideravelmente de suas experiências de seus interesses, deixando à margem qualquer resquício de participação imaginativa que possa originar na aula (HUETE; BRAVO, 2006, p. 8).

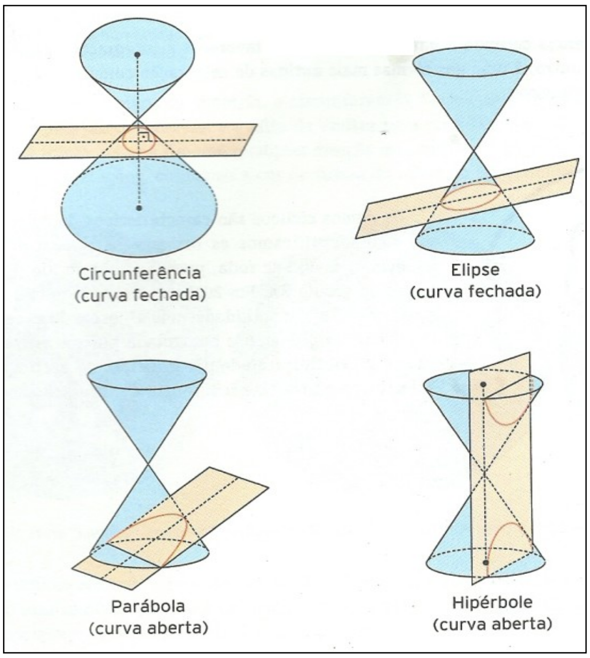
Portanto é razoável considerar que os livros textos determinam em grande medida o currículo escolar e como o ensino/aprendizagem de matemática efetivamente ocorre nos dias atuais.

Feita uma análise de alguns livros texto de matemática que abordam as cônicas, observou-se para a hipérbole que tratamento dado às hipérboles nos livros didáticos é muito parecido. E consiste em:

Poucas palavras são dedicadas às histórias das cônicas, quando existem.

As cônicas são apresentadas como cortes de cone como na figura abaixo.

Figura 1 – As cônicas como cortes do cone duplo

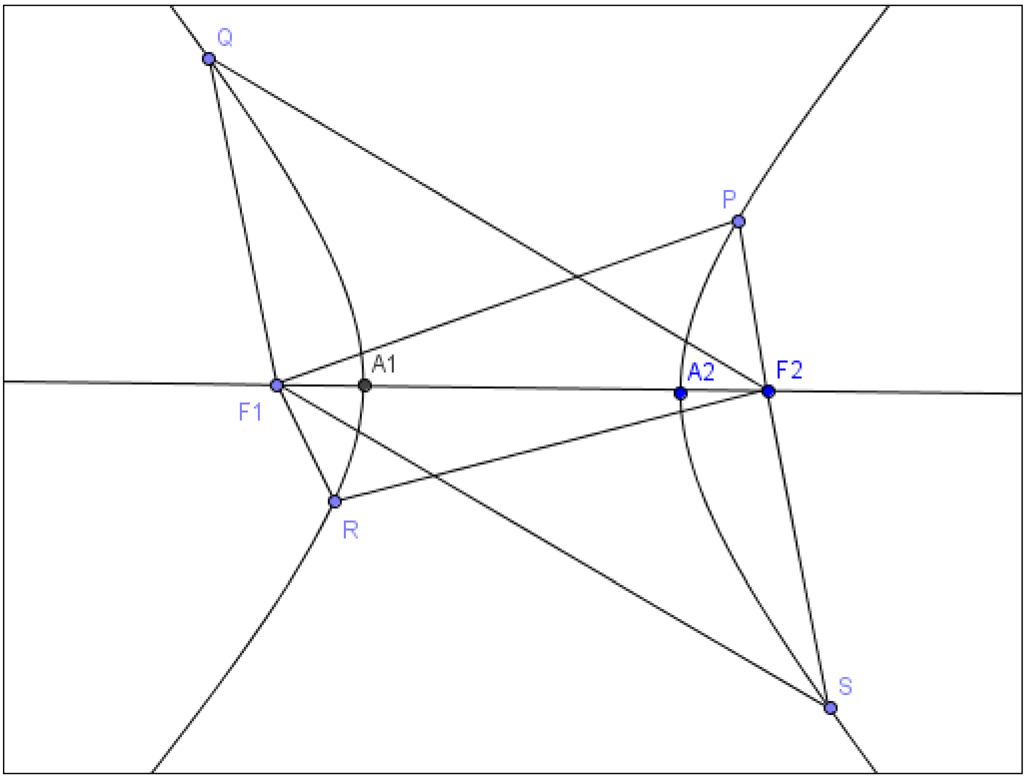


Definição: Hipérbole é o conjunto dos pontos P de um plano π tais que a diferença de suas distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 desse plano é uma constante positiva e menor que a distância entre esses pontos fixos.

Ilustração e breve explicação da definição: Considerando a ilustração da hipérbole abaixo, os pontos P, Q, R, S, A_1 e A_2 são exemplos de pontos da hipérbole porque,

$$PF_1 - PF_2 = QF_2 - QF_1 = RF_2 - RF_1 = SF_1 - SF_2 = A_1F_2 - A_1F_1 = A_2F_1 - A_2F_2 = 2a$$

Figura 2 – A hipérbole e alguns de seus pontos



Elementos da hipérbole:

Focos da hipérbole: pontos F_1 e F_2;

Distância focal: é a distância entre os focos, de medida 2c;

Centro da hipérbole: é o ponto médio entre os focos, o ponto O;

Vértices da hipérbole: são os pontos A_1 e A_2;

Eixo real ou transverso: é o seguimento que liga A_1 e $A_{2,}$ de medida 2a;

Excentricidade: é a razão $e = \frac{c}{a}$; a excentricidade é sempre um número maior que 1 e diferencia o formato das hipérboles, a hipérbole é tanto mais aberta em sua forma quanto maior for o valor de sua excentricidade.

Eixo imaginário de tamanho 2b, onde $c^2 = a^2 + b^2$. A maioria dos livros didáticos não explica que tal valor "batizado" de *b* é um argumento para facilitar a compreensão, memorização, trato com a fórmula da curva, uma vez que a hipérbole é totalmente definida pela distância focal e pela distância entre os vértices.

Demonstração da equação reduzida da hipérbole com eixo real sobre o eixo *x* e centro na origem:

Seja o ponto P de coordenadas (*x, y*) pertencente à hipérbole. Pela definição, temos que o módulo da diferença distância de P até F_1 e da distância de P a F_2 é igual a 2a.Usando a equação das distâncias e considerando que as coordenadas de F_1são (c, 0) e as de F_2 são (– c ,0) temos:

$$\left|\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right|=2a$$

Retirando o módulo e adicionando $\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ em ambos os membros:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a+\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

Elevando ao quadrado os dois lados:

$$(x-c)^2+y^2=4a^2\pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2$$

Desenvolvendo quadrados de x – c e x + c:

$$x^2-2xc+c^2+y^2=4a^2\pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2xc+c^2+y^2$$

Subtraindo x^2, y^2 e c^2 em ambos os membros:

$$-2xc=4a^2\pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+2xc$$

Subtraindo $2xc$ e $4a^2$ em ambos os membros da equação:

$$-4a^2-4xc=\pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

Dividindo ambos os membros por 4 e os elevando ao quadrado:

$$a^4+2a^2xc+x^2c^2=a^2\left((x+c)^2+y^2\right)$$

Elevando $x + c$ ao quadrado e multiplicando os parênteses por a:

$$a^4+2a^2xc+x^2c^2=a^2x^2+2a^2xc+a^2c^2+a^2y^2$$

Reorganizando com somas e subtrações:

$$a^4-a^2c^2=a^2x^2+a^2y^2-x^2c^2$$

Evidenciando a^2 no primeiro membro e x^2 no segundo:

$$a^2\left(a^2-c^2\right)=x^2\left(a^2-c^2\right)+a^2y^2$$

Substituindo $a^2 - c^2$ por $-b^2$, pois *b* foi definido com um valor tal o ponto B de coordenadas *(0, b)* forme juntamente com os pontos A_1 e O e também com os pontos A_2 e O triângulos retângulos de catetos *a* e *b* e hipotenusa *c*, logo pelo teorema de Pitágoras: $a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow a^2 - c^2 = -b^2$:

$$-a^2b^2 = -b^2x^2 + a^2y^2$$

Dividindo-se ambos os membros por $-a^2b^2$:

$$1 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

De forma análoga pode ser obtida a equação da hipérbole com centro na origem e eixo real sobre o eixo *y*. Apenas os papéis de x e y se invertem, resultando em:

$$1 = \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2}$$

E com raciocínios também parecidos podemos obter as equações de uma hipérbole com centro em um ponto qualquer (x_0, y_0) e eixos reais paralelos ao eixo x ou ao eixo *y*, sendo elas respectivamente:

$$1 = \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} \text{ e } 1 = \frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2}$$

onde $(x - x_0)^2$ equivale a x^2 e $(y - y_0)^2$ equivale a y^2 por poder ser vista essa situação como translações da hipérbole com centro na origem horizontal e/ou verticalmente.

No mais, os livros didáticos geralmente apresentam exercícios resolvidos, salvo algumas exceções.

Em suma, são comuns a presença de: definição focal da curva, a listagem exaustiva de elementos, demonstração de fórmulas, exercícios resolvidos e exercícios propostos. A definição é focal, isto é, a curva é definida pela sua propriedade de distância em relação aos focos em todos os livros analisados.

São poucas as atividades de construção da curva.

Em suma a análise feita concorda com a análise maior, que envolveu mais livros didáticos e as três cônicas, feitas por Bordallo (2011, p. 18):

> As seções cônicas aparecem apenas dentro de geometria analítica; As três seções são estudadas separadamente da seguinte forma:o corte do cone que gera a cônica; definição focal; elementos principais; equação reduzida com centro e vértice na origem e eixos cartesianos como eixos; equação com centro e vértice fora da origem e eixos paralelos aos eixos cartesianos.

A mesma autora, critica a forma fragmentada como as cônicas são abordadas: "Acreditamos que a apresentação fragmentada atual não faz sentido aos alunos, tornando-se uma 'decoreba' que não terá qualquer serventia" (BORDALLO, 2011, p. 18).

Logo, não é de se estranhar que, na versão do professor de um dos livros didáticos analisados, explicite ao professor que adotou o livro que a unidade sobre as cônicas "pode ser desenvolvida por você em caráter opcional, caso o tempo permita".

Não descartando um papel importante para o livro didático, mas tendo em vista o exposto acima, fica claro que apenas o livro didático não é suficiente na abordagem do tema hipérbole. Para que o ensino das cônicas seja mais que um decorar fórmulas e elementos, faz-se necessário que o professor esteja munido de atividades diferenciadas que possibilitem aos alunos uma participação investigativa, imaginativa, criativa e mais rica em significado.

2.1. Encontrando pontos da hipérbole com barbante

Nesta atividade construiremos uma hipérbole com colagem de barbantes. Siga o passo a passo caprichosamente e você construirá uma das mais importantes curvas da matemática.

Materiais necessários

Meia cartolina – Lápis – Régua graduada – Barbante – Tesoura – Cola

Passo a passo

1º passo: Marque o ponto O no centro da meia cartolina

2º passo: Trace a reta R passando pelo ponto O e paralela à borda maior da meia cartolina

3º passo: Marque os pontos F_1 , do lado direito do ponto O, e F_2 , do lado esquerdo do ponto O, pertencentes à reta R e distantes 5 centímetros do ponto O

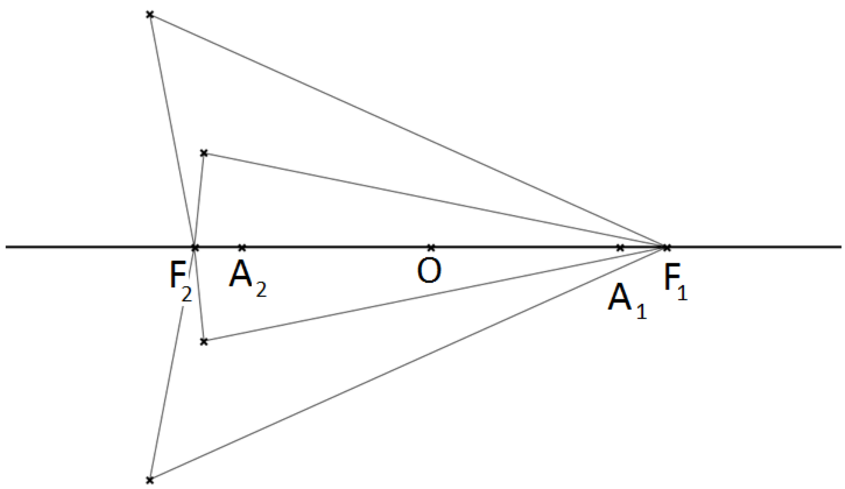
4º passo: Marque os pontos A_1 , do lado direito do ponto O, e A_2 , do lado esquerdo do ponto O, pertencentes à reta R e distantes 4 centímetros do ponto O

5º passo: Recorte dois pedaços de barbante de tamanhos 10 cm e dois pedaços de tamanho 2 cm.

6º passo: Coloque uma ponta do pedaço de barbante de tamanho 10 cm sobre F_1 e uma ponta do pedaço de tamanho 2 cm sobre F_2 . Agora encontre um ponto na metade de cima da cartolina onde a outra ponta de cada um dos barbantes se encontra. Marque o ponto.

7º passo: Repita o 6º passo com os outros pedaços de barbante de tamanho 10 cm e 2 cm e marque o ponto onde as pontas se encontram na metade de baixo da cartolina.

8º passo: Lambuse os pedaços de barbante de cola e cole-os na posição encontrada para marcar os pontos de acordo com o 6º passo e com o 7º passo.



9º passo: Repita do 5º ao oitavo passo usando pares de pedaços de barbantes, todos com 8 cm de diferença do pedaço maior para o pedaço menor, por exemplo pedaços de tamanhos 12 cm e 4 cm, 14 cm e 6 cm, 17 cm e 9 cm, 20 cm e 12 cm, 24 cm e 16 cm.

10º passo: Trace uma curva que passe pelos pontos onde as pontas de barbante se encontram e pelo ponto ponto A_1.

11º passo: Tente traçar uma curva simétrica à curva traçada no 10º passo que passa por A_2.

<u>Reflexão sobre a atividade</u>

Por que a hipérbole passa pelos pontos A_1 e A_2 ?

O que todos os pontos por onde passa a hipérbole tem em comum?

O QUE É UMA HIPÉRBOLE?

Elementos da hipérbole nesta atividade

Ponto O: centro da hipérbole

Segmento A_1A_2: eixo real ou eixo transverso da hipérbole

Pontos A_1 e A_2: Vértices da hipérbole

Pontos F_1 e F_2: Focos da hipérbole

Dever de casa: Construa outra hipérbole, usando outros valores para a distância entre o centro da hipérbole e os focos e entre o centro da hipérbole e os vértices. Note que a diferença entre os tamanhos dos barbantes deve ser igual à distância entre os pontos A_1 e A_2.

Compare as duas hipérboles e anote quais as diferenças que você observa entre elas.

Objetivos da atividade: Visualizar a hipérbole, definir ou vir a refletir sobre a definição focal da mesma, a saber, o lugar geométrico dos pontos cuja diferença das distâncias a dois pontos fixos é constante. Apresentar alguns elementos da hipérbole aos alunos. Trabalhar em equipe, interagir. Trabalhar com medições. Dessa forma pretende-se que o aluno tenha um primeiro contato com a hipérbole por meio de manipulação, indo de encontro ao que diz Huete e Bravo (2006, p. 59) quando dizem que: “Para a introdução de conceitos matemáticos é ótimo recorrer a atividades do tipo lúdico”. Pretende-se também apresentar aos alunos do Ensino Fundamental a cônica, para que no Ensino Médio ela não seja uma curva totalmente estranha, concordando com Nina e Portanova (2005, p. 19) quando diz que:

> A capacidade de raciocínio de um aluno desenvolve-se ao longo de um período de tempo e está intimamente ligada à vivência de uma gama de experiências variadas [...] e que devem ser, especialmente no Ensino Fundamental, apresentados como um todo integrado, num currículo em espiral, organizado num gral crescente de complexidade.

Público alvo: alunos a partir do 8º ano do Ensino Fundamental ou alunos que não conhecem ainda o formato da hipérbole

Pré-requisitos: noção de reta, reta paralela, ponto, distância.

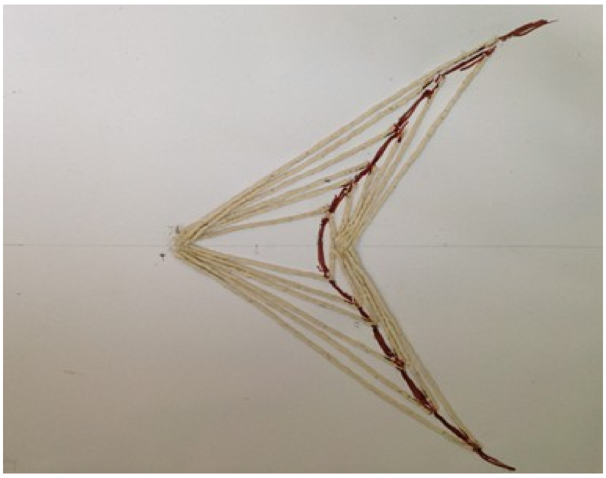
Materiais e tecnologias: cartolina, lápis, barbante, cola, régua graduada e tesoura.

Recomendações metodológicas: formação em duplas ou trios, leitura e tira dúvida por parte do professor do passo a passo. Promover discussão com a turma sobre o que cada ponto de encontro entre cada par de pedaços de barbante tem em comum, para que eles possam se aproximar da definição da hipérbole.

Dificuldades previstas: leitura das regras do passo a passo, mãos sujas de cola.

Descrição geral: Os alunos devem ler e seguir os passos da atividade, marcação de pontos, traço de uma reta, cortes de pedaços de barbante, encontrar o lugar onde os pedaços de barbante definem um ponto pertencente à hipérbole, colar barbantes. Previsão de tempo de duas aulas de 50 minutos.

Possíveis desdobramentos: O professor pode orientar os alunos a variarem a distância entre os focos, bem como entre os vértices e, a partir da visualização dos novos formatos, proporem discussão, investigação sobre a relação entre a distância focal e da distância entre vértices.



2.2. Encontrando pontos da hipérbole com régua graduada e compasso

Esta atividade consiste de um passo a passo para que seja feito o traço de uma hipérbole.

Siga o passo a passo da atividade, responda ao questionário e em seguida construa outra hipérbole com valores que você escolher.

Materiais utilizados

Folha de papel ofício – Régua graduada – Lápis – Compasso

Passo a passo

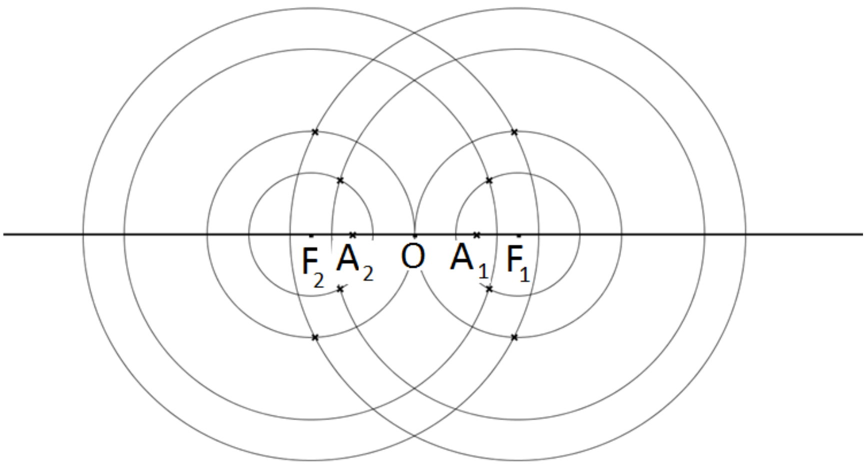
1º passo: Marque no centro da folha o ponto O

2º passo Trace a reta R passando pelo ponto O e paralela à borda maior da folha

3º passo: Marque os pontos F_1 e F_2 sobre a reta R de tal forma que F_1 esteja à direita de O 5 cm e F_2 à esquerda de O também 5 cm

4º passo: Marque os pontos A_1 e A_2 sobre a reta R de tal forma que A_1 esteja à direita de O 3 cm e A_2 à esquerda de O também 3 cm

5º passo: Faça com o compasso uma abertura de 9 cm e trace duas circunferências de raio 9 cm, uma com centro em F_1 e outra com centro em F_2.



6º passo: Faça com o compasso uma abertura de 3 cm e trace duas circunferências de raio 3 cm, uma com centro em F_1 e outra com centro em F_2.

7º passo: Marque os quatro pontos de encontro entre circunferências de raios 9 cm e as circunferências de raio 3 cm.

8º passo: Repita do 5º ao 7º passo pelo menos mais seis vezes com valores maiores para o par de circunferências. Escolha valores de tal forma que a diferença entre eles seja sempre 6 cm. Por exemplo 10 cm e 4 cm, 11 cm e 5 cm.

10º passo: Ligue os pontos marcados com uma curva. Observação: Os pontos A_1 e A_2 fazem parte da curva. Eis uma **hipérbole**!

Elementos da hipérbole desta atividade:

Ponto O: centro da hipérbole

Pontos A_1 e A_2: vértices da hipérbole

Segmento A_1A_2: eixo real ou transverso

Pontos F_1 e F_2: focos da hipérbole

Distância de F_1 a F_2: distância focal

Discuta com seu colega de dupla e responda:

Porque os pontos A_1 e A_2 fazem parte da hipérbole?

O que os pontos marcados têm em comum?

O que é uma hipérbole?

Exercício: Construa mais duas hipérboles seguindo o Passo a Passo acima, com outros valores para os segmentos OF_1, OF_2, OA_1 e OA_2. Use tamanhos de circunferências tais que a diferença do raio da maior para o raio da menor seja igual à distância de A_1 a A_2.

Objetivos da atividade: Visualizar a hipérbole pela marcação de alguns de seus pontos. Trabalhar com régua e compasso o conceito de lugare(s) geométrico(s). Trabalhar ponto, reta, medidas, interseção entre circunferências. Pretende-se que os alunos possam se aproximar da definição de hipérbole, ou mesma defini-la, facilitando assim a compreensão da definição formal da curva.

Público alvo: Alunos do Ensino Médio ou mesmo do 9º ano do Ensino Fundamental.

Pré-requisitos: Ponto, reta, distância, reta paralela, medir usando a régua.

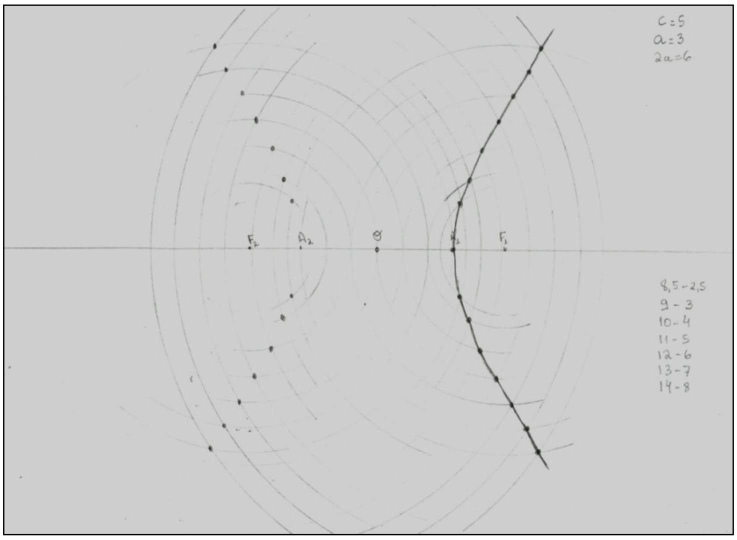
Materiais e tecnologias: régua graduada, compasso, papel e lápis.

Recomendações metodológicas: formação de duplas, leitura e tira dúvida por parte do professor do passo a passo. Promover discussão com a turma sobre o que cada ponto marcado tem em comum, para que eles possam se aproximar da definição da hipérbole.

Dificuldades previstas: leitura do passo a passo, manuseio do compasso

Descrição geral: seguindo passos descritos na atividade os alunos devem fazer pares de círculos em torno de dois pontos escolhidos como focos de uma hipérbole a ser construída de tal forma que a diferença entre os raios nos pares de círculos seja igual à diferença entre as distâncias de cada ponto da hipérbole aos focos, obtendo assim pontos da hipérbole pela interseção de circunferências.

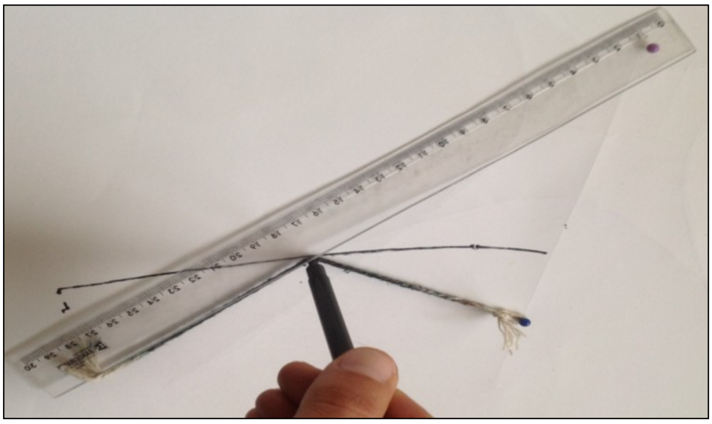
Possíveis desdobramentos: O professor pode orientar os alunos a variarem a distância entre os focos, bem como entre os vértices e, a partir da visualização dos novos formatos, proporem discussão, investigação sobre a relação entre a distância focal e da distância entre vértices, e as duas distâncias e sua relação com a excentricidade da hipérbole. Também pode propor uma atividade onde a hipérbole seja assim traçada em papel quadriculado e os alunos verifiquem a validade da equação da mesma escolhendo pontos do traçado.



2.3. Desenhando hipérboles com a régua furada

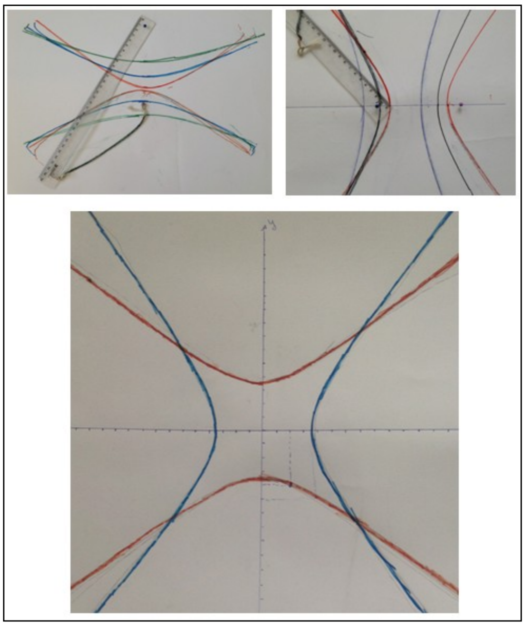
Faça dois furos nas extremidades de uma régua de acrílico e amarre um pedaço de barbante (de tamanho menor que a distância entre os focos, o tamanho do barbante definirá a distância entre os vértices) em uma das extremidades. Na ponta livre que sobrar no pedaço de barbante faça um pequeno laço.

Usando uma tachinha ou um percevejo prenda a extremidade da régua onde não está amarrado o barbante em um foco da hipérbole e o laço do barbante no outro foco da hipérbole. O lápis, mantendo o contato com a régua deve passear pelo barbante enquanto a régua gira em torno do foco onde está presa, como na figura abaixo.



Ao se chegar à metade do ramo da hipérbole, deve-se parar o traço da mesma, soltar a extremidade presa da régua, virar a régua e prendê-la novamente, e assim fazer o traço da outra metade do ramo da curva.

Em seguida basta trocar de posição a extremidade presa da hipérbole com o laço do barbante e proceder da mesma maneira para que seja traçado o outro ramo da hipérbole.



Construção de diferentes hipérboles, reflexão da relação entre o processo usado na construção e a definição da curva, fazendo assim com que a definição da curva seja mais bem assimilada pelo estudante.

Público alvo: alunos dos últimos anos do Ensino Fundamental e alunos do Ensino Médio.

Pré-requisitos: não possui

Materiais e tecnologias: régua furada, barbante, cartolina e lápis.

Recomendações metodológicas: Orientar os alunos na reflexão do porque o procedimento utilizado origina uma hipérbole, na conferência da validade da definição da hipérbole para pontos da curva traçada, na variação da distância focal e na distância entre vértices para obtenção de novas hipérboles e na reflexão do fato da distância entre vértices ser justamente o tamanho livre do barbante.

Dificuldades previstas: as réguas devem ser furadas anteriormente por ser necessário uso de faca de ponta. Para prender os percevejos é bom que a cartolina seja apoiada em papelão, apenas a cartolina não é capaz de prendê-los suficientemente.

Descrição geral: Atividade para ser realizada em uma aula de 50 minutos, com possível continuidade em outra aula para as reflexões sobre a atividade. Consiste em aprender manusear a régua furada para com ela executar o traço de várias hipérboles e reflexões sobre o processo.

Possíveis desdobramentos: Uso de plano cartesiano para traço de hipérboles com equação dada.

2.4. Hipérboles no computador com o *software* Z.u.L

Nesta atividade será feita uma construção que possibilitará que seja traçada uma hipérbole com um simples clique. Também, uma vez feita a construção será possível modificar a hipérbole de forma fácil, bastando apenas mudar um ou outro valor.

Uma vez aberto o software Z.u.L, que é gratuito, devemos:

1º: Clicar no botão PONTO e marcar dois pontos quaisquer que serão os focos da hipérbole.

2º: Clicar no botão CÍRCULO COM RAIO FIXO, clicar em um dos focos marcados anteriormente e clicar novamente de forma a obter uma circunferência com raio menor que a distância entre os focos. Aperte OK.

3º: Clicar novamente em PONTO e marcar um ponto qualquer em cima da circunferência.

4º: Clicar no botão SEGMENTO e em seguida no ponto marcado no 3º passo e no foco que está fora da circunferência, traçando dessa maneira o segmento que liga os dois.

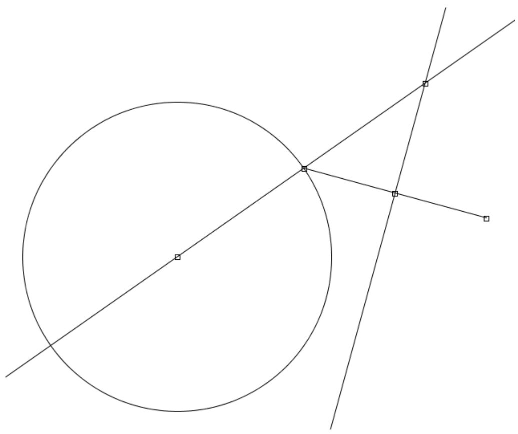
5º: Clicar no botão PONTO MÉDIO e em seguida nos dois pontos clicados no 4º passo para assim marcar o ponto médio do segmento.

6º: Clicar no botão RETA em seguida no foco que está dentro da circunferência e no ponto que está sobre a circunferência, traçando assim uma reta.

7º: Clicar no botão PERPENDICULAR e em seguida no segmento traçado anteriormente e no ponto médio do segmento, nessa ordem, traçando assim a reta perpendicular ao segmento.

8º: Clicar no botão PONTO novamente e marcar o ponto de encontro entre as duas retas.

A construção necessária para que o programa trace a hipérbole está feita, se você seguiu os passos certinhos sua construção deve conter os mesmos elementos que a figura abaixo, confira:



Agora para terminar:

Último passo: Clicar no botão RASTREIO AUTOMÁTICO DE PONTO OU RETA, em seguida clicar no ponto de interseção das retas, depois no ponto que está na circunferência escolher C1 e clicar em OK. Clique mais uma vez no ponto da circunferência. As coisas começaram a se movimentar? Apareceram os dois ramos de uma hipérbole? Se sim, pronto.

Agora se sinta à vontade para mudar o tamanho do raio, mudar a posição dos focos, fazer outras hipérboles.

Objetivos da atividade: Construção e visualização de hipérboles onde são abordados os conceitos de ponto, reta, ponto médio, circunferência, interseção de retas em uma atividade utilizando o *software* Z.u.L. que permite que várias hipérboles sejam traçadas com uma simples mudança na localização de um ponto. Pretende-se que além de revisar os conceitos acima descritos o estudante tenha a oportunidade de observar e inferir facilmente sobre a relação que a distância focal e a distância entre os vértices da hipérbole têm no formato da mesma, visualizando assim hipérboles de várias excentricidades.

Público alvo: Alunos do Ensino Médio

Pré-requisitos: ponto, reta, ponto médio, circunferência, interseção de retas.

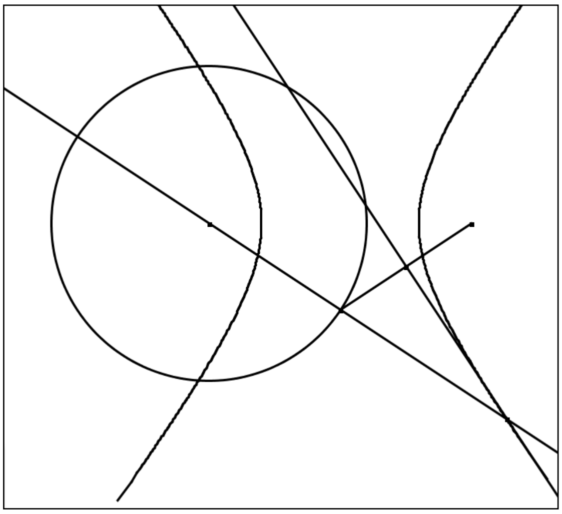
Recomendações metodológicas: se os alunos não têm familiaridade com o software é necessário que o professor realize a construção com os alunos, sem pressa, todos juntos.

Dificuldades previstas: o uso do *software* se for a primeira vez que os alunos o utilizarem

Descrição geral: Usando o *software* Z.u.L. os alunos são orientados na atividade a elaborarem uma construção de que possibilita o traçado de uma hipérbole e também a construir várias hipérboles variando parâmetros da forma acharem melhor. O Z.u.L. é um programa para construções com régua e compasso que roda em vários sistemas operacionais e é gratuito.

Possíveis desdobramentos: O professor pode aproveitar a atividade em um estudo investigativo ou de verificação sobre as equações da hipérbole, fazendo uso da grade quadriculada do próprio programa e das medidas que o mesmo informa.

Abaixo imagem de hipérboles feitas com o programa:



2.5. Sinuca com borda em formato de hipérbole

Objetivos da atividade: Confecção de uma "mesa" de sinuca com borda em formato de hipérbole para uma abordagem prática da propriedade de reflexão da hipérbole. Apresentar ao aluno uma propriedade muito usada na ótica de forma concreta e lúdica.

Público alvo: Alunos do Ensino Médio

Pré-requisitos: Fazer o traçado de uma hipérbole

Materiais e tecnologias: A 'mesa' de bilhar com borda em formato de hipérbole pode ser confeccionada com materiais distintos à escolha do grupo de alunos, como por exemplo, papelão, madeira, isopor, e nos mais diferentes tamanhos, podendo ser uma bola de gude, por exemplo, para fazer o papel de bola de bilhar. Para a borda da "mesa" pode-se usar o emborrachado conhecido por EVA e muito utilizado nas escolas.

Recomendações metodológicas: pode ser indicado como trabalho em grupo. Discussão com os alunos sobre como confeccionar a "mesa". Apresentar a propriedade de reflexão da hipérbole.

Dificuldades previstas: Escolher hipérbole que melhor se ajuste a "mesa", desenhar e recortar de forma precisa a curva no material concreto.

Descrição geral: Formação de grupos de alunos, apresentação da propriedade reflexiva da hipérbole, apresentação das fotos da mesa de bilhar, explicação da relação que a propriedade reflexiva tem com a "mesa", discussão com a turma a respeito da viabilidade, materiais utilizados, tamanho da "mesa". Apresentação e estudo sobre a propriedade reflexiva da hipérbole.

Possíveis desdobramentos: Construções mais aprimoradas. Estudo sistemático da propriedade reflexiva da hipérbole.

2.6. Aplicações

Todas as cônicas possuem aplicações práticas de seu uso. É impossível expor todas, até porque novas aplicações podem ser inventadas futuramente. Citar aplicações das cônicas para os alunos é importante por mostrar que as curvas são presentes na vida real. Abaixo estão listadas algumas aplicações da hipérbole.

A propriedade de reflexão da hipérbole, ilustrada pela “mesa” de bilhar com borda em forma de hipérbole, faz com que a hipérbole seja muito usada na óptica, na construção de lentes e telescópios. O telescópio espacial Hubble, que tem ajudado o homem a resolver problemas antigos de astronomia, é um famoso exemplo do uso de lentes em formato de hipérbole.

Na arquitetura também é possível observar a utilização das hipérboles. Como por exemplo, na Catedral de Brasília, projetada pelo famoso arquiteto brasileiro Oscar Niemeyer, onde dezesseis colunas em formato de hipérboles simetricamente opostas são destaque.

Existem cometas que trajetórias descrevem pelo espaço trajetórias em formato de hipérbole.

As hipérboles também aparecem num quarto escuro quando se acende um abajur, pois o bojo do abajur forma cones de luz que interceptam a parede e é como se a parede fizesse um corte paralelo à altura do cone, resultando assim numa iluminação com borda em formato de hipérbole.

No estudo da química e da física no Ensino Médio, aprendemos que várias são as grandezas que se comportam de forma inversamente proporcional, onde o produto entre elas é constante. Por exemplo, na física, velocidade e tempo, no movimento retilíneo uniforme; na química, no estudo dos gases, o volume ocupado por um gás e a pressão exercida (como ilustra a figura 26); no comércio, a quantidade de produtos comprados e o preço a pagar (quando não se tem desconto); entre muitos outros. A proporção inversa é representada graficamente por uma hipérbole, uma vez que a equação que caracteriza o produto de duas variáveis ser igual à uma constante , ou seja $xy = k$, é a equação de uma hipérbole rotacionada.

Hipérboles são também utilizadas por alguns radares de navegação onde os radares se situam no foco de várias hipérboles.

3. Considerações finais

O ensino das hipérboles, quando ocorre, não passa, na maioria das vezes de decorar e manusear fórmulas. O livro didático e a rotina em sala de aula contribuem para esse cenário. Grande parte dos livros didáticos abordam o assunto da mesma maneira.

A abordagem de cônicas, em particular da hipérbole, no Ensino Médio pode ser enriquecida com atividades concretas para aumentar o entendimento e o interesse dos alunos.

4. Referências

CHAGAS, E. M. P. de F. Educação matemática na sala de aula: problemáticas e possíveis soluções. *Millenium - Revista do Instituto Politécnico de Viseu*, Viseu, n. 29, jun. 2004. Disponível em: <http://www.ipv.pt/millenium/default.htm>. Acesso em: 9 fev. 2013.

HUETE, J. C. S.; BRAVO, J. A. F. *O ensino de matemática*: fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed, 2006. 232 p.

BORDALLO, M. *As cônicas na matemática escolar brasileira*: história, presente e futuro. 2011. 61 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011.