

## La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación

Martín Socas (Universidad de La Laguna)

*Artículo solicitado al autor por la revista*

---

### Resumen

En este trabajo se analizan estudios que se han desarrollado a nivel internacional en Álgebra y las aportaciones de las investigaciones que deben ser consideradas para un mejor desarrollo del currículo de Álgebra: el lenguaje, las múltiples representaciones, la semiótica, los mediadores tecnológicos (calculadoras y ordenadores), la contextualización, las dificultades y los errores, la Pre-Álgebra, el “Early Algebra”, el énfasis en nuevos contenidos: caos (fractales), grafos, etc., la enculturación, los procesos de pensamiento algebraico, el empirismo, las actividades y los proyectos “Open-ended”...

Estas aportaciones se organizan desde cinco perspectivas: la relación entre la Aritmética y el Álgebra: dificultades y errores, las fuentes de significados para el Álgebra, los mediadores tecnológicos, la organización de la enseñanza y la formación del profesorado.

### Palabras clave

Álgebra, aprendizaje y enseñanza, dificultades y errores, desarrollo curricular, educación obligatoria y formación del profesorado.

---

### Abstract

This paper analyzes the studies that have been developed at an international level in Algebra and the contributions of the investigations that should be considered for a better development of the curriculum of Algebra: language, multiple representations, semiotic, technological environments (calculators and computers), context, difficulties and errors, Pre-Algebra, Early Algebra, emphasis in new contents as chaos (fractals), graphs, etc., enculturation, processes of algebraic thought, empiricism, activities and projects "Open-ended"...

These contributions are organized according to the five perspectives: relations between Arithmetic and Algebra as difficulties and errors, sources of algebraic meaning, instruments of technological mediation, organization of teaching and teacher education.

### Keywords

Algebra, learning and teaching, difficulties and errors, curricular development, obligatory education and teacher education.

---

## 1. Introducción

En general la investigación en Álgebra, se ha ocupado de los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de los conceptos y procedimientos algebraicos en el Sistema Educativo y en el medio social.

El Álgebra tiene una gran presencia como contenido matemático en diferentes etapas en el Sistema Educativo, especialmente desde la Secundaria Obligatoria hasta la Universidad, aunque en los últimos veinte años han surgido propuestas de incorporar ciertas cuestiones del Pensamiento algebraico en la Educación Primaria. En este trabajo nos vamos a referir, por ello, a la Educación



Obligatoria, tomando en consideración, tanto los aspectos del Lenguaje algebraico como: las letras con significado algebraico (variables), las expresiones algebraicas, las ecuaciones lineales y cuadráticas, los procesos de pensamiento algebraico y la resolución de problemas, como ciertos aspectos del conocimiento numérico que constituyen la base para la Aritmética Generalizada, es decir, aquellos conocimientos que facilitan la transición del pensamiento numérico al algebraico y que tienen que ver con ideas acerca de los distintos tipos de números y de las relaciones numéricas, en particular las ideas de estructuras y procesos numéricos.

Una revisión de los estudios realizados sobre el Lenguaje algebraico se puede organizar desde ámbitos diferentes, uno sería el que hace referencia a los tres campos por antonomasia de la didáctica: Epistemológico (historia y epistemología), Cognitivo (cognición y aprendizaje) y Didáctico (enseñanza y desarrollo curricular), poniendo el énfasis en algunos de los aspectos más relevantes de los tres ámbitos; otro puede ser tomar en consideración las cuestiones básicas que han incidido más en las investigaciones en Álgebra, en estos últimos treinta años, como por ejemplo: la relación entre la Aritmética y el Álgebra: dificultades y errores, la búsqueda de significados para el Álgebra y la organización de la enseñanza y la formación del profesorado, esta es la consideración que vamos a tomar en este trabajo por su relación más directa con el desarrollo curricular en Álgebra.

La organización del trabajo para su presentación se realiza en torno a las siguientes cuestiones: investigaciones en Pensamiento Algebraico, aportaciones de la investigación al desarrollo curricular en Álgebra y consideraciones finales sobre el Pensamiento Algebraico.

## 2. Investigaciones en Pensamiento Algebraico

A grandes rasgos, sin la intención de ser exhaustivos, se puede decir que a nivel internacional las investigaciones en Pensamiento Algebraico, se han orientado en estos últimos treinta años:

- Al análisis de las características esenciales del Pensamiento Algebraico, niveles de organización y problemas que ocasionan en la enseñanza y en el aprendizaje.
- La descripción y estudio de respuestas y procesos de solución de estudiantes y profesores en tareas específicas en Pensamiento Algebraico.

Diferentes trabajos como los de Wagner y Kieran (1989), Kieran y Filloy (1989), Socas y otros (1989), Kieran (1992, 2006, 2007), Rojano (1994), Bednarz, Kieran y Lee (1996), Palarea (1998), Socas (1999), Socas y otros (2007), muestran que la investigación en Pensamiento Algebraico trata de encontrar soluciones a preguntas como: ¿Qué pueden hacer y qué no pueden hacer los estudiantes y los profesores en los distintos ciclos o niveles del sistema educativo en Pensamiento Algebraico?

Si tomamos como referencia los contenidos tratados podemos agrupar estas investigaciones en tres grandes núcleos:

1. La transición del Pensamiento Numérico al Algebraico, analizando los aspectos del primero que son la base para los conocimientos de la Aritmética Generalizada.
2. Los procesos específicos del Pensamiento Algebraico como la sustitución formal, la generalización y la modelización.
3. La búsqueda de propuestas que mejoren la enseñanza y aprendizaje del Álgebra en la Educación Secundaria.

Una visión general sobre las investigaciones en Pensamiento algebraico en la Educación Obligatoria se puede extraer de los siguientes trabajos:

Wagner y Kieran (1989), nos aportan un primer documento que presenta gran parte de los resultados de las investigaciones en Álgebra hasta la década de los ochenta, señalando perspectivas de investigación en Álgebra. Este trabajo coordinado por Wagner y Kieran constituye de hecho "Una agenda para la investigación del aprendizaje y la enseñanza del Álgebra". Las perspectivas investigadoras en Álgebra presentadas en la agenda se basaron en: contenido, aprendizaje, enseñanza, pensamiento algebraico, afectividad, representación, tecnología, desarrollo curricular, evaluación y formación del profesor.

Kieran y Filloy (1989), describen algunas de las contribuciones más significativas de la investigación sobre procesos cognitivos implicados en el aprendizaje del Álgebra escolar hasta finales de los ochenta, entre las que cabe destacar el marco aritmético de referencia. Estas aportaciones ponen de manifiesto la presencia de un cuerpo creciente de conocimientos sobre los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje del Álgebra de Secundaria (variables, expresiones y ecuaciones, resolución de ecuaciones y funciones y gráficas).

En el marco de las consideraciones teóricas, señalan la falta de modelos teóricos paradigmáticos (en el sentido de Kuhn, 1962) en la investigación del Álgebra, y centran su atención en los fenómenos didácticos cuyas causas puedan atribuirse a la materia matemática implicada en el proceso de enseñanza-aprendizaje del lenguaje algebraico. Ponen de manifiesto que entre las nuevas tendencias en Pensamiento Algebraico destacan la influencia de la lingüística y la teoría del procesamiento de la información, como disciplinas relacionadas con la Didáctica de la Matemática. La psicolingüística y la inteligencia artificial permiten delimitar un modelo procesual de las habilidades humanas que explica la aparición de errores en los procedimientos sintácticos de los usuarios del lenguaje algebraico. También prestan atención al significado, con preferencia al abstracto, que ha proporcionado un punto de vista pragmático, y ha conducido a un cambio de dirección en el interior del trabajo en Álgebra que se aparta de la "competencia" y va hacia la "actuación" del usuario del lenguaje algebraico. Se pretende que la gramática - el sistema formal abstracto del Álgebra- y la pragmática- principios del uso del lenguaje algebraico- sean dominios complementarios en el estudio de la psicología del aprendizaje del Álgebra.

Kieran (1992), presenta un documento sobre las investigaciones en Álgebra, en el que realiza un análisis histórico del Álgebra, una descripción del contenido del Álgebra escolar, una reflexión y discusión de las demandas psicológicas hechas sobre el aprendizaje de Álgebra por el contenido matemático, y una descripción breve del panorama de la perspectiva de enseñanza. En su informe adopta una perspectiva histórica/epistemológica y hace una revisión y reconceptualización de gran parte de las investigaciones existentes en Álgebra en términos de un modelo que llama "experimental-estructural", y lo propone como marco en el que analiza y trata de comprender mejor las dificultades que los estudiantes tienen al aprender el Álgebra y los problemas de su enseñanza.

Este análisis histórico del desarrollo del simbolismo algebraico y sus reglas de transformación le permite hacer distinción entre: usar letras para representar incógnitas, en resolución de ecuaciones; usar letras para representar datos, expresando soluciones generales, y usar letras como herramienta para proveer reglas que expresen las relaciones numéricas, que surgen en Lenguaje Algebraico en momentos históricos diferentes.

Parte de los procesos cognitivos implicados en el aprendizaje del Álgebra escolar tiene sus raíces en el desarrollo histórico del Álgebra como un sistema simbólico. La invención de Viète de una notación extremadamente condensada, permitió al Álgebra ser más que una herramienta procedimental. Permitted asimismo que las formas simbólicas fueran usadas estructuralmente como objetos. Los desarrollos estructurales en Álgebra durante ciento cincuenta años han provocado un considerable impacto, no solamente sobre el modo en que es percibida el Álgebra por los algebraistas, sino también sobre el modo en que es presentada en los textos escolares.



El análisis histórico permite ver el desarrollo del Álgebra como un ciclo de evolución procedimental-estructural. De un modo similar, el estudio del Álgebra escolar puede ser interpretado como una serie de adaptaciones proceso-objeto (por ejemplo procedimental-estructural) que los estudiantes deberían asumir para llegar a comprender el aspecto estructural del Álgebra.

Este marco de análisis permite según Kieran comprender mejor las dificultades que los estudiantes tienen al aprender Álgebra. Propone además que los estudios pongan el énfasis en el análisis de la instrucción en el aula, creando bases sólidas para desarrollar concepciones estructurales del Álgebra por encima de concepciones procedimentales. La misma atención dada a este planteamiento tendría que prestarse a los libros de texto.

Podemos decir que las investigaciones desarrolladas en Pensamiento Algebraico las referencias a consideraciones históricas y el análisis epistemológico es algo inherente a las mismas. Se acepta como punto de partida que la discusión histórica y el análisis epistemológico del pensamiento algebraico juegan un papel esencial a la hora de determinar los procesos de enseñanza y aprendizaje del Álgebra escolar.

Bednarz, Kieran y Lee (1996), ofrecen a través de diferentes autores un análisis y reflexión desde el punto de vista de la investigación sobre las distintas vías de introducción del Álgebra en el ámbito escolar. Las aproximaciones que se tratan en el libro son: la generalización de patrones numéricos y geométricos y de las leyes que gobiernan las relaciones numéricas; la resolución de problemas, la modelización de fenómenos físicos y matemáticos y la introducción de problemas funcionales.

Kieran (2006), aporta un amplio resumen de los trabajos de investigación llevados a cabo por los investigadores en Álgebra del “International Group of the Psychology of Mathematics Education” (PME). El grupo tiene como objetivo inicial caracterizar los cambios que se han producido en el Pensamiento Algebraico y el papel que juega el simbolismo en este cambio. Kieran organiza en tres grandes núcleos los trabajos realizados en los treinta años de historia:

- Transición de la Aritmética al Álgebra, variables e incógnitas, ecuaciones y resolución de ecuaciones, y planteamiento y resolución de problemas verbales de álgebra (desde el principio hasta la actualidad).
- Uso de herramientas tecnológicas, representaciones múltiples y proceso de generalización (desde la década de los 80 hasta la actualidad).
- El pensamiento algebraico en los estudiantes de la escuela elemental, la enseñanza-aprendizaje del Álgebra y la modelización dinámica de situaciones físicas y en entornos algebraicos (desde los noventa hasta la actualidad).

Kieran (2007), aporta un nuevo trabajo en el que hace una revisión de la enseñanza y el aprendizaje del Álgebra en la Educación Secundaria, mostrando formas de construir significados para los símbolos algebraicos y para su manipulación. Parte de unas breves referencias a los principales problemas de la enseñanza y el aprendizaje del Álgebra en la Educación Secundaria, centrándose, especialmente, en las diferentes fuentes de significado para el Lenguaje algebraico en esta etapa educativa. La parte central de este trabajo lo dedica a analizar actividades e investigaciones sobre el Álgebra y distingue: la secundaria obligatoria y la secundaria no obligatoria y primer año de universidad. El análisis de estos trabajos lo hace mediante el Modelo de conceptualización de las actividades algebraicas (GTG), que había propuesto en Kieran (1996), al desarrollar la idea del “Álgebra como actividad”. Este modelo sintetiza las actividades algebraicas en tres tipos: “Generational”, “Transformational” y “Global/Meta-Level”.

En el caso de la secundaria obligatoria, las actividades de tipo “Generational” las organiza sobre: variables, expresiones y ecuaciones, el signo menos y los números negativos, el sentido de estructura (inicio); múltiples representaciones y conexiones; y problemas verbales que implican múltiples representaciones o planteamiento y resolución de ecuaciones. Las actividades de tipo “Transformational”, supone en el alumno el reconocimiento de equivalencias y cierto control teórico del proceso y analiza las expresiones, las ecuaciones y la resolución de ecuaciones y el uso de materiales manipulativos. Las actividades de tipo “Global/Meta-Level”, supone el uso del Álgebra como herramienta, y analiza la generalización, las pruebas y la demostración, y la medelización, en este caso analiza el impacto de la tecnología.

En relación con la secundaria no obligatoria y primer año de universidad el estudio lo realiza en el mismo sentido.

La parte final del capítulo lo dedica a analizar la enseñanza del Álgebra y al profesor de Álgebra, tomando en consideración cuestiones como las implicaciones de la investigación en las prácticas del profesor de Álgebra, conocimiento y creencias de los profesores de Álgebra, o la integración de nuevos aspectos en el currículo del Álgebra en esta etapa educativa.

Carraher y Schliemann (2007), realizan una amplia revisión sobre un foco reciente de investigación en Educación Matemática: el razonamiento algebraico de los alumnos de 6 a 12 años, para apostar por esta corriente de investigación y fundamentar en ella que el Álgebra tiene un lugar en el currículo de la Educación Primaria. Esta corriente se denomina “Early Algebra” y abarca tanto el razonamiento algebraico como las relaciones algebraicas, con alumnos de Educación Primaria.

Comienzan con una introducción al razonamiento algebraico para pasar a analizar este foco de investigación sobre el razonamiento algebraico en la Educación Primaria. Señalan dos sucesos decisivos en los Estados Unidos para el desarrollo de este enfoque de investigación: las publicaciones del “The National Council of Teachers of Mathematics” (NCTM, 1989 y 2000) y el informe del Panel de investigación y desarrollo de la Corporación RAND sobre Álgebra en K-12 (RAND Mathematics Study Panel, 2003), y determina cinco cuestiones problemáticas como fundamentales: las relaciones entre la Aritmética y el Álgebra, la dualidad proceso/objeto en Álgebra, el papel referencial del Álgebra en las Matemáticas y las representaciones simbólicas del Álgebra en los dos sentidos: formal y no formal. Presenta a continuación una explicación detallada del desarrollo de “Early Algebra”, no si antes comparar la “Early Algebra” con la propuesta conocida como Pre-Álgebra.

La idea central que sugieren es que la “Early Algebra” enriquece la enseñanza tradicional de las matemáticas, en los diferentes niveles educativos, facilitando a los alumnos un desarrollo adecuado del Pensamiento algebraico, de esta manera se puede organizar la enseñanza de la Aritmética y del Álgebra evitando saltos, rupturas y cortes didácticos entre ambas; y establecen tres puntos básicos para comenzar con “Early Algebra”: Aritmética y razonamiento numérico, Aritmética y razonamiento cuantitativo, Aritmética y funciones.

Aporta el documento un breve análisis sobre diferentes aspectos en los que hay controversia entre los distintos autores, por ejemplo, entre otros señala: ¿qué tareas y formas de aprendizaje son algebraicas y cuáles no?, ¿qué tipo de evidencias se necesitan para evaluar la presencia de pensamiento algebraico?, ¿qué enfoques pedagógicos son adecuados para desarrollar la “Early Algebra” en la Educación Primaria?, o ¿qué tipo de formación de profesores debe promoverse?

Como hemos indicado en la introducción caben diferentes propuestas para organizar la revisión las investigaciones en pensamiento algebraico, pero todas ellas pueden analizarse desde los tres grandes ámbitos: Epistemológico (historia y epistemología), Cognitivo (cognición y aprendizaje) y





Didáctico (enseñanza y desarrollo curricular), y los que encontramos diferentes estudios desde enfoques diferentes, pero en todos ellos se identifican factores significativos que afectan a la enseñanza y aprendizaje del Álgebra; y que están dirigidos, especialmente, a determinar, por una parte, los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje de la misma, en los que se pueden diferenciar dos grandes bloques: los procesos cognitivos que se derivan de considerar la aritmética como fundamento del álgebra y los procesos específicos del pensamiento algebraico, y por otra, los intentos continuados de los investigadores en desarrollar una teoría de la enseñanza y aprendizaje del Álgebra. Entre estos enfoques sobresalen: la historia, la epistemología, la psicología cognitiva, el lenguaje, la semiótica, las calculadoras, los ordenadores, la enseñanza, el desarrollo curricular..., ámbitos que se intersectan, obviamente, en los diferentes trabajos de investigación. Ahora bien, ha sido el ámbito cognitivo el que ha tenido un papel preponderante en las diferentes investigaciones en Pensamiento Algebraico y constituye el común denominador de casi todas ellas (Socas, 1999; Socas y otros, 2007).

### 3. Aportaciones de las investigaciones al desarrollo curricular en Álgebra

Queremos tomar en consideración, ahora, aquellos aspectos más sobresalientes de las investigaciones en Álgebra que han incidido con mayor profusión en el desarrollo del currículo del Álgebra en la Educación Obligatoria. El estudio de estas aportaciones al currículo nos permitirá mostrar también una revisión de las investigaciones en Álgebra. Este estudio lo presentaremos analizando: la relación entre la Aritmética y el Álgebra: dificultades y errores; la búsqueda de significados para el Álgebra; los mediadores tecnológicos; la organización de la enseñanza y la formación del profesorado, que no son compartimentos estancos y tienen muchos puntos en común en los diferentes trabajos.

#### 3.1 Relación entre la Aritmética y el Álgebra: dificultades y errores

La transición de la Aritmética al Álgebra, ha sido y es un tema de investigación permanente, por ejemplo, ha sido desde el principio y lo es en la actualidad uno de los núcleos de trabajo del grupo de investigadores en Álgebra del PME (Kieran, 2006).

Hemos de señalar que esta transición ha sido abordada, en un primer momento, tratando de entender la relación entre la Aritmética y el Álgebra, para poner énfasis más tarde en aquellos aspectos de esta relación que pueden mejorar la transición, ello ha originado en el desarrollo curricular dos propuestas: Pre-Álgebra y "Early Algebra", condicionadas, entre otras cuestiones, por los resultados obtenidos en las investigaciones desarrolladas sobre las dificultades y errores en la enseñanza y aprendizaje de la Aritmética y el Álgebra.

#### *Dificultades y errores*

Las dificultades y los errores en el aprendizaje de las Matemáticas han sido y son hoy un foco de estudio e investigación en Educación Matemática, en el que a pesar de su antigüedad, de los resultados obtenidos y de los esquemas teóricos utilizados para interpretar esos resultados, hay cuestiones importantes aún no resueltas.

En el estudio de las dificultades y errores podemos distinguir, a grandes rasgos, tres etapas. En una primera etapa la investigación consistía, prioritariamente, en hacer recuentos del número de soluciones incorrectas a una variedad de situaciones problemáticas y en hacer un análisis de los tipos de errores detectados, para proceder a una clasificación que permita examinar cómo éstos surgen a partir de la solución correcta, y, hacer inferencias sobre qué factores, especialmente del contenido matemático, pueden haber conducido al error, Radatz (1980), Rico (1995).

En una segunda etapa, a partir, aproximadamente, de la década de los ochenta, se toma conciencia de que el error es algo normal en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Ello supone indagar sobre los errores, no únicamente desde cuestionarios generales, sino, además, profundizar en el mismo proceso de construcción de los objetos matemáticos por parte de los alumnos como recurso para saber en que están pensando. Por ejemplo en Brousseau, Davis, y Werner (1986), se describe que: los errores que cometen los alumnos muestran, en algunos casos, un patrón consistente; los alumnos tienen con frecuencia concepciones inadecuadas (“misconceptions”) sobre los objetos matemáticos; a veces, estas concepciones inadecuadas los conducen a usar procedimientos equivocados que no son reconocidos como tales por sus profesores; llegan a utilizar, en algunos casos, métodos propios ignorando el método propuesto por el profesor. Esto les lleva a señalar posibles caminos en los que el error puede presentarse: los errores como consecuencia de concepciones inadecuadas, los errores como la aplicación correcta de un procedimiento sistematizado que es inapropiado, los errores como consecuencia del uso de métodos propios del estudiante, en general informales, entre otros. Esta segunda etapa se caracteriza por reconocer que los errores son también producto de otras variables del proceso educativo: profesorado, currículo, contexto (sociocultura, institucional)..., y de sus interacciones, Mulhern (1989), lo que pone de manifiesto la complejidad para analizar los errores en el aprendizaje de las Matemáticas, y la necesidad de tener marcos teóricos para el análisis y la explicación de los mismos, como señalaba Radatz (1979).

De estos estudios sobre el análisis, clasificación y causas de los errores, podemos señalar, varias cuestiones: en primer lugar, que algunas investigaciones ponen de manifiesto la categorización de los errores fundamentándose, exclusivamente en el conocimiento matemático; en segundo lugar, que en las investigaciones que combinan resultados empíricos con algunos supuestos sobre las estructuras mentales y ciertas leyes generales del procesamiento humano de la información, es posible predecir algunos patrones comunes de los errores, es decir, que las interpretaciones que toman como base teórica algunos principios del procesamiento de la información ofrecen versiones más completas de las clasificaciones de los errores; en tercer lugar, que a partir de estos informes sobre la clasificación de los errores y su frecuencia, desafortunadamente, no se puede explicar su origen y en consecuencia no podemos aportar un trato sistemático a los mismos.

El Lenguaje algebraico no es ajeno a este proceso de estudio, una parte destacada de los estudios cognitivos en lenguaje algebraico se organizan en torno al análisis de las dificultades y errores en Álgebra (Matz, 1980; Kücheman, 1981; Wagner, Rachlin, y Jensen, 1984; Booth, 1984, 1988; Kieran, 1992, 2006, 2007; Socas, 1997, 2001, 2007; Palarea, 1998; Ruano, Socas y Palarea, 2003).

El proyecto SESM sobre estrategias y errores en las Matemáticas de Secundaria, llevado a cabo en el Reino Unido entre 1980 y 1983, trataba de explicar no sólo los errores que cometen comúnmente los estudiantes sino de explicar las razones de estos errores. Los resultados del grupo de Álgebra, entendida esta como aritmética generalizada se describen en Booth (1984); o el Proyecto sobre Aprendizaje del Álgebra, de mediados de los ochenta, descrito en Wagner, Rachlin, y Jensen (1984), en el que uno de los objetivos fue identificar las dificultades que los estudiantes tenían en la resolución de ecuaciones estándares y no estándares. Dos de los ejercicios fueron diseñados para probar la creencia de los estudiantes de que la solución de una ecuación está determinada por la estructura superficial de la misma y no por los símbolos usados para representar la variable, son buenos ejemplos de los estudios sobre dificultades y errores en la década de los ochenta.

En los últimos años, tercera etapa, encontramos estudios en los que se abordan globalmente las dificultades y errores que se dan en el aprendizaje del lenguaje algebraico en la Educación Secundaria, es el caso del grupo de Álgebra de la Universidad de La Laguna (España), en la que la propuesta de trabajo se aborda no sólo un análisis y clasificación de los errores que cometen alumnos de secundaria de forma global considerando todos los aspectos del Lenguaje algebraico: operaciones, estructuras y



procesos (sustitución formal, generalización y modelización), sino que se estudia en un marco teórico denominado Enfoque Lógico Semiótico (ELOS), los orígenes de los mismos, lo que permite arbitrar procedimientos que ayudan a los alumnos a corregir sus errores (Socas, 1997, 2001, 2007; Palarea, 1998; Palarea y Socas 1995 y 1998; Socas y Palarea (1996 y 1997; Ruano, Socas y Palarea, 2003).

Las dificultades son organizadas en cinco grandes categorías que permite describir la procedencia de estas dificultades, dos asociadas a la propia disciplina, complejidad de los objetos de las Matemáticas y procesos de pensamiento matemático, una tercera relacionada con los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las Matemáticas, la cuarta está asociada a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos, y la quinta está asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas. Los errores se analizan desde tres ejes, no disjuntos, que permiten estudiar el origen del error. De esta forma se sitúan los errores que cometen los alumnos en relación con tres orígenes distintos: Obstáculo (cognitivos, didácticos y epistemológicos), Ausencia de sentido (semiótico, estructural y autónomo) y Actitudes afectivas (emociones, actitudes y creencias) (Socas, 1997, 2001 y 2007).

El panorama investigador reflejaba en los años noventa una insatisfacción generalizada sobre las formas tradicionales de la enseñanza del Álgebra, dadas las dificultades y errores que tenían los alumnos, a la vez que se manifestaba un reconocimiento sobre la importancia del papel esencial del Álgebra en las Matemáticas y el de las capacidades y hábitos mentales que desarrollaba. Esta crítica generalizada se concretaba en: gran fracaso de los estudiantes que les hace abandonar los estudios en Matemáticas, ausencia de significado en el aprendizaje de los estudiantes y escasa conexión entre el Álgebra y los otros bloques de contenidos matemáticos (Booth, 1988, Kaput, 1995).

Ello generó una preocupación por hacer del Álgebra un estudio accesible a todos los estudiantes. Esta preocupación, que aún hoy perdura en los investigadores, ha llevado a buscar formas más efectivas que las tradicionales para abordar con garantías la enseñanza del Álgebra.

Igualmente, como indicábamos anteriormente, las investigaciones realizadas en Pensamiento algebraico ponían de manifiesto que la Aritmética es primordial para acceder al Álgebra. Ahora bien, la búsqueda de esta relación entre la Aritmética y el Álgebra nos ha llevado a dos posiciones diferentes.

Una la podemos ilustrar tomando como referencia el trabajo de Drijvers y Hendrikus (2003), entre otros autores, en la que el Álgebra tiene sus raíces en la Aritmética y depende fuertemente de su fundamentación Aritmética, puesto que la Aritmética tiene muchas oportunidades para simbolizar, generalizar y razonar algebraicamente.

La otra posición sugiere que se debe promover en la Educación Primaria el desarrollo de los aspectos algebraicos que ya posee el pensamiento de los niños, o bien, que debemos fomentar cambios en la forma de pensar de los niños que les conduzca al pensamiento algebraico y que estos pueden ser promovidos mediante el uso de ciertas herramientas, como notaciones, diagramas o gráficos que impliquen un nivel más elevado de generalidad desde la Educación Primaria (Lins y Kaput, 2004).

Estas posiciones han generado dos propuestas conocidas como Pre-Álgebra y “Early Algebra”, respectivamente.

### *Pre-Álgebra*

Muchas de las investigaciones realizadas durante las décadas de los 80 y 90 centradas en el análisis de las dificultades y errores de los alumnos en Álgebra que tomaban en cuenta los estadios de



desarrollo de los alumnos contribuyeron a mantener que los estudios formales del Álgebra era mejor dejarlos para los últimos cursos de la Educación Obligatoria. Igualmente, las investigaciones, mostraban que la perspectiva del Álgebra como Aritmética generalizada era insuficiente para desarrollar en los alumnos un pensamiento algebraico adecuado y que el uso de nuevas fuentes de significados, como las nuevas tecnologías facilitaban entornos de enseñanza aprendizaje del Álgebra que aportaban concepciones diferentes de la misma.

El enfoque de Pre-Álgebra se apoya, en dos hechos esenciales. Uno, es la concepción de que el Álgebra está presente cuando se hace uso del simbolismo algebraico, pero en el que la noción del simbolismo algebraico es una concepción mucho más amplia y va más allá de las escrituras formales de la Aritmética generalizada (Sutherland et al., 2001; Drijvers y Hendrikus, 2003). Dos, en la validez de las propuestas de organización de los estadios de desarrollo cognitivos en la que el Álgebra ocupa el estadio de desarrollo formal (Collis, 1974), y en consecuencia se considera fuera de las capacidades cognitivas de los alumnos en los primeros años de la Educación Primaria. Varias investigaciones han puesto de manifiesto ciertos cortes didácticos o rupturas cognitivas entre el pensamiento aritmético y el algebraico, son por ejemplo, los casos de Filloy y Rojano (1989) o de Herscovics y Linchevski (1994), entre otros. Estas rupturas o cortes didácticos encontrados en la Psicogénesis se han determinado también en la Psociogénesis (Piaget y García, 1982), es decir, en el aprendizaje de los alumnos encontramos ciertas incapacidades para operar espontáneamente con variables al igual que las encontramos en la evolución histórica del Álgebra.

En este sentido, diferentes investigaciones han puesto de manifiesto estas dificultades y errores, generados por estas rupturas o cortes didácticos, como las relacionadas con la limitada interpretación del signo igual en Aritmética, las concepciones erróneas de los alumnos sobre el significado de las letras utilizadas como variables, el rechazo de expresiones no numéricas como respuestas a un problema, la no aceptación de la falta de clausura o la operatividad con las incógnitas... se han considerado como inherentes al aspecto más abstracto del Álgebra y a limitaciones en el desarrollo cognitivo de los alumnos de edades más tempranas (Herscovics y Kieran, 1980; Kuchemann, 1981; Booth, 1984; Filloy y Rojano, 1989; Kieran, 1989 y 1992).

Igualmente, diferentes investigaciones, por ejemplo, desde la década de los 70 y principio de los 80 ponían de manifiesto que el Álgebra podía proveer a los alumnos muchas oportunidades para la resolución de problemas y para el desarrollo de la creatividad, la originalidad y una comprensión profunda de las Matemáticas (Davis, 1985).

También desde la década de los ochenta diferentes autores, como por ejemplo Davis (1985) o Vergnaud (1988), argumentaban la necesidad de iniciar una enseñanza del Álgebra, desde la Educación Primaria, que preparase a los alumnos para abordar los aspectos epistemológicos involucrados en la transición de la Aritmética al Álgebra que se daban en la Secundaria. No eran propuestas para hacer un desarrollo de los aspectos formales del Álgebra sino una preparación en términos de los que hoy denominamos Pre-Álgebra.

Esto genera un campo de investigación sobre la búsqueda de actividades que se denominaron pre-algebraicas y que se situaban en los últimos años de la Educación Primaria. Estas actividades pre-algebraicas, están relacionadas con el planteamiento y la resolución de ecuaciones, aproximaciones a la generalización, patrones numéricos y geométricos, variables y funciones. Debemos decir que las actividades sobre variables y funciones han estado, en general, asociadas a las computadoras.

Un hecho relevante lo constituye la opción de los Estándares de la NCTM (1989), que sugiere adelantar la introducción del Álgebra, como una generalización de la Aritmética, en los dos últimos cursos de Educación Primaria, y aporta una concepción más amplia del Álgebra, poniendo énfasis en actividades que provoquen el desarrollo de interpretaciones procedimentales y, que a su vez expliciten



la transición de las concepciones procedimentales a las estructurales. Apuesta, inicialmente, por un acercamiento Pre-Álgebraico para los últimos cursos de Educación Primaria, Estándares 8 y 9: Patrones y funciones, y Álgebra, respectivamente, para los niveles de quinto a octavo. En este acercamiento al Álgebra la tecnología se propone también como muy un mediador muy interesante (Kaput, 1989).

Diferentes han sido las propuestas de trabajo en Pre-Álgebra, un buen ejemplo, aparte de las consideraciones del NCTM (1989), es el Proyecto “ArAl Project” (Malara y Navarra, 2003), sobre la búsqueda de caminos aritméticos que favorecen el pensamiento Pre-Álgebraico.

### *Early Algebra*

Como ya hemos indicado “Early Algebra” es una propuesta de cambio curricular que propone introducir el Álgebra desde la Educación Primaria integrada en los otros bloques de contenido matemático de esta Etapa. Emerge como consecuencia de diversas investigaciones que se han desarrollado en la última década (Bastable y Schifter, 2007; Carraher y Schliemann, 2007; Kaput, 1998, 2000).

De manera concreta, se propone incorporar a las aulas de Educación Primaria actividades dirigidas a la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas para de este modo desarrollar competencias propias del Álgebra. Tal y como señalan Blanton y Kaput (2005) son actividades que generan un ambiente de trabajo en Matemáticas en la que los alumnos exploran, modelizan situaciones, hacen predicciones, discuten, argumentan y comprueban ideas además de practicar habilidades de cálculo. En definitiva, se trata de desarrollar simultáneamente el pensamiento numérico y el algebraico desde la Educación Primaria, con la finalidad de desarrollar un aprendizaje con comprensión que facilite el estudio posterior del Álgebra en la Educación Secundaria.

En sentido amplio la expresión “Early Algebra” considera el Álgebra en una concepción amplia que abarca el estudio y generalización de patrones y relaciones numéricas, el estudio de relaciones funcionales, el desarrollo y la manipulación del simbolismo, el estudio de estructuras abstraídas de cálculos y relaciones, y la modelización (Kaput, 1998, 2000; Schliemann, et al., 2003), comprende en definitiva la instrucción a alumnos de 6 a 12 años tanto del razonamiento algebraico como de las relaciones algebraicas.

Veamos algunos antecedentes. A finales de los ochenta, encontramos autores que ponen de manifiesto que los alumnos pueden resolver problemas de Álgebra antes de conocer el uso de la notación algebraica, y los estudiantes pueden trabajar con variables y las reglas de la aritmética antes de tener un pensamiento algebraico (Harper, 1987).

A finales de los noventa se comienza a aportar evidencias de que en ciertas condiciones de trabajo los alumnos desde muy jóvenes pueden hacer mucho más en Matemáticas de lo que se les suponía previamente. De esta manera, se observa que ciertas actividades matemáticas que implicaban modos de pensamiento más elevados podían ser resueltas por los alumnos con el apoyo o no de la tecnología (Lins y Kaput, 2004). En el caso del Álgebra, además, se tiene conciencia de que el pensamiento involucrado en la actividad algebraica incorpora significados nuevos y más amplios que los desarrollados para la Aritmética y que estos necesitan de un periodo prolongado de tiempo para consolidarse cognitivamente.

Estas ideas toman cuerpo en forma de directrices para los diseños del Currículo de Matemáticas de Educación Primaria y tiene su mayor auge en los comienzos del siglo XXI, asociada a los resultados de estas investigaciones, pero de manera especial, a la recomendación del NCTM (2000),

de que el desarrollo del pensamiento algebraico sea abordado desde los primeros años de escolarización.

Más recientemente algunas investigaciones sitúan el origen de las dificultades y errores en Álgebra en el tipo de enseñanza recibida, al menos en ciertos contenidos y modos de pensamiento algebraicos, tratando de mostrar de paso que los alumnos de Educación Primaria poseen ciertas capacidades para comprender nociones algebraicas elementales y utilizar modos de pensamiento algebraicos en el desarrollo de ciertas actividades algebraicas (Blanton y Kaput, 2005; Carpenter et al., 2003; Carraher y Schliemann, 2007; Kaput, 2000).

No obstante, aunque el comienzo de esta propuesta es reciente, su origen lo encontramos en la Escuela Soviética en la década de los cincuenta, en la que se hace patente la posición de (Vygotsky, 1973), en relación con la interacción social, los procesos de interiorización y la “Zona de Desarrollo Próximo”, para poner de manifiesto que el aprendizaje precede al desarrollo (Davydov, 1962 y 1991; Freudenthal, 1974). En Davydov (1991) encontramos trabajos que nos muestran como los estudiantes de Educación Primaria pueden utilizar la notación y técnicas algebraicas por ellos mismos; por ejemplo, en Bodanskii (1991) se muestran resultados en la que los estudiantes de Educación Primaria aprenden a representar y a encontrar correctamente el valor numérico de la incógnita en problemas de ecuaciones de primer grado. Más recientemente, Dougherty (2007) ha implementado en Estados Unidos ideas de los trabajos de Davydov. Los resultados descritos por Dougherty sugieren que el enfoque con cantidades numéricas o de magnitudes es provechoso como un camino hacia el desarrollo del Pensamiento algebraico, incluso con alumnos muy jóvenes.

Podemos decir, que la propuesta de adelantar a la Educación Primaria el desarrollo de ciertos aspectos del pensamiento algebraico, tales como la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas, es para unos autores consecuencia de que éstos son aspectos propios del pensamiento de los niños y, para otros, porque estos cambios de pensamiento, muy útiles en las maneras de pensar matemáticamente, pueden ser desarrollados utilizando herramientas tales como notaciones o diagramas que permiten actuar a los alumnos en un nivel mayor de generalidad y pueden ser promovidos en el contexto aritmético propio de esta Etapa Educativa (Lins y Kaput, 2004).

Hacemos ahora algunas consideraciones sobre estas dos propuestas. “Early-Algebra”, sugiere un aprendizaje con comprensión de las Matemáticas que facilite el aprendizaje del Álgebra. En este sentido no hay diferencia con la propuesta que se hace desde Pre-Álgebra. “Early-Algebra” considera también que ciertos modos de pensamiento algebraicos pueden emerger con naturalidad de las matemáticas del currículo de la Educación Primaria, enriqueciendo las matemáticas de esta etapa y facilitando el desarrollo conceptual de matemáticas más profundas en esta etapa. Ahora bien la propuesta no caracteriza cuáles son esos modos de pensamiento algebraico y cuando describe alguno de ellos son en realidad modos de pensamiento numérico.

En ambos casos las propuestas Pre-Álgebra y “Early-Algebra”, son enfoques relacionados con la enseñanza y aprendizaje de ciertos aspectos de las Matemáticas antes de la enseñanza formal del Álgebra, pero que presentan diferencias significativas. Mientras la finalidad de Pre-Álgebra es facilitar la transición de la Aritmética al Álgebra, dadas las dificultades y los errores que tienen los alumnos en Álgebra, como consecuencia de un tratamiento insuficiente de lo aritmético y lo numérico en la Educación Primaria, “Early-Algebra” apuesta por incorporar modos de pensamiento algebraico al desarrollo curricular de Educación Primaria como parte integrante del pensamiento matemático de esta etapa educativa.

La supuesta visión más amplia del Álgebra que se formula en “Early-Algebra”, se ha ido desarrollando en estos últimos treinta años, y es considerada también en la propuesta de Pre-Álgebra (Usiskin, 1988; Socas y otros, 1989; Bednarz, et al, 1996; Drijvers y Hendrikus, 2003), y han



propiciado diferentes enfoques, a lo largo de estos años. Estos enfoques han tomado como punto de partida ciertos aspectos del Álgebra para llegar al Pensamiento algebraico: resolución de clases específicas de problemas, el estudio de estructuras algebraicas, las reglas para la transformación y resolución de ecuaciones, la generalización de leyes de los conjuntos numéricos o la introducción del concepto de variable y de función (Bednarz et al., 1996).

Desde el punto de vista curricular si podemos decir que la diferencia es significativa, para Pre-Álgebra la enseñanza formal del Álgebra debe comenzar en la Educación Secundaria Obligatoria mientras que para “Early-Algebra” debe comenzar en la Educación Primaria (Carraher y Schliemann, 2007). Y también que la propuesta de “Early-Algebra” genera controversia, como hemos indicado, con algunos resultados obtenidos en Álgebra en la década de los ochenta y noventa que sugerían posponer el estudio del Álgebra para los últimos cursos escolares, al ponerse de manifiesto en diferentes investigaciones ciertos cortes didácticos o rupturas cognitivas entre el pensamiento aritmético y el algebraico.

También conviene tener en cuenta que en la misma propuesta de “Early Algebra” nos encontramos con dos posiciones que son relevantes. Unos, sugieren que el Pensamiento algebraico está explícito en la Aritmética, es decir, ésta necesita del pensamiento algebraico y por tanto es difícil hacer Aritmética sin Álgebra, en consecuencia, se debe promover en la Educación Primaria el desarrollo de los aspectos algebraicos que ya posee el pensamiento de los niños (Hewitt, 1998; Mason, et al 2005). Otros, en cambio, opinan que lo que debemos hacer es fomentar cambios en la forma de pensar de los niños desde la Educación Primaria que les conduzcan al pensamiento algebraico y que estos pueden ser promovidos mediante el uso de ciertas herramientas, como notaciones, diagramas, gráficos o la misma tecnología, que les permitan realizar actividades que impliquen un nivel más elevado de generalidad (Lins y Kaput, 2004).

Hemos de señalar que tanto la orientación de Pre-Álgebra como la “Early Algebra” se encuentran en una fase de desarrollo inicial en los tres ámbitos que caracterizan la Educación Matemática: epistemológico, cognitivo y didáctico. No tenemos respuestas claras sobre qué tareas y formas de aprendizaje son algebraicas y cuáles no, qué tipo de evidencias se necesitan para evaluar la presencia de pensamiento algebraico y qué enfoques pedagógicos y tipo de formación de profesores deben promoverse (Carraher y Schliemann, 2007; Kieran, 2007).

Al no ser conscientes de qué tareas y que aprendizajes son algebraicos y cuáles no, se pone de manifiesto que la pretendida separación entre la Aritmética y el Álgebra no están claramente delimitada en términos epistemológicos, lo que si sabemos es que una posición que potencie únicamente un pensamiento operacional para la Aritmética acentúa y prolonga las dificultades de los alumnos para desarrollar un pensamiento estructural en el Álgebra, y este hecho presente el gran parte de los currículos de la Educación Obligatoria acrecienta la separación entre la Aritmética y el Álgebra que se manifiesta en término de dificultades y errores para los alumnos. Esto ha llevado a las dos orientaciones: Pre-Álgebra y “Early Algebra”, a buscar una transición que integre aspectos del enfoque estructural y que rompa el énfasis en el pensamiento operacional dominante, pero se hace, en ambos casos, desde planteamientos diferentes. Pre-Álgebra, desde los estadios de desarrollos cognitivos del Álgebra, manteniendo el estudio formal del Álgebra en la Educación Secundaria y proponiendo una transición al pensamiento estructural en los últimos años de Educación Primaria, con actividades que minimicen el pensamiento operacional dominante. Por el contrario para “Early Algebra” no cuenta tanto los estadios de desarrollo cognitivo y se sitúa en una interpretación particular de la dualidad proceso/objeto para los objetos aritméticos y algebraicos y propone trabajar con actividades que faciliten la transición e integración de ambas, mediante un enfoque estructural que no potencie el énfasis operacional predominante en los primeros cursos de Educación Primaria y que favorezca el desarrollo de modos de pensamiento algebraicos. El objetivo es en definitiva simultanear y promover el pensamiento algebraico en relación con el aritmético.



Para los propulsores de “Early Algebra”, las distinciones entre Pre-Álgebra y “Early Algebra”, no debe provocar un debate sobre la terminología y mucho menos crear una división entre partidarios o no partidarios de uno u otro enfoque (Carraher y Schliemann, 2007), aunque esto no parece claro que sea así.

Debemos considerar a Pre-Álgebra y a “Early-Algebra como líneas de investigación que buscan información relevante para establecer la relación y a la transición entre la Aritmética y el Álgebra, debido a la variedad de cuestiones que se necesitan explorar. Entre ellas está la determinación del papel que debe jugar la incorporación del Álgebra en el currículo de Educación Primaria y la influencia de este cambio curricular en la enseñanza del Álgebra en la Educación Secundaria. Surgen también en estas propuestas otros campos de investigación que tienen enorme interés y es la necesidad de tomar en consideración la formación inicial y permanente del Profesorado de Educación Primaria en relación con el Lenguaje algebraico, ausente en general en la formación del profesorado de esta etapa educativa en Matemáticas. En Palarea y Socas (2003), se esboza una propuesta de introducción del Álgebra, en términos de Pre-Álgebra en la formación Matemática y Didáctica de los futuros profesores de Educación Primaria con la intención de ayudarles a conocer y reflexionar sobre la relación entre el conocimiento numérico y algebraico y profundizar en el conocimiento didáctico que le facilite su implementación con alumnos de Educación Primaria.

### 3.2 Búsqueda de significados para el Álgebra

La búsqueda de significados para el Álgebra ha sido una constante en los treinta últimos años de investigación en Álgebra y ha estado presente en la mayoría de las investigaciones (Kaput, 1989; Lins, 2001; Kieran, 1992, 2007). Diferentes autores han tratado de identificar las diferentes fuentes de significados para los sistemas de representación semióticos del Álgebra (Kaput, 1987; Socas y Palarea, 1997; Radford, 2004; Kieran, 2007), en todas ellas encontramos fuentes internas asociadas a la propia disciplina: operaciones, estructuras y procesos del Álgebra que implican letras y símbolos y en el planteamiento y resolución de problemas contextualizados. Y fuentes externas, relacionadas con: actividades lingüísticas, metáforas, imágenes, experiencias vividas..., llegando inclusive hasta el lenguaje de los gestos y del cuerpo humano.

En esta búsqueda de significados para el Álgebra, del resultado de las investigaciones en estos últimos treinta años, sobresalen tres cuestiones esenciales: las múltiples representaciones, el planteamiento y la resolución de problemas algebraicos contextualizados y el papel referencial del Álgebra en las Matemáticas

#### *Múltiples representaciones*

La semiótica ha generado un interés reciente en la Educación Matemática, al tomar los investigadores conciencia de que la actividad matemática es esencialmente simbólica y de que los signos son portadores de convenciones y formas culturales de significación que hacen de la semiótica un campo apropiado para entender las relaciones entre los signos a través de los cuales piensan los individuos (Radford, 2006).

Por otra parte las representaciones semióticas y su papel en el aprendizaje de las Matemáticas constituyen una importante línea de investigación (Resnick y Ford, 1981), que se ha desarrollado con profusión en estos últimos treinta años. Entre las razones de su importancia podríamos citar, fundamentalmente, dos: la primera tiene que ver con las propias Matemáticas, en las que las representaciones son algo inherente a ellas, y la otra es de tipo psicológico, ya que las representaciones mejoran notablemente la comprensión en los alumnos (Vega, 1985).





El papel de las Representaciones Semióticas múltiples en la formación de conceptos ha sido destacado por diferentes investigadores; en este sentido, Janvier (1987), Hiebert (1988), Kaput (1987, 1991), Duval (1993, 1995), Rico, Castro y Romero (1996), Palarea y Socas (1995 y 1998), Socas y Palarea (1996), han realizado experimentos y desarrollado aspectos teóricos, con la intención de aclarar los mecanismos de articulación que se dan dentro de un proceso de comprensión del conocimiento matemático.

El uso de Representaciones Semióticas múltiples constituye una recomendación al desarrollo curricular en casi todas las propuestas en términos parecidos a la recomendación de los estándares: Los estudios de Matemáticas deben dar oportunidad a los estudiantes para que puedan modelizar situaciones usando representaciones verbales, concretas, pictóricas, gráficas y algebraicas” (NCTM, 1989, 2000).

### *El planteamiento y la resolución de problemas algebraicos contextualizado*

Las investigaciones resaltan la importancia que adquiere en los procesos de significación y comunicación en Educación Matemática “los ambientes en que se desarrolla la actividad matemática”. Estos resultados se ponen de manifiesto en el diseño instruccional de actividades que pretende cubrir tres aspectos esenciales en el Lenguaje Algebraico: conectar con el conocimiento informal situado de los estudiantes; preparar a los estudiantes para un desarrollo más sofisticado, abstracto, del conocimiento formal del Álgebra, y respetar los principios básicos de la autonomía intelectual del alumnado.

Se ha desarrollado en estos años la tendencia a utilizar como fuentes de significados la resolución de problemas contextualizados para generar y desarrollar en los alumnos el pensamiento algebraico con significado (Arzarello, 1992; Bednarz y Janvier, 1996; Bell, 1996).

Sobresalen en estas propuestas dos tendencias: la de resolución de problemas en ambientes de enculturación y la resolución de problemas como actividades o proyectos “Open-ended”.

Las investigaciones han puesto de manifiesto que la noción de socialización en una comunidad o cultura que resalta los valores de la misma, es central en el desarrollo de hábitos y destrezas y en la construcción de significados en esa cultura. Schoenfeld (1992) llamó “enculturación” a estos valores o formas propias de proceder en la comunidad o cultura matemática. A los alumnos en su trabajo en Matemáticas debe inculcárseles hábitos y actitudes propios de la comunidad como la perseverancia en el trabajo, el interés, la motivación, la flexibilidad, etc. en la resolución de problemas. Las investigaciones sugieren que los currículos deben proponer ambientes de trabajo que resalten el espíritu de búsqueda, de investigación, etc., propios del quehacer matemático.

Se sugiere también la necesidad de incorporar al desarrollo curricular del Álgebra actividades y proyectos “Open-ended”, cuestiones o proyectos de resolución abierta donde el estudiante puede dar una serie de respuestas correctas. Considerándose dentro de los problemas “Open-ended” a una larga clase de problemas abiertos tanto en los datos como en el objetivo, proyectos de trabajos, la mayor parte de problemas de la vida real, el planteo de problemas a partir de unos datos, etc. Situaciones en las que se insiste más en el proceso que en la solución. Sin embargo cabe resaltar que las actividades y proyectos “Open-ended” presentan cierta complejidad a la hora de evaluar al tener que escoger entre los diversos caminos antes que en las soluciones mismas. Aparecen de este modo aspectos como “la fluidez” entendida como el número correcto de diferentes respuestas o aproximaciones a la resolución del problema; “la originalidad” entendida como presentaciones “poco comunes” de la actividad; o “la flexibilidad” entendida como el número de presentaciones matemáticamente diferentes; etc.

### *El papel referencial del Álgebra en las Matemáticas*

El papel referencial del Álgebra en las Matemáticas se manifiesta en múltiples facetas, pero sobresalen tres que han tenido repercusión en el desarrollo curricular: el lenguaje, los procesos de pensamiento algebraico y nuevos aspectos del desarrollo matemático.

En relación con el Lenguaje en Rojano (1994), se muestra la investigación de la Matemática escolar considerada como lenguaje en los años 80 y 90, frente a las tendencias de los 70, que estuvo más centrada en la construcción de conceptos. La autora plantea algunas de las implicaciones didácticas de esta nueva localización de la Matemática escolar y, en especial, se refiere al lenguaje algebraico por ser el Álgebra simbólica el lenguaje básico de la Matemática. La autora pone de manifiesto como en las dos últimas décadas, se va despertando el interés por los aspectos semánticos y sintácticos de la Matemática para poder explicar las observaciones hechas acerca de las interpretaciones y usos que los estudiantes hacen de los símbolos matemáticos, y, se va observando un cambio significativo en la educación matemática que lleva a considerar esta disciplina como un lenguaje.

Una aportación relevante es la de Freudenthal (1983), que, desde su análisis fenomenológico, recompone los principales elementos conceptuales y organizativos del lenguaje algebraico y realiza un análisis profundo sobre las diferencias y similitudes del lenguaje algebraico con la lengua materna y la Aritmética.

También en la interacción del lenguaje algebraico con otros lenguajes se encuentra los estudios de Filloy (1991 y 1993) y Filloy-Rojano (1991) en los que se analizan problemas de traducción de lenguajes, del natural al algebraico y viceversa, en el marco de tendencias cognitivas presentes en el aprendizaje de conceptos más abstractos.

El estudio de la sintaxis algebraica como especificidad de la sintaxis matemática, al considerar el Álgebra simbólica como el lenguaje básico de la Matemática, es abordado en los trabajos del modelo de Kirshner. Su propuesta teórica, interpreta las manipulaciones algebraicas como un lenguaje en el sentido de Chomsky (1957) y adapta los modelos de la lingüística generativa transformacional al estudio del Álgebra (Kirshner, 1985, 2001).

Existen, también, investigaciones con una fuerte orientación didáctica que aplican los conocimientos actuales sobre la psicolingüística al estudio de la Matemática, como es el caso de Pimm (1987), que además ubica su trabajo concretamente en la Matemática como lenguaje; este autor pretende construir la Matemática en términos lingüísticos con el elemento básico de la "metáfora" entendida como comprender y experimentar una cosa en términos de otra (Lakoff y Johnson, 1980). Plantea el tratamiento del aprendizaje de la Matemática como el de una lengua extranjera no como el de la lengua materna en el sentido, que el centro de atención no sea el propio lenguaje sino la "competencia comunicativa" del mismo.

Se observa que los aspectos semántico y sintáctico del lenguaje matemático, se han convertido en centro de atención de las investigaciones. Y que la variedad de enfoques de la investigaciones de carácter lingüístico son consecuencia de que las bases teóricas de éstas se corresponden con diferentes corrientes de la psicolingüística y son, además, una manifestación de la ausencia de un paradigma para el estudio del sistema matemático de signos que, abarque sus aspectos sintáctico, semántico, pragmático y sociocultural.

En relación con los procesos del pensamiento algebraico: la sustitución formal, la generalización y la modelización, son los procesos característicos del lenguaje algebraico que se



utilizan también en otras partes de las Matemáticas y en otras ramas del saber. Con anterioridad hemos visto que diferentes estilos de enseñanza del Álgebra toman como base los procesos de generalización y modelización.

La generalización y la modelización han sido analizadas por múltiples autores. Por ejemplo, para Mason (1996), la generalización es el corazón de las matemáticas y consiste en ver tanto los casos particulares en la generalidad como ver la generalidad a través de los casos particulares. Para otros como Radford (1996), la generalización es un procedimiento que llega a una conclusión que, posteriormente, hay que validar, a partir de una sucesión de hechos observados. De esta manera, todo proceso de generalización conlleva una fase de validación.

Sin embargo, la modelización implica, en primer lugar, una fase de formulación que se completa con una de validación, de manera que durante la fase de formulación se examina un fenómeno o situación para establecer alguna relación entre las variables implicadas. Estas relaciones proceden de las observaciones o simplemente de conjeturas hechas sobre la situación bajo estudio. Además, comprende una serie más o menos compleja de transformaciones u operaciones matemáticas que, por último, lleva a un modelo expresado simbólicamente. La fase de validación consiste en comprobar la validez del modelo regresando a la realidad que se supone representa, Janvier (1996).

Para Freudenthal (1983), todas las Matemáticas están impregnadas de la sustitución formal. Así, la sustitución formal es un instrumento de cálculo algebraico importante a causa de su amplio campo de aplicaciones, que se manifiesta en diferentes procesos matemáticos tales como: generalización, simplificación, eliminación, complicación estructural, particularización; se puede afirmar que para Freudenthal, la modelización y la generalización son partes explícitas de un proceso más general que él describe como sustitución formal.

En Ruano (2003) encontramos un estudio sobre los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en Matemáticas con alumnos de Educación Secundaria, en el que se analizan las dificultades de estos alumnos, en términos de errores, en los diferentes procesos, y, se comparan los resultados de los alumnos de ESO con los de Bachillerato, aportando algunas implicaciones didácticas para su implementación en estas etapas educativas.

En los últimos treinta años la Matemática finita se ha convertido en parte integrante de los conocimientos necesarios para diferentes disciplinas científicas, y en particular la Matemática discreta, especialmente relacionada con el ordenador. De esta manera tópicos como: combinatoria, grafos, matrices, problemas de optimización, fractales, procesos iterativos y recursivos, etc., aparecen como nuevos contenidos en algunos currículos. Los sistemas dinámicos nacen del planteamiento de problemas del mundo físico por medio de ecuaciones diferenciales y constituye una matemática próxima a la realidad, pero una barrera infranqueable se levantaba entre la facilidad con que era posible analizar los llamados sistemas dinámicos lineales y la dificultad o imposibilidad de los no lineales. La ruptura de esta situación se produce a causa de los ordenadores que hicieron posible simular el movimiento de los sistemas no lineales, mostrando que generaban una “dinámica caótica” esencialmente distinta a la lineal pero presente en la naturaleza, tal es el caso de la “geometría fractal”, que analiza procesos y formas geométricas cada vez más próximas a las generadas por la vida. Muchos aspectos de esta teoría en sus formas más simples e intuitivas, como los fractales pueden ser utilizados para desarrollar aspectos del Pensamiento Algebraico como la sustitución formal, la generalización y la modelización. Por otra parte, la teoría de grafos es un lenguaje útil en diversas disciplinas de la ciencia y es una teoría de relaciones, que potencia procesos de modelización que pueden ser expresados en el lenguaje de los grafos y en el lenguaje algebraico.

### 3.3 Los mediadores tecnológicos

Mención especial, dentro de la revisión de las investigaciones en Álgebra, merecen los recursos tecnológicos: calculadoras, ordenadores o tecnologías de la información y la comunicación (TIC). En el comienzo del siglo XXI no podemos obviar que las nuevas tecnologías tienen que jugar un papel significativo dentro de la enseñanza de las Matemáticas. Vemos en este apartado, algunas referencias a las calculadoras y los ordenadores que representan un mediador didáctico que bien utilizado, puede ayudar en el desarrollo del aprendizaje significativo de los conceptos algebraicos.

En Kieran y Filloy (1989), se hace referencia al enfoque mediante computadoras. Presentan una revisión de los principales trabajos realizados en la década de los ochenta. Citan trabajos realizados en distintos entornos como el Logo, Pascal y LSE (Samurcay, 1985), Logo Math (Hoyles, Sutherland y Evans, 1985, Sutherland y Hoyles, 1986, Sutherland, 1987 a y b ) para el análisis del trabajo de los estudiantes relacionado con el concepto de variable.

El papel de la computadora en el aprendizaje de los conceptos algebraico parece aportar ventajas tales como: aprovechar el tiempo en actividades que edifiquen la comprensión de conceptos algebraicos claves y habilidades de resolución de problemas; cambiar las notaciones para representar las relaciones y los procesos matemáticos y enfatizar los procesos y las acciones en la enseñanza del Álgebra. Cita a Sfard (1987), como autora de estudios que confirman que "la interacción entre el conocimiento conceptual y procesual y el aprendizaje continuará siendo una cuestión absolutamente central sobre la que la investigación puede aconsejar las decisiones curriculares" y que existe "predominio significativo entre los estudiantes de secundaria de las concepciones operacionales sobre las estructurales" y, por tanto, con la ayuda de las computadoras se pueden desarrollar enfoques nuevos de la enseñanza del Álgebra que está más en sintonía con una de las maneras de pensar y aprender Álgebra preferida por el estudiante.

Podemos considerar que la investigación sobre la enseñanza-aprendizaje del Álgebra en ambientes computacionales se desarrolla con profusión en la década de los ochenta con investigaciones relacionadas tanto con aspectos operacionales, con ambientes basados en Logo, Pascal, LSE y Basic, como con aspectos estructurales.

En la década de los noventa observamos cómo programas de ordenador creados fundamentalmente con objetivos de hacer matemáticas -manipuladores simbólicos tales como DERIVE, MAPLE, MATHEMATICA-, utilizados convenientemente pueden ser válidos para enseñar los conceptos del Álgebra. Algunos programas cuyos fines no son exclusivamente educativos, como por ejemplo hojas de cálculo (EXCEL, WORKS) han sido utilizadas en experiencias educativas destinadas a desarrollar aspectos fundamentales del pensamiento algebraico con algún éxito (Rojano, 1996).

Otros investigadores centran sus trabajos con programas de ordenador, creados con fines educativos más generales, en desarrollar situaciones problemáticas con entornos interactivos mediante los cuales se incita a los alumnos a construir y hacer uso de ideas algebraicas para resolver problemas propuestos, por ejemplo, el LOGO, poniendo de manifiesto que es un ambiente apropiado para propiciar un acercamiento a ideas algebraicas Ursini (1994). También, en algunos casos, se ha elaborado software específico para la enseñanza del Álgebra, tal es el caso del programa CARAPACE, empleado en el desarrollo de un proyecto de investigación realizado durante siete años con alumnos de 12-15 años. La consideración que se hace del Álgebra en dicho proyecto es exclusivamente funcional (Kieran et al, 1996).

En Rojano (2003), encontramos la incorporación de entornos tecnológicos de aprendizaje a la



cultura escolar: Se trata de un proyecto de innovación educativa en matemáticas y ciencias en las escuelas secundarias de México.

En Cedillo y Kieran (2003), se analizan el trabajo de profesores que inician a los estudiantes al Álgebra mediante el uso de una calculadora. Estos manifiestan las ventajas de los estudiantes, así como una actitud más positiva hacia las Matemáticas entre los estudiantes más y menos avanzados y como ellos cambian sus estilos de enseñanza a un aprendizaje más centrado.

El desarrollo de los entornos tecnológicos esta asociado en los últimos años a la creciente implementación de las múltiples representaciones y a la incorporación de los Programas de Cálculo Simbólico (PCS) (Computer Algebra System, CAS) que generan nuevas aproximaciones al Álgebra escolar.

Se observa con relación a la enseñanza del Álgebra, que los recursos tecnológicos amplían la consideración habitual del Álgebra como un lenguaje. La facilidad de obtener diferentes formas de representación para expresar relaciones cuantitativas influirá tanto en la enseñanza como en el aprendizaje del Álgebra.

El potencial del ordenador para crear ambientes de aprendizaje que difícilmente podrían ser logrados sin disponer de este recurso está fuera de duda. Estos ambientes computacionales requieren, unas veces, la elaboración de programas o códigos para establecer secuencias que permiten desarrollar aspectos operacionales del conocimiento algebraico, así como hacer predicciones. Otras, estos ambientes se centran en las relaciones entre distintas representaciones de objetos matemáticos, poniendo énfasis en los aspectos estructurales, y a veces combinan ambos.

Podemos decir que la investigación en ambientes computacionales es un dominio emergente de la investigación en pensamiento algebraico, pero que está aún en sus inicios al no disponer de información respecto a los efectos en el aprendizaje a largo plazo.

Las investigaciones en entornos tecnológicos enfatizan que la inserción de los Programas de Cálculo Simbólico (PCS) en las clases de Álgebra no elimina las técnicas algebraicas de lápiz y papel, sino todo lo contrario, y que el uso de esta tecnología como herramienta didáctica generan discusiones matemáticas que generalmente no ocurren en las clases de Álgebra cuando solamente se utilizan lápiz y papel, pero advierten, también, que en estas discusiones el papel del profesor es de crucial importancia.

### 3.4 Organización de la enseñanza del Álgebra

En Kieran (1992, 2006, 2007), se pone de manifiesto que la investigación llevada a cabo con relación a la enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria ha sido escasa. No obstante, en los estudios realizados se detecta que el acercamiento al Álgebra en la enseñanza se ha hecho, en general, con concepciones estructurales. Lo mismo ha ocurrido con las propuestas recogidas en los libros de texto, aunque sus guías no están fácilmente disponibles. Señala también la autora las dificultades que existen actualmente para que los profesores puedan aprender de los hallazgos de la investigación y cómo aplicarlos en la instrucción. Algunas de las revistas de investigación en educación matemática tienen como metas específicas expresar hallazgos cognitivos y discuten sus implicaciones instruccionales. Sin embargo, muchos de los artículos aparecen escritos para otros investigadores, no para el profesorado. Por otra parte, los profesores tienen muy poco tiempo para buscar los resultados de las investigaciones; muchos realizan la enseñanza que está en el libro de texto, pero es posiblemente que este vacío acerca de cómo los profesores interpretan y deliberan sobre el contenido de las investigaciones, una de las áreas con mayor necesidad de atención investigadora.



Ahora bien, del análisis de las diferentes propuestas curriculares podemos observar distintas tendencias en los currículos del Álgebra en la Educación Secundaria Obligatoria. Hasta la década de los ochenta se observan diferentes propuestas curriculares: Álgebra como aritmética generalizada, Álgebra como el estudio de métodos para resolver ciertos problemas concretos, Álgebra como el estudio de relaciones entre cantidades y Álgebra como modelo estructural (Mason y otros (1985), Usiskin (1988); Socas y otros (1989)): En la década de los noventa surgen otras aproximaciones a la enseñanza del Álgebra en la Escuela Secundaria, que cambian sustancialmente con las propuestas de la década anterior: generalización, resolución de problemas, modelización y funciones, donde el aspecto funcional permanece en ambientes computacionales (Bednarz, Kieran, y Lee, 1996).

En la actualidad, también encontramos cuatro grandes enfoques del Álgebra escolar, como señala Drijvers y Hendrikus (2003): Álgebra como un medio para resolver problemas; Álgebra como el estudio de las funciones, es decir las relaciones entre variables; Álgebra como la generalización de relaciones y el estudio de patrones y estructuras; y Álgebra como un lenguaje, es decir, un medio de expresión de ideas Matemáticas.

No podemos afirmar que los resultados de la investigación hayan generado cambios profundos en las maneras de proponer el Álgebra en los currículos de la Educación Obligatoria, más bien podemos decir que son muy pocos los países y profesores que interpretan y desarrollan propuestas curriculares en forma de textos para las Matemáticas de Educación Primaria y Secundaria Obligatoria que incorporan aspectos relevantes de los resultados de la investigación en lenguaje algebraico al desarrollo curricular. No obstante, sí se observan cambios locales o de grupos de trabajo que enfatizan ciertos aspectos de las investigaciones. Por ejemplo, en algunas propuestas de desarrollo curricular del Álgebra, se ponen de manifiesto el uso de técnicas, procedimientos y criterios de secuenciación que parten de la estructura del contenido algebraico que queremos enseñar o de los resultados esperados del aprendizaje algebraico o de ambos a la vez. Estos usos tienen como finalidad concretar y secuenciar las intenciones educativas para el Álgebra partiendo del análisis del contenido o de los resultados esperados. Igualmente, dentro del análisis del contenido aparecen las referencias históricas y epistemológicas del Álgebra y del análisis de tareas sobresale las consideraciones al funcionamiento cognitivo del alumnado en términos de dificultades, obstáculos y errores que subyacen en la secuencia de ejecuciones de las tareas algebraicas.

Veamos, a modo de ejemplos, el desarrollo curricular en algunos países:

En España, la propuesta que se contempla para el Lenguaje Algebraico en el currículo de Matemáticas para la ESO (MEC, 1989, 2006), trata de la simbolización de las relaciones numéricas generales, de las estructuras matemáticas y de las operaciones de esas estructuras. En este sentido, el álgebra escolar se interpreta como una "Aritmética generalizada" y como tal involucra la formulación y manipulación de relaciones y propiedades numéricas. El Álgebra se contempla en estos diseños como un Bloque Conceptual, además de aparecer de manera transversal a lo largo de todos los Bloques. No obstante, en la propuesta del 2006, aparecen algunos elementos significativos: "El trabajo con patrones y relaciones, la simbolización y la traducción entre lenguajes son fundamentales en los primeros cursos", "En la construcción del conocimiento los medios tecnológicos son herramientas esenciales para enseñar, aprender y en definitiva, hacer matemáticas", "La resolución algebraica (de ecuaciones) no se plantea como el único método de resolución y se combina también con otros métodos numéricos y gráficos y mediante el uso adecuado de la tecnología de la información"...

En Estados Unidos, las propuestas de los Estándares de la NCTM (1989), sugiere adelantar la introducción del Álgebra, como una generalización de la Aritmética, en los dos últimos cursos de Educación Primaria, y aporta una concepción más amplia del Álgebra, poniendo énfasis en actividades que provoquen el desarrollo de interpretaciones procedimentales y, que a su vez expliciten la transición de las concepciones procedimentales a las estructurales. Apuesta, inicialmente, por un



acercamiento Pre-Algebraico para los últimos cursos de Educación Primaria, Estándares 8 y 9: Patrones y funciones, y Álgebra, respectivamente, para los niveles de quinto a octavo. En este acercamiento al Álgebra la tecnología se propone también como un mediador muy interesante (Kaput, 1989).

Diez años después, la tendencia del NCTM (2000), recogida en los “Principios y Estándares para la Educación Matemática”, mantiene y amplía las ideas desarrolladas en la propuesta del 1989, de manera que en el Estándar número 2, aborda el Álgebra y propone que todos los estudiantes deberían aprender Álgebra desde el principio de la Educación Obligatoria, es decir, desde los grados K al 12, añadiendo que desde los primeros años de la escolarización los programas de Matemáticas deberían orientarse a capacitar a los estudiantes para: comprender patrones, relaciones y funciones; representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos; usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas; y analizar los cambios tanto en contextos reales como abstractos. Este adelanto del Álgebra a los primeros curso va a permitir ayudar a los alumnos a “*construir una base sólida de aprendizaje y experiencia como preparación para un trabajo más sofisticado en el álgebra de los grados medio y superior*” (NCTM, 2000). Hay en este documento una apuesta decidida por “Early Algebra”.

En el Reino Unido, por ejemplo, los textos de Álgebra del South Notts Projects (Bell y otros, 1980) se basa en una "enseñanza con significado", que propone la utilización de modelos concretos para la resolución de ecuaciones lineales. Asimismo crea situaciones concretas con el propósito de desembocar en el planteamiento de las ecuaciones mencionadas. Los textos del NMP de 1987, serie inglesa de textos de Matemáticas para la Secundaria, a la que contribuyeron Harper y Küchemann, entre otros, presentan el Álgebra como un curso basado en la idea de desarrollar sucesivamente las nociones de letras como incógnitas específicas y como datos integrados en una secuencia gradual desde lo procedimental a lo estructural. El alcance del impacto cognitivo del planteamiento de estos textos no ha llegado a ser investigado, pero sí algunos elementos de este acercamiento, que han mostrado algunos signos prometedores para la enseñanza del Álgebra.

En Holanda, la investigación y desarrollo del currículum en el marco de la Educación Matemática Realista (RME), cuyo objetivo es desarrollar vías significativas para la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas con sentido, considerando las Matemáticas como una actividad humana (Freudenthal, 1991), y las propuestas de los estándares de la NCTM (1989), forman la base para el enfoque hacia el Álgebra en el proyecto “Las Matemáticas en contextos” (MIC). En este proyecto los estudiantes aprenden a describir las relaciones entre variables con una variedad de representaciones y deben ser capaces de conectar las representaciones. El Álgebra se utiliza para resolver problemas y los estudiantes deben realizar elecciones inteligentes sobre qué representación algebraica utilizar. En la resolución de problemas, el Álgebra (su estructura y símbolos) no es un objetivo en sí mismo, es una herramienta para resolver problemas. Los problemas son problemas realistas que surgen del mundo real y se presentan contextualizados. Podemos señalar que el Pensamiento Algebraico prima sobre la manipulación algebraica (Reeuwijk, 1995).

La tendencia francesa en el marco de la ingeniería didáctica queda bien reflejada en trabajos como los de Chevallard (1990), en los que muestra una diferenciación entre la enseñanza “funcional” del Álgebra y la enseñanza “formal”. El autor es partidario de que la enseñanza debe ser funcional. Pero ¿qué significa esto?, significa que el aprendizaje no se debe hacer “in vacuo”, es decir, sin objetivo. Cuando enseñamos de esta manera (formal) estamos haciendo una enseñanza que no es inútil pero sí incompleta y por tanto fuente de errores y obstáculos. Señala que en general en la enseñanza del Álgebra se hace más un planteamiento formal que funcional. En realidad lo que se hace en Álgebra no se sabe para qué sirve. En definitiva, el alumno tiene la sensación de que se hace porque lo quiere el profesor y con eso basta.

### 3.5 Formación del profesorado de Álgebra

En la revisión de las investigaciones en Álgebra de Kieran (1992), esta manifestaba que sabemos muy poco sobre los diferentes acercamientos a la enseñanza del Álgebra, sobre cómo los maestros enseñan Álgebra y sobre sus concepciones y creencias acerca del Álgebra; la mayor parte de las investigaciones, hasta principio de los noventa, están dirigidas a estudiar los fenómenos de aprendizaje. Sin embargo, en Kieran (2007), señala que hay signos de que las investigaciones en Álgebra, en los últimos 15 años, han cambiado y existe un número creciente de trabajos sobre: el desarrollo profesional y la formación del profesorado (inicial y en activo) en Álgebra. Por ejemplo, investigaciones relacionadas con la formación inicial del profesorado de Álgebra las encontramos en (Zaskis y Liljedahl, 2002; Van Dooren y otros 2003; Sánchez y Llinares, 2003; Nathan y Patrosino, 2003...), o sobre los conocimientos y creencias de los profesores de Álgebra (Nathan y Koedinger, 2000), etc. Sin embargo, a pesar de este desarrollo significativo en relación con el principio de los noventa, quedan aún grandes áreas de investigación en Álgebra. Kieran (2007), señala cuatro focos importantes que necesitan de un esfuerzo investigador en Álgebra. En primer lugar, la necesaria búsqueda de modelos apropiados para observar y analizar las prácticas de la enseñanza del Álgebra. En segundo lugar, la necesidad de determinar nuevos caminos que permita incorporar el cuerpo de conocimientos sobre los aprendizajes en Álgebra al desarrollo profesional y a la formación inicial y permanente de los profesores de Álgebra. En tercer lugar, la necesidad de establecer interacciones entre el conocimiento de Álgebra de los profesores, su conocimiento pedagógico y la comprensión de los estudiantes del conocimiento algebraico, es decir, sitúa en tercer lugar la necesaria relación entre la enseñanza y aprendizaje del Álgebra. En cuarto lugar, ante el progresivo incremento del uso de la tecnología como herramienta para el aprendizaje del Álgebra, se necesitan más investigaciones sobre el determinante papel que juega el profesor en maximizar estos beneficios.

### 4. Consideraciones finales sobre Pensamiento Algebraico

En este apartado sobre consideraciones finales nos referiremos a diferentes cuestiones desarrolladas en el artículo, unas de carácter más generales, otras más específicas y otras más locales referidas al grupo de Pensamiento algebraico de la Universidad de La Laguna.

De manera general, las diferentes investigaciones realizadas sobre Pensamiento algebraico tratan de buscar respuestas a los principales interrogantes en torno a la naturaleza del Álgebra y a los procesos de pensamiento implicados, que faciliten procesos significativos de enseñanza-aprendizaje del Álgebra que permitan a los alumnos construir significados para los símbolos algebraicos y para su manipulación. Muchas son, sin embargo, las preguntas que aún hoy no tienen respuesta en el tratamiento del Álgebra en la Educación Obligatoria. Estas investigaciones ponen de manifiesto, en primer lugar, las implicaciones negativas que tienen para el aprendizaje del Álgebra, el considerar únicamente a la Aritmética como su antecesora; se ha puesto de manifiesto hasta la saciedad, que el Álgebra no se puede considerar únicamente como una simple generalización de la Aritmética; aprender Álgebra no es meramente hacer explícito lo que estaba implícito en Aritmética; el Álgebra supone un cambio en el pensamiento del estudiante y la dificultad para muchos principiantes de la transición desde lo que puede considerarse modo informal de representación y resolución de problemas, al modo formal. Y en segundo lugar, en la mayor parte de los trabajos referenciados se muestra la preocupación por la gran escasez de modelos de enseñanza del Álgebra así como de la literatura relacionada con las creencias y actitudes de los profesores de Álgebra.

También se puede observar que en ciertos desarrollos curriculares, se superan las versiones simplistas, claramente reflejadas en los programas de estudio y textos tradicionales, que consideraban la enseñanza del Álgebra elemental como una mera extensión de la Aritmética, y hay también un reconocimiento de que en la adquisición del lenguaje algebraico, ciertos cambios de concepción



respecto de las operaciones que se realizan y de los objetos operados, juegan un papel fundamental. No obstante, las investigaciones también ponen de manifiesto la necesidad de hacer una distinción entre las dificultades cognitivas de los estudiantes y las cuestiones didácticas, esto es, qué podemos hacer para ayudar a los estudiantes en sus dificultades cognitivas. Tendríamos que plantearnos el importante reto de cómo organizar el material para capturar y sostener el interés para que los estudiantes puedan implicarse en los procesos intelectuales, identificados por los análisis cognitivos como necesarios o suficientes para adquirir conocimiento preciso del Álgebra. Por tanto, debemos diseñar unidades de aprendizaje que correspondan a unidades manejables tanto por los profesores como por los estudiantes.

A modo de consideraciones finales podríamos destacar tres razones principales que resaltarían el especial interés que hoy tiene el desarrollo del Pensamiento algebraico en los alumnos de la Educación Obligatoria.

La primera, es la continua y generalizada dificultad con que los estudiantes y profesores se enfrentan a la materia a pesar de tres décadas de reformas y desarrollos de planes de estudios. Es necesario, en la actualidad desarrollar marcos de trabajo que permitan hacer estudios rigurosos de los factores que subyacen en las dificultades de los estudiantes y profesores en la transición de la Aritmética al Álgebra, en el desarrollo del Pensamiento Algebraico y en la Resolución de Problemas Algebraicos.

La segunda, es la necesidad de caracterizar el Pensamiento algebraico, que podemos formular en la siguiente pregunta: ¿Qué es el Pensamiento algebraico y cuáles son las razones esenciales de la actividad algebraica que deben constituir las metas que tenemos para el aprendizaje de los alumnos en este campo? Esta caracterización del Pensamiento Algebraico permitirá señalar con claridad las metas para la educación de los alumnos en cada etapa educativa: “Early Algebra”, Preálgebra, Álgebra en la Educación Secundaria Obligatoria...

La tercera, es la necesaria coordinación de los diversos hallazgos de la investigación en Álgebra que existen en este campo. Es necesario contar con una visión integrada de los hallazgos de la investigación en Pensamiento Algebraico, como medio para fomentar el desarrollo curricular y la evaluación en Álgebra.

Ahora bien, las tres razones deben tomar en consideración que el desarrollo curricular en Álgebra en este siglo XXI, no puede ser ajeno a las consideraciones sociales y culturales: competencias generales y específicas, capacidades...; no puede ser ajeno a la tecnología: TIC, calculadoras...; y no puede ser ajeno a los cambios en la disciplina: caos (fractales), grafos, combinatoria, matrices, problemas de optimización, procesos iterativos y recursivos...

De manera más concreta, observamos del análisis de las cuestiones más relevantes de la investigación en Didáctica de las Matemáticas que tienen una mayor incidencia en el desarrollo curricular del Álgebra, que éstas se pueden concretar en poner énfasis en: los aspectos del lenguaje; los aspectos semióticos, facilitando el acceso a múltiples representaciones; los mediadores tecnológicos (calculadoras y ordenadores); los nuevos aspectos del desarrollo matemático: caos (fractales), grafos, etc.; resaltar el papel de los contextos; propiciar ambientes de enculturación en el trabajo de los estudiantes en Álgebra; tomar en consideración los procesos del pensamiento algebraico; proponer y desarrollar actividades y proyectos “open-ended” para el trabajo en Álgebra; iniciar las actividades de Álgebra desde la Educación Primaria Pre-Álgebra o “Early Algebra”; con la finalidad de profundizar en el análisis de contenidos y tareas algebraicas tomando en consideración el papel de los errores que se cometen ante las dificultades y los obstáculos de los estudiantes, y



potenciar actividades prealgebraicas o algebraicas individuales y de grupo del alumnado, como base para la construcción del conocimiento algebraico a partir del conocimiento numérico.

Igualmente, podemos considerar que las propuestas de Pre-Álgebra y de “Early-Algebra” de incorporar el Álgebra al currículo de la Educación Primaria tienen como finalidad ayudar al desarrollo del pensamiento numérico y algebraico, facilitando la transición de la Aritmética al Álgebra, permitiendo organizar la enseñanza de la Aritmética y del Álgebra evitando saltos, rupturas o cortes didácticos entre ambas, que tantas dificultades y errores está ocasionando en el alumnado de la ESO, además de enriquecer, en general, la enseñanza de las matemáticas. Pudiendo concluir que también existe un cierto acuerdo general en la comunidad investigadora internacional en que el Álgebra debe tener un lugar en el currículo de la Educación Primaria, como Pre-Álgebra o como “Early-Algebra”, aunque la investigación sobre la integración en un sentido o en otro del Álgebra en el currículo escolar está todavía en desarrollo y se conoce aún poco. Sin embargo, algunos currículos nacionales como el español ha incorporado la iniciación al lenguaje prealgebraico en términos de iniciación a los números enteros negativos y al uso de ciertos aspectos de las letras como variable y como incógnita (Consejería de Educación, Cultura y Deportes de Canarias, 2007)

De manera más local, el grupo de Pensamiento algebraico de la Universidad de La Laguna (España), trabaja el Álgebra desde la óptica de la multiplicidad de vínculos que este pensamiento tiene con el pensamiento numérico y analítico, de manera que los problemas derivados de la enseñanza y aprendizaje de estos tres campos, numérico, algebraico y analítico, tienen muchos aspectos comunes y las bases teóricas y metodológicas para su estudio poseen también componentes afines.

Las investigaciones, ponen de manifiesto, la necesidad de progresar en Álgebra tomando en consideración tanto la concepción procedimental como la estructural, que, por otra parte, coincide con el desarrollo histórico del Álgebra. Sin embargo, aunque diferentes propuestas enfatizan las consideraciones estructurales del Álgebra, la mayoría de los estudiantes no alcanzan esta meta. Se tiene claro que el paso de la Aritmética al Álgebra queda determinado como el tránsito de lo procedimental a lo estructural, pero este tránsito podría conducir a lo mismo si no se interpreta correctamente.

Para algunos autores como Filloy y Sutherland (1996), se presenta una falsa disyunción cuando el aspecto relacional del pensamiento matemático quita mérito a su uso instrumental y viceversa; por ejemplo, cuando el aspecto de resolución de problemas se separa falsamente del conocimiento matemático.

Nuestro trabajo en Álgebra desarrolla una propuesta de tránsito de la Aritmética al Álgebra desde una perspectiva global que comprende el desarrollo del pensamiento operacional, estructural y procesual tanto en la aritmética como en el Álgebra, mediante un acercamiento semiótico al lenguaje algebraico que integre los contextos numérico y geométrico, en un marco del Álgebra como Lenguaje, en el que las fuentes de significado y los sistemas de representación juegan un papel determinante. Los sistemas de representación que se utilizan para dar significado del Lenguaje Algebraico, además de considerar su carácter conceptual y procedimental, abordan también la necesidad de considerar el Álgebra como una actividad más de los alumnos, y los signos, como un instrumento específico y mediador de la actividad.

Los alumnos comienzan desarrollando las bases del pensamiento algebraico: determinan semejanzas, diferencias, ordenan, clasifican, etiquetan... El Álgebra aparece como el lenguaje para la expresión y manipulación de generalidades. En la generalización se usan variables e incógnitas, fórmulas y ecuaciones en un marco de resolución de problemas. La generalización y la resolución de problemas son campos complementarios en la enseñanza del Álgebra, Radford (1996).





Las aproximaciones que lleven a los estudiantes a la construcción de fórmulas o ecuaciones en las que se aprecie la generalidad de la misma, deben ser variadas: visualización; manipulación de figuras cuya construcción involucre el proceso de generalización facilitando la construcción de la fórmula; formulación de reglas recursivas que muestran cómo construir el siguiente término usando el precedente; y encontrar un patrón que lleve directamente a la fórmula...

En este trabajo los objetos del Álgebra son representados bajo diferentes registros semióticos (internos o externos al propio Lenguaje algebraico), aceptando que las operaciones de cambio entre ellos constituye una operación cognitiva básica, que permite analizar las dificultades, y errores conceptuales y de procedimiento, en los aspectos operacionales, estructurales y procesuales, y que la naturaleza abstracta del lenguaje algebraico debe ser entendida como un proceso caracterizado por diferentes etapas, reflejadas en los diferentes estadios de desarrollo que se dan en los sistemas de representación cognitivos, que se caracterizan como estadios semiótico, estructural y autónomo. Es en este desarrollo en el que entendemos la construcción del conocimiento conceptual y procedimental del Álgebra.

En este sentido, el modelo desarrollado permite profundizar en las dificultades y obstáculos que tienen los alumnos en el aprendizaje del lenguaje algebraico y posibilita nuevas maneras de enfocar el estudio de los errores, especialmente desde dos perspectivas:

- Los errores que tienen su origen en un obstáculo.
- Los errores que tienen su origen en una ausencia de significado; a esta última, se le asigna dos procedencias distintas, una, relacionada con las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos y a los procesos de pensamiento matemático, y otra, relacionada con las dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales hacia el Álgebra.

Se trabaja además de propuestas de desarrollo curricular del Álgebra en la Educación Obligatoria, en la construcción de un marco teórico local para el estudio de los errores en Álgebra desde el que tratarlos sistemáticamente, no en términos de proceder a una clasificación de los mismos sino en términos de dar una explicación de su origen a nivel del grupo e individualmente.

### Bibliografía

- Arzarello, F. (1992). Pre-algebraic problem solving. En J. P. da Ponte, J. F. Matos, J. P. Matos y D. Fernandes (Eds.), *Mathematical problem solving and new information technologies* ( NATO ASI Serie F, v. 89, pp. 155-166). Berlin: Springer-Verlag.
- Bastable, V. y Schifter, D. (2007). Classroom Stories: Examples of Elementary Students Engaged in Early Algebra. En J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Blanton, M. L. y Kaput, J. (2005). Characterizing a Classroom Practice that Promotes Algebraic Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 412-446.
- Bednarz, N. y Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: continuities and discontinuities with arithmetic. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra .Perspectives for Research and Teaching*, (pp. 115-136). Dordrecht: Kluwer.
- Bednarz, N.; Kieran, C. y Lee, L. (Eds.) (1996). *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching*. Dordrecht: Kluwer.
- Bell, A. (1996). Problem-solving approaches to Algebra: Two aspects. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra .Perspectives for Research and Teaching*, (pp. 167-185). Dordrecht: Kluwer.

- Bell, A. y otros (1980). *Algebra: Ideas and Material for years 2-5 in the Secondary School*. Sout Notts Project. Shell Centre for Mathematical Education. University of Nottingham, UK.
- Bodanskii, F. (1991). The formation of an algebraic method of problem solving in primary school. En V. Davydov (Ed.), *Psychological abilities of primary school children in learning mathematics*. (Vol. 6. pp. 275-338). Reston, VA: NCTM.
- Booth, L. R. (1984). *Algebra: Children's Strategies and Errors*. Windsor: NFER- Nelson.
- Booth, L. R. (1988). Children's Difficulties in Beginning Algebra. En A. F. Coxford y A. P. Shulte (Eds.), *The Ideas of Algebra, K-12. 1988 Yearbook* (pp.20-32). Reston, VA: NCTM.
- Brousseau, G.; Davis, R. y Werner, T. (1986). Observing Students at Work. En Christiansen, B., Howson, A.G.; Otte, M. ( Eds.). *Perspectives on Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer.
- Carpenter, T. P., Franke, M. L. y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: integrating arithmetic y algebra in elementary school*. Portsmouth: Heinemann.
- Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Reston, Virginia: NCTM e IAP.
- Cedillo, T. y Kieran, K. (2003). Initiating students into algebra with symbol-manipulating calculators. En J. T. Fey (Ed.), *Computer algebra systems in secondary school mathematics education*, (pp. 219- 239). Reston, VA: NCTM.
- Collis, K. F. (1974). Cognitive Development and Mathematics Learning. Paper presented at the Psychology of Mathematics Workshop, Centre for Science Education, Chelsea College. London.
- Chevallard, Y. (1990). Le Passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des Mathématiques au Collège (Troisième partie). Voies d'attaque et problèmes didactiques. *Petit X*, IREM de Grenoble.
- Chomsky, N. (1957). *Syntactic Structures*. Mouton: The Hague. Trad. cast.: Estructuras sintácticas. Siglo XXI: México.
- Consejería de Educación, Cultura y Deportes de Canarias (2007). DECRETO 126/2007, de 24 de mayo, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Primaria en la Comunidad Autónoma de Canarias.
- Davis, R. B. (1985). ICME-5 Report: Algebraic thinking in the early grades. *Journal of Mathematical Behaviour*, 4, 195-208.
- Davydov, V. (1962). An experiment in introducing elements of algebra in elementary school. *Soviet Education*, 8, 27-37.
- Davydov, V. (1991). *Psychological abilities of primary school children in learning mathematics*. Vol. 6. Reston, VA: NCTM.
- Dougherty, B. (2007). Measure up: A quantitative view of early algebra. En J. Kaput, D. Carraher y Blanton, (eds.), *Algebra in the early grades*. Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Drijvers, P. y Hendrikus, M. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment: design research on the understanding of the concept of parameter*. Tesis doctoral no publicada. Utrecht: Universidad de Utrecht.
- Duval, R. (1993). Registros de representación semiótica et funcionamiento cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, IREM de Strasbourg. (Traducido por el Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV IPN, México 1997).
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: Registros semióticos et apprentissage intellectuels*. Peter Lang. Suisse.
- Filloy, E. (1991). Cognitive Tendencies and Abstraction Processes in Algebra learning. En Furinghetti (Ed.). *Proceedings of the fifteenth International Conference for the PME*. Vol. II, pp. 48-55. Assisi. Italy.
- Filloy, E. (1993). Tendencias cognitivas y procesos de abstracción en el aprendizaje del Álgebra y de la Geometría. *Enseñanza de las Ciencias*. 11, pp. 160-166.
- Filloy, E. y Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics*, 2, 19-25.
- Filloy, E.; Rojano, T. (1991). Translating from Natural Language to the mathematical system of



- algebraic signs and viceverse. En R. Underhill (Ed.) *Proceedings of 13 NAPME*.
- Fillooy, E.; Rojano, T. Puig, L. (2007). *Education Algebra*. Netherlands: Springer International Handbooks of Education , Vol. 43.
- Fillooy, E.; Sutherland, R. (1996). Designing Curricula for Teaching and Learning Algebra. En Bishop et al (Eds). *International Handbook Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer.
- Freudenthal, H. (1974). Soviet research on teaching algebra at the lower grades of elementary school. *Educational Studies in Mathematics*, 5, 391-412.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomemology of mathematical structures*. Dordrecht: Kluwer.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Dordrecht: Kluwer.
- Gutiérrez, A. y Boero, P. (Eds.) (2006). *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*. Rotterdam: Sense Publishers.
- Harper, E. (1987). Ghosts of Diophantus. *Educational Studies in Mathematics*. 18, 75-90.
- Hiebert, J. (1988). A theory of developing competence with written mathematical symbols. *Educational Studies in Mathematics*. 19(3), 333-335.
- Herscovics, N. y Kieran (1980). Construction meaning for the concept of equation. *Mathematics Teacher*, vol. 73, pp. 572-580.
- Herscovics, N. y Linchevski, L., C. (1994). A Cognitive Gap between Arithmetic and Algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 27(1), 59-78.
- Hewitt, D. (1998). Approaching Arithmetic Algebraically. *Mathematics Teaching*, 163, 19-29.
- Hoyles, C.; Sutherland, R. y Evans, J., (1985). The Logo Maths Project: A preliminary investigation of the pupil-centred approach to the Learning of Logo in the secondary mathematics classroom, 1983-84. London: University of London, Institute of Education.
- Janvier, C. (1987). Representations and Understanding: The notion of Function as an example. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. Lawrence Erlbaum Associates, p. 67-71.
- Janvier, C. (1996). Modeling and the initiation into Algebra. En Bednarz et al (Eds.). *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching..* pp 225-236. Dordrecht: Kluwer.
- Kaput, J. (1987). Representation Systems and Mathematics. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. Lawrence Erlbaum Associates.
- Kaput, J. (1989). Linking representations in the Symbol Systems of Algebra. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*. Reston. VA: NCTM. Hillsdale, LEA.
- Kaput, J. (1991). Notations and representations as mediators of Constructive Processes. En Von Glasersfeld E. (Ed) *Radical Constructivism in Mathematics Education*. Kluwer Academic Publisher.
- Kaput, J. (1995). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. Paper presented at the Annual Meeting of the National Council of Teachers Mathematics. Boston MA.
- Kaput, J. (1998). *Teaching and Learning a new algebra with understanding*. Dartmouth, Massachusetts: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.
- Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. Dartmouth, Massachusetts: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.
- Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. En S. Wagner y C. Kieran. Research agenda for mathematics education: Vol. 4. *Research issues in the learning and teaching of algebra*, pp.33-56. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Kieran, C. (1992). The Learning and Teaching of School Algebra. En Grows, D.A. (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Macmillan Publishing Company. New York, pp. 390-419.
- Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. En C. Alsina, B. Álvarez, B. R. Hodgson; C. Laborde y A Pérez. (Eds.). *8<sup>th</sup> International Congress on Mathematical Education: Selected*



- Lectures*. (pp. 271-290). Sevilla: S.A.E.M. Thales.
- Kieran, C. (2006). Research the Learning and Teaching of Algebra. En Gutiérrez, A. y Boero, P. (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*. Sense Publishers. Rotterdam, pp. 11-49.
- Kieran, C. (2007). Learning and Teaching Algebra at the Middle School Through College Levels. En Lester, F. K. (Ed.). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (pp. 707-762). Reston, Virginia: NCTM e IAP.
- Kieran, C., Boileau, A., Garançon, M. (1996). Introducing algebra by means of a technology-supported, functional approach. En N. Bernarz et al (Eds.). *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching*. pp. 257-293. Dordrecht: Kluwer.
- Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, 7 (3), pp. 229-240.
- Kirshner, D. (1985). A Linguistic Model of algebraic Symbol Skill. University of British Columbia.
- Kirshner, D. (2001). The structural algebra option revisited. En R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell y R. Lins (Eds.), *Perspectives on School Algebra* (pp. 83-98). Dordrecht: Kluwer.
- Küchemann, D. (1981). Algebra. En Hart, K. (Ed.): *Children's Understanding of Mathematics*, pp. 11-16. London: Murray.
- Kuhn, T. S. (1962). *The structure of scientific revolutions*. University of Chicago Press: Chicago. Traducción castellana: *La estructura de las revoluciones científicas*. Fondo de Cultura Económica: México, 1971.
- Lakoff, G. y Johnson, M. (1980). *Metaphors we live by*. Chicago: University of Chicago Press.
- Lester, F. K. (Ed.) (2007). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Reston, Virginia: NCTM e IAP.
- Lins, R. (2001). The production of meaning for algebra: A perspective based on a theoretical model of semantic fields. En R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell y R. Lins (Eds.), *Perspectives on School Algebra*. Dordrecht: Kluwer.
- Lins, R. y Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: the current state of the field. En K. Stacey, H. Chick y M. Kendal (Eds), *The teaching and learning of algebra. The 12<sup>th</sup> ICMI Study* (pp.47-70). Norwell, Massachusetts: Kluwer Academic Publishers.
- Malara, N. A. y Navarra, G. (2003). *ArAl Project. Arithmetic pathways towards favouring pre-algebraic thinking*. Bologna: Pitagora Editrice.
- Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching*. London: Kluwer Academic Publishers.
- Mason, J., Graham, A., Pimm, D. y Gowar, N. (1985). *Routes to Roots of Algebra*. The Open University Press. Walton Hall, Milton Keynes.
- Mason, J., Graham, A. y Johnston-Wilder, S. (2005). *Developing Thinking in Algebra*. London: The Open University y Paul Chapman Publishing.
- Matz, M. (1980). Towards a computational theory of algebraic competence. *Journal of Children's Mathematical Behavior*, 3, 1, 93-166.
- Mulhern, G. (1989). Between the ears: Making inferences about internal processes. En Greer, B. y Mulhern, G. (Eds.). *New Directions in Mathematics Education*. Londres: Routledge.
- M.E.C. (1989, 2006). *Diseño Curricular Base para la Educación Secundaria (Área de Matemáticas)*. M.E.C. Madrid.
- Nathan, M. J. y Koedinger, K. R. (2000). An investigation of teachers' beliefs of students' algebra development. *Cognition and instruction*, 18, 209-237.
- Nathan, M. J. y Patrosino, A. (2003). Expert blind spot among pre-service teachers. *American Educational Research Journal*, 40, 905-928.
- N.C.T.M. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. NCTM. Reston, VA.
- N.C.T.M. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. NCTM. Reston, VA.
- Palarea, M.M. (1998). *La adquisición del Lenguaje Algebraico y la detección de errores comunes cometidos en Álgebra por alumnos de 12 a 14 años*. Tesis doctoral. Servicio de publicaciones.





- Universidad La Laguna.
- Palarea, M.M. y Socas, M.M. (1995). Sistemas de Representación en la Resolución de Problemas Algebraicos. *Suma*. Vol. 20, pp. 29-35.
- Palarea, M.M. y Socas, M.M. (1998). Operational and conceptual abilities in the learning of algebraic language. A case study. *Proceedings of the PME-22*. v. 3, pp. 327-334. Stellenbosh, South Africa.
- Palarea, M. M.; Socas, M.M. (2003). Del Lenguaje numérico al algebraico. Propuesta de formación del profesorado de Primaria. *Formación del profesorado e investigación en Educación Matemática*, 5, 231-259.
- Piaget, J. y García, R. (1982). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*. México: Siglo veintiuno editores.
- Pimm, D. (1987). *Speaking Mathematically*. Routledge & Kegan: Londres. (Trad. cast.: 1990, P. Manzano. *El lenguaje matemático en el Aula*. Ministerio de Educación y Ciencia y Ediciones Morata: Madrid).
- Radatz, H. (1979). Errors Analysis in Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 9, pp.163-172.
- Radatz, H. (1980). Students' Errors in the Mathematics Learning Process: A Survey. *For the Learning of Mathematics*, 1(1), pp.1-20.
- Radford, L. (1996). The Roles of Geometry and Arithmetic in the Development of Algebra: Historical Remarks from a Didactic Perspective. Cap.3, pp. 39-54. En N. Bednarz et al (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching*. Dordrecht: Kluwer.
- Radford, L. (2004). Syntax and meaning . En M. J. Hoines y A. B. Fuglestad, *Proceedings of the PME-28*, v. 1, pp. 161-166. Bergen, Norway.
- Radford, L. (2006). Semiótica y Educación Matemática. En Radford, L. y D'Amore, B. (Eds.) *Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático, Relime, número especial*. pp. 7-21.
- RAND Mathematics Study Panel (2003). Mathematical proficiency for all students: Toward a strategic research and development program in Mathematics Education. Santa Mónica, CA: RAND.
- Reeuwijk, M. van (1995). Students' Knowledge of Algebra. *Proceedings PME-XIX*, vol. 1, pp. 135-150. Recife-Brazil.
- Resnick, L. y Ford, W. (1981). *The Psychology of Mathematics for Instruction*. (Traducción española: (1990) *La enseñanza de las Matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. Paidós-MEC).
- Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas. En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Educación Matemática*, pp. 69-96. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Rico, L.; Castro, Enc. y Romero, I. (1996). The role of representation systems in the learning of numerical structures. *Proceedings PME-XX*, vol. 1, pp. 87-102. València. España.
- Rojano, T. (1994). La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias* 12 (1).
- Rojano, T. (1996). Developing algebraic aspects of problem solving within a spreadsheet environment. En N. Bernarz et al (eds) *Approaches to Algebra*. pp. 137-145. Kluwer Academic Pub. Netherlands.
- Rojano, T. (2003). Incorporación de entornos tecnológicos de aprendizaje a la cultura escolar: Proyecto de innovación educativa en Matemáticas y Ciencias en escuelas secundarias públicas de México. *Revista Iberoamericana de Educación*, 33, 135-165.
- Ruano, R. (2003). *Sobre los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en matemáticas: consecuencias didácticas*. Tesina de Licenciatura. Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna.
- Ruano, R.; Socas, M. M. y Palarea, M. M. (2003). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *Investigación en Educación Matemática. Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*, pp.311-322.
- Samurcay, R. (1985). Learning programming: Constructing the concept of variable by beginning students, en L. Streefland (Ed.) *Proceedings of IX International Conference the PME*, State University of Utrecht, vol. 1, pp. 77-82.
- Sánchez, V. y Llinares, S. (2003). Four student teachers' pedagogical reasoning on functions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 6, 5-25.

- Schliemann, A. D., Carraher, D. W., Brizuela, B. M., Earnest, D., Goodrow, A., Lara-Roth, S. et al. (2003). Algebra in elementary school. En N. Pateman, G. Dougherty y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27<sup>th</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 25<sup>th</sup> Conference of Psychology of Mathematics Education North America*, Vol. 4 (pp. 127-134). Honolulu, Hawaii: CRDG, College of Education, University of Hawaii.
- Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense making in mathematics. En D.A. Grouws (Ed). *Handbook of Research on Mathematical Teaching and Learning*. pp. 334-370. Macmillan Publishing Company. New York.
- Sfard, A. (1987). Two conceptions of mathematical notions: Operational and structural. En J.C. Bergeron, N. Herscovics, y C. Kieran (Eds): *Proceedings of the 11th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. 3, pp.162-169. Montréal, Canada: Université de Montréal.
- Socas, M.M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. Cap. V, pp. 125-154. En Rico, L. y otros: *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Ed. Horsori. Barcelona.
- Socas, M. M. (1999). Perspectivas de investigación en Pensamiento Algebraico. *Actas del III Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, pp. 261-282. Diputación de Valladolid. Valladolid.
- Socas, M. M. (2001). *Investigación en Didáctica de la Matemática vía Modelos de competencia. Un estudio en relación con el Lenguaje Algebraico*. Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna.
- Socas, M. M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas. Análisis desde el enfoque Lógico Semiótico. *INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XI*, pp. 19-52.
- Socas, M.M. y otros. (1989). *Iniciación al Álgebra*. Ed. Síntesis. Madrid.
- Socas, M.M. y Palarea, M.M. (1996). El uso de sistemas de representación con imágenes en la Enseñanza-aprendizaje del Álgebra escolar. *Actas del Simposium Internacional sobre la "Matemática actual". XXV años de Matemáticas en la Universidad de la Laguna*. pp. 507-521. Secretariado de Publicaciones de la Universidad de La Laguna.
- Socas, M.M. y Palarea, M.M. (1997). Las fuentes de significados, los sistemas de representación y errores en el álgebra escolar. *Uno. Lenguajes Algebraicos*, Vol. 14, pp. 7-24.
- Socas, M.M.; Ruano, R.; Palarea, M. M. y Hernández, J. (2007). Treinta años de investigación en Pensamiento algebraico. Una propuesta de agenda. En Sagula, J.E. y otros (Eds.). *Memorias del 9no simposio de educación matemática*. Full Paper: Cognición y aprendizaje en Matemáticas, pp. 751-774. Buenos Aires: Edumat.
- Sutherland, R. (1987a). A study of the use and understanding of algebra related concepts within a Logo environment. En J.C. Bergeron, N. Herscovics, y C. Kieran. *Proceedings of the 11th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 1, pp. 241-247. Montréal, Canada: Université de Montréal.
- Sutherland, R. (1987b). What are the links between variable in Logo and variable in algebra. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 8(1-2), pp.103-130.
- Sutherland, R. y Hoyles, C. (1986). Logo as a context for Learning about variable. En *Proceedings of the tenth International Conference for the Psychology of Mathematics*. pp. 301-306. University of London, Institute of Education: London, U.K.
- Sutherland, R.; Rojano, T.; Bell, A. and Lins, R. (Eds.) (2001). *Perspectives on School Algebra*. Dordrecht: Kluwer.
- Ursini, S. (1994). *Pupils' Approaches to Different Characterizations of Variable in LOGO*. PhD Thesis. University of London Institute of Education.
- Usiskin, Z. (1988). Conceptions of School Algebra and Uses of Variables. En A. Coxford (Ed.), *The Ideas of Algebra K-12* (pp. 8-19). Reston, Virginia: NCTM.
- Van Dooren, W.; Verschaffel, L. y Onghena, P. (2003). Pre-service teachers' preferred strategies for solving arithmetic and algebra word problems. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 6, 27-52.



- Vega, M. de (1985). *Introducción a la psicología cognitiva*. Madrid: Alianza.
- Vergnaud, G. (1988). Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algebre. En C. Laborde (Ed.), *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathematiques et de l'informatique* (pp. 189-199). Paris: La Pensée Sauvage.
- Vygotsky, L. S. (1973). Aprendizaje y desarrollo intelectual en la edad escolar. En Luria, Leontiev, Vygotsky y otros. *Psicología y Pedagogía*. Madrid. Akal.
- Wagner, S. y Kieran, C. (Eds) (1989). *Research issues in the Learning and Teaching of Algebra*. Volume 4. N.C.T.M. Lawrence Erlbaum Associates. Reston. Virginia. Hillsdale N.J.
- Wagner, S., Rachlin, S.L. y Jensen, R.J. (1984). Algebra Learning Project: Final report. Athens: University of Georgia. Department of Mathematics Education.
- Zaskis, R. y Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 379-402.

**Martín Socas Robayna**, Doctor en Matemáticas, es Catedrático de Didáctica de la Matemática de la Universidad de La Laguna. Coordinador del grupo de investigación en Didáctica de la Matemática: Pensamiento numérico, algebraico y analítico. Fundador y responsable de la línea de investigación: Enfoque Lógico Semiótico (ELOS). Miembro de la Comisión de Educación de la RSME. Autor de múltiples publicaciones en Educación Matemática sobre Pensamiento numérico y algebraico, resolución de problemas y formación del profesorado de Matemáticas.