

## UNA PROPUESTA PARA CONTRIBUIR A LA COMPRESIÓN DE LA DERIVADA

María del Socorro García González, Crisólogo Dolores Flores  
 Universidad Autónoma de Guerrero  
 mgargonza@gmail.com, cdolores2@gmail.com

México

**Resumen.** Esta investigación es motivada por la detección de un problema concreto en un curso de Cálculo Diferencial en estudiantes principiantes universitarios de la Universidad Autónoma de Guerrero, México. Una cantidad significativa de ellos escasamente comprende el concepto derivada. Por tal razón, se propone el objetivo de elaborar una propuesta que ayude a los estudiantes a mejorar la comprensión del concepto en cuestión. El sustento teórico que fundamenta este trabajo es la Teoría de la Actividad. Y el marco metodológico al que se rige es la Metodología de la Enseñanza de la Matemática.

Una vez analizado los resultados arrojados de la puesta en escena de la propuesta se observa una comprensión aceptable en una estudiante de la población con la que se trabajó. Poco más de la mitad de los estudiantes aún presentan una comprensión débil del concepto en cuestión, y el resto posee una comprensión aún deficiente del concepto.

**Palabras clave:** comprensión, derivada, variación, conversión entre registros

**Abstract.** This research is motivated by the detection of a particular problem in a Differential Calculus course at first year university undergraduate students, in the Autonomous University of Guerrero, Mexico. A significant number of students barely understand the concept of derivative. For this reason, the proposed objective contributes to improve the understanding of the concept of derivative.

The theoretical foundation of this work is the Activity Theory. And the methodological framework is based in the Methodology the Teaching of Mathematics. After analyzing the results obtained in the staging of the proposal, we observed an acceptable understanding in a student of the population. Just over half the students still have a weak understanding of the derivative, and the rest still have a poor understanding of the concept.

**Key words:** understanding, derivative, variation, conversion between records

### Introducción

Con base en la revisión de algunas investigaciones realizadas en Matemática Educativa, a nivel bachillerato tocante los conceptos límite y derivada, se concluye que la mayoría de los estudiantes sólo logran un dominio razonable de los algoritmos algebraicos para calcular límites y derivadas; sin embargo escasamente comprenden el significado de esos algoritmos que realizan (García y Navarro, 2010; Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2008; Dolores, 2007). A diferencia de estas investigaciones, nuestro propósito es dirigido al trabajo con estudiantes de Nivel Superior, en específico, estudiantes de primer año de Licenciatura en Matemáticas. Centramos la atención en el concepto derivada.

Para obtener evidencia de lo que los alumnos conocen sobre la derivada, se realizó una encuesta a los grupos que cursaban el primer año de dicha licenciatura en la Universidad Autónoma de Guerrero (45 alumnos en total), en ella se les pedía contestar la pregunta ¿qué es la derivada de una función? Los resultados indican que gran parte de los estudiantes tienen

ideas alejadas de lo que es la derivada de una función (la identifican con una fórmula), y sólo el 15% da evidencia de tener una idea más cercana de la definición (la identifican con pendiente de la recta tangente, límite, razón de cambio).

Esta situación nos permitió identificar un problema concreto de aprendizaje vinculado a la práctica escolar en un escenario concreto, por tanto motiva nuestra investigación, a saber: la escasa comprensión del concepto derivada en estudiantes de primer año de licenciatura en matemáticas. Debemos aclarar que si bien emitimos este juicio a partir de la sola definición del concepto, la justificación se basa en que desde nuestro punto de vista, conocer la definición de un concepto es una de las actividades fundamentales para comprenderlo.

La razón por la que abogamos a la comprensión del concepto es que creemos de acuerdo con Jungk (1986), que ésta es fundamental para poder aplicar lo aprendido de forma segura, al mismo tiempo que es esencial para comunicarlo.

El sustento teórico que fundamenta este trabajo, es la Teoría de la Actividad (TA). Y el marco metodológico al que se rige es la Metodología de la Enseñanza de la Matemática (MEM). La población con la que se trabajó fueron estudiantes de primer año de licenciatura que han decidido estudiar la carrera de Matemáticas. Al detectar el problema de la escasa comprensión del concepto derivada, convenimos en que la propuesta se introdujera sin un carácter riguroso de la Matemática, más bien se busca la manera de acercar a los alumnos al concepto de forma sencilla pero significativa, misma que puede ser la base para el formalismo matemático que sin duda tendrán que desarrollar los participantes en sus cursos posteriores para enunciar proposiciones o construir demostraciones.

Por lo dicho anteriormente, la propuesta se apoya en el enfoque variacional y se ha centrado en Dolores (1999). De él se adoptan las ideas de elaborar una introducción intuitiva e informal que permita desarrollar ideas variacionales en los estudiantes, mismas que les posibiliten la comprensión del concepto derivada; de tal forma que la derivada sea un concepto desarrollado para cuantificar, describir y pronosticar la rapidez de la variación en fenómenos de la naturaleza o de la práctica. Debido a ello, se decidió usar como base para el diseño de las actividades, el libro: *Una introducción a la derivada a través de la variación*. En esta obra, se aportan elementos didácticos cuyo fin es propiciar una mejor comprensión de las ideas y conceptos básicos del Cálculo, en especial aquellos que tienen una relación estrecha con la derivada.

## Elementos teóricos y metodología

Debido a que nuestra intención es proponer actividades que ayuden a los alumnos a comprender el concepto derivada, es necesario aclarar a qué nos referimos cuando hablamos de la palabra comprender, a continuación lo hacemos.

En este trabajo asumimos que se *comprende algo de un concepto* cuando el estudiante: puede indicar ejemplos (1), conoce y utiliza correctamente su denominación (2), nombra propiedades (3), indica contraejemplos (4), da varias definiciones (5), identifica casos especiales (6) y casos límite (7), conoce relaciones de este con otros conceptos (8), conoce una sucesión de indicaciones para reconocer un representante del concepto dado (9) y cuando pueda usarlo o aplicarlo en la resolución de problemas o situaciones (10). A estas 10 actividades las hemos caracterizado como *fundamentales para comprender un concepto*, particularmente nos interesa el concepto derivada.

Para llevar a cabo la investigación se siguieron 4 puntos específicos:

- ❖ Diseño de la propuesta,
- ❖ Prueba de diagnóstico a los estudiantes participantes
- ❖ Puesta en práctica de la propuesta
- ❖ Prueba de valoración de la propuesta

Para el diseño de la propuesta se adoptó como marco metodológico a la MEM específicamente lo referente a los fundamentos lógicos de la elaboración y formación de conceptos. Se tomaron como ejes directrices a la variación y la conversión entre registros.

Los problemas de los que se formó la propuesta estuvieron basados en el libro *Una introducción a la derivada a través de la variación*, escrito por Dolores (1999).

Una vez diseñada la propuesta se pone en escena con un grupo de 23 estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas en la UAM de la UAGro, durante un periodo de 3 semanas. Antes y después de esta puesta se aplica a los estudiantes una prueba (conformada por un cuestionario) donde son contempladas las 10 actividades que se han caracterizado como fundamentales para comprender un concepto y que han sido mencionadas al inicio de este apartado.

La finalidad de las pruebas de diagnóstico y evaluación es poder comparar lo que los estudiantes son capaces de hacer antes y después de la puesta en práctica de la propuesta diseñada y con ello poder percatarnos de la mejora o no, en la comprensión del concepto de interés en los estudiantes participantes.

### La teoría de la actividad: Base para la orientación de la propuesta

La Teoría de la Actividad, aporta elementos para orientar la actividad cognoscitiva, es el lugar de encuentro interdisciplinar donde se estudian las diferentes formas de las prácticas humanas, tanto en el ámbito individual como social, al mismo tiempo.

Leontiev (1981) describe que una actividad está compuesta por sujeto, objeto, acciones y operaciones. El *sujeto* es la persona (o grupo) comprometida con la actividad. El *objeto* (como objetivo), es mantenido por el sujeto y motiva la actividad, generando una determinada dirección de acción. Esta dirección puede cambiar a lo largo de la actividad. Las *acciones* son lo que se entiende normalmente por tareas. Las *operaciones* son acciones llevadas a cabo de forma automática, esta rutina se adquiere con la práctica y repetición de la misma acción en el tiempo. Las operaciones dependen de las condiciones bajo las que la acción se está llevando a cabo. A su vez, la actividad tiene 4 momentos principales en que transcurre: *orientación, ejecución, control y corrección.*

### La metodología de la enseñanza de la matemática

Bajo la perspectiva de la MEM se distinguen dos vías principales para formar un concepto, la vía inductiva y la vía deductiva. En la primera el concepto se desarrolla por medio de descripciones y explicaciones, hasta llegar a la definición. En la segunda, se parte de la definición del concepto y mediante el análisis de ejemplos se descubre el contenido y extensión del concepto. Para nuestros fines y de acuerdo a nuestro objetivo de investigación, seguiremos la vía inductiva. De esta forma el proceso total de elaboración de conceptos por la vía inductiva se conforma de tres fases: *Consideraciones y ejercicios preparatorios, formación del concepto y asimilación del concepto.* Estas son explicadas en la sección siguiente.

### Estructura de la propuesta

En el plano del contenido matemático la propuesta se organiza en torno de la variación, misma que se constituye como un eje directriz. En el plano cognitivo se organiza en torno del eje directriz tendiente a la conversión entre registros (geométrico, numérico, algebraico y verbal). Respecto del primer eje, se trata de acercar a los estudiantes a tres nociones físicas fundamentales: la variación, la rapidez promedio de la variación y la rapidez instantánea de la variación.

Desde la TA, el conocimiento se ubica en la práctica, es decir cuando el sujeto realiza una actividad, desde esta perspectiva teórica, se considera que la actividad está compuesta por cuatro momentos. La *orientación* del sujeto, la *ejecución*, el *control* y la *corrección*, de acuerdo a los intereses perseguidos por este trabajo, sólo serán tomados en cuenta los tres primeros

momentos. Estos momentos junto con las fases propuestas por la MEM, son la clave para delimitar las tres fases de las que se compone la propuesta que tiene el objetivo de contribuir en la mejora de la comprensión del concepto derivada. A continuación explicamos a detalle cada una de las fases de que consta la propuesta diseñada.

### Fase 1. Orientación: Consideraciones y ejercicios preparatorios

La *orientación* del sujeto desde la TA está basada en los esquemas referenciales de que dispone e incluye la planificación de las futuras acciones. Lo que requiere que el trabajo se inicie a partir de lo que el estudiante ya conoce, esto se corresponde con la fase de consideraciones y ejercicios preparatorios propuesta por la MEM.

Esta fase tiene el objetivo de preparar a los estudiantes en el trabajo con el fenómeno del cambio para más tarde poder relacionar estas ideas con las propias de la derivada. Aquí se desarrollan temas a través de una secuencia de actividades, con la que se espera que los estudiantes se percaten que cuando ocurren cambios, estos se comportan de manera distinta dependiendo principalmente de la fórmula de la función que los describe.

### Fase 2. Ejecución: Formación del concepto

Delimitada desde la MEM por la fase de *formación del concepto*; constituye el centro de la propuesta, ya que en ésta se pretende arribar a la definición del concepto derivada con todo y sus características esenciales. Desde la TA, el momento de *ejecución* consiste en la realización práctica de las acciones encaminadas a que el estudiante llegue a la definición del concepto derivada en el contexto físico primeramente, acción que se acentúa en lastres secuencias de actividades que se han propuesto para desarrollar esta fase.

Aquí se trabaja con la motivación para formar el concepto derivada como velocidad instantánea (contexto físico), dicha motivación la constituye un problema en el que se tiene que calcular la velocidad de un cuerpo en un instante determinado, en este momento y resultado de la fase I, los alumnos sólo conocen la fórmula para calcular velocidad media, precisamente esta limitante es la que los conducirá a buscar una forma factible que les permita dar solución al problema planteado.

*Problema: Motivación*

*Un cuerpo se mueve de tal forma que la relación entre las distancias que recorre respecto del tiempo está dada por la fórmula  $s(t)=20t-5t^2$ , ¿cuál es la velocidad de este cuerpo exactamente en  $t=1$  segundo?*

Para la solución de este problema, el alumno recurre a la fórmula para el cálculo de la velocidad media como un recurso para dar solución al problema, ante la imposibilidad del uso de tal recurso, se propone como una vía factible el uso de las aproximaciones numéricas, esto es, se proponen acercamientos muy pequeños hacia el tiempo en cuestión ( $t=1s$ ) para analizar el comportamiento de las velocidades medias y poder emitir un resultado de la velocidad buscada, misma que se encuentra gracias al recurso del concepto *límite*. Llegando con ello a la noción de velocidad instantánea, como límite de las velocidades medias, cuando el tiempo es infinitamente pequeño ( $\Delta t \rightarrow 0$ ).

En la estructura de la propuesta, se pretende generalizar el concepto derivada aparecido en el contexto físico, con el uso de otros registros, tales como el numérico, el geométrico, el algebraico y el verbal. Siguiendo a Duval, por registro de representación se entiende un sistema de signos utilizados para representar una idea u objeto matemático (en este caso la derivada) y que además cumple con las siguientes características: es identificable, permite el tratamiento, esto es, la manipulación y transformación dentro del mismo registro y, por último, permite la conversión, consistente en la transformación total o parcial en otro registro.

Los registros trabajados son, el *registro verbal*, que está delimitado por el lenguaje, el *registro algebraico*, donde se prioriza el uso de la escritura mediante expresiones algebraicas, el *registro numérico*, en él se hace énfasis en el uso de sucesiones numéricas y el *registro gráfico*, donde prevalece el uso de imágenes o figuras.

La conversión entre registros de la que se habla, se fundamenta en la idea de Duval (1998) de que para la comprensión de un concepto es necesaria la coordinación de los diferentes registros de representación del concepto, siendo suficiente con la coordinación de al menos dos registros de representación. Bajo esta idea creemos que la conversión entre registros de representación es una parte fundamental para comprender un concepto.

### Fase 3. Asimilación del concepto

Delimitada desde la MEM por la fase de asimilación del concepto y desde la TA por el momento de *ejecución* que consiste en la realización práctica de las acciones encaminadas a que el estudiante logre la asimilación del concepto derivada y el momento de *control*, entendido como la regulación sistemática de las acciones que se pretenden sean realizadas por el estudiante y que se acentúan en las 10 actividades consideradas como fundamentales para comprender un concepto. El objetivo que se persigue es que el estudiante desarrolle las ejercitaciones, profundizaciones, sistematizaciones y aplicaciones, y los repasos del concepto. Para ello, se elabora una secuencia de actividades en la que son contempladas las actividades

que hemos considerado como fundamentales para comprender un concepto. Por cuestiones de espacio, no son mostradas en este escrito.

### La puesta en práctica de la propuesta

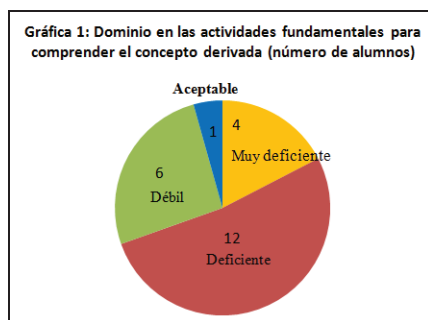
La población con la que se trabajó estuvo formada por uno de los dos grupos de primer año de la Licenciatura en Matemáticas, de la Unidad Académica de Matemáticas, de la Universidad Autónoma de Guerrero. Los estudiantes de este grupo se encontraban cursando la asignatura de Cálculo I, y no habían abordado en clase el tema de derivada, sólo sabían de este, lo que en sus cursos de bachillerato abordaron. Se trabajó con ellos por un período de 3 semanas, con 6 sesiones de 50 minutos cada una. Este grupo estaba formado por 23 alumnos. Las sesiones trabajadas fueron desarrolladas de manera diferente a las clases del curso de Cálculo I, y es que de acuerdo a los argumentos de los estudiantes, las clases de cálculo normalmente consistían en exposiciones del profesor y de poca participación por parte ellos, quienes sólo se dedicaban a copiar lo que estaba escrito en la pizarra.

Por el contrario, ahora se les proporcionaron a todos los alumnos participantes secuencias de actividades, mismas que fueron resueltas mediante el trabajo en equipo. Los equipos fueron formados en un principio por afinidad, posteriormente conforme se resolvían las diferentes secuencias, se volvían a integrar equipos, de tal forma que un alumno trabajara con todos sus compañeros. En todo momento el papel de los investigadores fue una especie de guía para los alumnos, quienes discutían los temas tratados en las secuencias y resolvían los problemas planteados, posteriormente los resultados obtenidos por cada equipo eran sometidos a revisión por todo el grupo, llegando de esta forma a un consenso que daba solución a dichos problemas.

La primera clase en la que se trabajó con los alumnos, se les pidió contestar el cuestionario de diagnóstico (donde fueron contempladas las 10 actividades que hemos caracterizado como fundamentales para comprender el concepto derivada), se les dijo que la intención de este era percatarnos de los conocimientos que sobre derivada tenían como consecuencia de sus cursos de Cálculo del Bachillerato. Todos excepto un alumno integrante del grupo contestaron la prueba, esto debido a que faltó el día en que este se aplicó. Después de la puesta en escena de la propuesta, ésta se valoró con un cuestionario de evaluación igual al aplicado en el diagnóstico, la finalidad de esto fue constatar la mejora o no, de la comprensión de la derivada en los estudiantes participantes.

## Resultados

El análisis que se hizo de las producciones de los estudiantes fue de carácter cuantitativo-cualitativo; para medir la mejora de la comprensión del concepto se usó una escala de medición basada en el incremento de la cantidad de respuestas correctas del cuestionario de evaluación, respecto de la prueba de diagnóstico, la graduación fue la siguiente: De 0% a 20%, mejora *Muy deficiente*, de 21% a 40%, mejora *Deficiente*, de 41% a 60, mejora *Débil*, de 61% a 80%, mejora *Aceptable* y de 81% a 100% mejora *Significativa*. Aunado a lo anterior, se tomaron en cuenta la cantidad de respuestas incorrectas obtenidas, así como la solución de los diferentes grupos de actividades. De la misma forma que han sido considerado para emitir juicios de mejora o no en la comprensión, el desempeño del alumno en los cursos y su disposición al trabajo. La gráfica siguiente exhibe los resultados obtenidos por el grupo de alumnos participantes.



Gráfica 1: Resultado de los alumnos participantes

Una vez analizados los resultados arrojados y con base en las pruebas de diagnóstico y evaluación, observamos que no hubo mejoría significativa en los estudiantes que participaron en la prueba, pero si una comprensión aceptable en una estudiante de la población con la que se trabajó. Ella realizó aceptablemente todas las actividades propuestas, actividades que hemos caracterizado como fundamentales para la comprensión del concepto derivada, además durante la puesta en práctica de la propuesta, destacó entre sus compañeros por ser quien logró involucrarse más en las sesiones de trabajo, al participar en ellas, exponer sus puntos de vista sobre los temas tratados, así como sus dudas, y apoyar a sus compañeros cuando lo necesitaban.

Sólo 6 estudiantes presentan una comprensión *débil* del concepto en cuestión, un estudiante no logró mejorar su comprensión, pues los resultados obtenidos en el cuestionario de evaluación fueron menos favorables que los del cuestionario de diagnóstico. Y el resto de los estudiantes poseen una comprensión ubicada en las escalas *deficiente* y *muy deficiente*.



Aunado a lo anterior, una vez aplicada la prueba de evaluación, logró notarse una mejora en el dominio de las actividades fundamentales para comprender el concepto derivada; sin embargo aún se percibe un escaso dominio en cuatro de ellas, dichas actividades coinciden con las que se presentaron en la prueba de diagnóstico, éstas fueron las relacionadas a: poder indicar ejemplos para el concepto tratado; estar en condiciones de indicar contraejemplos del concepto y de fundamentar por qué estos no pertenecen a la extensión del concepto; poder señalar casos especiales y conocer las relaciones con los demás conceptos.

### Conclusiones

La puesta en escena de la propuesta diseñada ha permitido confirmar en esta investigación que ante una de las tantas dificultades que puede haber en el aula de clases, en este caso en particular la escasa comprensión de un concepto, el trabajo del profesor como principal actor que busca en su labor aminorar estos inconvenientes en sus estudiantes va más allá de diseñar y proporcionar herramientas con las que los estudiantes puedan trabajar y como lo propugna el constructivismo, vayan construyendo su “propio conocimiento”, sino junto con las herramientas debe involucrarse a los estudiantes para que sean ellos quienes en interacción con sus pares y el propio profesor se responsabilicen y apropien de su “propio conocimiento”.

### Referencias bibliográficas

- Dolores, C. (1999). *Una introducción a la derivada a través de la variación. Serie cuadernos Didácticos*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Dolores, C. (2007). *Elementos para una aproximación variacional a la derivada*. México: Díaz de Santos.
- Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F.Hitt (Ed), *Investigaciones en matemática educativa* (pp. 173-201), México: Grupo editorial Iberoamérica.
- García, M. y Navarro, C. (2010). Una alternativa para trabajar con límites especiales. *Números 75(1)*, 105-120.
- Jungk, W. (1986). *Conferencias sobre la metodología de la enseñanza de la matemática 2*. Cuba: Editorial Pueblo y Educación.
- Leontiev, A. (1981). *Actividad, Conciencia, personalidad*. Cuba: Editorial Pueblo y Educación.
- Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en Didáctica de la Matemática. *Revista Latinoamérica de Investigación en Didáctica de la Matemática 11(2)*, 267-296.