

UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS FUNCIONES EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA CON EMPLEO DE DIFERENTES REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA

María Inés Ortega Arcega, Elena Nesterova, Saydah Mendoza Reyes.

Universidad Autónoma de Nayarit

majua9@hotmail.com

Campo de investigación: Lenguaje matemático

México

Nivel: Superior

Resumen. *En este trabajo se reportan los resultados de la aplicación de la propuesta didáctica para el aprendizaje de las funciones exponencial y logarítmica con empleo de diferentes registros de representación semiótica. La propuesta se basó en las ideas de la teoría constructivista y la teoría de representaciones semióticas (Sandoval y Díaz Barriga, 2002; Pozo, 1999; Duval, 1998; Pluvinage, 1998); se diseñó un manual para el uso del software Winplot, un cuaderno de trabajo y se seleccionaron tópicos de lectura. Para determinar si existe una relación lineal entre el nivel logrado por los alumnos en el desarrollo de las actividades y sus resultados de aprendizaje se realizó un análisis de correlación.*

Los resultados señalan que el empleo de diferentes registros de representación semiótica fueron un factor muy importante en el aprendizaje de los participantes.

Palabras clave: función exponencial y logarítmica, registros de representación semiótica

Desarrollo

La enseñanza de las matemáticas que prevalece en la Universidad Autónoma de Nayarit consiste en exposición, por parte de profesores, de procedimientos algoritmo-algebraicos para resolver problemas, sin llegar a una comprensión plena de los conceptos matemáticos involucrados por parte de los alumnos. Lo anterior motivó una búsqueda de los métodos efectivos de la enseñanza y el aprendizaje para que los alumnos logren comprender las funciones exponencial y logarítmica y aplicar sus conocimientos en la solución de problemas. En la enseñanza de las funciones suele dársele más peso a los procedimientos analíticos y de algoritmización, dejando de lado argumentos visuales por la concepción que de la matemática y de su enseñanza se posea, sin considerar, la estructura cognitiva de los estudiantes a los que se dirige. El concepto de función devino protagónico hasta que se le concibe como una fórmula, es decir, hasta que se logró la integración entre dos dominios de representación: el álgebra y la geometría (Cantoral y Farfán, 1998). La complejidad del concepto de función se refleja en las diversas concepciones y diversas representaciones con las que se enfrentan los estudiantes y profesores.

En este sentido Sandoval y Díaz Barriga, 2002; Duval, 1998 señalan que en una situación de aprendizaje, las representaciones forman parte de los elementos que se estructuran en la interacción entre el sujeto y el objeto-concepto que se forma. Por su parte Pluvinage (1998) afirma que existen tres tipos de objetos en relación con sus diferencias ontológicas: objetos físicos, culturales y matemáticos. El triángulo *significante-significado-referente* sólo es relevante para los objetos físicos, los demás objetos necesitan otros esquemas semánticos. Los objetos matemáticos son aquellos donde ningún objeto real se puede considerar como un representante perfecto. Se necesitan por lo menos dos representaciones diferentes (lenguaje natural, algebraico-simbólico, gráfico-geométrico, numérico, etc.) para tener una idea de dicho objeto. Por lo anterior resultó trascendente el diseño y aplicación de una propuesta didáctica para el aprendizaje de las funciones exponencial y logarítmica con empleo de diferentes registros de representación semiótica.

El experimento se diseñó para nueve sesiones, tal como se describen a continuación.

Sesión 1. Practicas con Winplot en la construcción de las graficas de funciones. El objetivo fue introducir a los alumnos al manejo del programa. Ejemplo

Grafica en winplot $\log_3 x$, destaca con colores diferentes los puntos (3,1); (9,2); (27,3); (253,5). Utiliza la caja de diálogos para cambiar los intervalos.

Sesión 2. Actividad 1. Breve Historia de las funciones exponencial y logarítmica y sus aplicaciones en la ciencia. La intención de ésta sesión fue motivar y despertar el interés del estudiante para el aprendizaje de las funciones.

Buscar en la red libros que muestren las diferentes aplicaciones de las funciones y exponer sus resultados ante el grupo.

Sesión 3. Actividad 2. Función exponencial y sus propiedades. El objetivo, dar conocer la función y sus propiedades (la forma analítica grafica y verbal).

Determina y describe en forma analítica, verbal y gráfica el dominio, rango, carácter de crecimiento e intersección con los ejes de coordenadas de la función:

$$m = y \cdot h, \mathbf{b} \mathbf{) } z = y * y, \text{ si } y = 2^x \text{ y } h = 2^{2x}$$

Sesión 4. Actividad 3. Traducción entre las representaciones analíticas, graficas y verbal de la función exponencial y sus propiedades. El propósito analizar el comportamiento gráfico

y analítico de las funciones exponenciales y pasar con facilidad de una representación a otra.

Resuelve en forma analítica y verbal intersecciones, dominio, rango, carácter de crecimiento la función $y = 3^{2x}$. ¿De que otra forma se puede representar?

Sesión 5. Actividad 4. Función logarítmica y sus propiedades (enfoque analítico, gráfico y verbal). Al finalizar la actividad los alumnos deberán definir y graficar la función logarítmica a partir de su fórmula.

Sean las funciones $y = \log_5 x$, $y = \log_6 x$.

Resuelve analíticamente comprueba graficando.

¿En que punto se cortan ambas funciones? ¿En que intervalo del dominio se encuentra una función por encima de la otra. Y por debajo en que zona?

Sesión 6. Actividad 5. Traducción entre las representaciones analíticas, gráficas y verbal de la función logarítmica y sus propiedades.

¿Cuál es la inversa de $y = \log_4 x$?, expresa en forma verbal y gráficamente.

Sesión 7 y 8. Actividad 6 y 7. Solución analítica de ecuaciones logarítmicas y exponenciales.

La investigación se llevó a cabo de manera pre-experimental y transversal con un grupo del tercer semestre de la licenciatura en matemáticas de la UAN en el curso Cálculo Diferencial, siendo la variable independiente *el nivel logrado por los alumnos en el desarrollo de las actividades con diferentes registros de representación semiótica y sus resultados de aprendizaje* la variable dependiente. Para determinar la existencia entre ambas se examinó en términos del coeficiente de correlación. De esta manera, la hipótesis nula se plantea bajo el criterio de que el coeficiente de correlación de la población r , es igual a cero y la hipótesis alternativa, el coeficiente de correlación de las variables es diferente de cero se utilizó la prueba t Student, la cual sigue una distribución t con grados de libertad, donde r es el coeficiente de correlación de la muestra y n el número de observaciones (datos). Se consideró un nivel de significativo del 5%.

La recopilación de los datos del experimento se realizó mediante la observación directa del desempeño de los estudiantes en las actividades en el aula (variable dependiente). En relación a la

variable dependiente, la recolección de los datos se realizó mediante un examen final, que estuvo constituido por veinticinco ítems, se calificó en una escala del 1 al 100, cada ítem tenía un valor de 4 puntos.

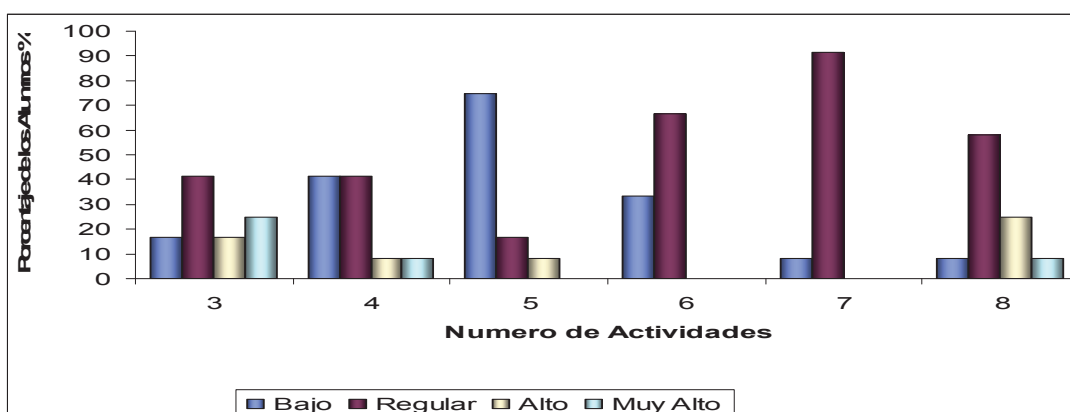
Derivado de la propuesta experimental, se observó que durante la *Sesión 1*. Los alumnos realizaron sin problema la actividad; con respecto a la *Sesión 2*. Los alumnos no presentaron problemas aplicados a la función logaritmo, algunos argumentaron que no hallaron aplicaciones y otros que no las entendieron. Las preguntas de los alumnos estuvieron enfocadas en la construcción de la función logaritmo algunas de ellas fueron ¿cómo sacar las escalas de dominio y rango si las grafico en papel?, ¿Por qué en los problemas de aplicación la expresión algebraica viene dada?, ¿por qué no se genera con un problema? En la *Sesión 3 y 4* los estudiantes pretendían utilizar el programa winplot para graficar, argumentando que les era más fácil resolver el problema observando la gráfica. No obstante fue necesario limitar el uso del software pues en la parte de a objetivo de las sesiones era que trabajaran solo en forma analítica; la *Sesión 5* los educandos se mostraron fuera de contexto dado que no había realizado la actividad extractase, para la *Sesión 6* los jóvenes utilizaron los conocimientos de las sesiones anteriores para resolver ejercicios de análisis de la función logaritmo, aunque los alumnos no tenían ningún conocimiento de logaritmos la representación más utilizada por ellos fue la analítica. La sesión se prolongó a una hora más de la programada. Las sesiones 7, 8 y 9 se realizaron sin complicaciones aparentes.

Análisis de datos y recomendaciones

De acuerdo con la información obtenida, se organizó de tal manera que la siguiente figura expresa una comparación entre los niveles de aprendizaje logrados por los alumnos a través del cuaderno de trabajo durante las sesiones 3, 4, 5, 6, 7 y 8.

En el histograma se pudo observar que en la actividad 3 el nivel de aprendizaje es regular. En las actividades 4 y 5 baja el nivel de aprendizaje y vuelve a subir a partir de la actividad seis.

Figura 1. Histograma de los niveles de aprendizaje logrados por los alumnos.



Niveles de aprendizaje: Bajo < 60 – Regular 60 a 79 – Alto 80 a 89 - Muy alto 90 a 100

El análisis de las respuestas dadas por los alumnos al examen final permitió describir el resultado final de aprendizaje. Para llevar a cabo el análisis las preguntas se agruparon por ítems de la siguiente forma: definición, operación, representación analítica – gráfica; ejercicio de análisis de las funciones exponenciales y logarítmicas y representación gráfica – analítica, analítica gráfica de ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

Tabla 1. Registro de los datos de evaluación de la posprueba.

Categorías	Alumnos											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1. La existencia del valor igual a cero de la función exponencial	4	4	4	4	4	4	0	4	4	0	0	4
2. Rango de la función exponencial	4	4	4	4	0	4	0	4	4	4	0	0
3. Dominio de la función exponencial.	4	4	4	4	4	4	0	4	4	4	0	4
4. La Intersección de la gráfica de la función exponencial con el eje Oy.	4	4	4	4	4	4	4	4	4	0	0	4
5. Valor de la función exponencial para $x=1$.	4	4	4	4	4	4	4	0	4	0	0	0
6. Carácter de crecimiento de las funciones exponenciales.	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4

7. Multiplicación de funciones exponenciales.	4	4	0	4	0	4	0	4	4	4	4	4
8. Relación entre las funciones exponencial y logarítmica.	4	4	0	4	4	4	0	4	4	0	0	4
9. Puntos nulos de la función logarítmica.	4	4	4	4	4	4	0	4	4	4	4	4
10. El dominio de la función logarítmica.	4	4	4	4	4	0	0	0	0	4	4	0
11. El rango de la función logarítmica.	4	4	4	4	4	4	4	0	0	4	4	0
12. La gráfica de la función logarítmica.	4	4	4	4	4	4	4	0	0	4	4	4
13. El producto de las funciones exponenciales.	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
14. La identificación de las gráficas de las funciones exponenciales.	4	4	4	4	4	0	4	4	4	4	4	4
15. Determinación de una función exponencial por su valor dado.	0	0	4	0	0	4	4	4	4	4	4	4
16. La expresión analítica de la función logarítmica dada en forma gráfica.	4	4	4	0	4	4	4	4	4	4	4	4
17. Determinación de los valores de una función logarítmica dada en la forma gráfica.	0	4	4	0	0	4	4	4	4	4	0	0
18. Determinación de los valores de una función logarítmica dada en la forma gráfica.	0	4	4	0	0	4	4	4	4	4	0	0
19. Bosquejo de las graficas de las funciones logarítmicas.	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
20. Punto de intersección de las gráficas de las funciones logarítmicas.	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
21. Comparación de las gráficas de las funciones logarítmicas.	0	0	4	4	4	0	4	0	0	4	4	4
22. Determinación de una función logarítmica por su valor dado.	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4

23. Expresión analítica de una ecuación representada en la forma grafica.	4	4	4	4	0	4	0	0	0	0	0	4
24. Solución analítica de la ecuación logarítmica.	4	4	4	4	0	4	4	4	4	4	4	4
25. Solución gráfica de la ecuación logarítmica.	4	4	4	4	0	4	0	0	0	0	0	4
Puntaje total por la actividad	84	92	92	84	68	88	64	72	72	76	60	76

Se observa que en el conjunto de ítems, definición y propiedades, la mitad de los alumnos dieron respuestas correctas. El rango y el valor de $x = 1$ de la función exponencial fueron los errores comunes en esta parte del examen. En el tercer grupo de ítems definición y propiedades de la función logarítmica, el 67% de los estudiantes dieron respuestas incorrectas o no contestaron, los errores que se observaron fueron el dominio de la función. Hubo confusión en los dominios y rangos de las funciones exponencial y logarítmica.

En las representaciones analíticas – gráficas de la funciones exponencial y logarítmica el 91% de los alumnos dieron respuestas correctas. En los ejercicios de análisis de la función exponencial y logarítmica, el 66% y el 58% respectivamente de alumnos contestaron correctamente. Los errores más comunes fue la conversión de función logarítmica a función exponencial.

En los ítems donde se evalúan la ecuación exponencial representación gráfica-analítica y ecuación logarítmica representación analítica –gráfica, la mitad de los estudiantes dieron respuestas correctas, la otra mitad procedió a resolver como una función exponencial o logarítmica según fuera el caso, es decir, las respuestas que deberían ser ecuaciones las daban como funciones.

De igual manera se aplicó una encuesta de opinión que fué de 12 preguntas que correspondieron a las siguientes categorías de análisis: uso de Winplot ítem del 1 al 3; lecturas ítem del 4 al 6; actividades ítem del 7 al 10 y apoyo del investigador e infraestructura 11 y 12 ítem; de donde se tiene que la mayoría de las respuestas de opinión sobre el uso de Winplot como apoyo para graficar y analizar los problemas correspondientes se agrupan en las categorías mucho y bastante. Esto refleja que el uso de la computadora fue favorable para el aprendizaje y para realizar las actividades.

La información se sistematizó en la siguiente tabla.

Tabla 2. Datos sobre las respuestas de los alumnos al cuestionario.

Preguntas	Alumnos											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
¿Consideras que el uso del programa Winplot favoreció tu aprendizaje?	4	4	5	4	5	4	5	4	5	4	5	3
¿Consideras que el uso del programa Winplot mejoró tu participación en clase?	4	4	5	4	3	4	4	4	5	3	3	4
¿Te agradó usar el programa Winplot?	4	4	5	3	5	4	4	4	5	5	4	3
¿Consideras que las lecturas favorecieron tu aprendizaje?	5	5	3	3	4	5	4	4	5	4	5	4
¿Te agradó leer las lecturas?	3	3	3	2	3	4	4	3	5	3	5	2
¿Consideras que las lecturas mejoraron tu participación en clase?	3	3	2	3	3	4	4	3	5	4	5	3
¿Consideras que el haber realizado las actividades de las funciones exponencial y logarítmica con empleo de diferentes registros de representación semiótica favoreció tu aprendizaje?	4	4	4	4	4	5	4	4	5	4	5	5
¿Consideras que las actividades de las funciones exponencial y logarítmica con empleo de diferentes registros de representación semiótica mejoraron tu participación en clase?	4	4	5	4	4	5	5	5	5	4	5	5
¿Te agradó realizar las actividades de las funciones exponencial y logarítmica con empleo de diferentes registros de representación semiótica?	3	3	4	4	4	5	4	5	5	4	5	4
¿El tiempo destinado para cada actividad fue adecuado?	3	3	4	1	3	4	5	3	4	5	4	4

¿El apoyo del investigador durante las actividades fue útil?	5	5	3	2	3	5	4	3	5	4	3	4
¿La infraestructura del laboratorio de cómputo, como apoyo para el desarrollo del curso fue adecuado?	3	3	5	2	4	4	5	3	5	4	3	5
Puntaje total por la actividad	15	13	14	18	15	18	11	17	10	14	6	13

Las respuestas de los alumnos a la pregunta si las lecturas favorecieron su aprendizaje el 33 % consideró mucho y el 42% bastante. Sin embargo, las respuestas sobre si hubo agrado en las lecturas y si mejoro su participación en clase se agrupan en bastante y regular.

Las opiniones sobre las actividades de las funciones exponencial y logarítmica con empleo de diferentes registros de representación semiótica la mayoría de las respuestas se agrupa en las categorías mucho y bastante. Esto refleja que la opinión de la mayoría de los estudiantes fue favorable ya que mejoró el interés por el tema y favoreció el aprendizaje. En relación al tiempo destinado por actividad, apoyo del investigador e infraestructura las categorías se agruparon en mucho bastante y regular.

Conclusiones

Los resultados obtenidos con el coeficiente de correlación y la prueba t reflejaron que las actividades de la propuesta didáctica para la enseñanza de las funciones exponencial y logarítmica con empleo de diferentes registros de representación semiótica fueron un factor muy importante en al aprendizaje de los estudiantes de la licenciatura en matemáticas de la UAN. Se rechazó la hipótesis nula y se aceptó la hipótesis alternativa.

Con la propuesta se pone de manifestó como el uso de distintas representaciones favorece el aprendizaje, esto puede deberse a diferentes razones, dos de ellas son: que permite a los alumnos se formen una imagen conceptual, pudiendo escoger la representación más adecuada para cada problema y que compensa las limitaciones de unas representaciones con otras.

De la encuesta de opinión se puede concluir que las lecturas, los materiales y las actividades motivaron a los estudiantes y mejoró su interés por aprender. El uso del software Winplot fue de

gran ayuda en el aprendizaje de los alumnos pues beneficio la parte visual de las funciones. También pudo observarse que el docente influye de manera positiva en el aprendizaje de los estudiantes cuando prepara materiales adecuados, evalúa cada actividad y realiza con sus alumnos un análisis de los errores.

Las actividades realizadas incorporan nuevos procedimientos de análisis en temas de matemáticas. Procedimientos que no sólo son útiles para la resolución de las funciones exponenciales y logarítmicas sino también para abordar otros temas. El método gráfico modifica los procesos de pensamiento de los alumnos. Éstos pasan de realizar un proceso que en su mayoría es mecánico (cuando llegan a la solución por métodos algebraicos), a un proceso de observación y deducción.

Los alumnos deben interpretar la información dada por el gráfico y conectarla a sus conocimientos previos de modo que puedan expresarla en términos algebraicos o en lenguaje natural para justificar las preguntas que se le formulan. Para lo cual necesitan, comprender lo que representan los signos o símbolos matemáticos y su relación con el objeto matemático representado. Enfrentar a los alumnos con situaciones sencillas como las aquí propuestas, les hará más fácil el camino para coordinar, sin contradicciones, diferentes registros de representación.

Las dificultades detectadas son: manejo pobre de conceptos y procedimientos de aritmética y álgebra básica, escaso uso de diferentes sistemas de representación semiótica para resolver problemas de las funciones exponencial y logarítmica y para el aprendizaje conceptual de las funciones. También se detectó la dificultad que tienen para coordinar la lectura de un hecho expresado en un registro determinado y en la expresión o formulación en otro registro.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R., y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción del análisis. *Epsilon* 42,14(3), 854-856.

Duval, R. (1998). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento*. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en matemática Educativa II* (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Pluinage, F. (1998). Los objetos matemáticos en la adquisición del razonamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en matemática Educativa II* (pp. 1-15). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Sandoval, C.I. y Díaz Barriga, A.E. (2002). Ecuaciones diferenciales de 1^{er} orden una perspectiva didáctica con geometría dinámica. *Memorias de la XII semana regional de investigación y docencia en matemática* (pp. 189-196). México: Universidad de Sonora.

Pozo, J. I. (1999). *Teorías cognitivas del aprendizaje*. Sexta edición. España: Ediciones Morata.