

LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE VARIABLE A TRAVÉS DEL TRABAJO CON LA HOJA ELECTRÓNICA DE CÁLCULO

Alejandro Olea Díaz

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados. (México)

olea170@yahoo.com

Campo de investigación: pensamiento algebraico. Nivel educativo: básico

Palabras clave: variable, Emat, comprensión, modelo 3UV

Resumen

Dado el carácter multifacético del concepto de variable (como número general, como incógnita y en una relación funcional), resulta importante investigar la comprensión que de él se tiene cuando los alumnos de segundo grado de secundaria trabajan en ambientes computacionales. En esta investigación se analizará el uso de la hoja electrónica de cálculo como apoyo a dicha comprensión. Asimismo, se revisarán las manifestaciones posteriores que hay en el trabajo con lápiz y papel. Se emplean actividades del libro Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología: Matemáticas con la hoja electrónica de cálculo (SEP, 2000) [Proyecto Mexicano]. Para el desarrollo de la investigación se emplearán como instrumentos el cuestionario, la observación y la entrevista, en tanto que para el análisis, se considera el modelo 3UV que sugieren Ursini y Trigueros (1998).

Introducción

El desarrollo del pensamiento algebraico requiere, a su vez, del desarrollo del concepto multifacético de variable. Esta investigación tiene la finalidad de revisar la influencia que el trabajo con la hoja de cálculo puede tener en la comprensión de dicho concepto.

Problema de investigación

Considerando la sugerencia implícita de que la instrucción convencional no brinda suficientes oportunidades para que los alumnos construyan la idea de número general y desarrollen un significado para el símbolo usado para representarlo; así como para los demás usos de la variable (SEP, 1994, p. 151), se pretende contestar las siguientes preguntas:

- ¿La comprensión de los distintos usos de la variable se ve favorecida con el trabajo con la hoja de cálculo?
- ¿Hay algún uso en particular de la variable que se privilegie al trabajar con la hoja electrónica de cálculo y particularmente con las actividades seleccionadas?
- ¿En qué medida las actividades con la hoja electrónica de cálculo favorecen el trabajo con lápiz y papel respecto al uso de la variable?

Marco teórico

El trabajo con álgebra y particularmente con la variable y sus distintos usos representa una gran dificultad para los estudiantes. Estudios como el de Wagner (1983) señalan la complejidad del concepto de variable y las dificultades que tienen los estudiantes que inician el estudio del álgebra, y particularmente en trabajar con la variable. Identifica algunos factores que hacen que los símbolos literales sean fáciles de usar, pero difíciles de comprender. Encontramos otros estudios (por ejemplo, Booth, 1984; Kieran, 1980, 1988; Mason, et al., 1985; Filloy y Rojano, 1985; Ursini, 1990a; Philipp, 1992) en los que se han investigado y catalogado las dificultades y errores más

comunes que cometen los alumnos que se inician en el estudio del álgebra elemental. Señalan, por ejemplo, que los alumnos:

- Tienden a usar métodos aritméticos para resolver problemas de tipo algebraicos;
- Buscan resultados numéricos;
- Tienen dificultad para entender que mientras en aritmética las operaciones se ejecutan y se obtienen resultados numéricos, en álgebra las operaciones se indican y su ejecución efectiva queda suspendida;
- Tienden a interpretar el signo de igualdad solo como un signo de acción mientras que en álgebra, éste signo suele usarse para representar equivalencias;
- Tienen serias dificultades con la adquisición de conceptos nuevos, propios del álgebra, por ejemplo, con el concepto de variable.

Ursini (1996) señala que es factible ofrecer a los estudiantes experiencias que los lleven a acercarse a ideas algebraicas antes de emprender un estudio formal de esta disciplina. Asimismo, refiere que una explicación plausible para algunas de las dificultades que encuentran los alumnos que se inician en el estudio del álgebra, podría ser la falta de antecedentes en tratar numéricamente problemas matemáticos de distinta naturaleza, que los lleven hacia la necesidad y aceptación de ideas algebraicas. Señala, también, que un usuario competente del álgebra es capaz de, interpretar la variable de modos distintos dependiendo del problema en el cual aparece, simplificar una expresión algebraica, de trabajar con la idea de variación cuando las variables están involucradas en una relación funcional. En estudios más recientes (Ursini y Trigueros, 1998; Ursini, Trigueros y Lozano, 2000) encontraron que después de haber llevado varios cursos de álgebra los estudiantes que ingresan a las universidades siguen teniendo serias dificultades con la comprensión de los usos elementales de la variable. Estos resultados generan las siguientes preguntas: ¿Qué ocurre con la comprensión del concepto de variable a través de la enseñanza en la secundaria y en la preparatoria? ¿Hay algún uso de la variable que se fortalece más que otros? Los aspectos considerados como más relevantes para un manejo competente del álgebra elemental y que han sido destacados en otras investigaciones (Usiskin, 1988; Bell, 1996; Ursini, 1996) son: el uso de la variable como incógnita, como número general y en una relación funcional. Estos tres aspectos son considerados en esta investigación, para lo cual, se analiza la influencia que tiene el trabajo con la hoja de cálculo y las actividades que se proponen del libro *Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología* (Emat).

Para el análisis de los resultados de esta investigación, se utilizará el modelo que sugieren Ursini y Trigueros (1998) en donde manifiestan que una conceptualización adecuada de cada uno de los aspectos de la variable requiere de ciertas capacidades básicas, a saber:

Variable como número general

La conceptualización de la variable como número general implica:

G1	Reconocer patrones, percibir reglas y métodos en secuencias numéricas y en familias de problemas.
G2	Interpretar la variable simbólica como la representación de una entidad general, indeterminada, que puede asumir cualquier valor.
G3	Deducir reglas y métodos generales en secuencias y familias de problemas
G4	Manipular (simplificar, desarrollar) la variable simbólica.
G5	Simbolizar enunciados, reglas o métodos generales.

Variable como incógnita específica

La conceptualización de la variable como incógnita específica implica:

I1	Reconocer e identificar en una situación problemática la presencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando las restricciones del problema.
I2	Interpretar las variables simbólicas que aparecen en una ecuación como la representación de valores específicos.
I3	Sustituir la variable por el valor o los valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero.
I4	Determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas realizando las operaciones algebraicas y/o aritméticas.
I5	Simbolizar las cantidades desconocidas identificadas en una situación específica y utilizarlas para plantear ecuaciones.

Variable en relación funcional

La conceptualización de las variables en relación funcional implica:

F1	Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales o expresiones analíticas).
F2	Determinar los valores de la variable dependiente, dados los valores de la independiente.
F3	Determinar los valores de la variable independiente, dados los valores de la dependiente.
F4	Reconocer la variación conjunta de las variables involucradas en una relación funcional, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales o expresiones analíticas)
F5	Determinar los intervalos de variación de una de las variables, dado el intervalo de variación de la otra.
F6	Simbolizar una relación funcional, con base en el análisis de los datos de un problema.

Señalan, también, que la posibilidad de darle significado al concepto de variable implica, además:

- Superar la simple realización de cálculos y operaciones con letras o con símbolos, para alcanzar una comprensión de las razones por las que funcionan estos procedimientos.
- Prever hacia donde conducen dichas operaciones.
- Establecer relaciones entre los distintos aspectos que asume la variable en el contexto del álgebra elemental.

Finalmente, Dettori, et al. (2001) realizan un estudio en el que trabajan con la hoja de cálculo en la resolución de problemas concernientes al razonamiento algebraico, incluyendo la comprensión de los diferentes usos de la variable. Señalan que la hoja de cálculo puede empezar el camino del aprendizaje del álgebra, pero no tiene las herramientas para completarlo. Siendo capaz para escribir partes de las relaciones entre los objetos considerados, pero no para sintetizar y manipular la relación completa. *Es como saber palabras y frases de un idioma, pero no ser capaz de ordenarlas para completar oraciones.* Concluyen que la hoja de cálculo puede ser útil para introducir el álgebra, con algunas limitaciones: las hojas de cálculo tratan sólo con números, o *direcciones* de celdas que contienen números y funciones. Variables, números desconocidos y relaciones no pueden ser directamente manejadas, ni formalmente manipuladas, sólo pueden indicarse. Sea como

sea, al usar la hoja de cálculo, la cual por sí misma permitiría a los estudiantes resolver problemas mediante ensayo y error, bajo la dirección del profesor puede permitirles:

- Llegar a estar consciente de la activación de un nuevo proceso de modelación para resolver problemas.
- Entender lo que significa resolver una ecuación, aún antes de su manejo.
- Razonar acerca del dominio y limitación de un problema con la finalidad de reducir el número de intentos necesarios para alcanzar su solución.
- Introducir la generalización, abstracción y síntesis, las cuales son habilidades cognitivas fundamentales en matemáticas.

Método

El trabajo de investigación se llevó a cabo en una escuela secundaria de la Ciudad de México, con 14 alumnos de segundo grado de entre 13 y 14 años de edad. Primeramente se aplicó, de manera individual, un cuestionario que consta de 45 preguntas. El cuestionario fue tomado de Ursini y Trigueros (2003) y tiene la finalidad de revisar la comprensión del concepto de variable en sus distintos usos. Conforme a los resultados del cuestionario se eligieron 6 alumnos, a los cuales se les observó durante el trabajo que desarrollaron al resolver 9 actividades (3 actividades implican el uso de la variable como número general, 3 como incógnita y 3 en una relación funcional) del libro Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología: Matemáticas con la hoja electrónica de cálculo (SEP, 2000). Al concluir la resolución de las actividades, se les hizo una entrevista que permitió analizar la comprensión que tienen del concepto de variable, conforme al modelo 3UV que sugieren Ursini y Trigueros (1998) en donde señalan el requerimiento de ciertas capacidades para lograr una conceptualización adecuada de cada uno de los aspectos de la variable. Finalmente, se les aplicó, nuevamente, el cuestionario ya referido.

Tanto el cuestionario como las actividades de Emat, se analizaron con la finalidad de ubicar cada uno de las preguntas dentro de cada aspecto particular de los distintos usos de la variable.

A partir del análisis de los resultados del cuestionario inicial, se hizo un perfil de los alumnos. Posteriormente, se revisó el cuestionario final con miras a contrastar éste, con los resultados del primer cuestionario y con el trabajo intermedio de las actividades de Emat; todo con base al modelo 3UV.

Resultados

A partir de la aplicación del cuestionario inicial se pudo observar que, en cuanto al uso de la variable como número general, la mayoría tiene dificultades para enfrentarse a cualquier aspecto; sin embargo, les beneficia trabajar a partir de la observación de una secuencia de figuras en donde se les pide reconocer el patrón o llegar a la simbolización; asimismo, logran enfrentarse a este uso de la variable cuando se involucra el área de figuras geométricas sencillas.

En cuanto a la variable como incógnita específica, pocos son capaces de reconocer que en una ecuación, la variable representa valores específicos. Logran obtener, sobre todo en ecuaciones en donde hay una sola ocurrencia de la incógnita, el valor de la variable, sin sustituirla. Casi nadie logra, sea a partir de enunciados o problemas, simbolizar las cantidades desconocidas y utilizarlas para plantear ecuaciones.

En general, manifiestan problemas para trabajar con la variable en relación funcional; sin embargo logran, a partir de tablas, reconocer la variación conjunta de las variables involucradas en una relación funcional. Además, logran determinar los valores de una de las variables, dados los de la otra, siempre y cuando, en una tabla, los datos de, al menos una de las variables, estén completos, aún cuando no estén ordenados. La mayoría tiene dificultades para trabajar cualquier aspecto de la variable en relación funcional a partir de expresiones analíticas o problemas.

En relación al trabajo con la hoja electrónica de cálculo, y al analizar las observaciones registradas de las actividades sobre la variable como número general se puede decir que los sujetos seleccionados logran enfrentarse exitosamente, aunque con algunas dificultades, a la mayoría de los aspectos involucrados en las actividades. En cuanto a las actividades trabajadas para revisar la variable como incógnita específica, se pudo concluir que los estudiantes presentan problemas, sobre todo, para encontrar el valor de la incógnita a través del trabajo con la hoja de cálculo, de hecho, prefieren enfrentarse a este aspecto, cuando hay un trabajo previo con lápiz y papel; esto es, primero resuelven la ecuación en papel y posteriormente comprueban la solución obtenida en la hoja de cálculo. Al enfrentarse primero al trabajo con la hoja de cálculo, manifiestan inseguridad para validar la solución obtenida. No se observan dificultades para enfrentarse al trabajo con los distintos aspectos que se involucran en las actividades con relación a la variable en una relación funcional.

Al contrastar los resultados del cuestionario inicial con los resultados del cuestionario final, se puede mencionar que hay diferencias que dejar ver una influencia positiva del trabajo con la hoja electrónica de cálculo; esto es, que favorece la comprensión de determinados aspectos de los distintos usos de la variable. Lo anterior no refleja que se favorezca el trabajo algorítmico en lápiz y papel pero sí, la comprensión para enfrentarse al trabajo con la variable.

Conclusiones

En general, se pudo observar que, independientemente del aspecto de la variable que estuvieran trabajando, los estudiantes manifiestan dificultades cuando tienen que, a partir de un problema, plantear una expresión algebraica. Es importante señalar que el uso de la computadora, en conjunto con las actividades que se resolvieron, permitió que salieran a la luz algunas concepciones erróneas de las estudiantes, mismas que lograron superar con el trabajo con la hoja de cálculo.

Referencias bibliográficas

- Bell, A. (1996). Algebraic thought and the role of a manipulative symbolic language. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), (1996). *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching* (pp. 151-154). Kluwer Academic Publishers.
- Booth, L. (1984). *Algebra: Children's Strategies and errors*. NFER-NELSON, Windsor.
- Dettoni, G., Garuti, R. y Lemus, E. (2001). From arithmetic to algebraic thinking by using spreadsheet. en R. Sutherland, et al. (Eds.), *Perspectives on School Algebra* (pp. 191-207). Kluwer Academic Publishers.
- Filloy, E. and Rojano, T. (1985). Obstruction to the acquisition of elemental algebraic concepts and teaching strategies. En L. Steffe (Ed.), *Proceedings of the ninth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp.154-158). Noordwijkerhout, The Netherlands.
- Kieran, C. (1980). The interpretation of the equal sign: Symbol for an equivalence relation vs. an operator symbol. En R. Karplus (Ed.), *Proceedings of the fourth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 163-169). Berkeley, California.

- Kieran, C. (1988). Two different approaches among algebra learners. En A.F Coxford and A. P. Shulte (Eds.), *The ideas of Algebra K-12* (pp. 90-96).
- Mason, J., Graham, A., Pimm, D. and Gower, N. (1985). *Routes to/Roots of Algebra*, The Open University Press, Great Britain.
- Philipp R. (1992). The many uses of algebraic variables. *Mathematics Teacher*, Vol. 85 No. 7, 557-561
- SEP (1994). Matemáticas. *Libro para el maestro*. Educación secundaria.
- SEP (2000). Matemáticas con la hoja electrónica de cálculo. *Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología*. Educación secundaria.
- Wagner S. (1983). What are these things called variables? *Mathematics Teacher* 76, 474-479.
- Ursini, S. (1990a). Generalization process in elementary algebra: Interpretation and Symbolization, *Proceedings of the fourteenth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 149-156). Oaxtepec, México.
- Ursini S. (1996). Experiencias preálgebraicas. *Educación matemática*. Vol. 8 No. 2, 33-40.
- Ursini S., y Trigueros M. (1998). Dificultades de los estudiantes universitarios frente al concepto de variable. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II*, Grupo Editorial Iberoamérica.
- Ursini S. Trigueros M. y Lozano D. (2000). La conceptualización de la variable en la enseñanza media. *Educación Matemática* Vol. 12 No. 2, 27-48.
- Ursini S. y Trigueros M. (2003). First-year undergraduates' difficulties in working with different uses of variable. *Mathematics Education* Vol. 12 (pp. 1-29).
- Usiskin Z. (1988), Conceptions of School Algebra and Uses of Variables. En A. F. Coxford y A. P. Shulte (Eds.) *The ideas of Algebra K-12* (pp. 8-19). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.