

## COMPRENSIÓN DE MEDIDAS DE DISPERSIÓN: CASO DE LA LICENCIATURA EN PSICOLOGÍA

María Magdalena Espinosa Martínez  
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México  
[eimm1968@yahoo.com.mx](mailto:eimm1968@yahoo.com.mx)

Campo de investigación: Probabilidad, estadística y combinatoria; Nivel educativo: Superior

*Resumen.* Con la aplicación de un mismo cuestionario antes y después de la enseñanza de las medidas de dispersión, se pretende identificar cambios y constantes en las respuestas de los estudiantes a las preguntas que plantea, sobre la base de la caracterización de tipos de conocimiento de un concepto, propuesta por Pollatsek et al (1981). El interés está dirigido al estudio de su comprensión de las medidas de dispersión, en particular el rango, la desviación media absoluta, la desviación estándar y la variancia, luego de una enseñanza en el aula del tema. Sobre los resultados obtenidos el conocimiento de cálculo del rango prevaleció, y aunque los estudiantes identifican las expresiones simbólicas no es suficiente para emplearlas.

### *1. Pregunta y objetivos de la investigación*

En la Psicología hay una gama de teorías que abogan para sí el mérito de disponer de un conjunto de instrumentos, técnicas así como métodos científicos de investigación que permiten el estudio del hecho psíquico. El diseño, corrección, aplicación e interpretación de protocolos de observación, cuestionarios y encuestas; la psicometría cuya tarea es cuantificar manifestaciones del hecho psíquico; el método clínico facilita la construcción de criterios que posibilitan comprender, caracterizar, pronosticar y diagnosticar la normalidad, son entre otras, manifestaciones de la aplicación de la Estadística en la Psicología. Por tanto, es pertinente realizar una investigación para estudiar la comprensión que tienen los estudiantes de las medidas de dispersión, que posibiliten la utilización más precisa de los instrumentos y métodos psicológicos, que implican un tratamiento estadístico.

Se realizó una investigación con estudiantes de la licenciatura en Psicología para identificar su comprensión de las medidas de dispersión, es decir, sus procesos y estrategias puestas en juego cuando acometen cuestiones que las implican. Por sus aplicaciones y por su contribución formativa, se tiene interés en el rango, la desviación media absoluta, la desviación estándar y la variancia.

La pregunta de investigación general, a saber ¿qué comprensión tienen los estudiantes de Psicología de las medidas de dispersión?, se desdobló en las siguientes preguntas: ¿qué cálculos, tipos de expresión (tablas, gráficas,...) e interpretación de las medidas de dispersión ponen en juego los estudiantes al resolver ejercicios y/o problemas que impliquen medidas de dispersión?, ¿qué tipo de explicaciones e interpretaciones respecto a la situación de origen de un conjunto de datos proporcionan los estudiantes a sus resultados de la determinación de las medidas de dispersión respectivas, sus procesos y estrategias puestas en juego cuando acometen cuestiones que implican esas medidas?

El objetivo general de la investigación es: Identificar la comprensión de los estudiantes, de la licenciatura en Psicología, de las medidas de dispersión (rango, desviación media absoluta, desviación estándar y variancia) luego de su enseñanza.

La presentación de resultados se dirige a mostrar aquellos que competen al análisis de las respuestas dadas por parte de los estudiantes en ambas aplicaciones del cuestionario y que permite dar respuesta a la pregunta de investigación que refiere a sus expresiones, cálculos e interpretaciones.

## *2. Enfoque teórico*

Las aportaciones de otros autores para esta investigación son las siguientes: Steinbring (1991), por su propuesta de procesos de desarrollo del concepto matemático y cómo se construye su significado a través de la interacción social en el aula; Heitele (1975), por su propuesta de ideas fundamentales de estocásticos para un currículo completo; Gigerenzer y Hoffrage (1995) establecen la relación entre formatos de presentación de la información y la inferencia bayesiana. Pollatsek, Lima y Well (1981), por el planteamiento sobre tipos de conocimiento: de cálculo, analógico y/o funcional de la media aritmética que expresan los estudiantes; estos autores establecen que la comprensión instrumental puede ser entendida como el reconocimiento de una tarea de la que se conoce una regla particular o el algoritmo de cálculo para la obtención de la medida. Además, la distinguen de la comprensión relacional, la cual consiste en disponer de un esquema o un conjunto de estructuras conceptuales que posibiliten resolver una clase más amplia de problemas. Subyacen a estas comprensiones: un *conocimiento funcional*, referido a la medida como un concepto relacionado con el mundo real; un *conocimiento de cálculo*, que incluiría un algoritmo complementado con información acerca de cómo obtener el resultado no sólo correcto, sino además de la forma pertinente, y un *conocimiento analógico*, el cual podría incluir imágenes visuales, diagramas, tablas o figuras, porque la medida se expresa de forma distinta a la planteada en la situación inicial.

## *3. Proceso y escenarios de investigación*

Por el interés particular que se tiene en la interpretación de las respuestas y expresiones dadas por parte de los estudiantes se determina un enfoque cualitativo (Eisner 1998) en el estudio.

Para identificar las condiciones a las que se sujetaría la investigación, se planteó la realización de lo siguiente: a) analizar el Programa de la asignatura Estadística I, que corresponde a los contenidos de Probabilidad y Estadística de la licenciatura en Psicología, así como los libros propuestos por el programa de estudio y los sugeridos por el profesor titular de la asignatura. Para identificar la congruencia en el planteamiento que hay de las medidas de dispersión entre el programa y los textos, el enfoque con el cual se presentan, la estructura de los capítulos o lecciones, entre otros aspectos se acometió: b) analizar las sesiones de estudio de las medidas; c) diseñar y aplicar un cuestionario en dos momentos, antes y después de la enseñanza de las medidas de dispersión y después del análisis de las respuestas, identificar la comprensión de las medidas por la intervención de la enseñanza; d) diseñar y aplicar una entrevista para conocer el fundamento lógico que los estudiantes dan a sus respuestas. Dentro del contexto general de la investigación, el diseño, la aplicación del cuestionario así como el análisis de las respuestas son los resultados que se presentarán en el presente.

Se diseñó un cuestionario para conocer, de los estudiantes, sus expresiones — gráfica, lengua natural, notación simbólica, tabla o figuras — interpretaciones y cálculos utilizados al resolver ejercicios y/o problemas que implican rango, desviación media absoluta, desviación estándar y variancia, antes y después de las sesiones de enseñanza de las Medidas de Dispersión. El cuestionario constó de 13 preguntas en los resultados

que obtuvieron Pollatsek, Lima y Well (1981) sobre los tipos de conocimiento que los estudiantes tienen de la media, así como lo propuesto por Gigerenzer (1995) acerca de que los formatos de presentación de la información generan determinados procesos cognitivos. En cuanto al contenido, se consideraron las cuatro medidas de dispersión de interés para el estudio. La Tabla I resume la estructura del cuestionario.

El instrumento solicitó el proceso de solución completo de cada pregunta, sea para trazar una gráfica donde localizar las medidas de dispersión, sea para desarrollar un algoritmo para obtener un resultado numérico o para proponer una interpretación de lo obtenido. Con once preguntas abiertas la finalidad fue identificar el procedimiento operativo que el estudiante pone en juego al darles respuesta; además de obtener información sobre la relación que establecen entre medidas puestas en juego o relacionan lo obtenido del cálculo con el mundo real. Dos preguntas de opción múltiple implican el conocimiento analógico de las medidas de dispersión (ver Tabla 1.1).

La pregunta I solicita el cálculo del rango, desviación estándar y varianza así como la interpretación de lo obtenido; la pregunta II pide cálculo e interpretación del rango y la variancia; la pregunta III demanda el valor mínimo del rango a partir del rango y del valor mayor; a partir de la relación entre la desviación estándar y la media aritmética de dos conjuntos datos la pregunta IV pide su interpretación; la pregunta V solicita establecer la relación entre el concepto y la expresión de la medida; la pregunta VI pide identificar la expresión simbólica de cada medida estadística; la pregunta VII solicita explicar la relación entre la desviación estándar, la media aritmética y un dato en particular dado en la curva normal; la pregunta VIII solicita un ejemplo para explicar la utilidad del rango, la desviación media absoluta y la varianza; la pregunta IX solicita el cálculo de la desviación y su interpretación a partir de las medias aritméticas de un par de gráficas a comparar; la pregunta X se refiere a la desviación estándar; en la pregunta XI, dada la desviación estándar se solicita  $n$ ; la pregunta XII demanda graficar e interpretar el rango y la desviación estándar a partir de una tabla de datos; la pregunta XIII requiere calcular, graficar e interpretar la desviación media y la varianza dada una gráfica de barras.

Tabla 1.1 Estructura del cuestionario por pregunta.

	Medidas de tendencia central y de dispersión					Tipo de conocimiento			Tipo de expresión				
	Ma	R	m	Ds	V	A	C	F	Es	G	Ln	On	T
I		•	•	•	•		•	•			•	•	•
II	•	•			•		•	•			•		
III		•					•	•	•		•		
IV	•			•		•		•			•		
V	•	•	•	•	•	•			•		•		
VI		•	•	•	•		•		•		•		
VII	•			•		•		•		•	•		
VIII		•	•		•	•		•			•		
IX		•		•		•	•	•		•	•		
X	•			•				•			•	•	
XI	•			•			•	•			•		
XII		•		•				•					•
XIII			•		•	•	•	•		•	•		

---

Simbología: Ma, Media aritmética; R, Rango; Dm, Desviación media absoluta; Ds, Desviación estándar; V, Varianza  
A, Analógico; C, Cálculo; F, Funcional  
Es, Expresión simbólica; G, Gráfica; Ln, Lengua natural; On, Orden numérico; T, Tabla

---

Dos sesiones previas al estudio de las medidas de dispersión en el curso de Estadística I, se aplicó el cuestionario a la población integrada por treinta estudiantes de primer semestre del nivel Licenciatura. Luego de que el curso de Estadística I concluyó el estudio de medidas de dispersión, se aplicó el mismo cuestionario. Las dos aplicaciones se realizaron bajo las mismas condiciones, es decir, aún cuando la aplicación fue grupal se respondió en forma individual con lápiz, uso de calculadora para realizar operaciones aritméticas básicas, sin formulario y sin previo aviso de la aplicación, ni al profesor ni a los estudiantes.

Las dos aplicaciones del cuestionario se realizaron al mismo grupo de estudiantes, cada una duró dos horas, se efectuó fuera del horario de la clase de estadística sin la presencia del profesor titular; entre ambas aplicaciones hay 40 días de diferencia.

#### *4. Resultados*

De la primera aplicación son los siguientes: En la pregunta I. De 29, 24 estudiantes respondieron correctamente a la solicitud sobre el cálculo del rango; 21 de 24 desarrollaron un procedimiento correcto; quince estudiantes escribieron la expresión simbólica, de los cuales 12 son correctas. Sólo cinco estudiantes respondieron a la solicitud de obtener la desviación media absoluta pero el resultado fue incorrecto porque en el proceso de cálculo para la media aritmética sólo consideraron la frecuencia y no la marca de clase. Cuatro a la solicitud de varianza tanto procedimiento como resultado fue incorrecto; sólo tres escribieron la expresión simbólica incorrectamente, dos confundieron la expresión de la media aritmética con la desviación media absoluta.

En la pregunta II. De 26, 19 estudiantes respondieron correctamente al cálculo del rango; sólo dos de 15 respondió la pregunta sobre la variancia, el resultado fue incorrecto así como la interpretación dada de los datos obtenidos por parte de tres estudiantes. Un estudiante al obtener el mismo número como resultado del cálculo del rango y de la media aritmética, concluyó que es lo mismo rango y media. Diez estudiantes distinguieron entre rango y amplitud, además de utilizar la expresión simbólica de la amplitud.

En la pregunta III. De 24, 16 estudiantes respondieron correctamente a la pregunta planteada, sólo siete expresaron el procedimiento correcto. La expresión simbólica proporcionada por cuatro fue correcta; cuatro estudiantes utilizaron unidades "kilogramo" durante el procedimiento de cálculo, pero al obtener el resultado final las omitieron. De la pregunta IV. Cuatro estudiantes organizaron la información en una tabla, pero no la interpretaron; un estudiante graficó los parámetros estadísticos pero no interpretó la gráfica.

En la pregunta VI. De 29, 27 estudiantes identificaron la expresión simbólica del rango; de 25, 13 identificaron la desviación media, seis la desviación estándar poblacional, ocho la variancia poblacional, siete la desviación estándar muestral y uno la variancia muestral. Se confundió la variancia poblacional con algún tipo de desviación, estándar o absoluta; la variancia muestral con algún tipo de desviación, estándar o absoluta; la desviación estándar poblacional con la variancia, muestral o poblacional.

En la pregunta IX. Tres estudiantes realizaron los cálculos pero son incorrectos los resultados para la desviación estándar. Las explicaciones que dieron ocho de quince, estuvieron en función de cambio de los límites del rango aun cuando el planteamiento de la pregunta indica que el rango no cambia, tres de éstos remiten a la concentración de la producción que expresan las gráficas.

De la segunda aplicación son los siguientes: En la pregunta I. Obtuvieron 19 estudiantes un resultado correcto, de éstos 18 escribieron completo y correcto el procedimiento y nueve incluyeron expresión simbólica, cinco interpretaron el resultado correctamente; ninguna hizo uso de las unidades para dar respuesta sobre las medidas solicitadas. Cinco estudiantes respondieron a la solicitud sobre la desviación media absoluta obteniendo un resultado incorrecto mientras que en el procedimiento confundieron dato con frecuencia olvidando la marca de clase. Dada en formato de tabla la situación, tres estudiantes intentan continuarla abriendo columnas (manifestando con ello el procedimiento de cálculo como en las sesiones de estudio se propone).

En la pregunta II. De 22, 19 respondieron correctamente al cálculo del rango de los cuales 16 desarrollaron el procedimiento correcto; tres emplearon unidades correctamente, siete la expresión simbólica y dos la interpretación. Uno de cinco obtuvo el resultado de la varianza correcta, sólo dos desarrollaron el procedimiento, uno es correcto y otro no. Un estudiante intentó elaborar una tabla de cálculo aún y cuando la situación no lo amerita ya que sólo son cinco datos; uno de cinco tuvo correcta la expresión simbólica.

En la pregunta III. De 19, 15 respondieron correctamente al obtener el resultado; ocho de los 15 presentaron el procedimiento correcto, tres emplearon unidades en el resultado. Aun cuando pueden conocer la expresión simbólica al despejar el valor mínimo no lo hacen correctamente. En la pregunta IV. Nueve estudiantes organizaron los datos a modo de tabla, uno graficó los datos pero incorrectamente; tres de diez escribieron una interpretación correcta mientras el resto de los estudiantes sólo describió la organización de los mismos.

En la pregunta VI. De 25, todos identificaron correctamente la expresión simbólica del rango, 22 la desviación media absoluta, ocho la desviación estándar poblacional, siete la varianza poblacional, seis la desviación estándar muestral y seis la varianza muestral. En la pregunta IX. Cinco de cinco estudiantes respondieron correctamente, dos escribieron correctamente la interpretación.

De ambas aplicaciones, los siguientes resultados obtenidos obedecen a cambios o constantes encontradas en las respuestas de los estudiantes de la primera a la segunda aplicación del cuestionario. Se considera *incremento* en un resultado cuando el estudiante en la segunda aplicación respondió completa y correctamente a la pregunta; es *igual* un resultado cuando la respuesta es incorrecta o correcta en ambas aplicaciones, y *decremento* cuando en la primera aplicación fue correcta la respuesta y en la segunda incorrecta.

En la pregunta I. Acerca del rango, cuatro estudiantes incrementaron, 15 tuvieron respuestas iguales (en ambas aplicaciones) y uno tuvo un decremento al plantear el valor de la medida de dispersión pero en el procedimiento cinco incrementaron y 11 mantuvieron igual la expresión de los procedimientos. Sobre el cálculo de la desviación absoluta un estudiante incrementó el resultado, cuatro el procedimiento.

En la pregunta II. En cuanto al resultado numérico del rango nueve estudiantes incrementaron, diez permanecieron igual y uno decrementó; sobre el procedimiento de

cálculo ocho mejoraron, diez se mantuvieron igual y en dos su desempeño decrementó; cinco estudiantes incrementaron el uso de la respectiva expresión simbólica y cuatro al dar la interpretación de los resultados obtenidos; de la variancia, uno incrementó al obtener el resultado numérico, uno en el procedimiento, uno en la interpretación y uno en la expresión simbólica. No se trata del mismo estudiante.

En la pregunta III. Del uso de la expresión simbólica un estudiante incrementó, cuatro se mantuvieron igual; en cuanto al procedimiento 14 incrementaron y dos lo realizaron igual; seis mejoraron al usar las unidades correspondientes y uno respondió igual; respecto al resultado numérico, ocho incrementaron, siete permanecieron igual y en tres su desempeño decrementó. En la pregunta IV. Cinco estudiantes tuvieron incremento al organizar los datos de la situación, tres siguieron igual; en la interpretación solicitada 11 incrementaron y uno disminuyó.

En la pregunta VI. Sobre el rango, tres estudiantes incrementaron, 22 respondieron igual; sobre la desviación media absoluta 11 incrementaron, diez contestaron igual; sobre la desviación estándar poblacional, cuatro la identificaron en la segunda aplicación, tres en ambas aplicaciones; de la desviación estándar muestral tres incrementaron, tres respondieron igual en ambas aplicaciones; acerca de la variancia poblacional, uno incrementó, cinco contestaron igual; acerca de la variancia muestral, cuatro incrementaron, dos continúan identificándola.

En la pregunta IX. Sólo un estudiante mostró incremento al obtener el resultado y emplear el procedimiento correcto. Tres estudiantes incrementaron al interpretar las gráficas, uno permaneció igual de correcto y uno disminuyó.

Tuvo lugar un cambio en el dominio de las medidas de dispersión, en particular del rango y de la desviación absoluta, manifestadas en el conocimiento de cálculo, mientras el conocimiento funcional es usado en problemas donde la desviación estándar o la variancia son puestas en juego; aun cuando pueden identificar las expresiones simbólicas no es suficiente para emplearlas. Luego de las aplicaciones en general se concluye que tuvo lugar una mejora en el conocimiento de cálculo del rango y de la desviación absoluta; el conocimiento funcional tiene un incremento cuando se aplica a la desviación estándar; el conocimiento de cálculo prevalece sobre los otros tipos de conocimiento en las respuestas de los estudiantes. El conocimiento del rango predominó mientras que el de la variancia fue el menor.

En general, el conocimiento de cálculo del rango prevaleció en las respuestas de los estudiantes; aunque el conocimiento analógico y el funcional se expresaron, no ocurrió el mismo número de veces que el de cálculo, por lo que conviene considerar que: “A menos que los ejemplos y los problemas proporcionen una práctica intensiva en la traducción de una variedad de contextos a [los diferentes tipos de conocimiento de algunos conceptos matemáticos], es poco probable que se pueda lograr la comprensión con algún grado de generalidad” (Pollatsek, 1981, pág. 14); ello implica no sólo la comprensión de la matemática sino también del mundo real donde se habita, es decir, de donde se extrae y/o aplica modelos matemáticos. El formato puesto en juego facilita la interpretación de la situación, en el caso la gráfica, más que el empleo de tablas permite la manifestación de conocimiento funcional por parte de los estudiantes.

#### *Referencias*

Eisner, E.; 1998, *El ojo ilustrado. Indagación cualitativa y mejora de la práctica educativa*. España: Paidós

Gigerenzer, G. y Hoffrage, U. (1995), Como mejorar el razonamiento bayesiano sin instrucción: formatos de frecuencia. *Psychological Review* 102, 684-704.

Heitele, D. (1975), Un enfoque epistemológico sobre ideas fundamentales de estocásticos. *Educational Studies in Mathematics* 6, 187-205.

Pollatsek, A., Lima, S. y Well, D. (1981), Concepto o cálculo: comprensión de la media en estudiantes. *Educational Studies in Mathematics* 12, 191-204.

Steinbring, H. (1991), El concepto de azar en la enseñanza cotidiana: aspectos de una epistemología social del conocimiento matemático. *Educational Studies in Mathematics* 22, 503-522.