

# Convergencia de sucesiones, niveles de Van Hiele y su repercusión en el lenguaje

*Maria de los Angeles Navarro Dominguez y Pedro Pérez Carreras*

Universidad de Sevilla y Universidad Politécnica de Valencia

manavarro@us.es pperezc@upv.es

## Resumen

El objeto de esta comunicación es describir una visualización del proceso de convergencia de una sucesión de números reales enmarcada en el modelo educativo de van Hiele. Como herramienta de trabajo para la determinación de los niveles de razonamiento de van Hiele, utilizamos la entrevista semiestructurada. Dado que el lenguaje utilizado por los estudiantes constituye un factor primordial en este modelo educativo, se incluyen las transcripciones parciales de algunas entrevistas. Este tipo de aproximación ha sido utilizado con anterioridad para estudiar otros conceptos básicos de Análisis.

## 1. Introducción

El modelo de van Hiele proporciona una descripción del proceso de aprendizaje postulando la existencia de niveles de pensamiento que no se identifican con niveles de habilidad computacional y que, en nuestro trabajo, clasificaremos como nivel 0 (predescriptivo), nivel 1 (de reconocimiento visual), nivel 2 (de análisis), nivel 3 (de clasificación y relación) y nivel 4 (de deducción formal), aunque este último no será estudiado, dada la afirmación del propio van Hiele sobre este nivel como difícilmente detectable y sólo de interés teórico. Así la aplicación de este modelo a una materia concreta necesita del establecimiento de una serie de descriptores para cada uno de los niveles estudiados, que permita la detección de los mismos. Para que el trabajo pueda ser considerado dentro del modelo de van Hiele tales niveles 1) deben ser jerárquicos, recursivos, secuenciales; 2) deben ser formulados detectando el progreso del entendimiento como resultado de un proceso gradual; 3) las pruebas de cualquier tipo que se diseñen para su detección deben recoger la relación existente entre nivel y lenguaje empleado en cada uno de ellos; y 4) el diseño debe tener como objetivo primordial la detección de niveles de pensamiento, sin confundirlos con niveles de habilidad computacional o conocimientos previos.

El modelo de van Hiele se aplicó inicialmente a conceptos geométricos en niveles elementales de los cursos de educación primaria, hasta que aparecieron en los últimos años las tesis doctorales de los profesores J. L. Llorens (1994), P. Campillo (1998), A. de la Torre (2000), C. M. Jaramillo (2000) y P. Esteban (2000), mediante los cuales se demostró la posibilidad de extender el modelo a conceptos del Análisis Matemático que se estudian en los programas de los últimos años de Secundaria y primer año de Universidad. Estas tesis han demostrado que un buen diseño de entrevista de carácter socrático, en el contexto del modelo de van Hiele, permite detectar el nivel de razonamiento de un alumno con respecto a un determinado concepto matemático. Una propiedad de los niveles de van Hiele es que cada nivel tiene un lenguaje específico, hasta tal punto que las distintas capacidades de razonamiento que van unidas a cada uno de los niveles se manifiestan de manera notoria en la expresión verbal y en el significado que se da al vocabulario utilizado.

En Navarro & Pérez (preprint) presentamos una propuesta metodológica para introducir el concepto de límite de una sucesión de números reales. Tratamos en él el problema de crear en el alumno una imagen visual adecuada del proceso de convergencia.

Para el diseño de la propuesta entrevistamos a veintiséis alumnos, siguiendo el esquema

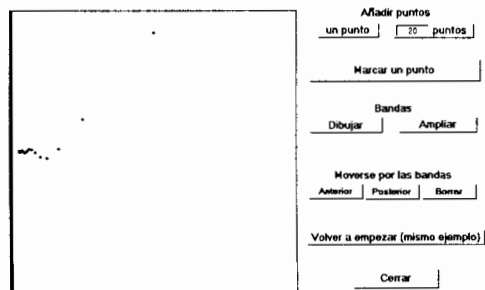
propuesto por Jaramillo & Campillo (2001). Nos referiremos a dichos alumnos por una numeración que puede entenderse como arbitraria con objeto de mantener su anonimato.

El objeto de esta comunicación es describir el método de visualización usado durante la entrevista a la que nos referimos en el apartado anterior, y exponer los descriptores de los niveles de van Hiele relativos al proceso de convergencia de una sucesión de números reales. Dado que el lenguaje constituye un factor muy importante en la determinación del nivel de razonamiento de los alumnos, y que nuestra intención era que los estudiantes expresaran su propia definición de límite de una sucesión convergente, presentamos también una descripción del lenguaje utilizado por algunos de los entrevistados en relación con el nivel de razonamiento que alcanzaron cada uno de ellos.

## 2. Visualización

Creemos que es conveniente introducir los conceptos de sucesión y de límite de una sucesión convergente de una forma intuitiva asociada al uso de la tecnología informática de la que disponemos, pues la capacidad de los ordenadores actuales permite al alumno conectar sus intuiciones de tipo geométrico con algunas ideas, particularmente problemáticas, relacionadas con el concepto de infinito. Para plasmar en imágenes la visualización elegida hemos utilizado, como asistente matemático, la pantalla interactiva que mostramos. Su uso no depende en absoluto del programa con el que ha sido diseñada, la versión 5.3 de Matlab, con el objeto de que el alumno no tenga que preocuparse de obtener la más mínima información del mismo.

En el cuadrado de la izquierda aparece la representación de la sucesión correspondiente al ejemplo estudiado. La pantalla es interactiva



en el sentido de que el alumno podrá utilizarla, como una herramienta, sin más que picar con el ratón en los distintos botones que están situados a la derecha y que indican cual es la operación que realizan. De esta forma él mismo añadirá puntos a la imagen (de uno en uno o la cantidad que, previamente, haya indicado), la ampliará en la zona que desee (dibujando una banda horizontal que delimita el cuadrado que se quiere ampliar) y podrá marcar en la línea azul los puntos que, según sus propias conjeturas, podrían ser el límite de la sucesión considerada.

No utilizamos, en ningún momento, la nomenclatura y notación propias de las sucesiones de números reales. El alumno no verá ninguna fórmula y, por supuesto, el lenguaje utilizado será lo más coloquial posible. Para ello visualizaremos las sucesiones como nubes de puntos en el plano, cuyas abscisas tienden a un límite y cuyas ordenadas son las que representan la sucesión. Con idea de que el alumno no tenga ideas preconcebidas, las nubes de puntos que manejamos serán introducidas como las pisadas de un animal invisible. El límite de la sucesión, si es que existe, vendrá dado por un punto en el segmento cuya abscisa es el límite de las abscisas de la sucesión y que el alumno entenderá como el punto hacia el que camina el animal y que identificará como el punto de estabilización de la nube. La variable  $\epsilon$  de la definición de límite será traducida en términos de anchura de una banda horizontal centrada en el límite de tal manera que la desigualdad final puede expresarse

diciendo que todos los puntos de la nube están dentro de la banda a partir de un cierto lugar o, mejor, que el número de puntos exteriores a la banda es finito. Debemos insistir en que las variables y nombres matemáticos no deben ser pronunciados en ningún momento de la exposición.

La conclusión a la que hemos llegado es que la visualización utilizada hace que el alumno se sienta inclinado a manejar por sí mismo, de una forma intuitiva, nociones y razonamientos de tipo infinito, que tradicionalmente han supuesto un obstáculo en la adquisición de este concepto. Por otra parte esta visualización creemos que contribuye a la formación de un concepto-imagen adecuado para la noción de límite de una sucesión convergente

## **1. Niveles y descriptores**

La realización de entrevistas clínicas nos permitió observar la presencia de distintos niveles de razonamiento en la construcción mental del proceso de convergencia de una sucesión que realiza el estudiante. Tales niveles pueden ser detectados a partir de las características comunes que presentan las distintas formas de resolver las cuestiones planteadas, y a partir del análisis de la evolución que se produce en el lenguaje que los alumnos van empleando a lo largo de la entrevista.

Cada alumno utilizará los recursos propios de su nivel y el estudio de este comportamiento es el que nos ha permitido hallar los descriptores de cada nivel de razonamiento en relación con el concepto estudiado:

### **Nivel 0**

Un alumno que esté en el nivel 0 debe reconocer que un punto no tiene dimensiones y que un segmento está formado por una cantidad infinita de puntos. Cualquier segmento se puede dividir en dos partes iguales y el resultado de esta división siempre son dos segmentos. El proceso de división sucesiva del segmento en dos partes iguales es un proceso que nunca acaba, es decir, es potencialmente infinito.

### **Nivel 1**

- 1.1. Una característica del alumno de nivel 1 es su reconocimiento de que las nubes de puntos son procesos potencialmente infinitos que se generan ordenadamente de una forma determinada. Si un punto es posterior a otro entonces debe estar situado en una posición más cercana a la línea azul.
- 1.2. Observan globalmente las imágenes, y llegan a la conclusión de que las nubes de puntos que se les muestran pueden tener distintos tipos de comportamiento.
- 1.3. Usan las bandas como herramienta para delimitar la parte de la imagen que quieren ampliar y usan ampliaciones sucesivas para estudiar el comportamiento de las nubes de puntos. El uso de ampliaciones es para ellos una herramienta que les permite ver la disposición de los puntos en las zonas en que estos se acumulan y por tanto les permitirá hacer aproximaciones de tipo visual cada vez más precisas.
- 1.4. Para buscar el punto de estabilización de una nube sólo tendrán en cuenta las características físicas que presenta la nube globalmente. Se fijarán en propiedades tales como la disposición simétrica de los puntos o la trayectoria recta que describen. Para la mayoría de estos alumnos los primeros puntos de la nube son importantes con respecto a su

comportamiento, porque son los que les permiten apreciar estas características más claramente.

1.5. No manejan en sus razonamientos datos o propiedades ajenos al aspecto de la nube, por este motivo no llegan a percibir la utilidad del aumento/no aumento del número de puntos que se sitúan fuera de una banda. Algunos alumnos llegan a intuir de forma implícita la información que les proporciona este dato, pero si no han llegado a reconocer perfectamente lo que es una nube de puntos y todas sus características, no llegarán a manejarlo explícitamente y no podrán avanzar en su nivel de razonamiento.

1.6. Con respecto a la definición de punto de estabilización que dará un alumno de nivel 1, siempre hará referencia al aspecto global de la nube, a la forma que tiene y al lugar al que se dirigen los puntos.

**(Diferenciación del nivel 2)** El alumno de nivel 1 que no ha llegado a nivel 2 utiliza las bandas como una herramienta que le sirve para ampliar la imagen pero no utiliza el número de puntos que hay fuera de estas bandas. Para hacer conjeturas más fiables usarán ampliaciones sucesivas sin utilizar otra información que la meramente visual. El alumno de nivel 2, en cambio, llegará a reconocer el número de puntos que quedan fuera de las bandas como una propiedad de las nubes de puntos que le aporta información acerca de su comportamiento, y que le permite hacer conjeturas cada vez más fiables acerca de la posición del punto de estabilización de una nube, si es que existe.

## **Nivel 2**

2.1. El alumno que comienza a razonar en el nivel 2 reconoce que las nubes de puntos están formadas por distintas partes y que no todas ellas le aportan la misma información.

2.2. Reconocen que los puntos que determinan el comportamiento de la nube son los últimos que van apareciendo en la imagen y prescinden de los primeros al estudiarlas.

2.3. Reconocen el punto de estabilización de una nube como aquel punto de la línea azul hacia el cual se dirigen las pisadas, asocian su existencia a la unicidad de tal punto y ambas cosas con la existencia de un único pico en la nube.

2.4. Reconocen que si el número de puntos que se sitúan fuera de una banda deja de aumentar entonces cabe la posibilidad de que la nube de puntos se estabilice y, en este caso, el punto de estabilización será interior a esta banda.

2.5. Reconocen que si el número de puntos que se sitúan fuera de una banda continúa aumentando indefinidamente, entonces la nube de puntos no se estabiliza en un punto interior a la banda considerada.

2.6. Comprenden que si una nube se estabiliza en un punto el número de puntos exteriores a una banda que lo contenga, no puede seguir aumentando indefinidamente.

2.7. Observan la conveniencia de trazar bandas cada vez más estrechas para encontrar el punto de estabilización, y algunos intuyen que todo lo que podemos obtener utilizando imágenes son aproximaciones del punto. Este será uno de los descriptores del nivel 3 que está implícito en el razonamiento de los alumnos de nivel 2 pero solamente si progresan en su nivel serán capaces de incorporarlo a su definición y a sus razonamientos.

- 2.8. No será capaz de pensar en cualquier banda sino en bandas concretas. En este nivel no se observa la necesidad de un proceso infinito de trazado de bandas cada vez más estrechas para caracterizar el punto de estabilización de una nube.
- 2.9. No es capaz de dar una definición de punto de estabilización que incluya el término “cualquier” y por esto, en su definición, incluirá que el número de puntos exteriores a una banda que lo contenga debe ser finito. En general en su definición enumerarán las propiedades que han observado y pensarán que si estas se verifican en una o varias bandas esto ya es suficiente para caracterizar al punto de estabilización de una nube.
- 2.10. **(Diferenciación del nivel 3)** El alumno de nivel 2 hará sus razonamientos con bandas concretas. No reconoce el carácter dinámico del proceso de trazado de bandas y, por tanto, no será capaz de hacer un razonamiento más general que incluya “cualquier banda”. A la hora de caracterizar el punto de estabilización de una nube dirá que “... es un punto tal que si se traza una o varias bandas centradas en él el número de puntos que se marcan fuera es finito...”. El alumno de nivel 3 será capaz de hacer razonamientos generales que incluyan el carácter dinámico del proceso de trazado de bandas. En su definición se referirá de forma genérica a bandas que pueden ser cada vez más estrechas o, si alcanza un grado de razonamiento más alto, cualquier banda.

### Nivel 3

- 3.1. Observa que si se quiere caracterizar el punto de estabilización de una nube será necesario un proceso dinámico de trazado de bandas, en las que el número de puntos que se marcan fuera sea finito, y reconoce la necesidad de que este proceso sea infinito. Ante la imposibilidad física de completarlo recurrirá a imponer la condición en una banda cualquiera lo cual le asegurará que todas las bandas del proceso infinito, que no puede completar, también la cumplen.
- 3.2. Es capaz de dar una definición de punto de estabilización informal pero correcta.
- 3.3. Es capaz de negar su definición para afirmar que el punto que se encuentra marcado, en las nubes que se le muestran, no es el punto de estabilización.
- 3.4. El grado más alto de razonamiento que, en mi opinión, se puede alcanzar con este guión es el del alumno que da una definición del siguiente tipo o similar: “El punto de estabilización es aquel que cumple la condición de que el número de puntos de la nube exteriores a cualquier banda, que esté centrada en el punto de estabilización, debe ser finito”. En las aplicaciones será capaz de negar su definición para decirnos que los puntos que le marcamos no son puntos de estabilización porque existe, al menos, una banda en la que el número de puntos exteriores es infinito.
- 3.5. Otra de las características que nos indicarán que el alumno ha llegado al grado más alto de razonamiento dentro de este nivel será que reconozca la necesidad de una definición de punto de estabilización que no se base en manipulaciones de tipo visual sino que sea de tipo formal.

## Nivel 4

El alumno que llegue a este nivel de razonamiento no solo verá la necesidad de una definición formal sino que será capaz de enunciar una definición formal coherente con la definición de tipo visual que habrá verbalizado en el nivel anterior.

### 4. Análisis del lenguaje

A medida que el nivel de razonamiento del alumno va aumentando se observa un refinamiento progresivo en su lenguaje y hay que resaltar el esfuerzo que realizan para utilizar un vocabulario más preciso. Obsérvese la diferencia existente en el lenguaje del alumno número 12 en dos momentos distintos de la entrevista cuando, en ambos, intenta explicar por qué cree él que el número de puntos exteriores a una cierta banda deja de aumentar.

En un primer momento nos dice: *“Porque...al aumentar puntos, uhm... la diferencia entre cada uno de los puntos será menor, entonces si hemos cerrado la banda... es que no sé...no sé como decir.”* Poco después se expresa de la siguiente forma: *“Porque...como he dicho antes, los puntos van encaminados hacia un punto y su dispersión es menor.”*

Este mismo alumno nos da una primera definición de punto de estabilización de la siguiente forma: *“La definición de un punto de estabilización de una nube creo que sería ehm...el punto alrededor del cual la franja que tracemos siempre...tendrá dentro todos los...infinitos números.”* Al pedirle que aplique esta definición para deducir, en un ejemplo concreto, si el punto marcado es el punto de estabilización o no lo es, el alumno observa su error y progresa en su nivel de razonamiento. Ante esto se le indica que cambie su definición si lo cree conveniente. Esta es su nueva definición: *“Es el punto alrededor del cual, la franja que tracemos siempre va a contener... siempre tendrá fuera un número finito de puntos. Esa franja se podrá hacer más pequeña, cada vez más.”* El lenguaje utilizado en esta ocasión es más refinado y preciso que el de la primera. Apenas transcurren cinco minutos entre los momentos en que da la primera y la segunda definición, sin embargo el progreso en su nivel de razonamiento produce también una notable mejora en el lenguaje y las expresiones utilizadas.

A lo largo de la entrevista también se aprecia que, dependiendo del nivel de razonamiento en el que se encuentre el alumno, se da un significado distinto a las mismas palabras. Esto se pone de manifiesto claramente cuando se le pide que dé una definición de punto de estabilización de una nube. Para los alumnos que están en el nivel 1 de razonamiento una definición es una descripción de las características que son capaces de distinguir visualmente. Cuando se les pide que den una definición de punto de estabilización las respuestas que se obtienen son todas del mismo tipo.

Así, por ejemplo, el alumno número 21 lo define como *“El punto de encuentro de todos los puntos”*. De igual forma el alumno número 11 responde *“Pues... el punto hacia el cual se aproximan...”*, y, ante nuestra insistencia, nos especifica: *“Por la aproximación de los puntos de la nube... Cuando los puntos de la nube nos vayan definiendo digamos...más o menos una trayectoria, que no estén dispersos, en el momento que...que comiencen a definir una trayectoria que más o menos se ve claramente hacia donde va pues diríamos que el final de ese camino, más o menos, sería el punto de estabilización”*.

La situación con el alumno número 26 es parecida: *“El punto donde se acercan los demás puntos de la imagen esa... de la nube.”*

Para los alumnos de nivel 2 definir significa enunciar las propiedades que han reconocido. En particular a la hora de dar una definición de punto de estabilización de una nube mezclarán las propiedades de tipo visual que han observado, con la propiedad de que el número de puntos que queda fuera de una banda centrada en el punto de estabilización, deje de aumentar al añadir puntos a la nube. Veamos algunos ejemplos de este tipo:

El alumno número 22 nos da la siguiente definición: *“Es aquel... podríamos decir que es aquel punto en el que por muy estrecha que sea la banda que esté alrededor pues... siempre todos los puntos que estén en la trayectoria del camino del animal nunca van a salir de esa banda, siempre se van a ir acercando a ese punto”*. Después de una serie de preguntas observa que la definición que ha dado no es suficiente para describir su idea de punto de estabilización y nos da una nueva: *“El punto de estabilización es aquel en el que, por muy estrecha que sea la banda que establezcamos, el número de puntos que quedan fuera es finito y el interior sería infinito pero no... no... el número de puntos fuera se estabiliza”*. En las siguientes preguntas se detecta que este alumno cree que con una sola banda (aunque muy estrecha) es suficiente para determinar el punto de estabilización. Cuando dice *“... por muy estrecha que sea la banda...”* lo que hace es describir el tipo de banda que él desea usar, no está describiendo ningún proceso de trazado de bandas cada vez más estrechas, simplemente describe una propiedad que relaciona el punto de estabilización con la cantidad de puntos que hay dentro o fuera de una determinada banda.

El alumno número 19 da como definición *“Aquel punto al que... un punto que si... tal que si... trazamos dos líneas en... tre... una superior a él y otra inferior a él, sean todo lo pequeñas que sean, siempre va a haber un número infinito de puntos entre ellas”*. Después de algunas preguntas más este alumno también observa que las propiedades que ha enumerado son insuficientes para describir la idea que él tiene de punto de estabilización de una nube y entonces da una nueva definición: *“Sería un punto tal que si se traza una banda entre dos... puntos... uno superior a él y otro inferior, habría infinitos puntos fuera de la banda, n... dentro de la banda, perdón, y un número finito fuera.”*

Cuando intentan dar la definición, los alumnos de nivel 3 se esfuerzan en buscar propiedades que caractericen de forma unívoca al punto de estabilización. Han observado previamente que el trazado de bandas concretas, aunque les permita dar una buena aproximación, no caracterizará al punto y esto les lleva a buscar propiedades de tipo más general. Esta búsqueda hará que comiencen a abstraer los conceptos de nube de puntos y de punto de estabilización y las relaciones que les unen. Veamos algunos ejemplos:

Comencemos por el alumno número 10, que en un principio se expresa de la siguiente forma: *“Cualquier... el punto en el que se ha trazado una franja... cualquier franja alrededor suya, fuera de la franja quedan un número finito de puntos”*. El esfuerzo realizado por el alumno para generalizar su razonamiento se observa en una de las aplicaciones cuando se le pide que aplique su definición para decir si un punto es el punto de estabilización de una cierta nube. Al observar que no lo es intenta negar su

definición de la forma más general que se le ocurre: “Por que el número de puntos... cuando nosotros le damos a añadir... porque...!vamos a ver!... Porque para cualquier franja que hemos cogido el número de puntos... exteriores a la franja es infinito.”

El alumno número 17 expresa su definición diciendo: “Es el punto por el cual...cualquier banda que se centre en él va a tener siempre un número finito de puntos fuera”. Posteriormente, a lo largo de los ejemplos de aplicación que se le proponen, niega su definición correctamente dos veces para indicar que un cierto punto no es el punto de estabilización de la nube que se le muestra. La primera, “Según mi definición este punto no es,...porque si pongo una banda así de chica creo que fuera de la banda no hay un número finito”. Más adelante, en otro ejemplo, vuelve a repetir su razonamiento de la siguiente forma: “No, porque si le pongo una banda centrada en él siempre van a aumentar los puntos de fuera.”

## Referencias bibliográficas

- Campillo, P. (1998). *La Noción de Continuidad desde la óptica de los niveles de van Hiele*. Tesis.
- Campillo, P. y Pérez, P. (1998). La Noción de Continuidad desde la óptica de los niveles de van Hiele, *Divulgaciones Matemáticas*, 6, No. 1, 69-8.
- De la Torre, A. F. (2000). *La Modelización del Espacio y del Tiempo: Su Estudio Via el Modelo de Van Hiele*. Tesis.
- Esteban, P. (2000). *Estudio comparativo del concepto de aproximación local via el modelo de van Hiele*. Tesis.
- Jaramillo, C. M. (2000). *La noción de serie convergente desde la óptica de los niveles de van Hiele*. Tesis.
- Jaramillo, C. M. y Campillo, P. (2001). Propuesta Teórica de Entrevista Socrática la Luz del Modelo de van Hiele. *Divulgaciones Matemáticas*, 9, n.1, pp. 65-84.
- Llorens, J. L. (1994). *Aplicación del Modelo de Van Hiele al Concepto de Aproximación Local*. Tesis.
- Navarro, M. A. y Pérez, P. (preprint). *Hacia un concepto imagen adecuado de la noción de convergencia via el asistente matemático*.
- Pérez, P. (2000). *Matemática asistida por ordenador, Cálculo Infinitesimal*. Editorial U.P.V.