

“Dificultades y Errores en la Modelación de Problemas de la Estructura Multiplicativa: El Caso de las Cantidades”

Luís Orlando Hernández Chaves¹
Omar Alberto Vásquez Rodríguez²

Resumen

Esta comunicación breve pretende hacer una reflexión sobre la matemática que se está enseñando en la educación básica, a partir del análisis de las dificultades y errores encontradas en un grupo de estudiantes de grado séptimo. Esta reflexión hace parte del trabajo de grado titulado “Dificultades y Errores en la Modelación de Problemas de la Estructura Multiplicativa: El Caso de las Cantidades” de la Universidad Pedagógica Nacional.

Palabras clave: Estructura multiplicativa, modelación de problemas, cantidades intensivas, referentes de las cantidades.

Introducción

Este trabajo está relacionado con el estudio de la estructura multiplicativa y la manera como ésta a partir de problemas de multiplicar y dividir transforma el referente de las cantidades, dando lugar a una nueva cantidad que no es igual a ninguna de las dos que la han originado, denominada cantidad intensiva.

El trabajo aborda una metodología de carácter cualitativo interpretativo, teniendo como objetivo identificar algunas dificultades y errores que presentan los estudiantes de 12 a 14 años, de educación básica secundaria, al hacer uso de la estructura multiplicativa para modelar problemas que dan origen a nuevas cantidades, y dar respuesta a las preguntas ¿Qué características se identifican en los estudiantes de 12 a 14 años, cuando intentan modelar problemas relacionados con la estructura multiplicativa, en particular el caso de las cantidades intensivas?, ¿Qué interpretación dan los estudiantes a los resultados obtenidos de problemas que involucran una cantidad intensiva?.

Fundamentación teórica

- **La teoría de los campos conceptuales**

¹ Estudiante de la Maestría en Docencia de la Matemática, Docente tiempo completo Universidad de Cundinamarca. E-mail: ohernandez@unicundi.edu.co, profeorlando@gmail.com

² Estudiante de la Maestría en Docencia de la Matemática, Docente tiempo Completo Universidad Cooperativa de Colombia. E-mail: albervasq@gmail.com



Esta teoría de los campos conceptuales presenta un análisis en la construcción de los conceptos, donde éste se define como la relación entre tres clases de conjuntos $C = (S, I, R)$ donde C representa el concepto, S se refiere a las situaciones problemas que lo involucran, I las invariantes operacionales es decir, las operaciones necesarias para dar solución al problema y R los sistemas de representación que lo modelan.

Uno de los campos conceptuales es el campo conceptual de las estructuras multiplicativas, Vergnaud (1990). El campo conceptual de las estructuras multiplicativas es a la vez el conjunto de las situaciones cuyo tratamiento implica una o varias multiplicaciones o divisiones, y el conjunto de conceptos y teoremas que permiten analizar estas situaciones

- **Las situaciones donde se involucra la multiplicación y la división**

En primer lugar, se toma como base conceptual en el momento de hablar de "situación" como la relación de base de datos conocidos y desconocidos los cuales corresponden a otros posibles datos que estén relacionados, Brousseau (citado por Vergnaud, 1990). En segundo lugar, se toma como referencia el concepto de problema como medio facilitador de aprendizaje que permite alcanzar una meta propuesta, es decir, la resolución de problemas no es vista como una meta en sí misma, sino como facilitador del logro de otros objetivos y tiene una interpretación mínima: resolver las tareas que han sido propuestas, Villanova (2001). En general, una situación problema es: la organización de los conceptos en relación con otros en un contexto dado.

En los diferentes casos de problemas que se pueden presentar en la estructura multiplicativa, se relacionan cantidades que combinan magnitudes con diferentes etiquetas, para producir una cantidad cuya etiqueta no es la misma del multiplicando o del multiplicador. Vergnaud (citado por Greer, 1992), identifica tres clases principales de problemas dentro de la estructura multiplicativa ya mencionadas: Isomorfismo de medidas, Producto de medidas y Proporciones multiplicativas, éstas muestran la forma como se relacionan las magnitudes y como se originan nuevas cantidades.

- **Estructura de las cantidades**

Las cantidades usadas en matemáticas se derivan de las acciones de contar y de medir, dependiendo de que estemos cuantificando propiedades continuas o discretas del entorno. También, pueden ser derivadas de contar o de medir cantidades por la sucesiva aplicación de operaciones matemáticas que estén definidas. Todas las cantidades que surgen del proceso de medir, tiene unidades de referencia y Schwartz se refiere a ellas como cantidades adjetivadas. Un axioma de este enfoque es que esta unión entre números y sus unidades de referencia es un componente esencial de las matemáticas usadas para el propósito de modelar.

En el conjunto de las cantidades, resultado del proceso de contar o de medir, es posible definir un conjunto básico de operaciones binarias. Estas operaciones pueden ser usadas para generar nuevas cantidades, que pueden tener o no las mismas unidades de medida. La composición de dos cantidades matemáticas, para producir una tercera cantidad derivada, puede tomar cualquiera de las dos formas, composición conservando el referente o composición transformando el referente.

La composición de dos cantidades con igual referente para producir una tercera del mismo tipo, es fundamentalmente la manera de componer cantidades, por medio de las operaciones aritméticas de adición y sustracción, en otras palabras, las operaciones anteriores no transforman el referente.

La composición de dos cantidades, similares o no, para producir una tercera cantidad que es, en general, no similar a las dos cantidades originales, es la manera de componer cantidades, por medio de las operaciones de multiplicar y dividir, estas operaciones transforman el referente.

Las composiciones que transforman el referente, obligan a distinguir entre dos tipos de cantidades en cierto modo diferentes, cantidades extensivas y cantidades intensivas (Schwartz, 1988, p.41). Las cantidades que aparecen en los problemas de estructura multiplicativa pueden ser extensivas o intensivas. Las cantidades extensivas se pueden clasificar en: discretas (D) y continuas (C) y puesto que, en general, las intensivas son el cociente indicado de dos extensivas, Schwartz las clasifica en cuatro tipos: D/D , C/D , D/C , C/C .

Los enunciados de problemas de estructura multiplicativa simple contienen dos cantidades conocidas, los datos y la cantidad por hallar. Pero lo fundamental es la distinción entre cantidades extensivas (E) y cantidades intensivas (I). A partir de esto se establecen tres tipos de relación, que corresponden a problemas de distintas categorías.

Problemas asociados a la terna (I, E_1, E_2) . Estos problemas corresponden a la categoría que Vergnaud llama isomorfismo de medidas. Hay tres tipos de problemas asociados a esta

terna: $I \times E_1 = E_2$ $\frac{E_2}{E_1} = I$ $\frac{E_2}{I} = E_1$

Problemas asociados a la terna (E_1, E_2, E_3) . Estos problemas corresponden a la categoría que Vergnaud llama producto de medidas.

El papel de las cantidades

En este mismo sentido Kaput (1996) hace énfasis en la importancia que desde la escuela se tenga en cuenta la relación semántica de las cantidades, es decir tener en cuenta la relación de las cantidades y el atributo o característica que están representando, y poder ver las matemáticas como un medio de modelar para que así tengan un significado desde las primeras edades de los escolares, es así que propone un manejo cuidadoso a los problemas donde se involucren cantidades intensivas, debido a que estos problemas tienen una relación entre dichas cantidades y es de carácter semántico, descrito por su Q-estructura³ común. En el siguiente ejemplo se tratará de explicitar la manera como Kaput (1996) se refiera a la cantidad intensiva.

*Laura puede cortar el césped en 3 horas mientras que Heidi lo puede hacer en 2 horas.
¿Cuánto se demoran en cortarlo las dos juntas?*

Solución típica a este problema:

Laura puede cortar el césped en 3 horas, es decir,

$$\frac{1 \text{ césped}}{3 \text{ hora}}$$

de igual manera Heidi puede cortar

$$\frac{1 \text{ césped}}{2 \text{ hora}}$$

Ellas juntas pueden cortar

³ La Q-estructura es denominada por Kaput como la estructura de las cantidades intensivas y la forma como están compuestas por número, unidad y atributo.



$$\frac{1 \text{ césped}}{3 \text{ hora}} + \frac{1 \text{ césped}}{2 \text{ hora}} = \frac{5 \text{ césped}}{6 \text{ hora}}$$

Elas juntas pueden cortar un césped en:

$$\frac{1 \text{ césped}}{5 \text{ césped}} = \frac{6}{5} \text{ horas}$$
$$6 \text{ hora}$$

Excepto algunos estudiantes pueden resolver tales problemas sin considerar el proceso. A continuación se enuncian algunas posibles respuestas basadas en un análisis de la estructura de la cantidad planteadas por Kaput, la primera de las cuales es más general que las otras.

- **Errores y dificultades**

En el ámbito de la Educación Matemática los errores aparecen permanentemente en las producciones de los estudiantes; las dificultades de distinta naturaleza que se generan en el proceso de aprendizaje se conectan y refuerza en redes complejas que lo obstaculizan, y esos obstáculos se manifiestan en la práctica en forma de respuestas equivocadas Socas (1997). Teniendo en cuenta que las dificultades son de distinta naturaleza, él, las clasifica en cinco grupos: Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos, dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático, dificultades asociadas a los procesos desarrollados para la enseñanza de las matemáticas, dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo, dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas.

Metodología

El trabajo se desarrolla teniendo en cuenta dos focos de investigación que son, aspectos relativos a la estructura multiplicativa y aspectos relativos a las cantidades intensivas.

Desde estos dos focos se plantea la investigación, que inicia con un diagnóstico hecho a los estudiantes, luego como labor institucional se programa el curso, dando prioridad a la resolución de problemas, planteamiento de situaciones didácticas, trabajo colaborativo y trabajo extraclase.

La recolección de los datos se hace por medio de evaluación escrita, entrevista semiestructurada y revisión de trabajo de campo.

Conclusiones

Los estudiantes no interpretan el referente de las cantidades, en particular el atributo, por lo general tratan de dar una respuesta numérica y aunque ésta hace parte de la terna (número, unidad, atributo) dejan de lado las otras dos componentes, esto se infiere por las dificultades que se han identificado y los errores que éstas han generado al utilizar diferentes sistemas de representación para modelar problemas de estructura multiplicativa.

Algunas características que se identifican en los estudiantes son:

No redactan problemas, debido a la dificultad que presentan en el paso de un sistema de representación, en particular de uno tabular a uno verbal y además no interpretan correctamente los datos dados en un problema, algunas veces no los utilizan o inventan datos que no han sido dados.

Bibliografía

Brousseau, G. Los Obstáculos Epistemológicos y los Problemas en Matemáticas Recherches en Didactique des Mathematiques, 1983.

García, G.; Díaz, H.; Serrano, S. La aproximación. Una Noción básica del calculo Un estudio en la educación básica Universidad Pedagógica Nacional Bogotá 2002.

Greer, B. La División y la Multiplicación como Modelos de Situaciones D. GROUWS EDS 1992 Handbook of research on mathematics Teaching and Learning, Macmillan New York.

Kaput J Quantity structure of algebra word problems: A preliminary analysis Southeastern Massachusetts University, 1986

Kaput, J., & West, M. M. (1994). Missing-value proportional reasoning problems: Factors affecting informal reasoning patterns. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 235–287). Albany, NY: State University of New York Press.

Ministerio de Educación Nacional, Estándares Básicos de Matemáticas y Lenguaje. Bogotá Mayo de 2003

Rico, L (1994) Errores en el aprendizaje de las matemáticas. Universidad de Granada. En Kilpatrick, J Rico L y Gómez P (eds) Educación matemática PP 69-108 1994 "una empresa docente" y grupo editorial Iberoamericano.

_____ (1995). *Errores en el aprendizaje de la Matemática*. En Kilpatrick Jeremy, Gómez Pedro y Rico Luis (Editores) *Educación Matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamérica

Rico, L. Estructura Multiplicativa. En Estructuras Aritméticas elementales y su modelación. Grupo Editorial Iberoamericana Bogotá 1995.

Schwartz, J Semantic Aspects of Quantity Massachusetts Institute of Technology 1996

_____ (1988). Intensive Quantity and Referent Transforming Aritmetic Operations. En Hierbert J. & Behr Merlyn (Eds.). *Number concepts and operation in the middle grades*. (pp. 41-52). National Council of Teachers of Mathematics. Traducción libre realizada por Edgar Alberto Guacaneme Suárez y Walter Fernando Castro

Socas, M. Dificultades, Obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En La Educación Matemática en la enseñanza secundaria. 1997

Vergel, R Perspectiva Sociocultural del Aprendizaje de la Multiplicación. En XIV Encuentro de Geometría y II de Aritmética Bogotá 2003.

Vergnaud G. La teoría de los campos conceptuales. CNRS y Université René Descartes. *Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 10, nº 2, 3, pp. 133-170, 1990.*

Vilanova, S. y otros: la educación matemática el papel de la resolución de problemas en el aprendizaje. En revista iberoamericana de educación 2001
