

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS CON EL MÉTODO DE POLYA MEDIANTE EL USO DE GEOGEBRA

Bellanith Aguilar Vásquez, Lorenza Illanes, Leopoldo Zúñiga

Tecnológico de Monterrey (México)

bequi1988@hotmail.com, lillanes@itesm.mx, lzs@itesm.mx

Palabras clave: Solución de problemas, Método de Polya, Análisis Cuantitativo, Geogebra, Desempeño Académico

Key words: problems solving, Polya method, Quantitative analysis, Geogebra, Academic performance

RESUMEN: En este estudio se investigó si la solución de problemas matemáticos, en la cual se utilizó el método de Polya y el software Geogebra, incrementa el rendimiento académico. Los problemas abordados implicaron las operaciones de suma y multiplicación. El estudio fue de corte cuantitativo. La muestra estuvo compuesta de 114 estudiantes distribuidos en 3 grupos. En cada uno de los grupos, para el aprendizaje en la resolución de problemas aditivos y multiplicativos, se experimentó con diferentes metodologías, un grupo con enseñanza habitual, otro con uso del método de Polya, y un tercero con uso tanto del método de Polya, como del software Geogebra. Se aplicaron pruebas pre-test y pos-test. Los resultados favorecen la hipótesis planteada.

ABSTRACT: In this study we investigated whether the solution of mathematical problems, which used the method of Pólya and software Geogebra increases the academic performance. The addressed problems involve the operations of addition and multiplication. The study is quantitative research. The sample is composed of 114 students distributed into 3 groups. In each of the groups the learning of the solution of mathematical problems was experimented with a different methodology. A pretest and posttest was applied and analyzed with analysis statistic and the hypothesis was proved.

■ INTRODUCCIÓN

La resolución de problemas matemáticos data desde la antigüedad; en algunos casos, se utilizaban símbolos matemáticos de manera empírica para representar cantidades materiales o cálculos de tiempo. Posteriormente, en la Edad Media, se habla de una matemática comercial para la labor de los mercaderes (Cruz, 2006). En la época moderna, la educación matemática, tanto en lo teórico como en lo práctico, da aportaciones a la cultura y la sociedad. Actualmente, en los planes de educación (Torres, Martínez y Aguilar, 2014) dentro del área de matemáticas, se adoptan modelos y estrategias para la enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas, las cuales tienen como fin adquirir habilidades lógico-matemáticas. En los últimos años se han desarrollado Ambientes Virtuales de Aprendizaje (AVA) (Romero, 2011) como una estrategia para mejorar el proceso de resolución de problemas, los cuales están articulados a la educación y a otras instituciones de prestación de servicios para el bienestar social.

La institución educativa a la cual pertenece este estudio, es un colegio conformado por aproximadamente 1200 estudiantes de estrato socioeconómico de nivel 1 y 2, en Ibagué, Colombia. En dicha institución se tiene un modelo pedagógico que contiene una concepción humanista-crítico-social (Botero, 2014). Dicha institución cuenta con equipos tecnológicos que permiten el estudio de las matemáticas a través del uso de diversas tecnologías. En este estudio se pretende dar solución a la siguiente pregunta de investigación: ¿mejora el aprovechamiento de los estudiantes al utilizar el método de Polya para la resolución de problemas en situaciones aditivas y multiplicativas de números naturales, a través de Recursos Educativos Abiertos (REA)?

Después de investigar sobre las diferentes metodologías utilizadas en la solución de problemas se optó por la siguiente hipótesis nula de investigación: el rendimiento académico mejora sí se obtiene la solución de problemas aditivos y multiplicativos con números naturales mediante la metodología de Polya y usando el software Geogebra (Hohenwarter, 2008),

Para reportar los hallazgos de esta investigación, de manera coherente y ordenada, en una primera instancia se hace referencia al marco teórico de la investigación; luego a la metodología adoptada para este estudio; se continúa con la exposición de los resultados obtenidos después de haber aplicado los instrumentos construidos para la recolección de datos. Por último, se presenta una discusión, se plantean conclusiones y una propuesta de investigación para la educación, con base en la experiencia y los resultados obtenidos.

■ MARCO TEÓRICO

Las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas tienen diferentes causas, entre ellas: la motivación (Blanco, 2009), el estilo de aprendizaje de cada alumno (Adán, 2004), y sus concepciones de error (Engler, 2004). Estas dificultades pueden llevar al fracaso escolar (Gómez, 2005), e incluso, a la misma deserción escolar. Cuando un estudiante se ve enfrentado a resolver un problema matemático, es común que se pregunte ¿qué operación debo hacer?, sobre todo si no tiene establecido un proceso mental para dar solución a un problema. Quizá tenga claros los algoritmos matemáticos como objetos operativos o analíticos, pero éstos pueden resultar inútiles por sí solos cuando necesite aplicarlos cotidianamente para resolver situaciones en las que deba utilizar procesos que le permitan comprender los elementos involucrados. Este proceso mental para resolver problemas matemáticos lo han abordado diversos autores como Piaget (1964),

Vygotsky (1989), y Polya (1971). Este último fue elegido para este estudio porque su teoría incluye un método particular de cuatro pasos para abordar un problema: entender el problema, elaborar un plan, ejecutar el plan, y mirar hacia atrás.

Se considera la tecnología en la educación como parte de la innovación educativa, así como de la relación entre internet y educación, y los códigos de programación necesarios para la creación de software con programas que permiten aprender y poner a prueba los conocimientos en el área. Particularmente, en este estudio se utilizó el software Geogebra (2008), ya que es de fácil acceso y presenta características adecuadas para la resolución de problemas, tales como: accesibilidad, durabilidad, adaptabilidad, portabilidad y usabilidad. Estas características brindan la oportunidad de trabajar colaborativamente ya que permite adaptar, modificar, mejorar y difundir con toda libertad (Abánades, Botana, Tabera, 2009). Este software ha ofrecido a la matemática educativa diversas herramientas para poder resolver problemas de manera dinámica, abriendo campos de comunicación y trabajo en equipo.

Entre las investigaciones relacionadas a este estudio destacan la de Calvo (2008), con la enseñanza eficaz de la resolución de problemas enfatizando la importancia de aumentar el interés de los alumnos por medio de la motivación; Trabucco, Fridson, Benhayón y Weisleder, (2006), al diseñar y desarrollar un sistema tutorial inteligente en Ambientes Multimediales unida con la técnica de Aprendizaje Basado en Problemas (ABP); Rechimont, Ferreyra, Parodi, Scarímbolo, y Pedro, (2007) hacen alusión específicamente de Geogebra para la resolución de un problema; y la de Nieto, (2005), sobre relaciones matemáticas, resolución de problemas y computación, determinando la importancia de los concursos para estimular el interés y la motivación. Entre las investigaciones que hacen referencia a los Recursos Educativos Abiertos, están la de Bobadilla, Domínguez y Cuéllar (2010) que establecieron un impacto positivo de su uso en ciertas situaciones escolares; Irazo y Fortuny, (2009) hacen una comparación entre el uso de Geogebra, y el lápiz y papel; Álvarez, Brunel, Díaz y Hernández (2012) estudian la utilidad de los recursos educativos abiertos para el fomento de las competencias. En los estudios referentes a la resolución de problemas, tenemos investigaciones de Sánchez, (2001); Rodríguez, (2005); Masachs, Camprubí y Naudi (2007); y Hernández, (1997); en las cuales se promueve la reflexión del cómo resolver problemas e ir más allá de los algoritmos matemáticos.

Después de la descripción del marco teórico, en el cual se trató dar cabida a los autores más representativos del tema, procedemos a explicar la metodología que se siguió en el estudio.

■ METODOLOGÍA

En la presente investigación se utilizó un enfoque cuantitativo mediante un modelo de diseño experimental y de control (Valenzuela y Flores, 2012), por lo cual se aplicaron instrumentos que arrojaron resultados numéricos. En este caso se evaluó el desempeño académico con base 1 a 5 porque se utilizó la escala Likert Briones (1995). La investigación se desarrolló en cuatro fases: la primera consistió en la aplicación de una prueba diagnóstica, para analizar el estado inicial de los estudiantes frente a la interpretación de situaciones problemas (Figura1). Esta prueba fue la misma para todos los participantes del estudio; la segunda, consistió en la aplicación del siguiente tratamiento: el grupo de sexto A tuvo una metodología tradicional, el grupo de sexto B, utilizó el método de Polya, y el grupo de sexto C, además de utilizar este método, también usó Geogebra,

para resolver problemas contextuales (Figura1); la tercera fase es la correspondiente a la evaluación, en la cual se resolvieron los mismos cinco problemas (Figura1) para todos los participantes, pero en la solución se utilizó el tratamiento aplicado en cada grupo; y finalmente, la cuarta fase fue la de análisis, donde se utilizaron los métodos estadísticos para la comprobación de hipótesis.

La muestra consta de 114 estudiantes que voluntariamente aceptaron participar activamente en el estudio. Los estudiantes estaban entre los 10 y 12 años de edad; cursaban el primer grado de secundaria; 40 estudiantes del curso 6° A, 38 estudiantes del curso 6° B y 36 estudiantes del curso 6° C.

Esta investigación experimental y de control, utilizó un pretest y postest. Los instrumentos se diseñaron de la siguiente manera: el pre-test consistió en una prueba de cinco problemas para identificar la habilidad de interpretación de una situación problema. Esta prueba que fue la misma para los tres grupos, y sirvió para identificar los saberes previos. El postest constó también de cinco problemas contextuales (Díaz y Poblete, 2001), los mismos para los tres grupos, pero con distinto proceso de solución, de acuerdo al tratamiento aplicado en cada grupo. Para el grupo A se aplicó la prueba solo pidiendo como mínimo datos, operación y resultado, que es como se trabajó de manera tradicional. Al grupo B se le pidió que utilizara los cuatro pasos del método de Polya: comprensión del problema, elaboración de un plan, ejecución del plan, y mirar hacia atrás. Y finalmente, al grupo C se le pidió que mostrara la respuesta utilizando el software Geogebra, y empleando el método de Polya, donde plasmaron cada uno de los cuatro pasos. Los resultados de estas pruebas fueron revisados de manera digital.

El pretest fue aplicado para indagar los saberes previos y se estableció un tiempo de respuesta de una hora. En éste se evaluaron las competencias siguientes: suma y multiplicación, y sus propiedades; reconocer la suma y la multiplicación en una situación problema; y, saber interpretar la información en una situación problema. Para el postest, se otorgó un tiempo de dos horas y se aplicó después de desarrollar los diferentes tratamientos a cada uno de los tres grupos, dentro de la fase de evaluación.

Se presenta el problema siguiente (Figura 1) para ilustrar el tipo de situaciones planteadas a los alumnos.

Figura 1. Ejemplo del tipo de problemas que se aplicó

Problema 1. Hay 3 compañeros Daniel, María y Luis y quisieron sumar sus edades: Daniel tiene 12 años, Luis tiene 10 años y los tres juntos suman 34 años ¿Cuántos años tiene María?		
DATOS	OPERACIÓN	SOLUCIÓN
Edad de Daniel 12 Edad de Luis 10 años	$\begin{array}{r} 12 \\ + 10 \\ \hline 22 \\ 34 \\ - 22 \\ \hline 12 \end{array}$	La edad de María es de 12 años

Como estrategia de análisis de resultados se utilizaron cálculos estadísticos como la media aritmética, la varianza y la desviación estándar. Se realizaron diagramas estadísticos que

representan la información obtenida de las evaluaciones de cada pregunta, para cada uno de los tres grupos y un análisis comparativo para todos los cálculos de las medidas de tendencia central, en un mismo análisis gráfico.

■ ANALISIS DE RESULTADOS

Se hicieron tres evaluaciones: en el pre-test, en el pos-test y para el método de Polya, con y sin el uso del software Geogebra.

Pre-test. Se observó que para el problema 1 en el grupo A, con respecto al grupo B se tuvo una disminución de la media de un 2.24%; y el grupo B con respecto al grupo C también tuvo una disminución de la media del 0.85%; es decir, que en el grupo C se presentó menor evaluación en el problema 1 con 1.39%, con respecto al grupo A. Para el problema 2, se presentó la misma disminución de la media en el grupo B y en el grupo C con respecto al grupo A, que en el problema 1. En el problema 3, el grupo A, siguió teniendo la mayor media, pues el grupo B disminuyó su media en un 2.56% con respecto a la media del grupo A; y el grupo C disminuyó la media en un 1.89% también con respecto a la media del grupo A. En el problema 4, el grupo A tuvo una media mayor que el grupo B, el cual tuvo una media menor en un 3.33%; y el grupo C una media menor que la del grupo A en un 3.33%. Finalmente, en el Problema 5 la mayor media también se presentó en el grupo A; una media menor en un 4.91% en el grupo B; y una media menor en un 0.74% en el grupo C.

Las pruebas de hipótesis de igualdad de medias y de varianzas rechazaron la hipótesis alternativa, lo que permitió evidenciar que los grupos son comparables, es decir, que los estudiantes estuvieron en igualdad de circunstancias, lo que nos permitió seguir adelante sin un sesgo en las características de los grupos.

Pos-test. Para el problema 1, en el grupo A con respecto al grupo B, tuvo un incremento en la media de 3.45% a 3.85%, con una diferencia de 0.4%, por lo que hubo una mayor aprobación de este problema en el grupo B en un 8.05%; y con respecto al grupo C, también se incrementó la media, es decir, en el grupo C se presentó mayor asertividad en el problema 1 en un 14.11% con respecto al grupo A. Para el problema 2, también se presentó un incremento en la media porcentual del grupo B con respecto al grupo A en un 11.21%; y también hubo un incremento en la media porcentual del grupo C con respecto al grupo A de un 17.78%. En el problema 4 el grupo C, siguió teniendo una mayor media, pues el grupo B la media disminuyó en un 7.44% con respecto a la media del grupo C y en el grupo A la media disminuyó en un 8.94% igualmente con respecto al grupo C. En el problema 4 también el grupo C tuvo la mayor media, la cual disminuyó en un 10.11% en el grupo B y en un 17.28% para el grupo A. Finalmente, en el problema 5, se obtuvo una mayor media que en el grupo C; y disminuyó en un 7.2% en el grupo B; y en un 14.06% en el grupo A.

Las pruebas de hipótesis de igualdad de medias y de varianzas permitieron evidenciar que los grupos no presentaron diferencia de varianzas, pero si en las medias. Al comparar el grupo A con el grupo B, el que mejor rendimiento académico tuvo fue el B; al comparar el A con el C, el que mejor rendimiento tuvo fue el C; y al comparar el B con el C, el que tuvo mejor rendimiento académico fue el grupo C; por lo tanto, es el grupo C quien tuvo el más alto rendimiento académico de los tres grupos.

Método de Polya. En el grupo C se usó el software Geogebra, para resolver las preguntas asociadas a los pasos del método de Polya, y el grupo B sólo usó el método de Polya. La media en el problema 1 del grupo C se incrementó en un 10.91% con respecto al Grupo B; en el problema 2, el grupo C aumentó la media en un 8.78%; en el problema 3, la media se incrementó en un 9.51%; en el problema 5, el incremento de la media fue de un 13.9%; y finalmente, en el problema 5, el aumento en la media fue de 9.5%. En cuanto a las varianzas, tanto en el grupo B con el grupo C, oscilaron entre 0.05 y 0.08, es decir los grupos son estadísticamente comparables.

El grupo C obtuvo mejores resultados con el uso del software en comparación al grupo B, acentuándose más en los aspectos de la ejecución del plan, y en la revisión de la solución.

■ DISCUSIÓN

La implementación del método de Polya, en integración con el uso del software Geogebra, aumentó el rendimiento académico en resolución de problemas en situaciones aditivas y multiplicativas de los estudiantes de primero de secundaria.

Con esta implementación se agregó un factor innovador porque constituyó un modelo de gestión de aprendizaje (Ramírez, 2012) en el área de matemáticas, lo cual permitió el poder cambiar concepciones y rutinas en las que no solo mejoraran el ambiente de aprendizaje, si no que se consiguiera un mayor rendimiento académico. Con este modelo los estudiantes cambiaron su conducta, se observó una mayor motivación, y prestaron mucho más atención hacia las actividades de resolución de problemas. Además, el uso del software favoreció la realización de operaciones de una manera más efectiva.

■ CONCLUSIONES

De acuerdo al análisis de resultados se obtuvo como hallazgo que el trabajo en equipo y el aprendizaje entre pares fue favorable para la resolución de problemas en situaciones aditivas y multiplicativas, especialmente con el uso del método de Polya, y el software Geogebra.

Particularmente, el uso del método de Polya les facilitó a los alumnos iniciar con éxito la resolución de los problemas, pues en el primero de los cuatro pasos debían entender el problema, y las preguntas asociadas al mismo resultaron sencillas de responder. En el paso dos tenían más alternativas que solo hacer una suma o una resta, de manera que ellos decidían hacer dibujos, tablas, rectas, entre otras estrategias de solución, mismas que se reflejarían en el paso 3. Finalmente, en el paso 4 se sentían bien al poder revisar si la respuesta que habían dado era la correcta y comparar con otras situaciones que ya habían experimentado.

Otro de los aspectos que fueron alcanzados y resultaron muy importantes, fue el uso del software Geogebra como apoyo en la realización de operaciones.

Para la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos, se propone el uso del método de Polya, el cual, como ya se ha comentado, consiste en entender el problema, configurar un plan, ejecutar el plan, y mirar hacia atrás. Este método lleva poco a poco al estudiante, en forma sistemática, a realizar una lectura adecuada de la situación problema que debe resolver, e incluso le permite traer a la memoria otras situaciones más sencillas que haya resuelto con anterioridad, o posibles situaciones que tenga que resolver a futuro. La intención es contribuir a la mejora de la

calidad del aprendizaje mediante el uso de recursos didácticos accesibles y que ofrecen los elementos necesarios para tratar con éxito situaciones de aprendizaje como la resolución de problemas en contextos de aplicación.

Para futuras investigaciones se propone partir de los resultados presentados en este estudio para realizar análisis cualitativos considerando los aspectos siguientes: presentar los resultados agrupados con base en las categorías que resulten relevantes; presentar evidencia del trabajo de campo; utilizar métodos comparativos de forma constante; y, mostrar incidencias de respuesta en cada una de las preguntas de cada paso del método de Polya.

Una pregunta general que puede formularse a partir de esta investigación es: ¿cómo implementar un modelo didáctico -como el propuesto en este trabajo- en la enseñanza de resolución de problemas matemáticos, involucrando el uso de las nuevas tecnologías de información y de comunicación de manera contextual?

■ REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abánades, M. Botana, F. Tabera, L. (2009). Software matemático libre. *La Gaceta de la RSME*. España: La Columna de Matemática Computacional, 12(2), 325-346
- Adán, I. (2004). *Estilos de aprendizaje y rendimiento académico en las modalidades de bachillerat*. Tesis de Doctorado. UNED, España. Recuperado de: <http://www.estilosdeaprendizaje.es/ladan.pdf>
- Álvarez, A. Brunel, N. Díaz, A. Hernández, F. (2012). Uso de recursos educativos abiertos para fomentar el razonamiento matemático en alumnos del nivel medio superior. México: *Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo*. 8.
- Blanco, M. (2009). Dificultades específicas del aprendizaje de las matemáticas en los primeros años de escolaridad: detección precoz y características evolutivas. España: *Ministerio de Educación de España*. 188. Recuperado de: <http://redined.mecd.gob.es/xmlui/bitstream/handle/11162/66225/00820112013529.pdf?sequence=1>
- Bobadilla, M., Domínguez, M. y Cuéllar, M. (2010). El uso de un recurso educativo abierto como facilitador en la construcción de aprendizajes significativos. México: *Revista Digital Sociedad de la Información*, 20, 1-9.
- Botero, F. (2014). Manual de procesos y procedimientos *Institución Educativa Raíces del Futuro*. Ibagué: Tolima
- Briones, G. (1995). *Métodos y Técnicas de Investigación para las Ciencias Sociales*. 2ª Edición. México: Trillas.
- Calvo, M. 2008. Enseñanza eficaz de la resolución de problemas en matemáticas. Universidad de costa Rica. San José, Costa Rica: *Revista Educación*, 32(1),123-138
- Cruz, M. (2006): *La enseñanza de la Matemática a través de la Resolución de Problemas*. Tomo 1. La Habana: Educación Cubana.

- Díaz, M. V. y Poblete, A. (2001). Contextualizando tipos de problemas matemáticos en el aula. España: *Revista de didáctica de las matemáticas*. 45, 33-41.
- Engler, A., Gregorini, M. et. al. (2004). *Los errores en el aprendizaje de matemática*. Facultad de Ciencias Agrarias. Argentina: Universidad Nacional del Litoral. Recuperado de: <http://soarem.org.ar/Documentos/23%20Engler.pdf>
- Gómez, B. (2005). Aprendizaje basado en problemas (ABP): una innovación didáctica para la enseñanza universitaria. *Educación y Educadores*. Colombia: Universidad de La Sabana. 8. 9-19
- Hernández, J (1997). *Ciencias y tecnologías*. México: Universidad la laguna. Recuperado de: <ftp://tesis.bbtk.ull.es/ccppytec/cp19.pdf>
- Hohenwarter, M. (2008). *Introduction to GeoGebra*. International GeoGebra Institute, Creative Commons Attribution-Noncommercial-Share Alike.
- Iranzo, N. y Fortuny, J. (2009). *La influencia conjunta del uso de Geogebra y lápiz y papel en la adquisición de competencias del alumnado*. Barcelona: Universitat Autònoma de Barcelona.
- Masachs, A. Camprubí, Naudi M. (2007). Los entornos de validación en la resolución de problemas matemáticos CPU-e, *Revista de Investigación Educativa*. México : Instituto de Investigaciones en Educación. 4, 1-11.
- Nieto, J. (2005). Resolución de problemas, Matemática y Computación. *Revista Venezolana de Información, tecnología y conocimiento*. Venezuela: Universidad del Zulia. 2, 37-45.
- Piaget, J. (1991). *Seis estudios de psicología*. España: LABOR, S.A. Edición original: editions Gonthier. 1964.
- Polya, G. (1971). *How to solve it. A New Aspect Of Mathematical Method*. México: Universidad de Stanford. Trillas.
- Ramírez M. (2012) *Modelos y estrategias de enseñanza para ambientes innovadores*. México: Instituto tecnológico y de estudios superiores de monterrey. 288 páginas.
- Rechimont, E. Ferreyra, N. Parodi, C. Scarímbolo, M. y Pedro, I. (2007). GEOGEBRA en la resolución de un problema. *ITCR*. Costa Rica. *V Congreso sobre Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora*. 5, 6, 7. Argentina: Universidad Nacional de La Pampa.
- Romero A. (2011). *Diseño de Ambientes Virtuales de Aprendizaje (AVA), con metodología de Aprendizaje Basado en Problemas (ABP): un modelo para el abordaje de contenidos y construcción de conocimiento en AVA*. Colombia: Fundación Universitaria del Área Andina.
- Rodríguez, E. (2005). *Metacognición, resolución de problemas y enseñanza de las matemáticas: Una propuesta integradora desde el enfoque antropológico*. Facultad de educación. Colombia: Departamento de Psicología Evolutiva y de la Educación.
- Sánchez, L. M. (2001). *Dificultades de los alumnos de sexto grado de educación primaria para la resolución de problemas matemáticos. Análisis retrospectivo*. Tesis de Maestría. Universidad de Colima. México. Recuperado de: http://www.digeset.uco.mx/tesis_posgrado/indic1.php

- Torres, F. Martínez, J. Aguilar, B. (2014). *Plan de área de matemáticas de la Institución Educativa Raíces del Futuro*. Ibagué, Colombia.
- Trabucco, J. Fridson, D. Benhayón, M. Weisleder, J. (2006). *Entorno virtual de aprendizaje apoyado en elementos de resolución de problemas*. San José, Costa Rica: Facultad de Ciencias y Artes – Escuela de Matemáticas.
- Valenzuela, J. y Flores, M. (2012). *Fundamentos de Investigación Educativa*. 1 y 2 México: Editorial Digital Tecnológico de Monterrey.
- Vygotsky, L. S. (1989). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Crítica.