

EVALUACIÓN DE CONOCIMIENTOS SOBRE LA VISUALIZACIÓN DE OBJETOS TRIDIMENSIONALES EN MAESTROS EN FORMACIÓN

ASSESSING PRE-SERVICE TEACHERS' KNOWLEDGE ABOUT VISUALIZATION OF THREE DIMENSIONAL OBJECTS

Gonzato, M., Godino, J. D., Contreras, J. M.

Universidad de Granada

Resumen. *Este trabajo se centra en el estudio de los conocimientos sobre la visualización de objetos tridimensionales de maestros en formación. Se reportan los resultados obtenidos con la aplicación de un cuestionario a 241 futuros profesores de educación primaria, identificando los principales errores y dificultades en aspectos relacionados con el conocimiento común y ampliado del contenido matemático.*

Palabras clave: *evaluación conocimientos profesores, visualización espacial, conocimiento común y avanzado.*

Abstract. *In this work we consider the problem of assessing pre-service teachers' knowledge about visualization of three dimensional objects. We report the application results of a questionnaire to 241 pre-service elementary school teachers, identifying the main errors and difficulties in aspects related to the common and extended mathematics knowledge.*

Key words: *assessing teachers' knowledge, spatial visualization, common and extended knowledge.*

1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN Y ANTECEDENTES

Existe concordancia en afirmar que la visualización es una componente básica en el aprendizaje y enseñanza de la geometría espacial (Gutiérrez, 1996; Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen, 1996). La visualización espacial figura en las directrices curriculares como contenido a tratar en los distintos ciclos de educación primaria. Por ejemplo, en el Decreto de Enseñanzas Mínimas para la Educación Primaria en España (MEC, 2006) se indica que: “Con el desarrollo de la visualización (concepción espacial), los niños y las niñas mejoran su capacidad para hacer construcciones y manipular mentalmente figuras en el plano y en el espacio, lo que les será de gran utilidad en el empleo de mapas, planificación de rutas, diseño de planos, elaboración de dibujos, etc.”

Esto justifica que los procesos de enseñanza y aprendizaje de la visualización espacial sean objeto de atención por parte de la investigación en didáctica de la matemática (Battista, 2007; Bishop, 1980; Gutiérrez, 1996; Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen, 1996) y, de manera particular, pone en evidencia la importancia del tema en la formación de profesores.

Un aspecto importante de la problemática de la formación de profesores en este campo es identificar y evaluar las “habilidades espaciales” de los maestros y su relación con aspectos de la enseñanza. Consideramos la visualización de objetos tridimensionales como un conjunto de habilidades relacionadas con el razonamiento espacial. Visualizar un objeto tridimensional no incluye únicamente la habilidad de “ver” los objetos espaciales, sino también la habilidad de reflexionar sobre dichos objetos y sus posibles representaciones, sobre las relaciones entre sus partes, su estructura, y la habilidad de examinar las posibles transformaciones del objeto (Battista, 2007, p. 843).

Observamos que la interpretación y la comunicación de la información espacial de manera figural, verbal o mixta, son importantes habilidades relacionadas con la visualización de objetos tridimensionales (Gorgorió, 1998).

Aunque la visualización de objetos tridimensionales puede ocurrir en ausencia de una estimulo visual (Bishop, 1983; p. 184) centramos su estudio en presencia de una representación plana del objeto. Con respecto a este tema Guillén (2010) sugiere, como posible dirección en la investigación, el estudio de los diferentes tipos de representaciones planas de los sólidos y el uso que se hace de ellas en la enseñanza.

Siguiendo a Ben-Chaim, Lappan, y Houang (1985) consideramos que “la habilidad de “leer” una representación bidimensional de un objeto sólido forma parte de la visualización espacial” (p. 390). De hecho interpretar y producir de forma correcta una representación plana de un objeto tridimensional requiere, además de conocimientos básicos de dibujo técnico, una buena capacidad de visualización, que permita asociar la representación bidimensional al concepto geométrico correspondiente, y viceversa.

Suponemos que un profesor de escuela primaria además de tener buena visualización espacial, tenga el conocimiento para desarrollarla en sus alumnos, lo que incluye la capacidad de dibujar e interpretar de forma clara y correcta diferentes tipos de representaciones planas de objetos tridimensionales.

El objetivo de este trabajo es evaluar aspectos específicos de los conocimientos sobre la visualización de objetos tridimensionales (representados en el plano) de maestros en formación. Se reportan los resultados obtenidos con la aplicación de un cuestionario sobre el tema a 241 futuros profesores de Educación Primaria.

2. MARCO TEÓRICO Y METODOLOGÍA

En el análisis de las investigaciones previas relacionadas con el tema, no hemos encontrado un cuestionario comprensivo que evaluase adecuadamente los conocimientos de los profesores de educación primaria sobre visualización de objetos tridimensionales. En consecuencia se decidió iniciar la construcción de un nuevo cuestionario teniendo en cuenta dos criterios en la selección de las tareas:

- Según los aspectos de los contenidos principales relacionados con la visualización de objetos tridimensionales que nos interesan estudiar.
- Según los aspectos del conocimiento didáctico-matemático que se quieren evaluar.

Describimos brevemente estos dos criterios de selección.

Con el fin de identificar los contenidos principales relacionados con la visualización de objetos tridimensionales, hemos analizado las tareas incluidas en las investigaciones sobre el tema en el campo de la educación matemática y de la psicología. Los

Evaluación de conocimientos sobre la visualización de objetos tridimensionales en maestros en formación

contenidos principales emergentes de dicho análisis se compararon con los contenidos presentes en las tareas presentadas en los libros de textos de educación primaria y en el currículo español para la educación primaria.

El cuestionario final consta de 5 ítems de respuesta abierta (de papel y lápiz), que cubren los siguientes aspectos del tema:

1. Coordinar e integrar vistas de objetos:
 - Dibujar o identificar algunas vistas de un objeto a partir del dibujo del objeto en perspectiva (ítem 1)
 - Dibujar un objeto en perspectiva a partir de sus proyecciones ortogonales (ítem 2)
2. Plegar y desplegar desarrollos (ítem 3)
3. Componer y descomponer en partes un objeto tridimensional (ítem 4)
4. Generar cuerpos de revolución (ítem 5)

Para seleccionar los aspectos del conocimiento que queremos evaluar nos hemos apoyado en el modelo del conocimiento didáctico-matemático del profesor descrito en Godino (2009), que tiene en cuenta las diferentes facetas implicadas en la enseñanza y aprendizaje de contenidos específicos. Hemos decidido evaluar aspectos específicos del *conocimiento del contenido (común, especializado y ampliado)* y del *conocimiento del contenido en relación a la enseñanza*⁶³.

Cada ítem del cuestionario se compone de cuatro partes (sub-ítems), según el aspecto del conocimiento que se quiere evaluar. En este trabajo describimos únicamente las partes del cuestionario relativas a la evaluación de aspectos relacionados con el conocimiento común y ampliado del contenido (sub-ítems *a* y *c*) y los resultados obtenidos.

Para evaluar el conocimiento común del contenido (sub-ítem *a*) hemos seleccionado tareas de libros de texto de primaria. Los libros de textos utilizados fueron las últimas ediciones disponibles de las colecciones Anaya, SM y Santillana, que están a disposición de los profesores en formación.

Por lo que se refiere a la evaluación del conocimiento ampliado del contenido (sub-ítem *c*) proponemos resolver una tarea relacionada con la *a* pero de un nivel más alto, que involucra un conocimiento más avanzado del contenido específico. Estas tareas provienen de investigaciones y fueron en su mayoría propuestas a alumnos de escuela secundaria.

El cuestionario fue respondido por 241 futuros profesores del segundo curso de la especialidad Educación Primaria de la Universidad de Granada del año académico 2010-2011, en una sesión de dos horas de duración⁶⁴. Los conocimientos previos de los estudiantes sobre el tema fueron los relativos a sus formaciones básicas y los que profundizaron durante el año anterior en el estudio del bloque temático de geometría para maestros.

⁶³ Terminología introducida en los trabajos de Ball y colaboradores (Hill, Ball y Schilling, 2008). Godino (2009) propone llamar conocimiento ampliado al constructo que Ball designa como “conocimiento en el horizonte matemático”.

⁶⁴ En una segunda sesión de otras dos horas se implementó una acción formativa con los futuros profesores en la que se discutieron las soluciones dadas a algunos ítems.

En el siguiente apartado describimos los resultados obtenidos, teniendo en cuenta la variable cuantitativa “grado de corrección de las respuestas” (2 si correcta, 1 si parcialmente correcta, 0 si incorrecta) y las variables cualitativas “tipo de errores” y “tipo de representación plana utilizada”, por lo que nuestra investigación se inscribe en un enfoque metodológico de tipo mixto (Johnson y Onwuegbuzie, 2004).

3. RESULTADOS

Presentamos los resultados obtenidos en los sub-ítems a), que evalúan aspectos relativos al conocimiento común del contenido, los resultados de los sub-ítems c), que evalúan aspectos relativos al conocimiento ampliado del contenido; y algunas observaciones con respecto a la relación entre estas dos componentes del conocimiento evaluadas.

3.1. Conocimiento común del contenido

Para analizar las soluciones de los estudiantes a las tareas de libros de textos de primaria partimos de la hipótesis de que un futuro profesor pueda resolver de manera óptima dichas tareas. Consideramos entonces que la puntuación total relacionada con la variable del grado de corrección de la respuesta tenga que ser elevada: valoramos como insuficiente una puntuación total inferior a 8 (sobre 10).

Observamos que solo el 62% de los estudiantes consigue alcanzar dicha puntuación.

La Tabla 1 muestra las frecuencias absolutas (y porcentaje) relativas a los valores de la variable del grado de corrección de la respuesta.

Grado de corrección	Ítem				
	1a	2a	3a	4a	5a
Correcto	226 (94)	159 (67)	73 (30)	160 (69)	227 (94)
Parcialmente correcto	0 (0)	50 (21)	97 (40)	15 (7)	0 (0)
Incorrecto	15 (6)	28 (12)	71 (30)	56 (24)	14 (6)

Tabla 1. Frecuencia absolutas (porcentajes) de las respuestas a los sub-ítems tipo a (n=241)

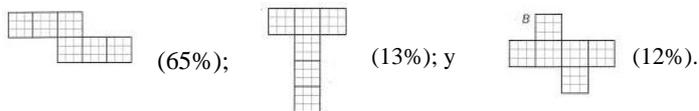
Describimos brevemente los principales errores y los porcentajes de los estudiantes que los han manifestados, con relación a los sub-ítems 2a, 3a y 4a (sub-ítems que resultaron de más difícil resolución).

Observamos que el sub-ítem que resultó más difícil fue el 3a, relativo al contenido “plegar y desplegar desarrollos”, en el cual se pedía identificar los desarrollos correspondientes a un cubo: sólo el 30% de los estudiantes contestó de forma correcta a dicha pregunta.

Hemos identificados los siguientes errores principales:

Evaluación de conocimientos sobre la visualización de objetos tridimensionales en maestros en formación

- No identifican los siguientes desarrollos entre los posibles desarrollos de un cubo:



- Identifican el siguiente como posible desarrollo de un cubo:

Mesquita (1992) observa que los desarrollos en cruz o en T, son asociados con más facilidad al cubo que los demás, por su regularidad y su simetría, mientras que en los otros desarrollos las identificaciones de los segmentos equivalentes son menos evidentes. Esta última observación concuerda con los resultados obtenidos con respecto al desarrollo 3-3, que fue de más difícil reconocimiento (el 65% de los alumnos no lo reconocieron).

Por lo que se refiere al sub-ítem 2a relacionado al contenido “coordinar e integrar vistas de objetos (dibujar un objeto en perspectiva a partir de sus proyecciones ortogonales)” hemos identificados los siguientes errores:

- Errores relativos a la técnica de dibujo utilizada para representar el objeto (28%): no se respetan las propiedades de la proyección utilizada.
- Errores en las proporciones (27%): la forma global del objeto es correcta pero hay grandes errores en las proporciones relativas de las partes que componen el objeto.
- Errores de coordinación e integración de las vistas (8%): no consiguen dibujar la forma global del objeto, dibujan un objeto por cada vista.

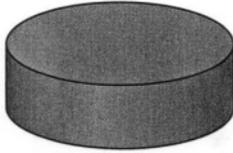
En el contexto de formación de profesores señalamos el trabajo de Malara (1998), que también destaca dificultades de coordinación de las vistas de un objeto tridimensional de un grupo de profesores de escuela secundaria.

Otros investigadores que trabajaron con alumnos de escuela primaria y secundaria reportaron errores, dificultades y conflictos relacionados con la representación plana de objetos geométricos (Colmez y Parzys, 1993) y errores de coordinación e integración de las vistas de un objeto tridimensional (Battista y Clements, 1996; Pittalis, Mousoulides y Christou, 2009).

Se observa que la mayoría de los estudiantes (78%) dibujaron el objeto en perspectiva caballera, que es muy frecuentemente utilizada en el dibujo de los sólidos en los libros de textos de primaria.

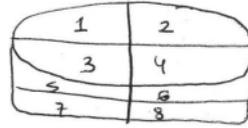
En el sub-ítem 4a, relativo a la “composición y descomposición en partes de un objeto tridimensional” la mayoría de errores fueron en la interpretación de la representación plana del objeto: el sujeto lee el dibujo como un dibujo en sí mismo sin ponerlo en relación con el objeto que representa (el alumno “corta la representación” y no el objeto que representa) (9%). Presentamos un ejemplo de este tipo de error:

Enunciado: ¿Cómo podemos partir este cilindro en 8 partes dando solo 3 cortes?



Respuesta de un alumno:

De esta forma nos quedar 8 partes



En otros trabajos se reportan “dificultades de comprender la naturaleza de los objetos tridimensionales representados en dos dimensiones” por parte de estudiantes de escuela secundaria (Parzys, 1991; Pittalis, Mousoulides y Christou, 2009).

3.2. Conocimiento ampliado

Por lo que se refiere a la evaluación del conocimiento ampliado del contenido, la puntuación total en la variable del grado de corrección de la respuesta c) observamos que el 54% de los alumnos tuvieron una puntuación total inferior a 5 sobre 10 (considerado insuficiente), 27% entre 5 y 6 (suficiente), 14% entre 7 y 8 (bueno) y 12% entre 9 y 10 (muy bueno).

En la Tabla 2 presentamos las frecuencias absolutas (y porcentajes) relativas a los valores de la variable del grado de corrección de la respuesta.

Grado de corrección	Ítem				
	1c	2c	3c	4c	5c
Correcto	122 (53)	36 (16)	108 (47)	87 (37)	32 (15)
Parcialmente correcto	10 (4)	67 (30)	64 (28)	64 (28)	19 (9)
Incorrecto	101 (43)	118 (54)	59 (25)	82 (35)	160 (76)

Tabla 2. Frecuencias absolutas (porcentajes) de las respuestas a los sub-ítems tipo c) (n=241)

Estos resultados muestran muy pobre conocimiento avanzado relacionado con la pregunta 2c (de coordinación e integración de las vistas para formar un objeto) y 5c (generar un cuerpo de revolución con eje exterior a la figura). Resumimos los principales errores y dificultades identificadas en dichos sub-ítems.

Por lo que se refiere al sub-ítem 2c, observamos que la mayoría de los errores identificados están relacionados con la dificultad de visualizar los cambios en las tres vistas de un objeto a partir de la variación de la estructura del objeto (33%). Esta dificultad podría estar relacionada con la incorrecta concepción de que las tres vistas ortogonales de un objeto definen de forma unívoca un objeto tridimensional. Muchos alumnos afirman que cambiando parte de la estructura del objeto por lo menos una vista tiene que cambiar (incorrecto en general y de manera particular en el caso de la tarea propuesta).

En el sub-ítem 5c los errores identificados van asociados a una concepción incorrecta de cuerpo de revolución, como sólido generado por la rotación de una figura alrededor de un eje únicamente interior o tangente a ella.

Evaluación de conocimientos sobre la visualización de objetos tridimensionales en maestros en formación

Una posible causa de éste error puede ser las representaciones de los cuerpos de revolución en los libros de textos de primaria: se representan las figuras planas pegadas a barras que giran.



3.3. Comparación del conocimiento común y ampliado del contenido

Comparando los análisis anteriores podemos hacer algunas observaciones generales:

- Las puntuaciones totales relacionadas con la variable del grado de corrección de la respuesta muestran una gran diferencia entre el conocimiento común del contenido (puntuación media = 7,7) y conocimiento ampliado del contenido (puntuación media = 4,1).
- Esta diferencia se ve reflejada en todas las tareas (las preguntas c resultaron más difíciles de resolver que la a) excepto en la tarea 3. En las tareas 2 y 5 la diferencia entre conocimiento común y ampliado resulta considerable.
- Tanto en las respuestas de las tareas a (conocimiento común) como en la c (conocimiento ampliado) se observan diferentes errores de interpretación y comunicación de una representación plana del objeto tridimensional.

4. CONCLUSIONES

En este trabajo hemos presentado los resultados obtenidos al analizar las respuestas de 241 futuros profesores de educación primaria a un cuestionario de evaluación de conocimientos comunes y ampliados sobre visualización de objetos tridimensionales.

Observamos que el conocimiento común sobre visualización de objetos tridimensionales de los futuros profesores evaluados no es el esperado: el 62% de los alumnos no contesta de forma óptima a las tareas sacadas de libros de textos primaria sobre los diferentes aspectos del tema. Solo dos tareas fueron resueltas por los alumnos de forma satisfactoria (1a y 5a); sin embargo, en las dos respectivas tareas sobre el conocimiento ampliado los alumnos manifestaron diferentes dificultades.

Se observan considerables dificultades relacionadas con el conocimiento ampliado sobre los contenidos “coordinar e integrar vistas de objetos” y “generar cuerpos de revolución”. De manera particular los estudiantes no están capacitados para la resolución de una tarea que requiere reflexionar sobre la pluralidad de objetos que pueden corresponder a tres vistas ortogonales determinadas y de una tarea que requiere

generar un cuerpo de revolución en el cual el eje de rotación es externo a la figura plana que lo engendra.

Observamos que dichos contenidos específicos no están contemplados en los libros de textos de primaria. Los ejercicios relacionados con el contenido “coordinar e integrar vistas de objetos” que proponen los libros de textos piden dibujar o identificar *el* objeto correspondiente a tres vistas ortogonales, lo que excluye la reflexión sobre una posible pluralidad de objetos. En las representaciones de la generación de los cuerpos de revolución en los libros de textos se dibujan las figuras planas *pegadas* a barras que giran, lo que involucra la “idea” de que el eje, girando, “permite” la rotación de la figura plana; procedimiento que no se puede generalizar para el caso de eje externo a la figura.

Puesto que los respectivos sub-ítems (2a y 5a) relacionados con el conocimiento común de dichos contenidos han sido resueltos de forma correcta (o parcialmente correcta), sería interesante analizar si los conocimientos adquiridos por los estudiantes a lo largo de su escolaridad sobre estos temas puedan resultar conflictivos en el momento de resolver tareas que involucran conocimientos más avanzados.

De forma general el conocimiento ampliado del contenido de estos estudiantes puede ser calificado como insuficiente. Diferentes dificultades van asociadas a la interpretación de representaciones planas de objetos tridimensionales. Estas dificultades pueden obstaculizar y a veces impedir un procedimiento de tipo visual sobre el objeto.

De otra parte la incapacidad de producir de forma correcta una representación plana de un objeto tridimensional no siempre refleja una escasa habilidad de visualizar el objeto. Sin embargo, creemos que para un futuro profesor de escuela primaria sea importante no solo visualizar el objeto sino también poder comunicar su forma con diferentes tipos de representaciones planas, para desarrollar dicha habilidad en sus alumnos.

De aquí el interés y la importancia de realizar futuras investigaciones centradas en el desarrollo de la visualización de objetos tridimensionales en maestros en formación que incluya actividades de interpretación y elaboración de diferentes tipos de representaciones planas y la reflexión sobre sus respectivas funciones y límites. Como afirma Parzys (1991, p. 591) “una base científica podría ser dada a las reglas del dibujo técnico (que en general son dadas como simples convenciones, sin una justificación real), con lo que la educación matemática estaría más cerca al tipo de problemas que se encuentran en la vida cotidiana o profesional”.

Reconocimiento:

Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación, EDU2010-14947, Ministerio de Ciencia e Innovación (MICINN), fondos FEDER y de la Beca FPU, AP2008-04560.

Referencias

- Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843-908). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Battista, M. T. y Clements, D. H. (1996). Students' understanding of three-dimensional rectangular arrays of cubes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27 (3), 258-292.

Evaluación de conocimientos sobre la visualización de objetos tridimensionales en maestros en formación

- Ben-Chaim, D., Lappan, G. y Houang, R. T. (1985). Visualizing rectangular solid made of small cubes: analyzing and effecting students' performance. *Educational Studies in Mathematics*, 16, 389-405.
- Bishop, A. (1980). Spatial abilities and mathematics education: A review. *Educational Studies in Mathematics*, 11, 257-269.
- Bishop, A. (1983). Space and geometry. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and process* (pp. 175-203). New York: Academic Press.
- Colmez, F. y Parzysz, B. (1993). Le vu e le su dans l'évolution de dessins de pyramides du CE2 a la seconde. En A. Bessot y P. Verrilon (Eds), *Espaces graphiques et graphismes d'espaces* (pp. 35-55). Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.
- Gorgorió, N. (1998). Exploring the functionality of visual and non-visual strategies in solving rotation problems. *Educational Studies in Mathematics*, 35, 207-231.
- Guillén, G. (2010). ¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría? ¿Y en la investigación? En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T.A. Sierra (Eds.), *Investigaciones en Educación Matemática XIV*, 21-68. Lleida: SEIEM.
- Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: in search of a framework. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, I*, 3-19. Valencia: Universidad de Valencia.
- Hershkowitz, R., Parzysz, B. y Van Dormolen, J. (1996). Space and shape. En A. J. Bishop et al. (Eds.), *International handbook of mathematics education, Vol 1* (pp. 161-204). Dordrecht: Kluwer.
- Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 372-400.
- Johnson, B. y Onwuegbuzie, A. J. (2004). Mixed methods research: A research paradigm whose time has come. *Educational Researcher*, 33 (7), 14-26.
- Malara, N. (1998). On the difficulties of visualization and representation of 3D objects in middle school teachers. En A. Olivier y K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd PME International Conference*, 3, 239-246.
- Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (2006). Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria.
- Mesquita, A. L. (1992). The types of apprehension in spatial geometry: sketch of a research. *Structural Topology*, 18, 19-30.
- Parzysz, B. (1991). Representation of space and students' conceptions at high school level. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 575-593.

Gonzato, M., Godino, J. D., Contreras, J. M.

Pittalis, M., Mousoulides, N. y Christou, C. (2009). Level of sophistication in representing 3D shapes. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4*, 385-392. Thessaloniki: PME.