

ESCENARIOS DE INVESTIGACIÓN¹

OLE SKOVSMOSE

En sus observaciones de salones de clase en Inglaterra, Cotton (1998) percibió que una clase de matemáticas normalmente se divide en dos partes: en primer lugar el profesor presenta algunas ideas y técnicas matemáticas y, a continuación, los estudiantes trabajan en ejercicios seleccionados por el profesor. Sin embargo, también percibió variaciones de ese patrón, que van desde la presentación por parte del profesor hasta el trabajo de los estudiantes, durante toda una sesión de clase. Según esta y muchas otras observaciones, la educación matemática tradicional se ubica en el *paradigma del ejercicio*. Con gran frecuencia, el libro de texto de matemáticas se toma como un “hecho” en las prácticas del salón de clase. Los ejercicios que se resuelven son determinados por una autoridad externa a la clase en sí. Esto significa que la justificación de la relevancia del ejercicio no es parte de la lección de matemáticas como tal. Más aún, una premisa central del paradigma del ejercicio es que hay una y una sola respuesta correcta.

El paradigma del ejercicio puede contrastarse con un *enfoque investigativo*. Tal enfoque puede tomar muchas formas, una de las cuales es el trabajo

¹ Este artículo es una traducción de la versión inglesa titulada “Landscapes of Investigation” (Skovsmose, 2000) que, a su vez, proviene del original en danés “Undersøgeslandskæber” (Skovsmose, 1999c) publicado en la Serie de Documentos del Centro de Investigación en Aprendizaje de las Matemáticas de Dinamarca. Este artículo también se encuentra traducido al portugués en la revista *Bolema*, núm. 14, pp. 66-91, de la Universidad de Saõ Paulo, en Rio Claro, en Brasil. La traducción y edición de esta versión española ha sido realizada por Paola Valero, con la colaboración de Patricia Perry.

por proyectos, como se describe en Nielsen, Patronis y Skovsmose (1999) y Skovsmose (1999a) para la escuela primaria y secundaria, y en Vithal, Christiansen y Skovsmose (1995) para la enseñanza superior. En general, el trabajo por proyectos se ubica dentro de un “escenario” que ofrece posibilidades para realizar investigaciones y representa un ambiente de aprendizaje en esencia diferente al del paradigma del ejercicio.

Mi interés en el enfoque investigativo se relaciona con la educación matemática crítica, que se puede caracterizar en términos de las siguientes preocupaciones (cf. Skovsmose y Nielsen, 1996). En primer lugar, la educación matemática crítica considera el desarrollo de la *alfabetización matemática* como una competencia similar a la de la alfabetización descrita por Freire. Esta alfabetización matemática no solo se refiere a unas destrezas matemáticas, sino también a la competencia para interpretar y actuar en una situación social y política que ha sido estructurada por las matemáticas. En segundo lugar, la educación matemática crítica se preocupa por el desarrollo de una educación matemática que sustente la democracia, lo cual quiere decir que la microsociedad del salón de clase de matemáticas debe encarnar aspectos democráticos. La educación matemática crítica recalca el hecho de que las matemáticas no son simplemente una materia que debe enseñarse y aprenderse (sin importar si los procesos de aprendizaje se organizan de acuerdo con los principios de los enfoques constructivistas o socioculturales del aprendizaje). En cambio, las matemáticas se perciben como un tema que en sí necesita ser reflexionado, puesto que las matemáticas son una parte central de nuestra cultura basada en la tecnología y puesto que ellas ejercen muchas funciones, las cuales quizás pueden caracterizarse con una pequeña reformulación de la Primera Ley de Kranzberg: lo que hacen las matemáticas no es ni bueno ni malo, ni tampoco neutral (véase Kranzberg, 1997). D’Ambrosio (1994) ha usado una formulación más fuerte que enfatiza que las matemáticas hacen parte de nuestras estructuras tecnológicas, militares, económicas y políticas, y como tal se convierten en una fuente tanto de maravillas como de horrores (D’Ambrosio, 1998; Skovsmose, 1998a y 1999b). Construir una crítica a las matemáticas como parte de la educación matemática es una preocupación central de la educación matemática crítica. Parece que tales preocupaciones se pueden manejar de una manera más apropiada por fuera del paradigma del ejercicio.

Las páginas que siguen se basan parcialmente en mi experiencia sobre la educación matemática con trabajo por proyectos. También se relacionan con la interacción que he tenido con profesores de diversos contextos sociales,

políticos y económicos en países como Colombia, Sudáfrica, Brasil, Inglaterra y Dinamarca, quienes han discutido conmigo estas ideas. Para iniciar voy a proponer un ejemplo.

Un ejemplo²

Doy el nombre *escenario de investigación* a una situación particular que tiene la potencialidad de promover un trabajo investigativo o de indagación. Propongo que le echemos un vistazo a la bien conocida tabla de números que, sin duda, ha decorado las paredes de muchos salones de clase y que ha servido como base para una variedad de ejercicios. Concentrémonos en un rectángulo dibujado sobre una parte de la tabla, cuyos vértices nombramos, en orden cíclico, a, b, c y d (figura 1). Es posible calcular un valor F dado por:

$$F = ac - bd$$

El rectángulo puede colocarse en otra posición en la tabla de números y podemos calcular de nuevo el valor de $F = ac - bd$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	...						

Figura 1. Tabla de números

Podemos observar, por ejemplo, que $22 \cdot 34 - 24 \cdot 32 = -20$ y que $37 \cdot 49 - 39 \cdot 47 = -20$. Traslademos el rectángulo a una posición diferente y calculemos de nuevo el valor de F . Por cierto, nos podríamos preguntar ¿qué sucede si rotamos el rectángulo 90° y hacemos el mismo cálculo? Entonces... ¿qué pasa si escogemos un rectángulo más grande y lo movemos en la tabla? ¿Cuál será ahora el valor de $F = ac - bd$? ¿Cómo depende el valor de F del tamaño del rectángulo?

² El siguiente ejemplo se inspira en la presentación de Ole Einar Torkildsen dentro de la Conferencia NOMUS 1, llevada a cabo en Aalborg, Dinamarca, en 1996.

Naturalmente, es posible indagar lo que sucede con la traslación de otras figuras. ¿Qué sucede si el cálculo dado por la expresión $F = ac - bd$ se realiza tomando, en orden cíclico, los puntos a , b , c y d como vértices de las figuras que se muestran en la figura 2? ¿Cuál de estas figuras puede “moverse” sin que el valor de F cambie?

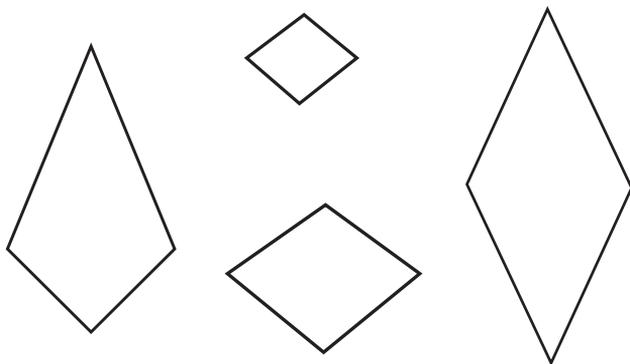


Figura 2. Otras figuras para trasladar

¿Por qué no investigar una función diferente de F ? Por ejemplo, ¿qué sucedería si permutamos las operaciones sustracción y multiplicación y, en vez de $F = ac - bd$, calculamos $G = (a - c)(b - d)$? Donde a , b , c y d todavía siguen refiriéndose a cada una de las esquinas de un cuadrilátero? ¿Será G constante cuando la figura se traslada? ¿Qué sucederá con las otras figuras mostradas en la figura 2? ¿Existen otras figuras que sean rectángulo-trasladables (lo cual significa que el valor de una función se mantiene constante durante la traslación)? Sí, por supuesto que existe una función H definida por $H = 0a + 0b + 0c + 0d$. Pero, ¿existen funciones más interesantes desde el punto de vista de la propiedad de ser rectángulo-trasladables? Si logramos encontrar una de estas funciones, ¿será que la misma función puede ser rombo-trasladable? En términos más generales, ¿qué funciones hacen trasladables a qué figuras?

Y ¿qué sucedería si consideramos los números negativos? Esto nos llevaría a expandir la tabla de la figura 1, adicionándole números a la izquierda y a la derecha de cada fila, de tal manera que tuviéramos filas de números ubicadas una encima de la otra, como en la figura 3. Entonces podríamos considerar traslaciones que ubiquen algunas figuras en áreas donde hay números negativos.

...-12	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2...
...-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12...
...8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22...
...18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32...
...28	29	30	...											

Figura 3. Tabla con números negativos

Y, ¿qué sucedería si colocáramos los números como se muestra en la figura 4?

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	...			

Figura 4. Una organización diferente de números

También sería posible realizar los cálculos en una base diferente. ¿Será que la cualidad de “ser trasladable” depende de la base que estemos empleando? Como es natural, no es necesario concentrarnos en configuraciones de números determinadas por la ubicación de los vértices de cuadriláteros sobre la tabla. Podríamos considerar cualquier configuración de números a_1, a_2, \dots, a_n y cualquier función $F = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Entonces trataríamos de responder a preguntas como: ¿qué funciones definidas por una configuración de números son constantes respecto a la traslación de la configuración? Y, ¿por qué no considerar también la rotación o cualquier otro movimiento de la figura? Es más, hasta el momento nos hemos concentrado solo en una propiedad particular de la función F , su cualidad de ser constante o no; pero podríamos observar muchas otras propiedades. Esto nos llevaría a preguntarnos ¿qué funciones definidas en una configuración de números muestran propiedades “atractivas” cuando la figura se traslada?

¿Qué pasa si...?

Imaginémonos que una clase ha estado entretenida por un rato con los problemas de este ejemplo y hemos estado observando sus conversaciones. La profesora ha preguntado ¿qué pasa si...?, y repetidas veces escuchamos en la conversación sus preguntas comenzando por ¿qué pasa si...? Los estudiantes también parecen estar sorprendidos con algunas de las propiedades matemáticas a las que las preguntas los han conducido. Se escuchan muchos murmullos en todo el salón. Un poco más tarde es posible escuchar con mayor claridad las voces de los estudiantes que comienzan a preguntar ¿qué sucede si...? ¡Sí! ¿Qué sucederá si...? Y entonces puede que la profesora pregunte ¿y, por qué es que cuando...? Esta situación conduce a muchos más murmullos y quizás a periodos largos de silencio. Pero también más tarde se podrían escuchar con claridad voces de estudiantes diciendo ¡Sí! ¿Y qué pasa si...?

Un escenario de investigación invita a los estudiantes a formular preguntas y a buscar explicaciones. La invitación está representada en la expresión de la profesora ¿qué sucede si...? Y la aceptación de la invitación por parte de los estudiantes se puede reconocer por las expresiones “¡sí!, ¿y qué puede suceder si...?”. De esta manera los estudiantes se involucran en un proceso de *exploración*. La pregunta de la profesora “¿y por qué es que...?” se convierte en un reto que los estudiantes parecen haber asumido cuando dicen ¡sí! ¿por qué será que...? Este reto los lleva a buscar *explicaciones*. Cuando los estudiantes se apropian del proceso de exploración y explicación de esta manera, se constituye un escenario de investigación que, a su vez, genera un nuevo ambiente de aprendizaje. En un escenario de investigación los estudiantes están al mando.

¿Representa de hecho el ejemplo de la traslación de figuras un escenario de investigación? Quizás sí, quizás no, puesto que un escenario de investigación solo se constituye como tal si los estudiantes sí aceptan la invitación. Un escenario de investigación es en sí una relación. La aceptación de la invitación por parte de los estudiantes a participar en él depende de la naturaleza de la invitación (para muchos estudiantes quizás la posibilidad de explorar y explicar las propiedades matemáticas puras de una tabla numérica puede no ser atractiva). Igualmente depende del profesor (una invitación puede presentarse de muchas maneras y para muchos estudiantes ella puede sonar más a orden que a invitación). Y ciertamente depende de los estudiantes (puede que tengan otras prioridades en el momento). Lo que puede constituirse en un escenario de investigación para un grupo de estudiantes en una situación particular puede no convertirse en una invitación atractiva para otro grupo

de estudiantes. La pregunta de si un cierto escenario puede representar o no un enfoque investigativo es una pregunta empírica que tiene que responderse a través de una práctica educativa experimental donde el profesor y los estudiantes participan y se involucran.

Ambientes de aprendizaje

Las prácticas educativas en el aula que se basan en un escenario de investigación contrastan de manera radical con el paradigma del ejercicio. La distinción entre estos dos tipos de prácticas educativas se puede combinar con una distinción diferente que tiene que ver con las “referencias” que sirven de base para el significado que los estudiantes pueden construir de los conceptos matemáticos y de las actividades en la clase.

En filosofía se han hecho muchos intentos para aclarar la noción de significado con relación a una referencia. Tales intentos han inspirado a los educadores matemáticos en la discusión del significado, en términos de referencias posibles para los conceptos matemáticos. Por ejemplo, la noción de fracción puede presentarse inicialmente con una referencia a la repartición de pizzas y luego el significado de fracción puede desarrollarse aún más con la introducción de diversos conjuntos de referencias de significado. No obstante, el significado también puede verse, primero que todo, como una característica de las acciones y no solo de los conceptos. En mi interpretación las referencias también incluyen los motivos para la acción. En otras palabras, incluyen el contexto para ubicar un objetivo para la realización de una acción (llevada a cabo por los estudiantes en un salón de clase). Cuando en las páginas siguientes hable de diferentes tipos de referencias, en general estaré aludiendo a la producción de significado en la educación matemática.³

Es posible encontrar distintos tipos de referencias. Primero, las preguntas y actividades matemáticas pueden referirse exclusivamente a las *matemáticas*. Segundo, es posible referirse a una *semirrealidad* —no una realidad que de hecho podemos observar, sino una realidad construida, por ejemplo, por el autor de un libro de texto⁴—. Finalmente, los estudiantes y el profesor pueden trabajar con tareas que se refieren a *situaciones de la vida real*.

³ Para un análisis de la producción de significado en la educación matemática, véase Lins (en prensa).

⁴ Christiansen (1997) se refiere a una “realidad virtual” como una realidad que el ejercicio de matemáticas en sí establece en la clase. Mi uso de la noción de “semirrealidad” es similar.

Al combinar los tres tipos de referencias con los dos paradigmas de las prácticas en el salón de clase surge una matriz que define seis tipos diferentes de *ambientes de aprendizaje* (figura 5). Trataré de aclarar lo que quiero decir con este concepto comentando cada una de las celdas de la matriz.

		Formas de organización de la actividad de los estudiantes	
		Paradigma del ejercicio	Escenarios de investigación
Tipo de referencia	Matemáticas puras	(1)	(2)
	Semirrealidad	(3)	(4)
	Situaciones de la vida real	(5)	(6)

Figura 5. Ambientes de aprendizaje

El tipo (1) se ubica en un contexto de “matemáticas puras” y en el paradigma del ejercicio. En este ambiente dominan ejercicios como los siguientes:

$$\begin{aligned}(27a - 14b) + (23a + 5b) - 11a &= \\ (16 \cdot 25) - (18 \cdot 23) &= \\ (32 \cdot 41) - (34 \cdot 39) &= \end{aligned}$$

El tipo (2) se puede caracterizar como un escenario de investigación dentro de las matemáticas. El ejemplo introductorio sobre la traslación de figuras geométricas en la tabla numérica ilustra este tipo de ambiente.

El tipo (3) se ubica en el paradigma del ejercicio con referencia a una semirrealidad. La naturaleza de tal semirrealidad se ilustra con el siguiente ejemplo:

La tienda A vende uchuvas a 850 pesos por kilo y la tienda B las vende a 1000 pesos por 1.2 kg. (a) ¿Cuál tienda es más barata? (b) ¿Cuál es la diferencia de precio entre las dos tiendas por 15 kg de uchuvas?

Con seguridad, en esta situación se presenta una discusión sobre uchuvas, tiendas y precios. Pero no creo que la persona que construyó este ejercicio haya hecho ninguna investigación empírica sobre la venta de uchuvas, ni haya entrevistado a alguien para averiguar bajo qué circunstancias sería relevante comprar 15 kg de esa fruta. La situación es artificial y, por eso, el ejercicio se ubica en una semirrealidad. Este ejemplo es similar a uno presentado en el libro *The Sociology of Mathematics Education: Mathematical Myths/Pedagogical*

Texts [La sociología de la educación matemática: mitos matemáticos/textos pedagógicos], de Paul Dowling (1998), donde él describe el “mito de la referencia”. Ciertamente es un mito que tal ejercicio se refiera a una realidad. Pero yo veo que en este caso hay una referencia a una semirrealidad imaginada por el autor del problema.

Puede ser que esta referencia semirreal ayude a algunos estudiantes a resolver el problema. Sin embargo, la práctica de la educación matemática ha establecido normas específicas sobre cómo operar en tal semirrealidad. Si, por ejemplo, un estudiante le pregunta al profesor sobre la distancia entre las tiendas y la casa de la persona que va a comprar las uchuvas, y si el estudiante quiere tener una idea de qué tanta distancia la persona podría cargar un paquete de 15 kg haciendo un experimento en el patio de la escuela, y si el estudiante pregunta si se puede suponer que ambas tiendas tienen servicio a domicilio o que la calidad de las uchuvas de ambas tiendas es la misma, entonces el profesor muy seguramente va a pensar que el estudiante está tratando de sabotear la lección de matemáticas.

Ciertamente tales preguntas obstruyen la clase dado el “acuerdo” general entre el profesor y los estudiantes sobre cómo se debe operar dentro del paradigma del ejercicio. Resolver ejercicios con referencia a una semirrealidad es una competencia que se desarrolla en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y que se basa en un contrato específico entre el profesor y los estudiantes. Algunos de los principios de tal acuerdo son los siguientes: la semirrealidad está descrita de manera completa en el texto del ejercicio. Ninguna otra información es relevante para resolver el ejercicio. Por lo tanto, es innecesaria información adicional, pues el único propósito de la presentación del ejercicio es encontrarle una solución. Una semirrealidad es un mundo sin impresiones sensoriales (por ejemplo, preguntar por el buen sabor de las uchuvas está fuera de cualquier consideración); solo las cantidades indicadas son relevantes. Más aún, toda la información cuantitativa es exacta, ya que la semirrealidad se *define* en términos de estas medidas. Por lo tanto, la pregunta de si es aceptable negociar el precio o la compra en sí, o, considerar la compra de un poco menos de 15 kg de uchuvas no tiene ningún sentido. La exactitud de la medida combinada con el supuesto de que la semirrealidad está completamente descrita con la información proporcionada posibilita mantener el supuesto de “una y solo una respuesta correcta”. La metafísica de la semirrealidad asegura que este supuesto se mantenga, no solo cuando nos referimos exclusivamente a los números y a las figuras geométricas, sino también a las “tiendas”, “uchuvas”, “kilogramos”, “precios” y “distancias”, al

igual que a otras entidades empíricas similares.⁵ En particular, esta metafísica ha estructurado la comunicación entre estudiantes y profesor.

Hacer observaciones de cómo las matemáticas operan en situaciones de la vida real no se ha considerado algo importante en el proceso de construcción de ejercicios de tipo (3); pero recientemente han surgido estudios cuidadosos sobre las prácticas matemáticas presentes en diferentes áreas de trabajo (Wedege, 1999). Los ejercicios basados en situaciones de la vida real proveen un espacio para el ambiente de tipo (5). Por ejemplo, las estadísticas de desempleo pueden presentarse como parte de un ejercicio y, con base en tales cifras, se puede preguntar sobre el aumento o disminución del desempleo o se pueden hacer comparaciones entre diversos periodos, diferentes países, etc.⁶ Todas las cifras que se mencionan son cifras de la vida real y esto ofrece una condición diferente entre el profesor y estudiantes, dado que ahora sí tiene sentido cuestionar y adicionar información a la provista por el ejercicio. No obstante, las actividades todavía hacen parte del paradigma del ejercicio.

Al igual que el ambiente de tipo (3), el ambiente de tipo (4) contiene referencias a una semirrealidad; pero en esta situación la semirrealidad no se usa como una fuente para la formulación de ejercicios, sino como una invitación para que los estudiantes exploren y expliquen. La “Gran carrera de caballos” puede servirnos como ejemplo. En el tablero se dibuja una pista con once caballos numerados del dos al doce. Los caballos se encuentran en la línea de partida. Un estudiante se encarga de lanzar dos dados, se suman los números en las caras superiores y se hace una cruz sobre el caballo, cuyo número corresponde a la suma. Como muestra la figura 6, la suma 6 se dio tres veces antes que cualquiera de las demás. El caballo 6, por lo tanto, fue el feliz ganador, seguido por el 7 y el 10.

				X							
				X	X			X			
	X	X		X	X	X	X	X			X
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	

Figura 6. La pista de la carrera de caballos

⁵ Si no nos damos cuenta de que la manera como las matemáticas encajan con la semirrealidad, en verdad, no tiene nada que ver con la relación entre matemáticas y realidad, entonces la *ideología de la certidumbre*, dominante y frecuente en la educación matemática habrá encontrado un espacio seguro de existencia. Para una discusión sobre la ideología de la certidumbre, véase Borba y Skovsmose (1997).

⁶ Para ideas sobre ejercicios de este tipo véase, por ejemplo, Frankenstein (1989).

Esta carrera de caballos puede convertirse en una actividad más grande dentro del salón de clase. Imaginen que estamos enseñando a estudiantes de once años de edad en promedio. En dos esquinas del salón de clase se arman dos compañías de apuestas y un pequeño grupo de estudiantes está a cargo de cada una de ellas. De manera independiente las compañías anuncian sus tablas de pagos. El resto de la clase, un grupo de multimillonarios amantes de los caballos, hacen sus apuestas:

¡Mira! La agencia “Gane Más” paga ocho veces lo apostado por el caballo 9.

Pero, fíjate, ¡la agencia “La Segura” paga cuarenta veces lo apostado por el caballo 10!

Las apuestas deben hacerse de prisa porque la carrera está a punto de empezar. Otro grupo de estudiantes está a cargo de la carrera y hacen sonar la campana. Una especie de silencio se apodera de la clase. Se lanzan los dados, se calcula la suma, se hacen las cruces sobre el diagrama en el tablero y los caballos llegan a la meta. Algunos de los apostadores sonrían. La agencia “Gane más” tiene solo unos pocos clientes. Los pagos parecen mucho menos favorables que los anunciados por la agencia “La segura”. Una nueva carrera va a comenzar y entonces las compañías lanzan una nueva tabla de pagos. Los apostadores quedan sorprendidos:

¡Uy! ¡La agencia “Gane Más” ahora tiene ofertas maravillosas!

Hay nuevas apuestas, nuevas carreras, nuevos ganadores y nuevos perdedores. Los caballos ya salieron del anonimato y ahora al caballo 2 lo llaman “la tortuga”. De repente una de las agencias entró en bancarrota. No hay problema, un nuevo millonario monta una nueva agencia.

Ahora el profesor anuncia que llegó el momento del gran Derby. Hasta ahora las carreras han tenido una extensión de tres unidades (se han hecho tres carreras), pero un Derby debe ser de al menos cinco. Las agencias producen sus tablas de pagos. Algunos de los apostadores tienen sombreros de papel. Después de la segunda carrera algunos de los apostadores se empiezan a preguntar: ¿será que el caballo 7 está en mejor forma para estas carreras largas?

Incluso después de varias carreras no hay olor a caballo en el salón de clase. La “Gran carrera de caballos” tiene lugar en una semirrealidad, pero no en el paradigma del ejercicio. Algunos de los comentarios sobre las habilidades de los caballos (“¡Al caballo 11 le hace falta tomar vitaminas!”) no se perciben como intentos de sabotaje a la clase. La lógica estricta que gobierna el

ambiente (3) no opera en esta situación. Toda la actividad se ubica en un escenario de investigación donde los estudiantes pueden descubrir muchas cosas. Se tienen que producir y mejorar las estrategias de apuestas. Tal y como he descrito la situación, los estudiantes sí aceptaron la invitación para participar en la “Gran carrera de caballos”.⁷

Otro ejemplo

Como es natural, se pueden desarrollar escenarios de investigación con un mayor grado de realidad que lo involucrado en la “Gran carrera de caballos”. En el libro *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica* (Skovsmose, 1999a) he discutido algunos ejemplos organizados como trabajo por proyectos que pueden ilustrar el ambiente de aprendizaje de tipo (6).

El proyecto “Energía” se concentró en modelos de entrada-salida de energía. Como introducción, los estudiantes calcularon la cantidad de energía (medida en kilojulios [kJ]) de algunos tipos de desayuno. Luego, empleando fórmulas provenientes de investigaciones deportivas, se calculó cuánta energía se emplea en un cierto paseo en bicicleta. Estas fórmulas expresaron el uso de energía como una función de distintos parámetros como la velocidad, la longitud del viaje, el tipo de bicicleta y el “área frontal” del ciclista. ¿Cómo medir esta área? Los estudiantes encontraron un método y realizaron sus cálculos. De esta manera se aproximaron por primera vez a la idea de realizar un modelo de entrada-salida de energía.

Luego el proyecto se concentró en modelos de entrada-salida para la producción agrícola. Los estudiantes investigaron una finca no muy lejana a la escuela. Primero calcularon cuánta energía entra en la producción en términos de, por ejemplo, el combustible necesario para arar un terreno durante un año. Sentados en el establo, los estudiantes escucharon la explicación del granjero sobre los métodos de preparación de un terreno. A continuación los estudiantes midieron el ancho de las diferentes herramientas: el arado, la recolectora, etc. Esto posibilitó la estimación de cuántos kilómetros, al año, el granjero tenía que hacer rodar el tractor para preparar el terreno. En este terreno se cultivaba cebada. También se calculó la cantidad de energía contenida por la cebada recolectada. En estos cálculos se emplearon estadísticas de

⁷ Esta descripción la escribí estando en Inglaterra como profesor visitante. Pero si hubiera estado en Dinamarca probablemente hubiera descrito una “gran carrera de ciclismo”. ¿Qué habría podido escribir si hubiera estado en Colombia?

producción agrícola. De acuerdo con los cálculos de los estudiantes, la relación de entrada-salida de energía era bastante favorable: la cebada recolectada contiene cerca de seis veces más energía que lo que le “entró” al terreno. La razón, por supuesto, es que el sol es un gran proveedor de energía. Este resultado se comparó con las estadísticas oficiales de Dinamarca, que revelaron que el factor es un poco menor (una de las razones que explica la diferencia es que los estudiantes no consideraron todos los tipos relevantes de transporte que son necesarios para el manejo de la producción agrícola).

En esta finca particular la cebada se usaba para el engorde de cerdos. Entonces los estudiantes pudieron construir un nuevo modelo de entrada-salida de energía. Recolectaron información sobre qué tanto comen los cerdos dependiendo de su peso y sobre el tiempo que transcurre antes de llevarlos al matadero. Con base en el modelo, calcularon un nuevo factor que resultó cercano a 0,2. Solo un quinto de la energía contenida en el alimento suministrado a los cerdos está contenida en la carne una vez procesada. La producción de carne de cerdo, por lo tanto, parecía un mal “negocio” en términos de energía.

¿Estos resultados son característicos únicamente de esta granja particular? Las estadísticas oficiales de Dinamarca, esta vez, también ayudaron a confirmar que los resultados de los estudiantes se aproximaban a la realidad. Desde el punto de vista de la producción y consumo de energía, la transformación de cebada en carne de cerdo cuesta mucha energía. En este sentido, las investigaciones de los estudiantes resultaron ser ejemplares, y este es un elemento esencial del trabajo por proyectos. La discusión puede continuarse. ¿Es que acaso la industria agropecuaria danesa está funcionando mal en términos de energía? En realidad no lo hace mal, como lo confirman las estadísticas en comparación con, por ejemplo, Estados Unidos cuya producción agropecuaria presenta una cuenta de energía más problemática.

Este proyecto ilustra diferentes aspectos del ambiente de aprendizaje tipo (6). Las referencias son reales y proveen un significado para las actividades (y no solo para los conceptos). Los estudiantes realizan cálculos relacionados con granjas reales. Esto significa que las autoridades que ejercen poder en el paradigma del ejercicio han sido eliminadas en este ambiente. El supuesto de “una y solo una respuesta correcta” no tiene sentido en este ambiente. Los libros de texto pueden descansar cómodamente en la esquina del salón donde el proyecto está teniendo lugar. El profesor adquiere el papel de un supervisor y pueden surgir discusiones enfocadas en la indagación: ¿cómo calcular el área frontal del ciclista? El problema ahora se convierte en establecer modelos para el cálculo de la relación entrada-salida de energía y también se

vuelve importante reflexionar acerca de los resultados de los cálculos. ¿Son los cálculos confiables? ¿Consideramos los factores importantes? Bueno, podemos comparar con las estadísticas oficiales; pero ¿son estos resultados correctos? La reflexión crítica sobre las matemáticas y sobre el modelaje matemático adquiere un nuevo significado.

A diferencia de muchos países del mundo, en Dinamarca el currículo oficial de la escuela primaria y básica secundaria no es ningún impedimento para que los estudiantes y el profesor operen en un ambiente de aprendizaje de tipo (6). No existen exámenes al final de cada año escolar que determinen lo que se debe aprender y, por lo tanto, las actividades específicas del salón de clase tampoco están determinadas. Solo después del grado 9º los estudiantes tienen que enfrentarse a un examen nacional en matemáticas. El examen produce un resultado para cada estudiante, pero todos los estudiantes pasan. No es posible “perder” el examen. Más aún, este examen apoya un enfoque investigativo ya que, en su parte escrita, no se espera que los estudiantes tengan un conocimiento memorizado. Y en su parte oral, el examen se realiza evaluando el desempeño de grupos de estudiantes al realizar una pequeña indagación matemática. A pesar de esta situación, también en Dinamarca el paradigma del ejercicio tiene muchos adeptos.

El movimiento por los diversos ambientes de enseñanza

No sobra decir que la matriz de la figura 5 representa una simplificación fuerte. La línea vertical que separa el paradigma del ejercicio de los escenarios de investigación es una línea bastante “amplia” que representa un terreno enorme de posibilidades. Algunos ejercicios pueden invitar a actividades de solución de problemas que, a su vez, pueden convertirse en investigaciones matemáticas genuinas. La proposición de problemas también es un paso a seguir dentro de los escenarios de investigación, a pesar de que las actividades de formulación de problemas sean distintas de las del trabajo por proyectos. No hay duda de que las líneas horizontales también son “borrosas”. Mi punto, por supuesto, no es tratar de ofrecer una clasificación estricta y clara, sino elaborar la noción de ambientes de aprendizaje para facilitar discusiones sobre las posibilidades de cambio en la educación matemática.

Gran parte de la educación matemática se mueve entre los ambientes de tipo (1) y (3). En este sentido, el paradigma del ejercicio ofrece los fundamentos de la “tradición” en la educación matemática. Muchos estudios sobre

las prácticas de la educación matemática ofrecen una visión desoladora de lo que sucede en el aula tradicional. No obstante, algunos de estos estudios no reconocen ni que es posible encontrar otros ambientes de aprendizaje, ni tampoco que las observaciones desoladoras están asociadas con una organización del salón de clase que, aunque es la más típica (Walkerdine, 1988), es particular. Richards (1991) es un ejemplo de un estudio que diferencia entre “la tradición de las matemáticas escolares” y la “tradición de la indagación matemática”. El reporte de esta diferencia concuerda con los varios tipos de ambientes de aprendizaje que describo en la matriz. Sin duda, los ejercicios son uno de los elementos que define la tradición de las matemáticas escolares.

En Dinamarca el ambiente de aprendizaje de tipo (6) ha representado un reto a la tradición en las matemáticas escolares. Sin embargo creo que es importante organizar tal reto también en términos de los ambientes de aprendizaje de tipo (2) y (4). No quiero sugerir que el tipo (6) sea la única alternativa esencial al paradigma del ejercicio. De hecho, no quiero sugerir que un ambiente particular pueda designarse como el representante de los objetivos últimos de la educación matemática, bien sea crítica o no.

Más bien, mi propuesta es apoyar una educación matemática que se mueva por los distintos ambientes presentados en la matriz. En particular, no creo que un objetivo del cambio en la educación matemática deba ser el abandono total de cualquier tipo de ejercicios. Puede tener mucho sentido, después de una secuencia como la de la “Gran carrera de caballos”, tener un periodo de “consolidación” donde los estudiantes trabajen con ejercicios relacionados con las nociones de probabilidad. Es importante que los estudiantes y el profesor juntos encuentren un camino entre los diferentes ambientes de aprendizaje. La ruta “óptima” no puede determinarse de antemano, sino que tiene que decidirse en la interacción entre profesor y estudiantes. La matriz de los ambientes de aprendizaje también puede emplearse como una herramienta analítica. Por ejemplo, es posible que los estudiantes y el profesor recapitulen su trabajo al final del año escolar: ¿qué ambientes de aprendizaje hemos experimentado? ¿Hemos gastado la mayoría del tiempo en uno o dos de ellos? ¿En cuál de esos ambientes logramos mayores éxitos? ¿Fue difícil el cambio entre uno y otro ambiente? Muchas consideraciones sobre la planeación del proceso de aprendizaje pueden referirse a la matriz.

Hace varios años estuve involucrado en un proyecto de matemáticas con niños cuyas edades estaban alrededor de los siete años. El objetivo principal del proyecto era planear y construir un área de juegos cerca del salón en un terreno pequeño que estaba a disposición de la clase. Ciertamente esta actividad

tuvo lugar en un ambiente de tipo (6) y, como resultado del proyecto, de hecho, se construyó un área de juego en el espacio mencionado. Los padres de familia también estuvieron involucrados activamente y trabajaron en la escuela durante varios fines de semana. Antes de esto ya había tenido lugar bastante actividad. Como primera cosa, los estudiantes visitaron otras áreas de juego para determinar cuál era “buena”. Los niños de esa edad son expertos en este tipo de experimentos. No obstante, fue difícil determinar la calidad exacta de una buena área de juego. ¿Qué tan altos deben ser los columpios?, ¿cuánta arena se necesita?, etc. Se debían medir muchas cosas y, para no olvidar las mediciones, fue necesario tomar notas sobre las observaciones. ¡Y esa no es una labor fácil para niños de esa edad!

Tales periodos de actividad intensa son muy fructíferos e importantes, pero otros tipos de actividades más relajadas también son importantes tanto para el profesor como para los alumnos. Como parte del proyecto sobre el área de juego (que tuvo una duración de varios meses) se organizaron periodos de “trabajo de oficina” que, de hecho, parecieron excursiones al ambiente de aprendizaje de tipo (1). Los niños se organizaron en grupos pequeños y trabajaron en sus “oficinas”. De manera similar a lo que sucede en muchas oficinas públicas, en la clase se escuchaba un susurro constante. Los niños tenían limonada o jugo en vasos plásticos sobre sus pupitres que, como por arte de magia, parecían verdaderas mesas de oficina. Algunos de los oficinistas mordisqueaban una galleta mientras sumaban números. Algunas veces el radio tocaba música ambiental y otras el profesor tocaba guitarra. Los papeles dispersos sobre los pupitres contenían en su mayoría ejercicios de adición y sustracción. El punto es que los niños —incluso durante los momentos más intensos del trabajo por proyectos— pudieron reconocer la importancia de ser capaces de sumar los números y sumarlos bien.

Durante las horas de oficina este tipo de habilidades se pudo consolidar y las razones para tener este tipo de trabajo se justificaron con lo sucedido en las otras actividades del proyecto. El ambiente de oficina que se creó en la clase ayudó a romper el patrón normal del paradigma del ejercicio, a pesar de que la actividad realizada en esos momentos fuera de tipo (1). Esto ilustra que moverse dentro de los diversos ambientes de aprendizaje puede ayudar a dar un nuevo significado a las actividades de los estudiantes. El trabajo de oficina no tuvo lugar dentro de la atmósfera tradicional de las matemáticas escolares, a pesar de que sí se presentó dentro del paradigma del ejercicio. En particular, la comunicación en la oficina entre el profesor y los estudiantes no se rigió por la misma lógica que la comunicación ceñida a las reglas de la tradición

de las matemáticas escolares. La consolidación provista por el trabajo de oficina también sirvió como preparación para el inicio de un nuevo proyecto. Armonizar los cambios entre el trabajo por proyectos y el trabajo normal de la clase siempre ha sido un reto para la educación matemática basada en el trabajo por proyectos, independientemente de si se trata de la escuela primaria o de estudios universitarios.

Algunas veces, en discusiones con profesores, varias personas me han sugerido que antes de tratar de adentrarse en cualquier escenario de investigación los estudiantes deben poseer y estar familiarizados con ciertas técnicas que, de manera más eficiente, pueden ser provistas por el paradigma del ejercicio. La gran carrera de caballos ilustra por qué, en mi opinión, este no es el caso en general. Si a los niños se les hubieran presentado algunas nociones básicas de probabilidad antes de la carrera, por medio del diagrama típico que representa en el eje de las x los posibles valores de las caras de un dado azul, en el eje de las y los de un dado rojo y en el plano las sumas de las caras superiores de los dos dados, entonces todo el juego habría perdido su encanto. Así que la ruta opuesta del ambiente (4) al (3) puede ser relevante en muchos casos. Una vez el juego se ha ensayado y los niños se han familiarizado con la debilidad o fortaleza de algunos caballos y también han adquirido una idea sobre qué tan confiables son las apuestas, entonces ellos y el profesor pueden comenzar a hacer observaciones más particulares y a encontrar explicaciones. Y los ejercicios pueden usarse como un medio para estabilizar algunas de esas experiencias.

Generalización: la cultura del aula de matemáticas

Hasta ahora hemos especificado los seis tipos de ambientes de aprendizaje en términos de las referencias (a las matemáticas puras, a una semirrealidad o a una situación de la vida real) y de las formas de organización de la actividad en la clase (ejercicios o investigaciones); pero también podríamos emplear otros elementos para especificar tales ambientes de aprendizaje.

Un ambiente de aprendizaje también está determinado por la naturaleza de la *estratificación* que se dé en el aula. Por *estratificación* me refiero a la manera de proveer una clasificación y un ordenamiento de los estudiantes de acuerdo con sus habilidades. Tal *estratificación* puede hacerse de la manera más brutal, por ejemplo, como sucede en muchas escuelas en Inglaterra, donde los estudiantes se dividen públicamente en niveles A, B, C y D. Los estudiantes

que pertenecen al nivel A tienen el mayor rendimiento académico y, por lo tanto, son los mejores y los que se ubican en D son los peores. El resultado de una evaluación se le debería anunciar al estudiante y solo a cada estudiante individualmente. Y explicarle al estudiante dónde se encuentra “posicionado”, en términos de su desempeño, es muy diferente a hacer esa estratificación pública. Tal tipo de estratificación es la manera más poderosa de disciplinar a los estudiantes. Y cuando la estratificación también hace parte de un sistema de exámenes en que los conceptos de aprobación y pérdida están presentes, entonces esta estratificación toma la forma de violencia escolar contra los alumnos. La estratificación pública va contra una preocupación por el desarrollo del aula de matemáticas como una microsociedad en la cual los valores democráticos pueden experimentarse. La naturaleza de la comunicación entre el profesor y los estudiantes, definitivamente, está condicionada por la estratificación que opere en el aula.

Muchos otros aspectos son importantes para caracterizar un ambiente de aprendizaje: las formas de comunicación,⁸ que pueden variar desde lo establecido y fijado por el discurso propio del paradigma del ejercicio hasta el diálogo; el uso de la información y de las tecnologías de comunicación; los recursos económicos de la escuela; los antecedentes de los estudiantes; los conflictos políticos representados en el salón de clase; las posibilidades futuras en la vida de los estudiantes; etc. Todos estos aspectos, en conjunto, influyen los ambientes de aprendizaje y establecen la cultura del aula. Si queremos darle un significado robusto y profundo a esta noción, debemos considerar todos los aspectos mencionados (cf. Valero, 1999; Vithal, 1999 y 2000; Volmink, 1994). Por eso, en mi opinión, en el libro *The Culture of the Mathematics Classroom* [La cultura del aula de matemáticas], editado por Seeger, Voigt y Waschescio (1998), se presenta una concepción limitada de cultura.⁹ En el índice del libro no encontramos ninguna referencia a los sistemas de evaluación ni al trabajo por proyectos.

Habiendo dicho esto, podemos regresar a la discusión de la matriz, es decir, a la discusión de los escenarios de aprendizaje, con la claridad de que mi discusión toca solo una pequeña parte del tema: la cultura del aula de matemáticas.

⁸ Para una discusión sobre la comunicación en la clase de matemáticas, véase Alrø y Skovsmose (1996a, 1996b y 1998).

⁹ Comparar también con Nickson (1992) y Lerman (1994).

La zona de riesgo

La investigación francesa en didáctica de las matemáticas ha prestado bastante atención a la noción de contrato didáctico (cf. Brousseau, 1997). Respecto a la noción ambiente de aprendizaje, un contrato didáctico puede definirse en términos del “balance en un ambiente de aprendizaje”. Por lo tanto, un contrato didáctico se refiere a una armonía establecida entre los parámetros del ambiente de aprendizaje, esto es, armonía entre la manera como se produce significado, como se organizan las actividades, como se estructura el libro de texto, como se lleva a cabo la comunicación, etc. Más aún, esta armonía debe ser reconocida y aceptada tanto por la profesora como por los estudiantes. El establecimiento de un contrato didáctico, no obstante, no revela nada sobre la calidad del ambiente de aprendizaje. Primero que todo, indica que la profesora y los estudiantes comparten una comprensión y aceptan las prioridades del ambiente de aprendizaje. Su interacción no es problemática, en cuanto ambas partes reconocen el contrato.

Un contrato didáctico puede romperse de varias maneras, por ejemplo, cuando los estudiantes comienzan a preguntar sobre los detalles de una semirrealidad, como se propuso anteriormente. El contrato puede romperse si la evaluación se cambia drásticamente. En general, el mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas está estrechamente ligado con el rompimiento del contrato. Mi sugerencia inicial de cuestionar el paradigma del ejercicio puede verse como una sugerencia para romper el contrato de la tradición de las matemáticas escolares.

Desde la perspectiva de la profesora, esto puede parecer un movimiento desde una zona de comodidad a una zona de riesgo. Esta noción de zona de riesgo ha sido presentada por Penteadó (1999), en su estudio de las experiencias de profesores que se adentran en un nuevo ambiente de enseñanza-aprendizaje, donde los computadores desempeñan un papel crucial. Moverse a través de los diferentes ambientes de aprendizaje posibles y prestarles atención a los escenarios de investigación puede causar un alto grado de incertidumbre. Mi punto es que la incertidumbre no debe eliminarse, sino que hay un gran reto en enfrentarla.

Los computadores en el aula de matemáticas han contribuido a establecer nuevos escenarios de investigación (a pesar de que algunos programas cerrados traten de eliminar las incertidumbres al ajustar las actividades al paradigma del ejercicio). De manera inmediata, el computador cuestionará la autoridad de la profesora de matemáticas (tradicional). Los estudiantes que trabajan con,

por decir algo, geometría dinámica, fácilmente van a enfrentarse a situaciones y a experimentar posibilidades no previstas por la profesora como parte de su planeación de la lección. Un estudiante que juega ansiosamente con el ratón puede encontrar un rincón desconocido del programa. Y entonces, ¿qué hacer? ¿Cómo salir de ahí? La profesora debe siempre estar lista a responder preguntas que no tienen una respuesta fácil. Su autoridad tradicional puede romperse en segundos. Además, no es posible predecir cuándo esto sucederá de nuevo. Ni siquiera ella lo sabe. El grado de impredeción es alto.

Cuando los estudiantes exploran un escenario de investigación, la profesora no puede predecir las preguntas que van a surgir. Una manera de eliminar este riesgo es tratar de guiar a todo el mundo de regreso hacia el paradigma del ejercicio y, así, hacia una zona de comodidad. Por lo tanto, toda la exploración de la posibilidad de trasladar figuras geométricas en la tabla de números puede reorganizarse en secuencias de ejercicios. Y en vez de dejar que los estudiantes jueguen con un programa de geometría dinámica, la profesora podría especificar cada paso por seguir:

Primero seleccionen un punto. ¡Sí; todos hagan lo mismo! Llamemos A a ese punto. Ahora seleccionemos otro punto. A este punto lo llamamos B...

Al organizar las actividades en este tipo de órdenes, la profesora puede hacer que aparezca la misma imagen en (casi) todas las pantallas de los computadores que hay en la clase. Y cuando los estudiantes se mueven de esta manera, alineados como si fueran un pelotón de entrenamiento militar, la profesora puede evitar que sucedan eventos y retos impredecibles. Al hacer esto, sin embargo, también se pierden muchas posibilidades de aprendizaje.

Cualquier escenario de investigación hace surgir retos para la profesora. Una solución es no apresurarse a correr hacia la zona de comodidad del paradigma del ejercicio, sino ser capaz de operar en el nuevo ambiente. La labor consiste en posibilitar que la profesora y los estudiantes puedan operar cooperativamente en una zona de riesgo y en hacer de esta operación una actividad productiva y no una experiencia amenazante. Esto significa, por ejemplo, aceptar que las preguntas del tipo “y ¿qué pasa si...?” puedan conducir la indagación hacia un terreno desconocido. De acuerdo con la investigación de Penteadó (1999), una condición importante para que los profesores sean capaces de operar en una zona de riesgo es el establecimiento de nuevas formas de trabajo cooperativo, en particular entre profesores, pero también en la línea de estudiantes-padres-profesores-investigadores.

Pero, ¿por qué molestarse con aprender a operar en una zona de riesgo? ¿Por qué no simplemente aceptar el contrato didáctico de la tradición de las matemáticas escolares que ha sido elaborado de manera tan cuidadosa? Cobb y Yackel (1998) se refieren a la “autonomía intelectual” como una meta explícitamente establecida para sus esfuerzos por instaurar una tradición de indagación matemática que contraste con la tradición de las matemáticas escolares. La autonomía intelectual se caracteriza “en términos de la conciencia de los estudiantes y del deseo de confiar en sus capacidades intelectuales al tomar decisiones y hacer juicios matemáticos” (p. 170). La autonomía intelectual puede asociarse con las actividades de exploración y explicación que los escenarios de investigación facilitan. Es difícil concebir esta autonomía como algo enraizado en las reglas que determinan el comportamiento adecuado para operar en la semirrealidad del ambiente tipo (3).

Moverse en la matriz de la figura 5, desde el paradigma del ejercicio hacia los escenarios de investigación, puede ayudar a abandonar las autoridades del aula tradicional de matemáticas y hacer que los estudiantes adquieran el papel de sujeto activo en su proceso de aprendizaje. En el libro *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica*, he discutido el aprendizaje como una acción y he enfatizado la importancia de establecer las intenciones de los estudiantes como elementos que conducen el proceso de aprendizaje. Un sujeto crítico tiene también que ser un sujeto que actúa.

Estudios de aulas de clase donde problemas del mundo real fueron el punto de partida para consideraciones matemáticas dieron pie a que Voigt (1998) formulara la siguiente esperanza que yo también comparto:

Como futuros ciudadanos, los estudiantes tendrán que enfrentarse a muchos problemas del mundo real que parecen no ser transparentes desde un punto de vista matemático [...] ¿Tiene el ciudadano la capacidad de distinguir entre las inferencias matemáticas necesarias y los supuestos del modelaje que dependen de otros intereses? Podría esperarse que prestarle más atención a la calidad de la negociación del significado matemático en el aula pueda mejorar la educación de los ‘ciudadanos rasos competentes’. (p. 195)

Moverse en la matriz desde la referencia a las matemáticas puras hacia las referencias de la vida real puede ayudar a proveer recursos para reflexionar sobre las matemáticas (cf. Cobb, Boufi, McClain y Whitenack, 1997). El libro *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica* contiene una especificación de los elementos para elaborar una crítica al modelaje matemático. Esta crítica es parte esencial del desarrollo de la competencia llamada “alfabetización

matemática”. Las referencias a la vida real parecen ser necesarias para establecer una reflexión detallada sobre la manera en que las matemáticas operan como parte de nuestra sociedad. Un sujeto crítico es también un sujeto reflexivo.

¿Cómo desarrollar una educación matemática como parte de nuestra preocupación por la democracia en una sociedad estructurada por las tecnologías que incluyen a las matemáticas como un elemento constitutivo? (Cobb, Boufi, McClain y Whitenack, 1997) ¿Cómo desarrollar una educación matemática que no opere como una introducción ciega de los estudiantes al pensamiento matemático, sino que les permita reconocer sus propias capacidades matemáticas y que los haga conscientes de la forma como las matemáticas funcionan en algunas estructuras tecnológicas, militares, económicas y políticas? Nunca me atrevería a afirmar que abandonar el paradigma del ejercicio para explorar los escenarios de investigación pueda ofrecer una respuesta definitiva a estas preguntas. Tampoco apoyaría la idea de que es suficiente construir una educación matemática únicamente sobre los pilares de las referencias a la realidad. Mi única esperanza es que encontrar una ruta entre los diversos ambientes de aprendizaje que he delineado pueda ofrecer nuevos recursos para hacer que los estudiantes puedan ser sujetos activos y reflexivos. Y de esta manera espero que se le pueda dar una dimensión crítica a la educación matemática.

Agradecimientos

Este estudio de los diversos ambientes de aprendizaje ha sido parte de la investigación adelantada en el Centro de Investigación en Aprendizaje de las Matemáticas, en Dinamarca. Deseo expresarles mis agradecimientos, por sus comentarios y sugerencias para aclarar los escenarios de investigación, a Helle Alrø, Morten Blomhøj, Gunnar Bomann, Henning Bødtkjer, Arne Astrup, Miriam Penteado, Mikael Skånstrøm y Paola Valero.