

GEOGEBRA EN LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

DARIANA ATENCIO
dariana.atencio@utp.ac.pa
Universidad Tecnológica de Panamá, Panamá

Núcleo temático: Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Modalidad: CB

Nivel educativo: Terciario - Universitario

Palabras clave: Geogebra, Ecuaciones Lineales, Matemáticas.

Resumen

La integración de recursos tecnológicos en el aula permite una mejor visualización de las representaciones gráficas y constituye un factor importante en la fijación de conceptos matemáticos.

Se presenta una experiencia educativa donde participaron dos grupos de estudiantes en igualdad de condiciones, quienes realizaron una actividad de forma colaborativa para determinar la solución analítica y gráfica de sistemas de ecuaciones lineales. La técnica utilizada consiste en que uno de los grupos ha trabajado con las metodologías tradicionales de enseñanza y en el otro grupo adicionalmente se le ha incorporado el software Geogebra como recurso didáctico de apoyo.

En términos generales el grupo que ha empleado el software Geogebra comete menos errores tanto en las soluciones analíticas como en la representación gráfica, en relación al grupo que ha utilizado las metodologías tradicionales.

Introducción

Muchos docentes e investigadores en Educación Matemática están de acuerdo en que el uso de la tecnología es necesario en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Existen diversas funciones en las que la tecnología puede jugar un papel fundamental en la instrucción, como lo es en la eliminación de procesos repetitivos y laboriosos, en la visualización, así como también en proporcionar entornos para explorar activamente las propiedades de conceptos y estructuras matemáticas.

La aplicación de diversas herramientas tecnológicas en la enseñanza de las matemáticas posibilita que los estudiantes adquieran habilidades y destrezas para analizar, simular, modelar y resolver problemas en su campo profesional en mejores condiciones que las que obtiene sólo utilizando lápiz y papel.

La presente investigación se enmarca en el área de álgebra computacional y explora la percepción de estudiantes universitarios de primer ingreso respecto de la influencia en la fijación de conceptos matemáticos mediante el uso de tecnologías para el aprendizaje del álgebra lineal, así como también que dichos aprendizajes se den mediante el enfoque colaborativo.

Para ello utilizamos Geogebra, que es un software de matemáticas dinámicas que puede ser utilizado en todos los niveles educativos. Es un programa que tiene un interfaz fácil de usar que contempla Geometría, Álgebra, Cálculo, Estadísticas, entre otros. Es un software de código abierto que cuenta con poderosas herramientas y está disponible en varios idiomas, apoyando la innovación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a nivel global.

Las tecnologías en el aprendizaje de la matemática

Algunos aspectos beneficiosos del uso de tecnologías en el aprendizaje y actitud hacia la matemática son la flexibilidad instruccional, complementariedad de códigos, aumento de motivación y las posibilidades de trabajo en actividades colaborativas y cooperativas. (García, 2009).

Los programas para el aprendizaje de matemática tienen un fuerte componente gráfico para favorecer la visualización. Que la visualización constituya un aspecto importante dentro de la matemática, es algo natural si se atiende la naturaleza misma de la matemática. En este sentido, "el objeto de las matemáticas son las relaciones cuantitativas y las formas espaciales del mundo real". Cualesquiera ramas de las matemáticas están ligadas a estas dos formas

particulares, entonces, se puede pensar que la matemática es una ciencia que estudia estas relaciones cuantitativas y las formas espaciales. (Ribnikov, 1991).

Otro aspecto relacionado con la visualización en el sentido abordado, es la vinculación de estos entes eidéticos con las estructuras de la realidad. Ésta se conoce como matematización, (De Guzmán, 1996) , lo conceptualiza: "se da una percepción de ciertas semejanzas en las cosas sensibles que nos lleva a abstraer de estas percepciones lo que es común, abstraíble, y someterlo a una racional, simbólica, que nos permita manejar más claramente la estructura subyacente a tales percepciones".

Para el álgebra y el cálculo se ha producido un número amplio de programas que buscan aprovechar el manejo de múltiples sistemas de representación, el aspecto dinámico de los sistemas y la interactividad permiten que el sujeto viva una experiencia matemática diferente a la tradicional. En este sentido, el sujeto puede realizar aproximaciones exploratorias a los problemas, trabajar con problemas y situaciones más complejas y reales (gracias a la facilidad de los sistemas para manejar simbolismos más complejos y para realizar cálculos numéricos más rápidamente), y desarrollar una aproximación más inductiva y empírica en contraposición con la aproximación tradicional que tiende ser de tipo deductivo y algebraico (Gómez, 1997). Dentro de esta nueva forma de trabajar estos temas, surgen inquietudes acerca de la pérdida de habilidades del manejo simbólico que los programas realizan para el sujeto y de una posible pérdida en el aprendizaje conceptual. Sin embargo, resulta evidente que los resultados, desde el punto de vista del aprendizaje del sujeto, dependen no solamente del funcionamiento del programa, sino también del cuidado con que el profesor seleccione y diseñe las situaciones y los problemas que el sujeto debe resolver con la ayuda de los programas.

Aprendizaje colaborativo en matemáticas

La pedagogía de Freinet, Rousseau, Neill, Makarenko, Cousinet, Ferrer i Guàrdia y Rué... ha permitido evolucionar los modelos pedagógicos hacia procesos de cooperación y aprendizaje entre iguales. Entienden el aprendizaje desde la relación y la cooperación, en definitiva, desde la interacción. Muestran cómo los estudiantes en torno a tareas adecuadas, aumentan su dominio de conceptos críticos. Este tipo de principios ha creado una forma de entender y

desarrollar la actividad educativa, las dinámicas prácticas y la configuración de las propias aulas donde ésta se desarrolla. Si nuestro cerebro es capaz de evolucionar y pasar del instinto a procesos superiores de pensamiento, hemos de ayudar a su desarrollo, apoyando en los procesos educativos esas capacidades. Aprendemos socialmente, puesto que nuestro aprendizaje es lingüístico, por tanto, creamos nuestros referentes del mundo que nos rodea en forma de lenguaje, conceptos que se construyen en referencia a lo que el grupo social acuerda. También interaccionamos al aprender y eso nos ayuda a madurar y a construir conceptos, a establecer procedimientos compartidos y a adoptar actitudes ante la vida (Rubia, 2014).

“Las principales ventajas del aprendizaje colaborativo se han relacionado con el desarrollo de competencias transversales que facilitan el desarrollo de habilidades sociales, la resolución de problemas, la autonomía, responsabilidad, capacidad de reflexión e iniciativa. Todas ellas consideradas de gran relevancia por los docentes. En cuanto a las TIC, estas son valoradas por facilitar el trabajo a los alumnos, dándoles más autonomía, motivándoles, captando su atención y adaptándose a su nivel, lo que favorece especialmente a los alumnos con dificultades, si bien permite a todos mejorar el aprendizaje” (García-Valcárcel, 2014).

Los estudiantes participantes de la prueba son nativos digitales, con lo que las estrategias de enseñanza deben procurar la introducción de herramientas tecnológicas, pese a la denominada brecha digital (Prensky). Debido a fuertes inversiones en equipamiento informático en algunas naciones de Hispanoamérica la principal carencia no radica en la denominada brecha digital surgida de la inexistencia de recursos materiales para su implementación sino de una incapacidad para el empleo de las herramientas adecuadas. Tal y como lo recomienda Dan Meyer (TED Conferences), un educador popular en los Estados Unidos fomenta el uso de tecnologías no solamente para resolver problemas sino para formularlos, los comentarios de los estudiantes participantes de la prueba reflejan que una combinatoria de aprendizaje por pares (colaborativo) y de uso de tecnología podría conducirnos en nuevas direcciones de estudio para promover el aprendizaje significativo de las soluciones de sistemas de ecuaciones lineales.

Diseño Experimental

Se trata de una investigación exploratoria de las percepciones de estudiantes universitarios en cursos de primer ingreso. Se trabaja con dos grupos de composición estadísticamente semejante en cuanto a edad y nivel previo de estudios. Ambos grupos reciben clases en igualdad de condiciones.

Como actividad de evaluación formativa se diseñó una prueba con un problema único dando libertad de asociación con un compañero (Anexo 1). Ambos grupos presentaron esta prueba que contiene, además del problema, preguntas abiertas sobre los conceptos que deben dominarse para resolverla.

El grupo experimental realiza, además una encuesta de respuestas múltiples sobre el uso de Geogebra y el aprendizaje colaborativo. Esta encuesta utilizó una pregunta de opciones múltiples que contenía 3 subtemas relacionados con la fijación de conceptos y la percepción de la utilidad y sencillez del software. En una segunda parte y a efectos de controlar que la pregunta indicada no hubiese sido contestada al azar se solicitó comentarios con respuesta libre a 2 preguntas (Anexo 2). En ambos grupos presentan la encuesta 34 estudiantes.

Resultados y análisis

La tabla 1 presenta los resultados en la prueba sobre soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales. Los porcentajes de acierto se han calculado en base a la respuesta para sistema de solución única (1), sistema sin solución (2) e infinitas soluciones (3).

Grupo	Preguntas	Solución analítica			Representación Gráfica		
		1	2	3	1	2	3
Control	% aciertos	88,2	100	82,4	82,4	94,1	82,4
Experimental	% aciertos	100	94,1	94,1	100	88,2	94,1

Tabla 1

En términos absolutos se observa una mayor frecuencia de aciertos entre los participantes del grupo experimental que entre los del grupo de control. Aunque este resultado por sí solo no es definitivo, sirve como punto de partida para la ampliación del estudio mediante una investigación longitudinal con un mayor número de participantes que permita una comparación significativa de las medias porcentuales.

Las respuestas de la pregunta relacionada con los sistemas sin solución se salen de la tendencia de los problemas con solución única e infinitas soluciones, tanto en la solución analítica como en la gráfica. La diferencia podría estar relacionada con errores estadísticos. En el espacio para ampliación por comentarios libres, los comentarios mayoritarios se emiten sobre el hecho de que Geogebra facilita la visualización de las representaciones gráficas y la rapidez con la que se resuelven los problemas. Se considera además, que al ser una herramienta que no necesita conexión a internet al momento de utilizarlo, le revierte utilidad que podría incrementarse en una aplicación en teléfonos móviles.

Respecto de las respuestas a las preguntas adicionales sobre los conceptos y métodos relacionados con la solución del problema planteado, no hubo diferencia significativa entre ambos grupos y se observó una mayor frecuencia en mencionar métodos de solución que conceptos propiamente dichos.

Para las respuestas sobre si el trabajo colaborativo favorece la fijación de conceptos, en su totalidad, los estudiantes de ambos grupos respondieron que sí, dando como razones que la presencia de un compañero permite aclarar dudas, reforzar conocimientos, discusiones de conceptos mediante la comparación de formas de visualización de los mismos. (Granberg, 2015) han trabajado con Geogebra aplicado a entornos de aprendizaje colaborativo en álgebra, a nivel de bachillerato, y han concluido que los estudiantes emplearon Geogebra para visualizar, referenciar, probar y monitorear para la negociación de conocimientos compartidos y que no es asunto únicamente de no dividirse el trabajo, sino que se trata también de compartir conocimientos en los asuntos siguientes: hacia dónde nos dirigimos, donde nos encontramos en estos momentos y como llegaremos a dónde vamos.

Las respuestas en la encuesta aplicada a los estudiantes que trabajaron con Geogebra reflejan que un 76,5% percibe que el software le ayudó en la fijación de conceptos relacionados con la representación gráfica de las soluciones de sistemas de ecuaciones lineales, mientras que el 14,7% considera que no fue de utilidad en la fijación de conceptos y un 8,80% no responde. En aspectos relacionados con la ergonomía de Geogebra 76,5 % considera que es un software de fácil utilización mientras que 14,7 % encuentran que es complicado y un 8,80 % de estudiantes no responde. Al examinar la relación entre el estudiante y el programa en aspectos como la apariencia de la interfase y la funcionalidad del software, ambas variables resultaron favorecidas en la concepción de los estudiantes pues el 91,2% responde que es

visualmente agradable y un 88,2% manifiesta que le permite una mejor solución de los problemas y le ahorra tiempo. Estas opiniones en gran medida coinciden con (Iranzo, 2009)

Conclusión

Esta experiencia nos ha permitido inferir, a través de las respuestas presentadas por los estudiantes que existe un alto nivel de aceptación en el uso del software Geogebra como una herramienta de apoyo en la solución de problemas. Además, los estudiantes coinciden en que el trabajo colaborativo con TIC les facilita el trabajo, les permite compartir y debatir ideas, les ayuda a reforzar conocimientos, favorece la inclusión y la integración de aquellos estudiantes con dificultades.

Los resultados favorecen la incorporación del uso de Geogebra para el aprendizaje significativo de la matemática, como herramienta de apoyo en el aprendizaje colaborativo de los sistemas de ecuaciones lineales.

Uno de los aspectos relevantes es que Geogebra les ayuda a tener una mejor visualización gráfica, lo que contribuye a una mejor fijación de conceptos matemáticos.

En términos generales el grupo que utilizó Geogebra cometió menos errores tanto en las soluciones analíticas como en la representación gráfica, en relación al grupo que utilizó las metodologías tradicionales.

Bibliografía

De Guzmán, M. (1996). *El papel de la visualización*. Madrid: UCM.

García, M. R. (2009). Influencia de las Nuevas Tecnologías en la evolución y las actitudes matemáticas de estudiantes de secundaria. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 369-396.

García-Valcárcel, A. e. (2014). Las TIC en el aprendizaje colaborativo en el aula de Primaria y Secundaria. *Comunicar*, 65-74.

Gómez, P. F. (1997). Graphics Calculators use in Precalculus and achievement in Calculus in PME. *21th PME Conference*. Lathi: University of Helsinki.

Granberg, C. O. (2015). ICT-supported problem solving and collaborative creative reasoning: Exploring linear functions using dynamic mathematic software. *Journal of Mathematical Behaviour* , 48-62.

International Geogebra Institute. (s.f.). *www.geogebra.org*. Recuperado el 24 de abril de 2017, de Geogebra: *www.geogebra.org*

Iranzo, N. F. (2009). La influencia conjunta del uso de Geogebra y lápiz y papel en la adquisición de competencias del alumnado. *Enseñanza de las Ciencias*, 433-446.

Prensky, M. (s.f.). *www.marcprensky.com_Nativos e inmigrantes digitales*. Recuperado el 06 de 03 de 2017, de Marc Prensky Practical Visionary: *www.markprensy.com*

Ribnikov, F. (1991). *Historia de las Matemáticas*. Moscú: Mir.

Rubia, B. a. (2014). Revolution in Education?, Computer support for collaborative learning (CSCL). *Comunicar*, 10-13.

TED Conferences. (s.f.). *TED*. Recuperado el 07 de 03 de 2017, de *www.ted.com_danmeyer*

PROBLEMA

Dado el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas x y y :

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned}$$

Donde $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$ son números dados.

- Considere valores para $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$ de forma tal que el sistema de ecuaciones tenga **SOLUCIÓN ÚNICA**. Represente gráficamente.
- Considere valores para $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$ de forma tal que el sistema de ecuaciones **NO TENGA SOLUCIÓN**. Represente gráficamente.
- Considere valores para $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$ de forma tal que el sistema de ecuaciones tenga **INFINITAS SOLUCIONES**. Represente gráficamente.

Preguntas adicionales:

- 1) Que conocimientos consideras importante para resolver este problema.
- 2) Qué procedimiento utilizó para resolver el problema.
- 3) Considera que el aprendizaje colaborativo favorece la fijación de conceptos matemáticos.

Si _____ No _____

Explique:

EXPERIENCIA CON GEOGEBRA

I Parte. Señale con una "X" (puede seleccionar más de una respuesta).

Después de su experiencia con Geogebra le parece que:

- _____ El software le ayudó en la fijación de conceptos
- _____ Es un software de fácil utilización
- _____ Es un software complicado
- _____ Es visualmente agradable
- _____ Le permite una mejor solución de los problemas y le ahorra tiempo.
- _____ Su fijación de conceptos no depende del software.

II Parte.

- 1) Comente acerca de su percepción de la eficacia del uso de Geogebra en la fijación de conceptos matemáticos.
- 2) Señale las ventajas, desventajas, limitaciones, dificultades o posibilidades relacionado con el uso de Geogebra.