Artigo Teórico

Hierarquia na Aprendizagem de Medidas: Mito ou Realidade?

Lilian Nasser[1]

Resumo
Este artigo é uma homenagem à Dra Kathleen Hart, pesquisadora inglesa que se dedicou à formação de professores de Matemática e à produção de material didático, que faleceu em abril de 2013. Era membro atuante do grupo internacional de Psicologia da Educação Matemática, que presidiu de 1993 a 1995. Foi coordenadora do projeto Conceitos em Matemática e Ciências no Curso Secundário (Concepts in Secondary Mathematics and Science – CSMS) do Chelsea College, da Universidade de Londres. Para investigar se a aprendizagem de conceitos de medidas obedece a uma hierarquia é usado neste trabalho um recorte dos resultados da pesquisa do CSMS, no que se refere à aprendizagem de Grandezas e Medidas. Os resultados mostram que não há uma hierarquia no domínio do conhecimento de medidas de comprimento, área e volume, como pode parecer. Por isso, recomenda-se, por exemplo, que no Ensino Fundamental os conceitos de área e perímetro sejam explorados simultaneamente.
Palavras-chave: Educação Matemática, conceitos de medidas, grandezas e medidas.

Introdução

O conteúdo de "grandezas e medidas" é considerado um dos mais importantes do currículo da matemática escolar. Ao ensinar um tópico tão abrangente, o professor deve pensar atentamente na sequência de apresentação dos conceitos, habilidades e processos inerentes ao tópico, de modo que a aprendizagem seja ao mesmo tempo eficiente e agradável. A equipe do projeto de pesquisa Conceitos em Matemática e Ciências no Curso Secundário (Concepts in Secondary Mathematics and Science – CSMS) do Chelsea College, Universidade de Londres, investigou a existência de uma hierarquia de habilidades em medidas e em dez outros ramos da Matemática, comuns no currículo da escola secundária britânica (idades de 11 a 16 anos). Detalhes de todas as hierarquias estão no livro CSMS (1980), coordenado pela Dra. Kathleen Hart. Este artigo enfoca apenas o trabalho de grandezas e medidas (HART,

[1]Projeto Fundão – IM/UFRJ
E-mail: lnasser@im.ufrj.br

1984).

A pesquisa do CSMS se desenvolveu em três fases: (1) a elaboração dos problemas, (2) entrevistas usando esses problemas, e (3) aplicação de testes escritos contendo os mesmos problemas. As hierarquias de conceitos e habilidades foram relacionadas a tópicos particulares na resolução de exercícios de medidas: comprimento, área e volume. Esses problemas incorporavam ideias chave de cada tópico particular e não foram apresentados aos alunos imediatamente após o ensino de um conteúdo. Os cálculos foram reduzidos ao mínimo, e os problemas foram criados para testar conhecimentos básicos das ideias de medidas, em vez de habilidades em medidas.

Trinta estudantes (idades de 12 a 15 anos) foram entrevistados em cada tópico. Eles deviam resolver os problemas e descrever os métodos usados. Suas respostas, que foram gravadas, frequentemente se apoiavam em métodos ingênuos ou estratégias aplicadas na escola primária, mais do que em algoritmos que faziam parte do ensino secundário. Os testes escritos foram aplicados a uma amostra de crianças inglesas, representativa dos coeficientes de QI, de diversas escolas, e diversas faixas etárias. No caso de Grandezas e Medidas, 20 escolas forneceram alunos: 169 com 12 anos, 444 com 13 anos e 373 com 14 anos. As escolas que se ofereceram como voluntárias eram de áreas urbanas e rurais.

A investigação em medidas limitou -se a avaliar a habilidade das crianças em resolver problemas nos tópicos de comprimento, área e volume. Alguns desses problemas foram adaptados de “A Concepção de Geometria na Criança” de Piaget (1960). Muitos dos outros itens seriam reconhecidos pelos professores como o tipo de questões dadas a crianças com idades de 12 a 15 anos. Um número de palavras técnicas usadas em medidas, como *área, perímetro* e *volume*, foram descritas (com ilustrações) na primeira página do teste.

Os resultados do teste foram usados para formar a hierarquia. Primeiro, os itens foram classificados de acordo com a facilidade, a porcentagem de respostas corretas. Depois, os itens foram agrupados em conjuntos com aproximadamente a mesma dificuldade. Se um aluno era bem sucedido em um item de um grupo, então era esperado que também fosse bem sucedido nos demais itens do mesmo grupo. Os itens nos quais isso não aconteceu foram descartados. Os alunos eram considerados como bem sucedidos num determinado nível se eles resolviam dois terços dos itens daquele nível. O termo *hierarquia* pressupõe que os alunos bem sucedidos num grupo de itens mais difíceis também sejam bem sucedidos em todos os grupos mais fáceis. Na hierarquia de medidas, 97% da amostra seguiu o modelo de respostas.

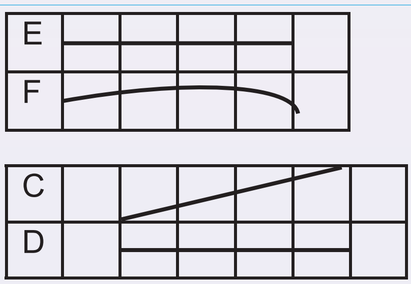
Piaget e outros pesquisadores de Genebra apresentaram a teoria do desenvolvimento cognitivo baseados em respostas das crianças a tarefas apresentadas em entrevistas clínicas. As respostas são divididas em categorias representativas de certos estágios de desenvolvimento: pré-operacional (de 1,5 a 7 anos de idade), operacional-concreto (de 7 a 11 anos), e formal (de 11 anos ou mais). Apesar de as idades sugeridas por Piaget terem sido questionadas por muitos pesquisadores, a ordem dos três estágios é em geral aceita. Algumas pesquisas (Hughes, 1979) tendem a mostrar que, apesar de uma criança responder uma tarefa no nível operacional-concreto, a *mesma* criança pode responder a uma tarefa diferente num nível diferente. Logo, há evidências de que o estágio pode não ser um nível genérico de desenvolvimento, mas depender da tarefa. As atividades de Piaget para avaliar a conservação de comprimento, área e volume são baseadas na habilidade da criança de raciocinar que a medida não se altera com a mudança de posição.

1. Comprimento

O comprimento de um segmento de reta é obtido pela contagem do número de vezes que uma unidade de medida pode ser repetidamente colocada ao longo do segmento, sendo que o número de unidades depende do tamanho da unidade. O uso de uma unidade padrão de comprimento (o centímetro, por exemplo) facilita a comunicação. O comprimento de um segmento de reta não muda se o segmento é movido ou se os extremos não estão alinhados. A compreensão deste último conceito foi testada pelo CSMS, pela apresentação de dois exemplos (fig.1).

(a)

(b)



(a)
1. A linha *E* é mais comprida. ____
2. A linha *F* é mais comprida. ____
3. *E* e *F* têm o mesmo comprimento. ___
4. Nada se pode afirmar.

(b)
1. A linha *E* é mais comprida. ____
2. A linha *F* é mais comprida. ____
3. *E* e *F* têm o mesmo comprimento. ___
4. Nada se pode afirmar.

Tabela 1: Testes de conservação de comprimento.
Fonte: Arquivo pessoal.

O índice de acertos para o problema (a) da figura 1 ficou entre

72% e 82%, enquanto para o problema (b) ficou entre 42% e 52%. Nas entrevistas, as crianças que afirmaram que C e D tinham o mesmo comprimento quase sempre citaram um número.

Esse desejo de usar números para embasar um argumento ao custo de todas as outras considerações estava presente quando duas unidades de medida diferentes eram usadas para medir os mesmos caminhos. Considere os itens da figura 2, por exemplo.

João mede os comprimentos dos caminhos A e B usando uma bengala. Depois ele mede os comprimentos de C e D usando uma vara de metal.

Caminho **A**	13 bengalas	Caminho **C**	15 varas
Caminho **B**	14 ½ bengalas	Caminho **D**	12 ½ varas

Marque a resposta que você acha que é verdadeira em cada questão

O caminho B é maior que o caminho A.	Verdadeiro	Falso	Não é possível dizer
O caminho C é maior que o caminho B.	Verdadeiro	Falso	Não é possível dizer
O caminho D é maior que o caminho C.	Verdadeiro	Falso	Não é possível dizer

Figura 2: Medindo comprimentos com diferentes unidades de medida.

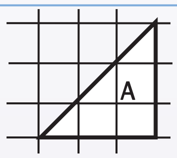
Apesar de 90% da amostra ter dado a resposta correta para as afirmativas 1 e 3, 50% das crianças de 12 anos, 34% das de 13 anos e 27% das de 14 anos disseram que C era maior que B na afirmativa 2. Muitos dos que deram essa resposta justificaram pelo fato de que “15 é maior que 14 ½”, mesmo quando perguntados “15 o que? 14 ½ o que?”. Esses erros indicam uma incompreensão fundamental da natureza da medição, possivelmente refletindo uma insistência precoce de que um número é sempre a resposta pedida.

2. Área

Na medida de área, usualmente é empregada uma unidade quadrada, que pode ser usada de duas maneiras: cobrindo a figura com quadradinhos ou desenhando a figura em papel quadriculado e contando o número de quadrados cobertos. Ambos os processos envolvem contagem, apesar de que, no caso do retângulo, levam naturalmente ao estabelecimento da fórmula da área = comprimento x largura. O mosaico pode ser estendido para incluir a combinação de partes de quadrados para formar unidades inteiras. Os alunos ficaram confusos quando a pergunta era sobre o número de quadrados necessários para cobrir um retângulo, dados dois tamanhos diferentes de quadrados. Apesar de 87% da amostra total ter sido capaz de dizer quantos quadrados de 1 cm de lado eram necessários para cobrir um retângulo de 4 cm por 2 cm, 60% da mesma amostra simplesmente dobrou a resposta quando a pergunta era sobre o número de quadrados de ½ cm x ½ cm necessários, mesmo que ambos os tamanhos tenham sido mostrados.

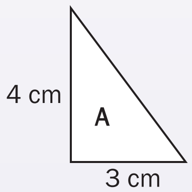
Embora a fórmula para a área do retângulo seja ensinada na escola primária inglesa (7-11 anos), evidências consideráveis sugerem que o método de contagem é usado pelos alunos ao longo da escola secundária.

(a)



Área de A = _______

(b)



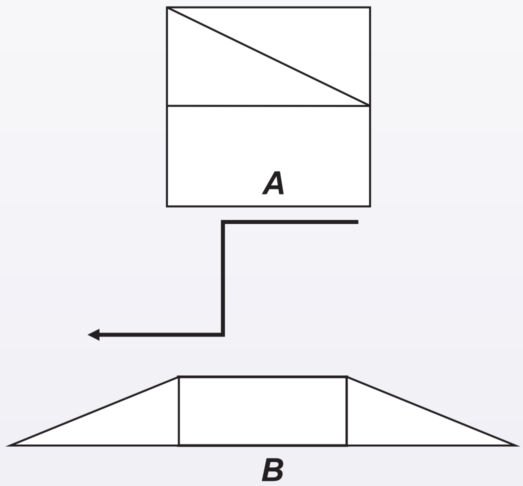
Área de A =___

Figura 3: Área do triângulo.

É interessante observar a diferença no desempenho da questão sobre área da figura 3. Uma figura está na malha quadriculada e a outra, não, o que sugere que o primeiro problema foi resolvido por contagem e o segundo, não. Os índices de acertos em (a) foram de 78%, 87% e 94%, respectivamente para alunos de 12, 13 e 14 anos, enquanto em (b) os índices foram de 31%, 29% e 48%.

Um dos itens elaborados para avaliar as ideias das crianças em conservação de área aparece na figura 4. Os índices de acertos foram de 80%, 85% e 85% para alunos de 12, 13 e 14 anos, respectivamente. Ao serem perguntados se os perímetros eram os mesmos, entretanto, 36% dos alunos (12 anos), 29% (13 anos) e 20% (14 anos) responderam que sim.

Um quadrado ***A*** é cortado em 3 peças, arrumadas sem superposição para formar uma nova figura ***B*** como a seguir:



O que é possível afirmar sobre a área das figuras A e B? E sobre os perímetros?

Figura 4: Teste de conservação da área e perímetro

Durante a entrevista, muitos alunos que receberam um cartão com a figura 4 não podiam acreditar que os perímetros eram diferentes, apesar das áreas serem iguais. Eles diziam, “eu não devo estar medindo direito, eles devem ser iguais”.

3. Volume

Todas as questões sobre volume envolviam o volume de um cubo ou de um prisma triangular. No teste escrito, diagramas de figuras tridimensionais foram disponibilizados, mas blocos reais foram apresentados nas 30 entrevistas que se seguiram. Foi encontrada pouca diferença nas respostas das duas formas de teste. A conservação de volume foi avaliada no teste escrito pela apresentação de duas configurações diferentes do mesmo número de cubinhos, uma em forma de um bloco retangular, e outra numa pilha desordenada. Um número considerável de alunos, quando entrevistados, visualizaram uma camada de cubinhos e contaram camadas para encontrar o volume do bloco e também para a pilha desordenada.

Achar o volume de um prisma triangular foi um dos itens mais árduos do teste (veja figura 5). Os índices de sucesso para alunos de 12, 13 e 14 anos foram de 15,4%, 21,2% e 32,2%, respectivamente. Cerca de 16% da amostra deu a resposta incorreta 24. As fórmulas para volumes não eram necessariamente parte do repertório das crianças, que usavam contagem.

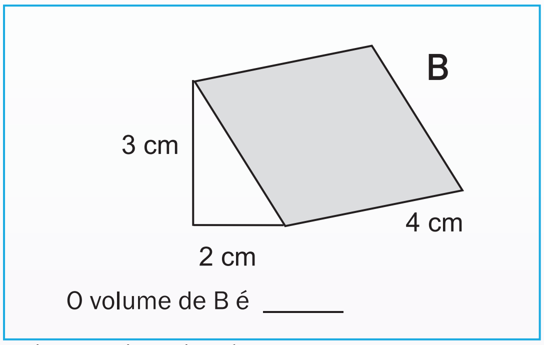


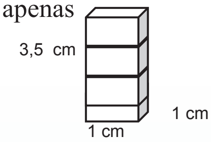
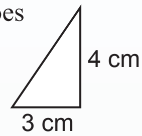
Figura 5: Prisma triangular

4. Hierarquia em medidas

A hierarquia resultante da pesquisa do CSMS depende, é claro, dos itens particulares propostos aos alunos. Os métodos usados pelos alunos para cada nível constam do Quadro 1.

Os itens provenientes da pesquisa de Piaget não correlacionaram bem com os outros itens do nosso teste de medidas. Então, não foi possível afirmar que a hierarquia em medidas reflete os níveis de desenvolvimento de Piaget. Piaget sugere que a conservação operacional de área aparece depois da de distância e comprimento.

**Professor,
Envie suas experiências em sala de aula!
Teremos prazer em publicá-las!!**

Nível 1 Índice de acertos: 73-89%	Encontrar a área pela contagem de quadrados e meio-quadrados. Encontrar o volume de um paralelepípedo quando há apenas Um cubo em cada camada, como na figura. 
Nível 2 Índice de acertos: 58-69%	Encontrar o volume de um paralelepípedo por meio da contagem de cubinhos, quando nem todos estão visíveis. Usar a fórmula da área do
Nível 3 Índice de acertos: 40-53%	Achar o volume de um paralelepípedo quando as dimensões são dadas, mas os cubinhos não são mostrados. Usar a fórmula da área do retângulo para encontrar a área de um triângulo. 
Nível 4 Índice de acertos: 15-24%	Usar uma adaptação das fórmulas, tanto de retângulos quanto de paralelepípedos, por ex, para um prisma triangular.

Quadro 1: Hierarquia em medidas (Hart, 1984)
Fonte: Arquivo pessoal

Se a criança nega a igualdade quando um palito é empurrado para o lado, então a criança não reconheceu a conservação de comprimento. Esse reconhecimento é estabelecido no nível 3 (operacional-concreto). Pouco antes disso (nível 2b-3), a criança percebe que uma curva e uma reta com extremos alinhados não são iguais em comprimento.

A conservação de área é testada por meio de dois quadrados congruentes dados (terrenos), em cada um dos quais o proprietário constrói o mesmo número de casas. Num dos casos, as casas são construídas numa fila, e no outro, elas são espalhadas pelo terreno. A questão é se a criança reconhece que a mesma quantidade de grama permanece em cada terreno (figura 6).

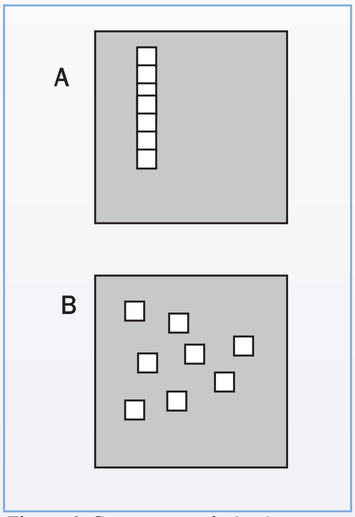


Figura 6: Conservação de área)
Fonte: Arquivo pessoal

No contexto do teste do CSMS, as crianças que parecem dominar a ideia de comprimento são aquelas que respondem corretamente a ambas as questões da figura 8.

Setenta e três por cento da amostra (N = 986) responderam corretamente a essas questões. Os que têm a ideia correta da conservação de área são definidos como os que foram bem sucedidos nas questões da figura 9 e da figura 4. Setenta e dois por cento da amostra total sabem resolver corretamente essas questões. Entretanto, 70 por cento das crianças que *não* dominam a conservação de comprimento *souberam* resolver os dois problemas de área. Do mesmo modo, 70% daqueles que *não* conservam área *dominam* a conservação de comprimento. Portanto, parece que uma habilidade não é pré-requisito para a outra.

A conservação do volume é uma ideia difícil (nível 4, ou operatório formal em termos piagetianos). Dos alunos que conservam comprimento ou área, 52% conseguem acertar o problema da torre (tabela 1), enquanto apenas 26% dos não conservadores acertam. É de se esperar que aqueles que conseguem lidar com o problema da torre fossem bem sucedidos nos conjuntos de itens de conservação de comprimento e área. Essa expectativa não é correta. Cento e vinte e nove crianças (445 acertaram ao todo) acertaram a questão da torre, mas não conservaram comprimento e área (Hart, 1984, p. 27).

A progressão através de comprimento para área e depois para volume, que aparece em muitos textos é, portanto, um mito. Apenas porque a criança parece dominar um tópico não significa que se deve esperar que ela seja capaz de lidar com outros tópicos que acreditamos serem pré-requisitos. Portanto, para que o ensino seja eficaz, é necessária uma análise cuidadosa das ideias das crianças sobre medidas. Assim, recomenda-se que os conceitos de área e perímetro sejam explorados simultaneamente, como no exercício da Figura 4. O trabalho com o Tangran também é útil para promover a conservação de área, embora os perímetros das figuras formadas sejam variados. Para a conservação de volume, além do trabalho com empilhamentos variados de cubinhos, é interessante explorar recipientes de várias formas, com a mesma capacidade, levando o aluno a concluir que o mesmo volume de líquido pode ocupar recipientes com formas distintas.

Referências

CONCEPTS IN SECONDARY MATHEMATICS AND SCIENCE (CSMS). Mathematics Team. **Children's Understanding of Mathematics**, *11-16*. London: Jonh Murray, 1980

HART , K. Which comes first – lenght, area or volume? In: **Arithmetic Teacher**, Maio, p. 16-18 e 26-27, 1984.

HUGHES, E. R. Should we check children? In: ARCHENHOLD, W. F. (Ed.) **Cognitive Development Research in Science and Mathematics**, Proceedings of an International Seminar. Leeds: University of Leeds, 1979.

PIAGET, J., Barbel Inhelder e Szeminska, A. **The Child's Conception of Geometry**. London: Routledge & Kegan Paul, 1960.