

Aplicación de la operación clasificación de conceptos al estudio de los cuadriláteros convexos

Otilio Bienvenido Mederos Anoceto (1) y Aldo Medardo Ruiz Pérez (2)

(1) Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Autónoma de Coahuila, Saltillo, México. Centro de Estudios de Educación. Universidad Central de las Villas, Cuba.

(2) Centro de Estudios Pedagógicos de la Universidad Pedagógica "Silverio Blanco" de Sancti Spíritus, Cuba.

(1) oma8111@yahoo.es (2) matemat@sss.rimed.cu

Resumen

El objetivo principal de este artículo es presentar una definición de la operación clasificación de conceptos y las reglas que deben observarse al clasificar, con el fin de ofrecer recomendaciones para estudiar los cuadriláteros convexos, tomando como punto de partida las potencialidades que brinda esta operación. Tales sugerencias surgen del análisis de varios trabajos que se han publicado relacionados con el tema y de la experiencia de los autores en la utilización de procedimientos adecuados para la realización de las operaciones con conceptos, en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en su país.

Introducción.

Es difícil que alguna de las ramas del saber escape de la necesidad de tener que utilizar la operación clasificación de conceptos en el desarrollo de su cuerpo teórico y en la práctica de su aplicación. Sin embargo, una revisión de los textos escolares y especializados pone al descubierto, que no son pocos los casos en que se cometen errores al utilizar estas operaciones y sobre todo, es muy común en algunos docentes, que siguen estos textos, apelar al término clasificar en casos en que no se está realizando tal operación.

Estas insuficiencias pasan de profesores a alumnos y de unos textos a otros que utilizan los primeros como bibliografía. Por esta razón, existe la necesidad de que reflexionemos sobre la operación clasificación y la manera en que se debe proceder para utilizarla correctamente.

Específicamente, en la enseñanza de la Matemática, muchas veces no se aplica la operación clasificación adecuadamente, ni se utiliza para tomar decisiones ante diferentes variantes de estudio de un concepto, como es el caso de los cuadriláteros convexos.

En el presente artículo, en su primera sección, se define la operación clasificación de conceptos, se da un conjunto de reglas que debe tenerse en cuenta al realizarla y se exponen los tipos de tareas que se presentan en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en relación a la clasificación de conceptos. En la segunda sección, se discute sobre el modo de aplicar adecuadamente esta operación al estudio de los cuadriláteros convexos; lo que permite ejemplificar las reglas, así como justificar la importancia de seguirlas. Al final de la sección, se ofrecen recomendaciones para el estudio de tales conceptos.

1. La operación clasificación de conceptos

Para el estudio de muchos conceptos es necesario realizar una o varias clasificaciones, para de esa forma, obtener una o varias particiones de la extensión del concepto que se clasifica, poder realizar un estudio más profundo de cada una de esas partes y obtener una mejor información de la extensión inicial.

1.1. Definición de la operación clasificación de conceptos

Entre las características lógicas más importantes de todo concepto están incluidas la extensión (E) y el contenido (C). El concepto, de extensión E y contenido C, lo denotamos por (E, C) o por E cuando no hay lugar para la confusión.

Muchos autores consideran que el contenido es la colección de las propiedades esenciales del concepto que se emplean en su definición y la extensión, el conjunto de todos los objetos que tienen esas

propiedades. Así, si se define el concepto de triángulo como polígono de tres lados; forma su contenido (C_T) la propiedad M: tener tres lados.

La extensión (E_T) de este concepto es el conjunto de todos los polígonos que tienen tres lados. Aquí están incluidos los conjuntos de los triángulos que tienen un ángulo recto (R), un ángulo obtuso (O), o los tres ángulos agudos (A); y también los conjuntos de los triángulos que tienen los tres lados diferentes (E), o al menos dos lados iguales (I).

Cada uno de los conjuntos R, O, A, E e I es una clase de triángulos, pero se trata de buscar una colección de ellos que sea el resultado de una clasificación de este concepto. Comencemos por exigir, que cualquier clasificación de un concepto debe dar origen a una partición de su extensión. Por ejemplo, la colección {R, A, O} es una partición de la extensión del concepto triángulo, pues cumple las propiedades siguientes:

1. Cada conjunto de la colección es un subconjunto propio de E_T .
2. Dos conjuntos distintos cualesquiera de la colección son disjuntos, es decir, se cumple que $R \cap A = R \cap O = A \cap O = \emptyset$.
3. La unión de todos los conjuntos de la colección es igual a E_T , o sea, $R \cup A \cup O = E_T$.

La colección de conjuntos {R, O, E} no es una partición de E_T , pues existen triángulos que tienen los tres lados diferentes y que tienen un ángulo recto, por lo que no se cumple la propiedad 2 de las particiones.

La colección {R, A, O} se origina de E_T a partir de la consideración de los casos posibles para la amplitud de los ángulos interiores de todo triángulo, según las propiedades siguientes:

p_1 : tener un ángulo recto; p_2 : tener un ángulo obtuso y p_3 : tener los tres ángulos agudos.

Los conceptos subordinados al concepto de triángulo, cuyos contenidos son $\{p_1\}$, $\{p_2\}$, $\{p_3\}$ y que tienen como extensiones R, O y A, respectivamente, se han obtenido agrupando elementos de E_T , según satisfagan una de las propiedades anteriores. En este caso se dice que la colección P formada por las propiedades p_1 , p_2 y p_3 , es un criterio de clasificación del concepto (E_T , C_T) y que la operación que asocia a éste los conceptos mencionados, se llama clasificación¹ del mismo según, el criterio P.

Hay ocasiones, en que para la formación de la extensión de cada uno de los nuevos conceptos que se obtienen mediante la clasificación, no se utiliza una única propiedad, como en el ejemplo presentado anteriormente, sino la conjunción de todas las propiedades de una colección.

Sintetizando las ideas expuestas, se puede definir la operación clasificación de un concepto de la forma siguiente: Dado un concepto (E , C) y un conjunto de colecciones P_j de propiedades de elementos de E , $P_j = \{p_{ij} : i \in I, j \in J_j\}$, donde I y J_j son conjuntos; la colección de propiedades $P = \{p_j : p_j = \bigcup p_{ij}\}$, se llama criterio de clasificación de (E , C) si, y sólo si, la colección de conceptos (E_j , C_j), donde $C_j = P_j$, $i \in I$, es tal que $\{E_j : i \in I\}$, es una partición de E . Dado el criterio de clasificación $P = \{p_j : i \in I\}$, la operación que asocia al concepto (E , C) la colección de conceptos $\{(E_j, C_j)\}$ se denomina clasificación de (E , C) según el criterio P.

1.2. Reglas que deben tenerse en cuenta al realizar la clasificación de un concepto

Las reglas que se exponen a continuación han sido tomadas de Mederos y Martínez (1988).

1. *La clasificación debe realizarse partiendo de un solo criterio P.* Cuando para el estudio de un concepto es necesario realizar diferentes clasificaciones, éstas no deben mezclarse y cada una de ellas debe cumplir esta regla. En algunos textos se estudian los conceptos de trapecio, cuadrado, rectángulo y rombo bajo el título de clasificación de los cuadriláteros, cuando en realidad estos conceptos surgen como resultado de aplicar diferentes criterios de clasificación al concepto de cuadrilátero convexo.
2. *Se debe comprobar que $E = \bigcup \{E_j : i \in I\}$.* La extensión del concepto que se clasifica debe ser igual a la unión de las extensiones de los conceptos surgidos como consecuencia de aplicar el criterio de clasificación.
3. *Se debe comprobar que $E_j \cap E_k = \emptyset$ para todo j de $I \setminus \{k\}$ y para todo k de I .* Las extensiones de los conceptos surgidos como consecuencia de realizar una clasificación deben ser disjuntas dos a dos.

4. *La clasificación debe ser proporcionada.* El objetivo fundamental que se persigue al realizar una clasificación de un concepto es obtener una colección de nuevos conceptos cuyas extensiones sean “menores” que la extensión del concepto de partida y se pueda realizar un estudio más profundo de cada una de estas partes de la extensión original. Es natural tratar de evitar aquellos casos en que la cardinalidad de algunos E_i coincide con la de E y la de otros E_i es mucho “menor”. Cuando ello ocurre se dice que se ha realizado una clasificación desproporcionada.

Esta situación pudiera presentarse a alguien, que quisiera clasificar el concepto de triángulo utilizando un criterio formado a partir de las propiedades p_1 : todos sus lados tienen longitudes racionales y p_2 : Al menos un lado tiene longitud irracional. Las clases que se forman de esta manera están desproporcionadas respecto a su cardinalidad, pues tienen, respectivamente, la cardinalidad de \mathbb{N} y de \mathbb{R} .

Por razones de carácter metodológico, muchas veces es importante realizar clasificaciones desproporcionadas. En tales situaciones hay dos soluciones que frecuentemente se utilizan: a) realizar nuevas clasificaciones de los conceptos de extensión grande y b) aplicar nuevos criterios con los que se mejore o elimine la insuficiencia.

5. *La clasificación debe realizarse sin saltos.* Ocurren saltos cuando se realiza una primera clasificación, posteriormente se ejecuta la clasificación de algunos conceptos que surgen a partir de ésta y se presentan todos los conceptos obtenidos en ambas, como resultado de una sola clasificación. Un ejemplo en el que se incumple esta regla y en el que se procede erróneamente es el siguiente: los triángulos, según la igualdad entre sus lados, se clasifican en escalenos, isósceles y equiláteros, considerando que el triángulo isósceles es aquel que tiene (al menos) dos lados iguales. Para evitar este error, se deben clasificar primero los triángulos en escalenos e isósceles y después clasificar los triángulos isósceles en equiláteros y no equiláteros[1].
6. *Determinación de un criterio óptimo.* La clasificación de un concepto debe hacerse de tal forma que el criterio que se tome para realizarla sea el más útil para determinar las propiedades de los elementos de cada una de las subclases en que quede dividida la extensión del mismo. Algunas veces resulta difícil encontrar un criterio que nos permita hacer una clasificación que proporcione todas las propiedades que se necesitan posteriormente y entonces es necesario realizar diferentes clasificaciones del concepto.

1.3. Tipos de tareas sobre clasificación de conceptos que se presentan en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática

En el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática se pueden presentar distintos tipos de tareas, relativas a la clasificación de conceptos, entre las cuales están las siguientes:

1. Se tienen un concepto (E, C) , un criterio P , la colección de conceptos (E_i, C_i) que se obtienen de (E, C) mediante la clasificación según P y un elemento x de E . Se quiere determinar el concepto (E_k, C_k) de esta colección tal que $x \in E_k$.
2. Se tienen un concepto (E, C) y un criterio P . Se quieren obtener todos los conceptos (E_i, C_i) que resultan de (E, C) mediante la clasificación según el criterio P .
3. Se tienen un concepto (E, C) y una colección de características $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ de elementos de E . Se quiere obtener un criterio P a partir de esta colección, para clasificar a (E, C) .
4. Se tiene un concepto (E, C) . Se quieren realizar una o varias clasificaciones del concepto (E, C) , pero no se tiene un criterio, ni se ha determinado una colección de características de elementos de E a partir de las cuales éste se pueda obtener.
5. Se tienen un concepto (E, C) y una colección de conceptos subordinados de (E, C) , (E_i, C_i) . Se quiere determinar si existe algún criterio P , tal que los conceptos de esta colección resulten de (E, C) , mediante la clasificación según el criterio P .

En la revisión de los libros de texto de la educación general, se observa que los ejercicios y problemas que se proponen en relación con la clasificación, corresponden sólo al primer tipo de tarea. Un ejemplo de ello, es el caso en que después de conocida la clasificación de los triángulos, según la amplitud de sus ángulos interiores, se da un triángulo para que los alumnos digan si es acutángulo, rectángulo u obtusángulo.

El análisis de si los demás tipos de tareas pueden ser resueltas por alumnos de la educación general se sale del alcance de este artículo, pero lo que sí es cierto, es que los profesores y profesoras, específicamente de la educación media, deben saberlas resolver para poder ejecutar la actividad de enseñanza.

El segundo tipo de tarea se presenta a los docentes de forma sistemática y respecto a su resolución no existen dificultades, pues generalmente en los libros de texto se expone este proceso.

Sobre las técnicas para resolver las tareas del tercer tipo se esboza un ejemplo en la segunda sección de este artículo, mientras que las correspondientes al cuarto tipo no se analizan.

El quinto tipo de tarea es el de mayor complejidad y se presenta en situaciones como las siguientes:

- Se tienen dudas sobre la justeza de una proposición que afirma, sin hacer referencia al criterio, que una colección de conceptos se obtiene de un concepto conocido mediante clasificación.
- Se tienen dudas acerca de si un esquema ya elaborado, se puede utilizar para la enseñanza de la clasificación de conceptos.
- Se quiere analizar si una definición de un concepto contribuye a la realización de la operación clasificación.

En la siguiente sección de este artículo se analiza un caso que se enmarca en la tercera situación.

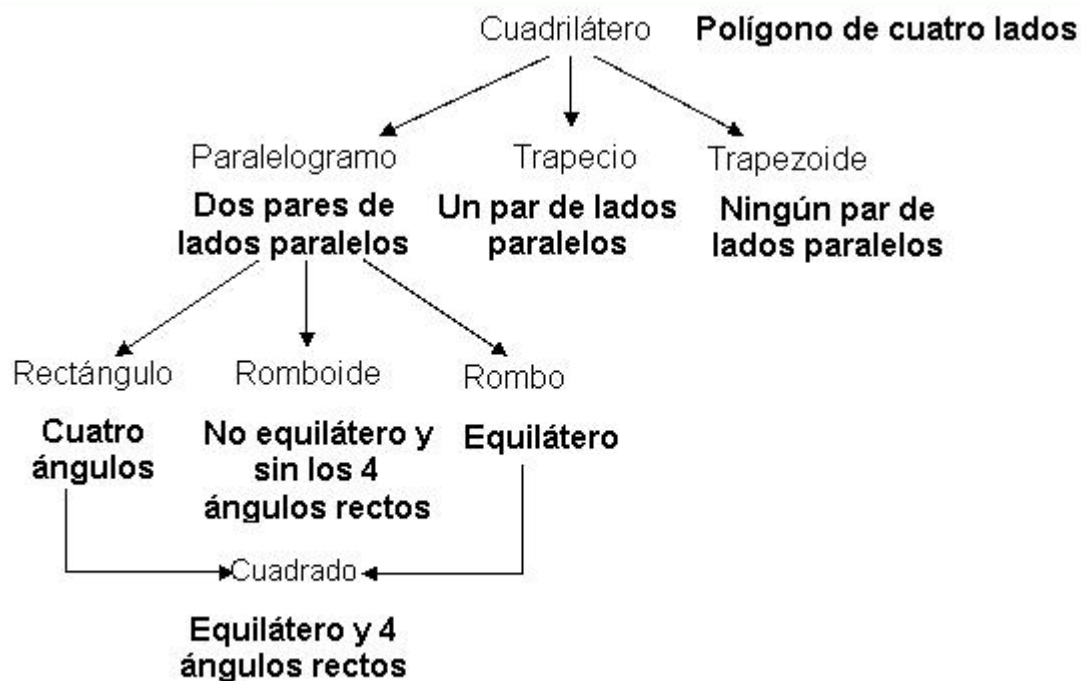
2. Estudio del concepto de cuadrilátero convexo

El estudio de los cuadriláteros convexos ha sido objeto de discusión, fundamentalmente en lo que respecta a la definición del concepto de trapecio. En el artículo de Maraldo (1980), se propone su estudio a partir de las definiciones:

1. **Cuadrilátero:** un polígono de cuatro lados.
2. **Trapecio:** un cuadrilátero en el cual, al menos un par de lados opuestos son paralelos.
3. **Paralelogramo:** un trapecio en el cual los dos pares de lados opuestos son paralelos.
4. **Rectángulo:** un paralelogramo con los cuatro ángulos rectos.
5. **Rombo:** un paralelogramo con los cuatro lados congruentes.
6. **Cuadrado:** (a) un rectángulo con sus cuatro lados congruentes, o (b) un rombo con los cuatro ángulos rectos.

En el comentario de Baker (1980) sobre el artículo de Maraldo se señala, que la mayoría de los autores definen el trapecio como un cuadrilátero con exactamente dos lados paralelos, y que consecuentemente los trapecios no son paralelogramos ni estos últimos, trapecios.

En la reflexión de Seydel (1980) se celebra el artículo de Maraldo; pero se señala que la definición de trapecio dada por éste es incorrecta. Se plantea, además, que en un examen de 24 libros de texto de Geometría se reveló que sólo 4 de ellos no especifican que un trapecio es un cuadrilátero con dos, y sólo dos, lados paralelos. En el artículo de Bernklau (1980) se presenta en el esquema 1.



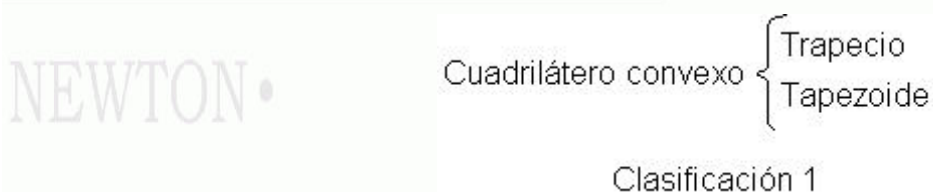
Esquema 1

Sin embargo, esta discusión no da suficiente luz sobre porqué tomar una u otra definición de trapecio. Por eso, en esta sección analizaremos el asunto desde la perspectiva de la clasificación de conceptos.

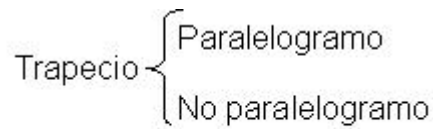
2.1. Análisis de las definiciones de Maraldo respecto a la operación clasificación

Con estas definiciones no se puede clasificar ninguno de los conceptos a los que hacen referencia, por las razones siguientes:

1) No se clasifica el concepto de cuadrilátero convexo porque el complemento de la extensión del concepto de trapecio con respecto a la extensión del concepto de cuadrilátero convexo queda sin definir. Esta dificultad se puede evitar planteando un criterio de clasificación adecuado que, siguiendo la idea de Maraldo, pudiera ser el conjunto formado por la siguiente propiedad y su negación: “tener al menos un par de lados opuestos paralelos”; y entonces llamar a todo cuadrilátero convexo que satisface esta propiedad trapecio y a todo cuadrilátero convexo que no la satisfaga, trapezoide. Se obtendría así, la *clasificación 1* del concepto de cuadrilátero convexo, que satisface las reglas 1, 2, 3 y 5. Con respecto a la regla 4, el concepto de trapecio tiene una extensión más amplia que en otras clasificaciones del concepto de cuadrilátero, como por ejemplo la correspondiente a la idea de Bernklau.

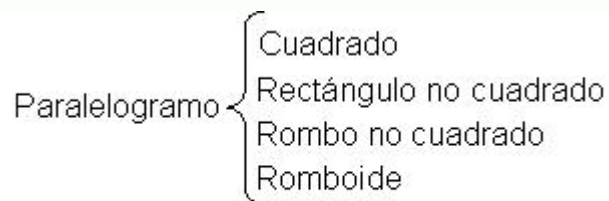


2) No se clasifica el concepto de trapecio. El complemento de la extensión del concepto de paralelogramo con respecto a la extensión del concepto de trapecio no se define. Siguiendo la idea de Maraldo, el criterio de clasificación natural del concepto de trapecio es el conjunto formado por las propiedades siguientes: 1) “tener dos pares de lados opuestos paralelos” y 2) “tener un solo par de lados opuestos paralelos”. Entonces el concepto de paralelogramo corresponde a los trapecios que satisfacen la propiedad 1), y a los trapecios que satisfacen la propiedad 2) hay que darles un nombre, que pudiera ser, trapecios no paralelogramos. Se tendría la *clasificación 2*, que también satisface las reglas 1, 2, 3 y 5.



Clasificación 2

3) No se clasifica el concepto de paralelogramo. No se cumple la regla 2 porque el complemento de la unión de las extensiones de los conceptos de rectángulo y rombo, con respecto a la extensión del concepto de paralelogramo, no corresponde a ningún concepto. La regla 3 no se cumple porque las extensiones de los conceptos de rectángulo y rombo tienen elementos comunes. Para lograr una clasificación de los paralelogramos se puede tomar como criterio, el conjunto de las propiedades compuestas, $p_1 = p_{11} \cup p_{12}$, $p_2 = p_{11} \cap (p_{12})^c$, $p_3 = (p_{11})^c \cup p_{12}$ y $p_4 = (p_{11})^c \cap (p_{12})^c$, donde p_{11} y p_{12} son las propiedades elementales: "tener un ángulo recto" y "tener todos los lados iguales", respectivamente y $(p_{11})^c$ y $(p_{12})^c$ sus correspondientes negaciones. Los paralelogramos que cumplen estas dos propiedades, reciben el nombre de cuadrados; los que satisfacen sólo la primera, se nombran rectángulos no cuadrados, los que cumplen sólo la segunda, se llaman rombos no cuadrados y los que no cumplen ninguna de las dos propiedades, se nombran romboides. Se tiene así la *clasificación 3*, que cumple las reglas de la 1 a la 5.

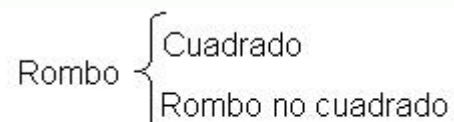


Clasificación 3

En la clasificación 3 aparecen los conceptos no usuales de rombo y rectángulo no cuadrados; por tal razón, se recomienda que si se realiza esta clasificación, entonces se definan adicionalmente los conceptos de rectángulo y rombo y que se proceda con estos últimos conceptos como aparece en las clasificaciones 4 y 5, respectivamente.

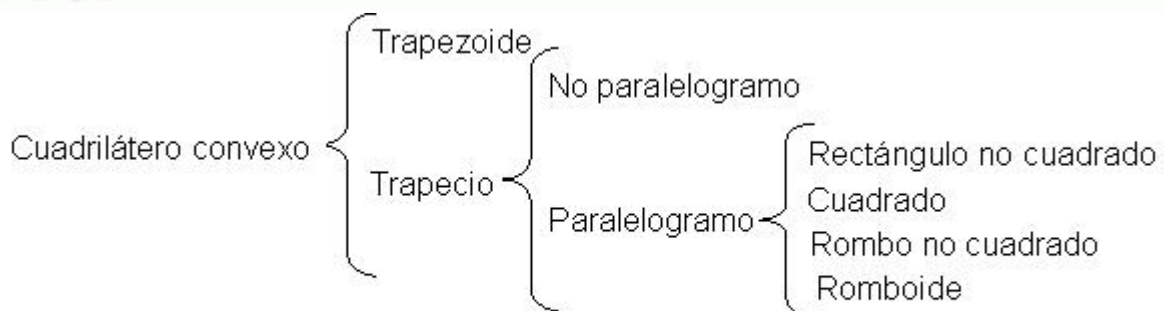


Clasificación 4



Clasificación 5

Recomendación 1: siguiendo la idea de Maraldo, recomendamos que para clasificar el concepto de paralelogramo se proceda de la manera en que se ha explicado anteriormente, la cual se expone en la secuencia de clasificaciones del esquema 2.



Esquema 2: Secuencia de clasificaciones a partir del concepto de cuadrilátero

Recomendación 2: definir los conceptos de rectángulo, rombo y cuadrado como lo hace Maraldo y formular además la definición de romboide. Por otra parte, señalamos que con estas definiciones no se

hace una clasificación del concepto de paralelogramo y que si se quisiera clasificar dicho concepto, se recomienda proceder de acuerdo con las clasificaciones 3, 4 y 5.

2.2. Análisis de la tabla 1

Se hace una adecuada clasificación de los cuadriláteros. No se clasifica el concepto de paralelogramo, porque en la forma que se han dado las definiciones de sus conceptos subordinados, no se cumple la regla 3, pues las extensiones de los conceptos de rectángulo y rombo tienen una intersección no vacía coincidente con la extensión del concepto de cuadrado. Para realizar una clasificación del concepto de paralelogramo recomendamos proceder como se ha sugerido en 2.1.

Conclusiones

- La idea de Maraldo presenta más ventajas que la propuesta de Bernklau respecto a la clasificación de conceptos.
- Las reflexiones realizadas en el presente artículo han estado dirigidas hacia el desarrollo de ideas que favorezcan una enseñanza-aprendizaje a favor de la operación clasificación de conceptos. Por eso, el análisis de los trabajos que se utilizaron para reflexionar, se centró en este aspecto y no en otros, en los que pudieran tener utilidad.

Referencias

- Baker, T. J. (1980, May). "What's a trapezoid? Reader reflections". *The Mathematics Teacher*, 73 (5), 325.
- Bernklau, D. (1980, May). "What's a trapezoid? Reader reflections". *The Mathematics Teacher*, 73 (5), 325.
- Guétmanova, A. y otros (1991). *Lógica en forma simple sobre lo complejo*. Mir, Moscú.
- Maraldo, S. (1980, January). "Properties of Quadrilaterals". *The Mathematics Teacher*, 73 (1), 38-39.
- Mederos, O. y Martínez, M. (1988). "Clasificación de las funciones elementales". *Revista Cubana de Educación Superior*, VIII (3), 71-81.
- Seydel, K. (1980, May). "What's a trapezoid? Reader reflections". *The Mathematics Teacher*, 73 (5), 325.

¹ Algunos autores suelen llamar a esta operación, división del concepto (véase Guétmanova y otros, por ejemplo) y consideran la clasificación como una división sucesiva cuyos resultados perduran en la ciencia durante un tiempo bastante prolongado, que tienen un uso universal y un reconocimiento en la comunidad científica.

² En varios textos no se incurre en este error porque se define el triángulo isósceles como aquél que tiene exactamente dos lados iguales.