

EL ANÁLISIS DIDÁCTICO EN LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA

Pedro Gómez

En este documento, describo algunos aspectos del significado con el que usamos la expresión “análisis didáctico” en la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato de la Universidad de Granada. En particular, introduzco el análisis didáctico como un nivel del currículo y establezco su papel en la identificación, organización y selección de los múltiples significados de un concepto matemático para efectos de diseñar, llevar a la práctica y evaluar unidades didácticas. Estas consideraciones dan lugar a algunas reflexiones sobre el papel del análisis didáctico en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.

1. UN SIGNIFICADO DE LA EXPRESIÓN “ANÁLISIS DIDÁCTICO”

En su proyecto docente, Rico (1992) organiza los contenidos de la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato de la Universidad de Granada en dos bloques temáticos. El primero se refiere a la fundamentación y el marco de referencia y es de carácter psicológico y pedagógico. En el segundo bloque, Análisis Didáctico y Diseño de Unidades Didácticas para los Contenidos del Currículo de Educación Secundaria y Bachillerato en Matemáticas, se realiza “el análisis didáctico de cada uno de los bloques de conocimientos que forman el currículo de matemáticas en la enseñanza secundaria y bachillerato” (§ III.2.1). Por lo tanto, la expresión “análisis didáctico” ha sido una noción importante en esta asignatura desde hace tiempo. No obstante, en los últimos cinco años, hemos precisado su significado y le hemos asignado un papel central en el diseño y desarrollo de la asignatura. ¿Con qué significado utilizamos esta expresión? ¿Qué papel puede jugar en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria? En este documento abordo estas cuestiones.

Utilizo la expresión “análisis didáctico” para referirme a la conceptualización de las actividades que el profesor de matemáticas debería realizar para diseñar, llevar a la práctica y evaluar unidades didácticas. El análisis didáctico configura un nivel del currículo. Mientras que el nivel de planificación de los profesores (con sus componentes de objetivos, contenidos, metodología y evaluación) es, en general, apropiado para la *planificación global* de una asignatura o un plan de estudios, el análisis didáctico tiene sentido como procedimiento para la *planificación local* de una unidad didáctica o una hora de clase. El análisis didáctico se caracteriza por su especificidad a un concepto matemático concreto. Solamente cuando se profundiza en esa especificidad, es posible reconocer los múltiples significados del concepto. A la hora de planificar una hora de clase o una unidad didáctica, el profesor de matemáticas debe estar en capacidad de resolver dos problemas relacionados con esta característica de los conceptos en las matemáticas escolares. Primero, él debe ser capaz de identificar y organizar los múltiples significados del concepto en cuestión. Segundo, él debe seleccionar aquellos que serán objeto de la instrucción. Utilizo la expresión “análisis didáctico” para referirme a un conjunto de procedimientos (organizados en cuatro análisis) que le permiten al profesor abordar estos dos problemas.

En este documento no presento los análisis que conforman el análisis didáctico, ni los procedimientos involucrados en esos análisis. Los documentos correspondientes a la primera sesión del seminario abordan esta cuestión. En Gómez (2002) también se encuentra una descripción de algunos de estos procedimientos. En este documento centro mi atención en otros aspectos relacionados con el análisis didáctico y que enumeré en el párrafo anterior. En particular, describo el análisis didáctico como un nivel del currículo; profundizo en la noción de significado en las matemáticas escolares; destaco la multiplicidad de significados de un concepto matemático; caracterizo los dos problemas que debe abordar el profesor de matemáticas con respecto a esta faceta de los conceptos matemáticos; y describo, de manera general, el ciclo de análisis didáctico como un procedimiento para abordar dichos problemas. En el último apartado presento algunas reflexiones sobre el papel del análisis didáctico en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.

2. LA PLANIFICACIÓN DE CLASE: UN PROBLEMA DIARIO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

La planificación y la gestión de clase son dos de los problemas que el profesor debe resolver en su actividad docente. Las directivas gubernamentales y la planeación estratégica de la institución educativa determinan los contextos social, educativo e institucional en los que se produce el diseño curricular global de cada asignatura. Sin embargo, este diseño curricular global no aporta pautas específicas para el día a día de la práctica docente de los profesores. Usualmente los profesores planifican y realizan sus clases con ayuda de su experiencia y de los documentos y materiales de apoyo disponibles, y muchos de ellos se basan exclusivamente en las propuestas de los libros de texto. Si esperamos que los profesores de matemáticas aborden su trabajo diario de manera sistemática y reflexiva, basándose en un conocimiento profesional, entonces ellos deberían conocer y utilizar principios, procedimientos y herramientas que, fundamentados en la didáctica de la matemática, les permitan diseñar, evaluar y comparar las tareas y actividades de enseñanza y aprendizaje que pueden conformar su planificación de clase.

Rico (1997b) y Segovia y Rico (2001) han identificado esta problemática al poner de manifiesto las dificultades de los profesores con la noción de currículo en el nivel de la planificación global. En este nivel, el profesor debe identificar unos objetivos, unos contenidos, una metodología y un esquema de evaluación con los que se pretende describir el currículo como plan de formación para una asignatura o para una porción amplia de una asignatura. Hay que diferenciar entre los problemas de diseño curricular global (para la totalidad de una asignatura, por ejemplo) y los problemas de diseño curricular local (para una unidad didáctica o una hora de clase sobre una estructura matemática específica o uno o más aspectos de ella). Si enfocamos únicamente los problemas de diseño curricular global (con el esquema de objetivos, contenidos, metodología y evaluación), entonces el profesor tiende a ver la planificación como la secuenciación de contenidos matemáticos y a considerar la enseñanza como el “cubrimiento” de estos contenidos. Al no tener en cuenta las problemáticas conceptuales, cognitivas y de instrucción de las estructuras matemáticas específicas, el profesor tiene que describir los objetivos, la metodología y la evaluación en términos generales. Por lo tanto, lo que diferencia a las distintas parcelas del diseño curricular global son los contenidos (Rico, 1997b, pp. 40-41). Cuando tratamos a nivel local los problemas de diseño curricular y nos concentramos en una estructura matemática específica, es posible ampliar esta visión de la planificación y de la enseñanza (p. 55). El *análisis didáctico*, introducido por Rico (1992, § III.2.1; 1997b, p. 55) es una conceptualización de ese nivel de la planificación. Es un procedimiento con el que es posible explorar, profundizar y trabajar con los diferentes y múltiples significados del contenido matemático escolar, para efectos de diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje¹.

La brecha entre la planificación global (de una asignatura) y la planificación local (de una unidad didáctica o una hora de clase) no es el único problema al que, desde el punto de vista de la planificación, se debe enfrentar el profesor y para el que el análisis didáctico aporta posibles soluciones. Si el profesor asume una posición constructivista del aprendizaje de los escolares, como, en principio, se espera que lo haga de acuerdo con la mayoría de las directivas curriculares, entonces él se enfrenta a lo que Simon y Tzur (2004, p. 92), citando a Ainley y Pratt (2002, p. 18) denominan la “paradoja de la planificación”. Esta paradoja señala que, si el profesor asume una posición constructivista con respecto al aprendizaje de los escolares, entonces él se enfrenta a una disyuntiva entre:

- ◆ su intención de lograr unos objetivos de aprendizaje y cubrir un contenido previamente establecidos; lo que implica diseñar tareas en las que el contenido matemático que se trabaja sea claro y los escolares puedan saber qué es lo que tienen que hacer, y
- ◆ su deseo de atender a, y sacar partido de las actuaciones de los escolares al abordar la tarea; lo que implica diseñar tareas que los induzcan a crear sus propias construcciones y que fomenten un ambiente de negociación en el aula, en el que exista una cierta ambigüedad sobre lo que hay que hacer, cómo se debe hacer y cómo se determina si lo que se hace es válido.

¹ La expresión “análisis didáctico” es genérica. Yo utilizo esta expresión con un significado concreto, relacionado con el proceso de planificación local. En la línea de investigación en la que se enmarca este trabajo, González (1998) utiliza esta expresión para referirse a un método de investigación en didáctica de la matemática. Una búsqueda en Google en septiembre de 2005 con los términos “didactical analysis” y “análisis didáctico” produjo más de 9.300 resultados, siendo éste un indicativo de la necesidad de precisar el significado de esta expresión genérica.

En el análisis didáctico, el profesor formula conjeturas sobre la actuación de los escolares al abordar las tareas que conforman la instrucción. Estas conjeturas le permiten revisar y seleccionar dichas tareas en el contexto de los objetivos de aprendizaje que se ha impuesto y del contenido que ha seleccionado. En este sentido, el análisis didáctico aborda la paradoja de la planificación².

3. NOCIÓN DE CURRÍCULO Y PLANIFICACIÓN

Como noción que permite organizar y describir un plan de formación, el concepto de currículo pretende responder a una serie de cuestiones con respecto a la naturaleza del conocimiento que se va a enseñar, del aprendizaje, de la enseñanza y de la utilidad de ese conocimiento. Estas cuestiones dan lugar a cuatro *dimensiones* que permiten estructurar el análisis y el diseño del currículo:

- ◆ dimensión cultural/conceptual,
- ◆ dimensión cognitiva,
- ◆ dimensión ética/formativa,
- ◆ dimensión social.

Como veremos en seguida, la noción de currículo, como herramienta analítica del proceso educativo, se puede utilizar en múltiples niveles. Por esa razón, resulta ilustrativo utilizar una representación geométrica, como la de la Figura 1, en la que cada dimensión se representa en un eje (Rico, 1997a, pp. 387-388).

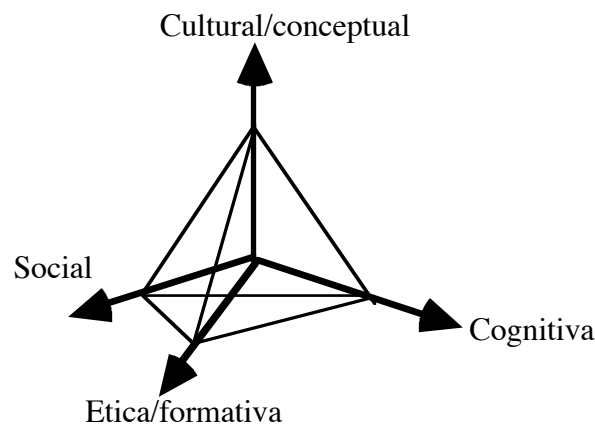


Figura 1. Dimensiones del currículo

² En este documento no entro en los detalles de un argumento que es más complejo que lo que acabo de exponer. Para una explicación más detallada ver, por ejemplo, Gómez (2005).

Análisis Didáctico como Nivel del Currículo

Rico (1997a) estudia cuatro niveles de reflexión sobre el currículo. Para cada uno de estos niveles, es posible determinar unas *componentes* que corresponden a cada una de las dimensiones, como se muestra en la Tabla 1³.

		<i>Dimensiones del currículo</i>			
		1ª dimensión	2ª dimensión	3ª dimensión	4ª dimensión
		Cultural/ conceptual	Cognitiva o de desarrollo	Ética o formativa	Social
<i>Niveles</i>	Teleológico o de fines	Fines culturales	Fines formativos	Fines políticos	Fines sociales
	Disciplinas académicas	Epistemología e Historia de la Matemática	Teorías del aprendizaje	Pedagogía	Sociología
	Sistema educativo	Conocimiento	Alumno	Profesor	Aula
	Planificación para los profesores	Contenidos	Objetivos	Metodología	Evaluación
	Análisis didáctico	Análisis de contenido	Análisis cognitivo	Análisis de instrucción	Análisis de actuación

Tabla 1. Componentes del currículo según los niveles y dimensiones (Rico, 1997a, p. 409)

Los primeros dos niveles son teóricos. El primero considera las finalidades para la educación matemática. El segundo nivel considera las disciplinas que fundamentan la noción de currículo y que aportan la información necesaria para el estudio del currículo de matemáticas. El tercer nivel representa la reflexión curricular cuando el ámbito de actuación es la institución educativa y el encargado es la administración. El nivel de planificación para los profesores representa la versión más conocida del currículo. Es el esquema con el que tradicionalmente se describen los planes de formación a cargo de un profesor o grupo de profesores en el espacio de un aula. El *análisis didáctico*, que insinúa en la última fila de la Tabla 1, se constituye en otro nivel del currículo, como procedimiento de *planificación local* de los profesores.

Noción de Currículo y Trabajo del Profesor

La noción de currículo es una herramienta básica para el trabajo del profesor. Los documentos curriculares que sirven de guía y condicionan el trabajo del profesor están, en general, estructurados a partir de esta noción. En estos documentos, para cada asignatura se enumeran los contenidos y se describen los objetivos, la metodología y los esquemas de evaluación. En este sentido,

³ La tabla en Rico (1997a p. 409) incluye los primeros cuatro niveles, cuyo orden he invertido para efectos de claridad en la introducción del análisis didáctico como último nivel.

la noción de currículo es un elemento central de la comunicación entre la administración educativa y el profesor. Para efectos de concretar su trabajo dentro los contextos educativos e institucionales, el profesor debe conocer y manejar adecuadamente esta noción (al menos al nivel denominado “planificación para los profesores” en la Tabla 1). Por lo tanto, esta noción debe formar parte fundamental de los planes de formación de profesores. No obstante, como argumenté en el apartado anterior, este nivel del currículo no es necesariamente eficaz cuando el profesor aborda el problema de planificar unidades didácticas:

Necesitamos un nuevo nivel de reflexión curricular conectado con la programación y, por tanto, nuevas herramientas conceptuales con las que trabajar en este nivel y mediante las que abordar las tareas de diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas en el área de matemáticas. La caracterización operacional del currículo mediante objetivos, contenidos, metodología y evaluación, no es inadecuada, sólo lo es su empleo en tareas de diseño y planificación del trabajo para el aula, sin criterios de referencia (Rico, 1997b, p. 42).

Por esta razón incorporo un nuevo nivel en la Tabla 1. En este nivel, el de la planificación local, las componentes de la noción de currículo incluyen las herramientas que le permitirán al profesor abordar la planificación de unidades didácticas para cada tema, *teniendo en cuenta la especificidad del mismo*. Con ellas, el profesor podrá concretar (y diferenciar) los objetivos, el contenido, la metodología y la evaluación de cada tema en su planificación. Al dar lugar a este nivel de concreción, la noción de currículo adquiere mayor potencia como herramienta de comunicación y crítica entre los profesores, la administración educativa y los materiales curriculares. El profesor puede dialogar con sus colegas más allá de la discusión tradicional sobre los contenidos; analizar, evaluar y seleccionar otras propuestas de planificación; y abordar los contenidos de los libros de texto de una manera sistemática.

Consideración Funcional del Currículo de Matemáticas

Este trabajo se enmarca dentro de una línea de investigación en el que se asume una *consideración funcional* de las matemáticas como modo de interpretar el currículo. De acuerdo con esta posición se postula un modelo funcional, basado en (Rico, Castro, Castro, Coriat & Segovia, 1997, p. 284):

- ◆ unos *instrumentos conceptuales*: sistemas simbólicos estructurados;
- ◆ unos *modos de uso de los sistemas simbólicos*: funciones cognitivas; y
- ◆ un *campo de actuación*: fenómenos, cuestiones y problemas.

Esta noción funcional y pragmática de las matemáticas escolares también se subraya en el proyecto de evaluación PISA 2003 de la OCDE. Rico (2005) al referirse a las variables que configuran la estrategia para seleccionar las tareas de evaluación en este estudio⁴, señala que:

Estas tres variables responden a un modelo funcional sobre el aprendizaje de las matemáticas, que postula unas tareas, unas herramientas conceptuales y un sujeto que, al

⁴ Contenido matemático al que se refieren los problemas, competencias para resolver los problemas y situaciones y contextos en los que se localizan los problemas.

tratar de abordar las tareas mediante las herramientas disponibles, moviliza y pone de manifiesto su competencia en la ejecución de los procesos correspondientes.

La consideración funcional del currículo de matemáticas afecta al modo en que se consideran los fines prioritarios que sustentan el currículo e impregna a las distintas componentes curriculares; también afecta al modo de entender los roles y las funciones de profesores y alumnos y al modo de interpretar el contenido de las matemáticas escolares. En particular, esta posición funcional con respecto al currículo me servirá de marco de referencia cuando, Más adelante, caracterice los significados de un concepto en las matemáticas escolares.

3. PLANIFICACIÓN, ESPECIFICIDAD DEL CONTENIDO Y PLURALIDAD DE SIGNIFICADOS DE LAS MATEMÁTICAS ESCOLARES

La noción de planificación que utilizaré en este documento va más allá de aquella que se expresa en un documento en el que se describe un plan. Me intereso por la planificación a nivel local. Ésta es una actividad que el profesor no está, en general, obligado a compartir o justificar formalmente. Por lo tanto, en la mayoría de las ocasiones el profesor no produce un documento para su planificación local y, si lo produce, éste sólo contiene un esquema no necesariamente articulado de la lección. Me refiero, más bien, a lo que Schoenfeld (2000, p. 250), citando a Morine-Dersheimer (1979), denomina *imagen de una lección*:

La imagen de una lección de un profesor incluye todo lo que el profesor se imagina que puede suceder en la lección —la secuencia del día, las formas de interacción con los estudiantes, qué es flexible y qué no lo es (e.g., “comenzaré recogiendo las tareas del día anterior, y, en ese momento, atenderé, durante diez minutos, a todas las preguntas que quieran hacer”), y su sensación de cómo se puede desarrollar la discusión. En situaciones normales, la mayor parte de la imagen de la lección del profesor no está articulada... (p. 250)

La planificación es una de las actividades más importantes en el trabajo del profesor (Ball & Bass, 2003, p. 3; Van Der Valk & Broekman, 1999) y es una de sus competencias (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001, p. 380)⁵. Pero, como señalé en el apartado anterior, el profesor debe abordar diferentes tipos de planificación. Cuando la planificación es local, el foco de atención del profesor es un tema (concepto o estructura matemática) matemático específico. La especificidad del contenido matemático es una variable central en la actividad diaria del profesor (Timmerman, 2003, p. 155). En este nivel, la planificación del profesor debe tener en cuenta la complejidad del contenido matemático desde diversos puntos de vista: “cuando las matemáticas se enseñan desde una perspectiva pluralista, entonces se pueden ver desde múltiples perspectivas —perspectivas que motivan a los profesores a considerar no solamente los diferentes significados de las mate-

⁵ La competencia de planificación es reconocida como una de las principales competencias del profesor y, por lo tanto, reviste especial importancia en los planes de formación inicial de profesores. Esta competencia se incluye en los diferentes estándares profesionales de los profesores (e.g., Department of Education, 2001; DET, 2004). La situación es similar en el marco del trabajo y la formación del profesor de matemáticas: la planificación se reconoce como una de las competencias indispensables (ver, por ejemplo, Niss, 2003; Recio, 2004; Rico, 2004).

máticas, sino también su diversidad en su enseñanza” (Cooney, 2004, p. 511). De hecho, *la negociación y construcción de esta multiplicidad de significados debe ser uno de los propósitos centrales de la interacción en el aula*. Ésta es la posición que, desde comienzos de la década de los noventa, Rico y sus colaboradores han propuesto como aproximación a la planificación de unidades didácticas en España (Rico, 1992; Rico, 1995, 1998a, 1998b, 1997c; Rico, Castro, Castro, Coriat, Marín, Puig *et al.*, 1997). Esta propuesta se centra en la idea de que la planificación de una unidad didáctica o de una hora de clase se debe fundamentar en la exploración y estructuración de los diversos significados de la estructura matemática objeto de esa planificación. Los “organizadores del currículo” propuestos por Rico (1997b, p. 44) son herramientas conceptuales y metodológicas que le permiten al profesor recabar, organizar y seleccionar información sobre estos múltiples significados⁶. Para efectos de abordar la descripción del análisis didáctico y su relación con los organizadores del currículo, considero a continuación la interpretación que hacemos de la noción de significado en educación matemática.

4. SIGNIFICADO Y EDUCACIÓN MATEMÁTICA

La extensión y profundidad de los significados que construyen los escolares en el aula (y, por consiguiente, la calidad de su aprendizaje) se realiza atendiendo los distintos modos de expresión y de uso con que se manejen los conceptos, a la capacidad para conectar diversas estructuras y utilizar diferentes procedimientos, a la diversidad de los problemas que pueden interpretarse, abordarse y resolverse, en definitiva, considerando la riqueza de conexiones —de significados— que se establecen para una determinada noción o conjunto de nociones matemáticas. En otras palabras, parte relevante del aprendizaje matemático de los escolares se lleva a cabo en el aula, cuando ellos negocian y construyen significados con motivo de las actividades propuestas por el profesor (Biehler, 2004, pp. 61-62; Bromme & Steinbring, 1994, p. 218). ¿Cuáles son los significados de un concepto matemático que pueden ser objeto de la interacción en el aula? ¿Cuáles son los significados que se considera relevante desarrollar? En este apartado, abordo estas preguntas y asumo una posición con respecto a ellas. Mi propósito es mostrar la utilidad de abordar la noción de significado en las matemáticas escolares desde una perspectiva amplia que vaya más allá del significado simbólico con el que tradicionalmente se identifican las matemáticas académicas o disciplinares⁷. Desde esta perspectiva, postulo que, en el ámbito escolar, un concepto matemático puede ser estudiado desde una variedad de significados.

⁶ Se puede considerar a Wittman (1984) como un precursor de la idea de organizador del currículo. Él introdujo la noción de “unidad de enseñanza”, compuesta por objetivos, materiales, problemas matemáticos y trasfondo matemático y psicológico (p. 30). “Las unidades de enseñanza permiten organizar el conocimiento didáctico de manera eficaz para la enseñanza” (p. 33).

⁷ Con “matemáticas académicas”, me refiero a las matemáticas que se enseñan y aprenden en las licenciaturas de matemáticas. Por su lado, las “matemáticas disciplinares” aluden a la actividad de los matemáticos profesionales y las “matemáticas aplicadas” al uso de las matemáticas en actividades profesionales o disciplinas científicas. Finalmente, las “matemáticas escolares” se refieren a las matemáticas cuando se consideran con la finalidad de ser enseñadas y aprendidas en la escuela.

Noción de Significado en Frege

Frege (1998c, § 27) establece un triángulo semántico *Signo—Sentido—Referencia*, para los objetos (Ver Figura 2), en el cual por nombre o signo entiende cualquier designación que represente un nombre propio, cuya referencia sea un objeto determinado, pero no un concepto o una relación. Actualiza así toda una tradición, que inicia Aristóteles, según la cual *las palabras son los signos de las ideas y las ideas son los signos de las cosas*.

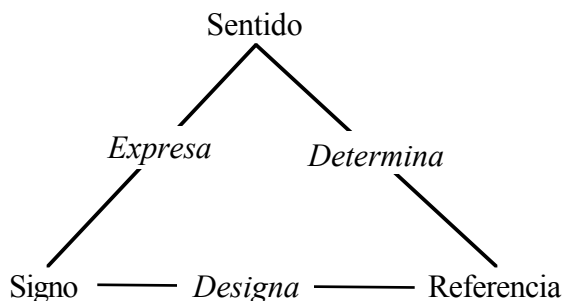


Figura 2. Triángulo semántico (término)⁸

Con posterioridad, Frege extiende la distinción semántica entre sentido y referencia a los enunciados o proposiciones. Puesto que la búsqueda de la verdad es lo que incita a avanzar del sentido a la referencia, y de acuerdo con su preocupación por el fundamento lógico, argumenta y establece que la referencia de un enunciado es su veracidad o falsedad y su sentido es el pensamiento que expresa (Frege, 1998a, § 34). La referencia, lo que marca la objetividad para un enunciado, es su veracidad. Establecida esta importante distinción, Frege extiende el triángulo semántico a todo término conceptual, ya que en la ciencia interesa la pregunta por la verdad y, por ello, es necesario asociar una referencia a los términos conceptuales. Al igual que la referencia de un nombre propio es el objeto que designa, un término conceptual se refiere a un concepto. En la noción de Frege para significado de un término conceptual, el triángulo semántico viene dado por el *signo* o *término* con el que se expresa, por su *referencia* o concepto propiamente tal, y por su *sentido* o *modo en que vienen dados los objetos que caen bajo el concepto* (Ver Figura 3).

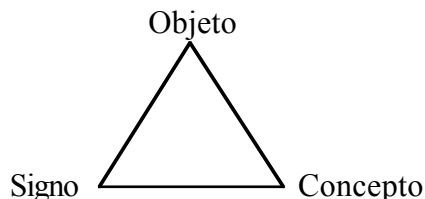


Figura 3. Triángulo semántico (concepto)

Frege utiliza frecuentemente las matemáticas como ejemplo para sus definiciones y nociones teóricas. Por ejemplo, cuando caracteriza el baricentro como la intersección de las medianas *a* y *b* de un triángulo, y luego como intersección de las medianas *b* y *c*, dice que se trata de *dos senti-*

⁸ Frege no dio ningún nombre para la relación entre sentido y referencia. Nosotros la denominamos “determina” siguiendo a Oldager (2004, p. 21).

dos distintos para una misma referencia, ya que se trata de dos modos de darse lo designado con el término *baricentro* (Frege, 1998c, § 26).

También distingue el signo “7”, los sentidos “ $2 + 5$ ” y “ $3 + 4$ ” y la referencia o “concepto de número siete” (Frege, 1998b, § 3). Para entender la idea de concepto de un número adopta la visión: “Uno es cardinal $\{\emptyset\}$ ”, “Uno” es el término; su referencia es el *concepto de uno*. Pero hay distintos sentidos para este término:

- ◆ S_1 : menor número natural
- ◆ S_2 : divisor de cualquier número
- ◆ S_3 : mitad de dos, etc.

Estos distintos sentidos son modos de referirse al “concepto de uno”. Frege establece que el significado de un término conceptual, para una proposición y un uso determinados, viene dado por la conexión entre el término, su referencia o concepto y el sentido en que se usa.

Tres Dimensiones del Significado de un Concepto en las Matemáticas Escolares

El triángulo semántico propuesto por Frege identifica los elementos constitutivos del significado de un término conceptual desde una perspectiva estrictamente lógica y formal. Dado que nuestro interés por el significado de los conceptos matemáticos está centrado en el ámbito de la matemática escolar, adaptamos las ideas de Frege para considerar un sistema de relaciones más amplio⁹.

Nuestra propuesta interpreta las ideas de Frege al enfatizar el hecho de que los sentidos en los que se usa un término conceptual matemático implican, por un lado, los modos en los que se establecen relaciones con otros términos conceptuales matemáticos, y, por el otro, las diferentes formas en las que el término conceptual y estas relaciones se pueden representar. Adicionalmente, y siendo coherentes con nuestra posición con respecto al currículo de matemáticas, adoptamos un punto funcional, en virtud del cual el sentido en el que se usa un término conceptual matemático también incluye los fenómenos que sustentan el concepto. En la matemática escolar, los fenómenos se presentan mediante un contexto o situación en que el concepto toma sentido, o también mediante un problema que se aborda y da sentido al concepto.

Nuestra propuesta aborda el significado de un concepto matemático atendiendo a tres dimensiones que denominamos sistemas de representación, estructura conceptual y fenomenología (Ver Figura 4):

- ◆ En los *sistemas de representación* incluimos las diferentes maneras en las que se puede representar el concepto y sus relaciones con otros conceptos.
- ◆ En la *estructura conceptual* incluimos las relaciones del concepto con otros conceptos, atendiendo tanto a la estructura matemática de la que el concepto forma parte, como a la estructura matemática que dicho concepto configura.
- ◆ En la *fenomenología* incluimos aquellos fenómenos (contextos, situaciones o problemas) que pueden dar sentido al concepto.

⁹ Debo a Luis Rico la aclaración de que, para efectos del análisis de contenido, no es necesaria una aproximación social a la noción de significado. Basta con una extensión de las ideas originales de Frege. Las ideas, y una parte de la redacción, que presento en este apartado son, de hecho, producto de sus comentarios a una primera aproximación que hice a esta problemática. Por esta razón, utilizo la primera persona del plural.

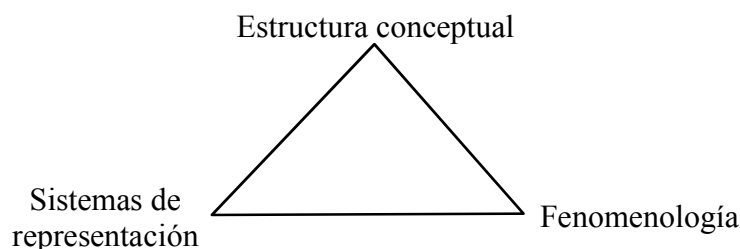


Figura 4. Las tres dimensiones del significado de un concepto en la matemática escolar

Significado de un Concepto Matemático y Planificación de Clase

Las tres dimensiones del significado de un concepto en la matemática escolar que hemos propuesto en la sección anterior ponen en evidencia una de las cuestiones centrales de la problemática de la planificación de clase: *la multiplicidad de significados de un concepto en las matemáticas escolares*. Un concepto matemático tiene una multiplicidad de significados porque:

- ◆ su estructura conceptual es compleja, dando lugar a una pluralidad de relaciones con otros conceptos matemáticos;
- ◆ hay una diversidad de modos en los que el concepto y sus relaciones con otros conceptos se pueden representar; y
- ◆ hay una variedad de fenómenos que le dan sentido.

Esta multiplicidad de significados de un concepto matemático implica que, para efectos de planificar una hora de clase o una unidad didáctica, el profesor debe:

1. recabar la información necesaria que le permita identificar dichos significados;
2. organizar esta información de tal forma que sea útil para la planificación; y
3. seleccionar, a partir de esta información, aquellos significados que él considera relevantes para la instrucción.

En los primeros dos pasos, el profesor debe asegurarse de la completitud y coherencia de la información recogida: por un lado, esta información debe incluir todos los significados que puedan ser relevantes para la reflexión sobre y la realización de la planificación y, por el otro, debe ser válida con respecto al conocimiento matemático establecido para las estructuras matemáticas involucradas. La información que resulta de los dos primeros pasos puede llegar a ser excesiva para los propósitos de la planificación de la instrucción. Por esta razón es necesario que se realice el tercer paso: la selección de los significados de referencia¹⁰.

Este proceso de selección de significados está condicionado por diversos factores. En primer lugar, la programación de comienzo de curso determina lo que denominaremos el contenido propuesto¹¹ que establece una primera delimitación de los significados de un concepto dado que se

¹⁰ Denomino a estos significados *de referencia*, para diferenciarlos de los significados que, en la interacción en el aula, los escolares negocian y construyen con motivo de las actividades propuestas por el profesor. De esta manera, distingo, pero también relaciono, dos problemáticas: el proceso de selección de los significados de referencia y el proceso de aprendizaje de los escolares.

¹¹ El contenido propuesto es el contenido que, a nivel institucional, se ha seleccionado a la hora de producir el diseño global de la asignatura o del plan de estudios.

consideran relevantes a nivel institucional. En segundo lugar, a lo largo del desarrollo de la asignatura y a la hora de planificar una hora de clase o una unidad didáctica, el profesor debe realizar un segundo proceso de selección. En este momento, el profesor debe seleccionar los *significados de referencia* que, de hecho, serán objeto de la instrucción y, por lo tanto, la base para la determinación de los objetivos de aprendizaje. Esta selección de significados deberá ser coherente con el contenido propuesto, y, además, deberá atender al desarrollo mismo de la asignatura hasta ese momento. En este sentido, el profesor, al seleccionar los significados de referencia, deberá tener en cuenta su percepción sobre las capacidades que los escolares ya han desarrollado y su previsión sobre cómo los escolares pueden desarrollar las capacidades involucradas en los objetivos de aprendizaje al abordar las tareas objeto de la instrucción. En otras palabras, en el contexto concreto de la planificación de una hora de clase o una unidad didáctica, la selección de los significados que serán objeto de dicha planificación y la determinación de los objetivos de aprendizaje que se basen en ellos, debe ser consecuencia de tres análisis:

1. el *análisis de actuación*, en el que el profesor determina las capacidades que los escolares han desarrollado y las dificultades que pueden haber manifestado hasta ese momento;
2. el *análisis cognitivo*, en el que el profesor describe sus hipótesis acerca de cómo los escolares pueden progresar en la construcción de su conocimiento sobre la estructura matemática cuando se enfrenten a las tareas que compondrán las actividades de enseñanza y aprendizaje; y
3. el *análisis de instrucción*, en el que el profesor diseña, analiza y selecciona las tareas que constituirán las actividades de enseñanza y aprendizaje objeto de la instrucción.

De hecho, denomino *análisis de contenido* al procedimiento en virtud del cual el profesor identifica y organiza la multiplicidad de significados de un concepto y *análisis didáctico* al procedimiento compuesto por los cuatro análisis que acabo de mencionar y en virtud del cual el profesor puede diseñar, llevar a la práctica y evaluar unidades didácticas. Como ya lo argumenté antes y las reflexiones anteriores sustentan, el análisis didáctico, como procedimiento de planificación local, es un nivel del currículo y se organiza de acuerdo con las dimensiones del mismo (Ver Figura 5).

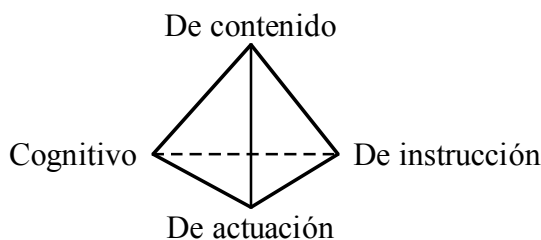


Figura 5. Análisis que componen el análisis didáctico

En este apartado hemos querido enfatizar varias cuestiones:

- ◆ el papel central de la noción de significado de un concepto matemático en el contexto de las matemáticas escolares y, en particular, en el proceso de planificación de clase¹²;

¹² Ver Kilpatrick, Hoyles y Skovsmose (2004) para una reflexión reciente y variada sobre la problemática de la noción de significado en las matemáticas escolares.

- ◆ la multiplicidad de significados de un concepto matemático;
- ◆ la necesidad de que el profesor identifique y organice esa multiplicidad de significados; y
- ◆ la importancia de que el profesor, teniendo en cuenta el contexto en el que tiene lugar la instrucción, seleccione los significados que considera relevantes para la planificación de clase.

Pero, ¿cómo puede el profesor identificar, organizar y seleccionar los significados relevantes de un concepto matemático para efectos de diseñar, llevar a la práctica y evaluar unidades didácticas? Él necesita herramientas conceptuales y metodológicas que le permitan realizar los cuatro análisis que componen el análisis didáctico. Rico, quien ha sugerido en diversas ocasiones la importancia de la multiplicidad de significados de un concepto matemático¹³, ha acuñado el término *organizadores del currículo* para referirse a estas herramientas. Estas son las herramientas con las que el profesor puede, en primer lugar, en el análisis de contenido, identificar, organizar y explicitar los diversos significados de un concepto matemático y, en segundo lugar, con motivo de los análisis cognitivo, de instrucción y de actuación, seleccionar los significados que considera relevantes para la instrucción y diseñar y evaluar las actividades de enseñanza y aprendizaje objeto de la planificación de clase.

5. ANÁLISIS DIDÁCTICO: UN PROCEDIMIENTO PARA ORGANIZAR LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

En lo que sigue, describo un procedimiento, que denomino *análisis didáctico*, y que representa mi visión ideal de cómo el profesor debería diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje. El análisis didáctico se ubica en un nivel local del currículo (ver la Tabla 1). Mi preocupación se centra en el procedimiento en virtud del cual el profesor planifica, lleva a la práctica y evalúa una unidad didáctica, una hora de clase o una porción de una clase. Entiendo por unidad didáctica, “una unidad de programación y actuación docente constituida por un conjunto de actividades que se desarrollan en un tiempo determinado para la consecución de unos objetivos específicos” (Segovia & Rico, 2001, p. 87). Por lo tanto, el contenido matemático que es objeto de la instrucción es una estructura matemática específica o uno o más aspectos de una estructura matemática para la que hay unos objetivos de aprendizaje determinados. El periodo de tiempo en el que tiene lugar la instrucción es limitado y la especificidad del contenido permite profundizar en sus múltiples significados. Esta visión local de la enseñanza es similar a la adoptada por Simon (1995), quien también se centra en las actividades que conciernen un periodo limitado de tiempo y un contenido matemático específico, y constituye una reflexión curricular diferente de aquella que corresponde a la planificación global para los profesores.

La descripción de un ciclo del análisis didáctico sigue la secuencia propuesta en la Figura 6.

¹³ Ver por ejemplo, Rico (1992; , 1997b).

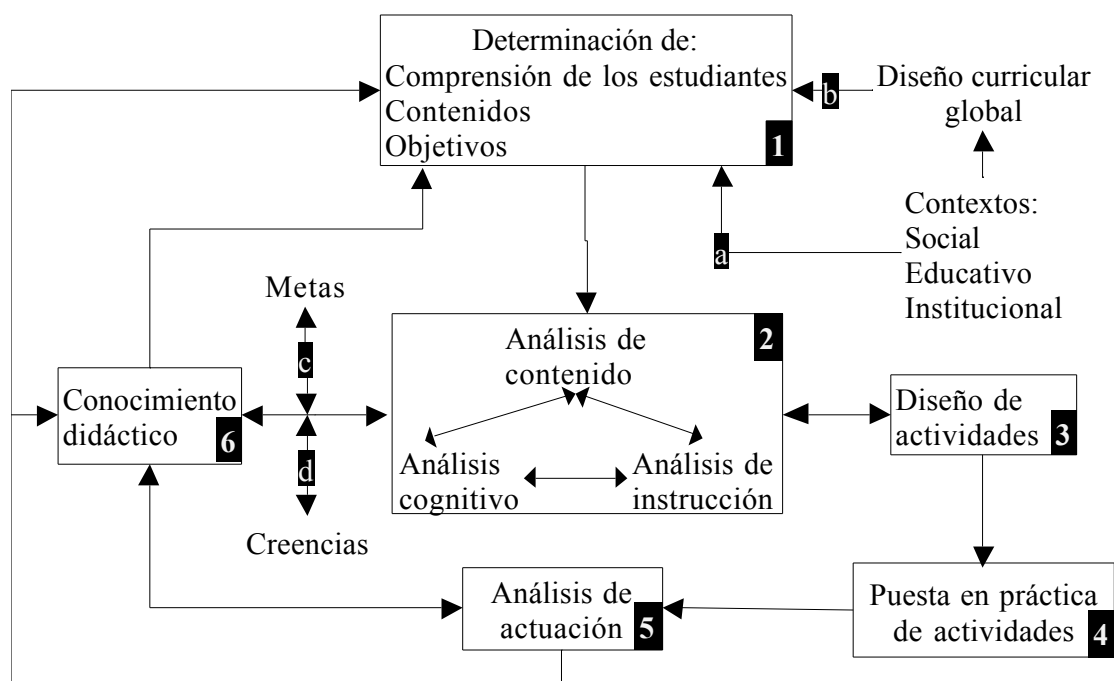


Figura 6. Ciclo de análisis didáctico

El análisis didáctico se inicia con la determinación del contenido que se va a tratar y de los objetivos de aprendizaje que se quieren lograr, a partir de la percepción que el profesor tiene de la comprensión de los escolares con motivo de los resultados del análisis de actuación del ciclo anterior y teniendo en cuenta los contextos social, educativo e institucional en los que se enmarca la instrucción (cuadro 1 de la Figura 1). A partir de esta información, el profesor inicia la planificación con el análisis de contenido. La información que surge del análisis de contenido sustenta el análisis cognitivo, al identificar y organizar los múltiples significados del concepto objeto de la instrucción. A su vez, la realización del análisis cognitivo puede dar lugar a la revisión del análisis de contenido. Esta relación entre los análisis también se establece con el análisis de instrucción. Su formulación depende de y debe ser compatible con los resultados de los análisis de contenido y cognitivo, pero, a su vez, su realización puede generar la necesidad de corregir las versiones previas de estos análisis (cuadro 2). En el análisis cognitivo, el profesor selecciona unos significados de referencia y, con base en ellos y en los objetivos de aprendizaje que se ha impuesto, identifica las capacidades que pretende desarrollar en los escolares. También formula conjeturas sobre los posibles caminos por los que se puede desarrollar el aprendizaje de los escolares cuando ellos aborden las tareas que conforman la instrucción. El profesor utiliza esta información para diseñar, evaluar y seleccionar estas tareas. Por consiguiente, la selección de tareas que componen las actividades debe ser coherente con los resultados de los tres análisis y la evaluación de esas tareas a la luz de los análisis puede llevar al profesor a realizar un nuevo ciclo de análisis, antes de seleccionar definitivamente las tareas que componen las actividades de enseñanza y aprendizaje (relación entre cuadros 2 y 3). El profesor pone en práctica estas actividades (cuadro 4) y, al hacerlo, analiza las actuaciones de los escolares para obtener información

que sirve como punto de inicio de un nuevo ciclo (cuadro 5). El conocimiento didáctico (cuadro 6) es el conocimiento que el profesor pone en juego durante este proceso¹⁴.

Desde un punto de vista metodológico, si se observa que el análisis didáctico se inicia en la constatación de un estado inicial y pasa por una planificación, con base en la cual tiene lugar una actuación (de profesores y escolares) que es observada y evaluada con el propósito de dar lugar al inicio de un nuevo ciclo, entonces es posible relacionar este procedimiento con los pasos propuestos en la investigación-acción: planificación, acción, observación y reflexión (Kemmis & McTaggart, 1988). Shulman (1987) detalla más estos pasos, desde la perspectiva del profesor, en su modelo de razonamiento y acción pedagógicos. En este modelo, él sugiere las fases de comprensión, transformación, instrucción, evaluación, reflexión y nueva comprensión (p. 15). De la misma manera, el modelo del ciclo de enseñanza de las matemáticas de Simon (Simon, 1995), partiendo de una visión constructivista del aprendizaje, sugiere un procedimiento similar, en el que se determina un objetivo de aprendizaje, se realiza un plan de actividades, se formulan hipótesis sobre el proceso de aprendizaje, se ponen en práctica las actividades y se evalúa el conocimiento de los escolares.

6. ANÁLISIS DIDÁCTICO Y FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA

En este documento, he mostrado que el análisis didáctico configura un nivel del currículo y he insinuado algunas de sus características. Por lo tanto, utilizo la expresión “análisis didáctico” desde una perspectiva curricular. Si el análisis didáctico es una noción curricular, ¿qué papel juega en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria? En este apartado, exploro algunas respuestas a esta pregunta en el contexto de la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato de la Universidad de Granada.

Papel en la Conceptualización de la Formación de Profesores de Matemáticas

El análisis didáctico, como conceptualización de las actividades que se espera que el profesor realice para efectos de diseñar, llevar a la práctica y evaluar unidades didácticas, permite introducir, de manera explícita, una visión funcional de la formación de profesores. Esta visión funcional se resume en la Figura 7. El diseño de un plan de formación se fundamenta en la enumeración de unas competencias del profesor y en una posición con respecto a cómo los futuros profesores pueden desarrollar esas competencias dentro del plan de formación (aprendizaje de los futuros profesores)¹⁵. La identificación de las competencias (y capacidades) que se consideran relevantes surge de la conceptualización de las actividades del profesor a la hora de diseñar,

¹⁴ No me propongo, en este documento, describir con mayor detalle los diferentes procedimientos que conforman el análisis didáctico. Ver, por ejemplo, Gómez (2002).

¹⁵ En la actualidad, y con motivo de la constitución del Espacio Europeo de Educación Superior, hablamos de las competencias del profesor de matemáticas (Recio, 2004; Rico, 2004). Hace algunos años utilizábamos expresiones como “conocimiento pedagógico de contenido”, “conocimiento profesional del profesor” o “conocimiento didáctico”. El cambio no es sólo formal. La noción de competencia del profesor implica la conjunción de conocimientos, destrezas y actitudes *para la acción* (OECD, 2005, p. 4; Tejada, 1999, p. 4). Por consiguiente, esta noción enfatiza las actividades del profesor en su labor docente, aspecto central del análisis didáctico.

llevar a la práctica y evaluar unidades didácticas (el análisis didáctico). Más adelante, presento ejemplos en los que se establece el vínculo entre los procedimientos que conforman el análisis didáctico y las capacidades que caracterizan algunas de las competencias del profesor de matemáticas.

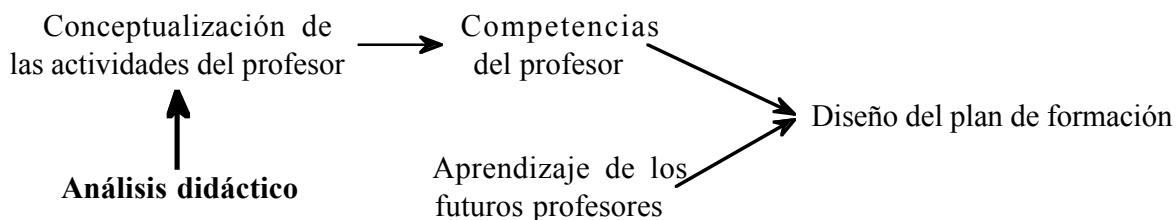


Figura 7. Conceptualización del plan de formación

Papel en la Fundamentación de la Asignatura

He argumentado que el análisis didáctico aborda la paradoja de la planificación y permite cerrar la brecha entre la planificación global (de una asignatura) y la planificación local (de una unidad didáctica o una hora de clase). Al poner en el foco de atención estas dos cuestiones, destaco dos aspectos de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Por un lado, centro la atención en una de las competencias del profesor (la planificación). Por el otro, propongo una estrategia para abordar la problemática de la enseñanza de las matemáticas cuando se asume una posición constructivista del aprendizaje de los escolares. En otras palabras, al destacar el papel del análisis didáctico en las actividades del profesor y en la formación inicial de profesores, tomo partido: parto de una posición con respecto a cómo los escolares aprenden matemáticas en el aula y propongo una visión ideal de cómo se debería desarrollar la enseñanza.

Al describir y estructurar los procedimientos que idealmente el profesor debería realizar para diseñar, llevar a la práctica y evaluar unidades didácticas, establezco uno de los pivotes de una concepción de la formación de profesores de matemáticas de secundaria. Hago explícita mi posición con respecto a lo que considero como una de las finalidades de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria: contribuir al desarrollo de las competencias y capacidades necesarias para realizar el análisis didáctico.

La visión sobre el aprendizaje de los futuros profesores es el segundo pivote de la concepción de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria en la que se debe basar el diseño de planes y asignaturas de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria¹⁶.

Estos dos pivotes fundamentaron el diseño curricular de la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato en la Universidad de Granada en el bienio 2000-2001. La caracterización de los procedimientos que conforman el análisis didáctico y de los significados de referencia de las nociones implicadas en esos procedimientos permite identificar y estructurar las capacidades necesarias para la competencia de planificación del profesor de matemáticas de secundaria y por consiguiente concretar el conocimiento didáctico que esperamos que los futuros

¹⁶ En este documento no profundizo en este aspecto de la fundamentación del diseño de planes y asignaturas de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Para más detalle a este respecto ver, por ejemplo, Gómez (2005).

profesores desarrollen dentro de la asignatura (ver más adelante). De esta manera, al asumir una visión funcional de la formación inicial de profesores, propongo un fundamento para los objetivos y los contenidos del segundo bloque de la asignatura. Por otro lado, los esquemas metodológicos y de evaluación propuestos en el diseño se fundamentan en una posición con respecto al aprendizaje de los futuros profesores (ver Figura 8).

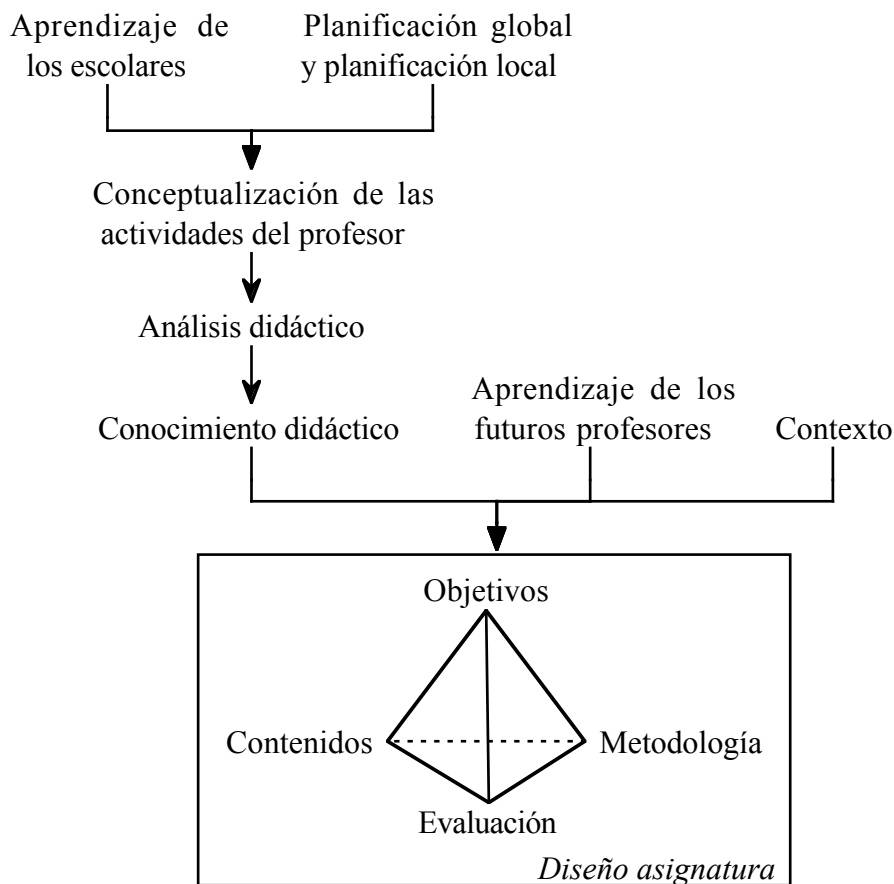


Figura 8. Fundamentación del diseño de la asignatura

Papel en la Metodología

La conceptualización de la formación de profesores que he insinuado en la sección anterior dio lugar a que, dentro de la asignatura y en comparación con diseños anteriores de la misma, se hiciera un mayor énfasis en el diseño de unidades didácticas, como una de las dos finalidades de la misma. La asignatura pretende contribuir a la formación de los futuros profesores con vistas a su práctica docente futura. De las diferentes “tareas profesionales” del profesor (Llinares, 2005) y sus correspondientes competencias (Rico, 2004), nosotros concentramos nuestra atención en la planificación¹⁷. Es decir, nos preocupamos por las competencias y capacidades necesarias para el

¹⁷ De nuevo, utilizo la primera persona del plural, dado que varios formadores e investigadores hemos participado en la permanente evolución del diseño de la asignatura, siempre bajo la tutela de Luis Rico. Entre aquellos con quienes he trabajado, debo mencionar a Isidoro Segovia, Evelio Bedoya, José Ortiz, José Luis Lupiáñez y Antonio Marín.

diseño de unidades didácticas. El esquema metodológico para desarrollar estas competencias y capacidades se basa en un proceso de simulación (Van Der Valk & Broekman, 1999), en virtud del cual los grupos de futuros profesores deben producir, al final de la asignatura, el diseño de una unidad didáctica sobre un tema concreto. Para ello, los futuros profesores, con la guía y el apoyo de los formadores, ejecutan los diversos procedimientos implicados en cada uno de los análisis del análisis didáctico. Éste es, por lo tanto, un segundo papel del análisis didáctico en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria: es una de las bases que guían la secuencia de actividades que realizamos dentro de la asignatura. Este trabajo genera y es fruto de un proceso de reflexión y se desarrolla con la ayuda de unos fundamentos conceptuales (la noción de currículo y los fundamentos de las matemáticas escolares) y de unas herramientas conceptuales y metodológicas (los organizadores del currículo). Los organizadores del currículo son los instrumentos con los que los grupos de futuros profesores recogen y organizan la información que les permite realizar los diferentes análisis que conforman el análisis didáctico (ver Figura 9)¹⁸.

¹⁸ Con motivo del cambio en el plan de estudios en la licenciatura de matemáticas de la Universidad de Granada, la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato se redujo tanto en extensión, como en créditos. Esta situación implicó la necesidad de cambiar su diseño, dando menos importancia al bloque temático original sobre fundamentación y marco de referencia y destacando el papel del segundo bloque temático sobre el análisis didáctico de los contenidos curriculares de la educación secundaria y el bachillerato.

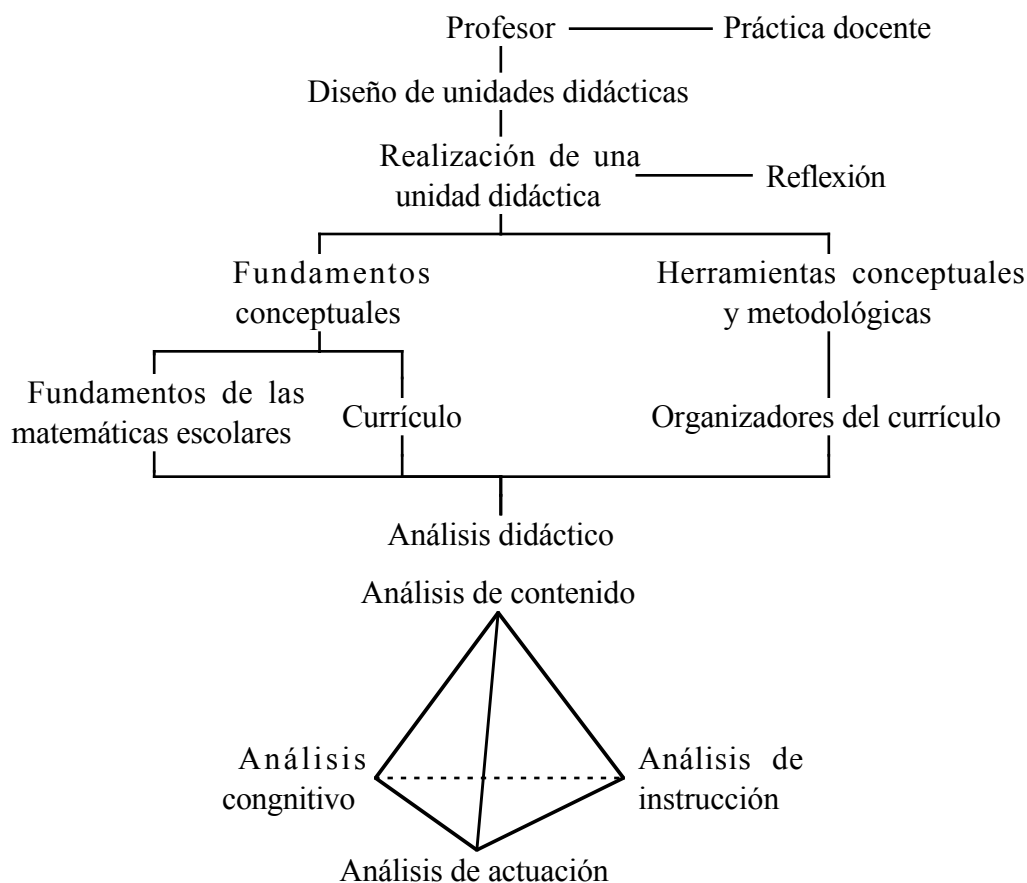


Figura 9. Papel del análisis didáctico en el diseño de la asignatura

Papel en los Objetivos y el Contenido: Capacidades y Competencias del Profesor de Matemáticas

En esta sección sugiero cómo la noción de análisis didáctico puede apoyar la identificación de las *capacidades* que contribuyen al desarrollo de algunas de las competencias del profesor de matemáticas. Enumeraré y organizaré estas capacidades de acuerdo con los cuatro análisis que conforman el análisis didáctico. Éstas son, por lo tanto, las capacidades que considero necesarias para planificar, llevar a la práctica y evaluar una unidad didáctica sobre un tema matemático concreto. Presento únicamente las capacidades básicas correspondientes a cada análisis. Cada una de estas capacidades básicas se puede desarrollar en procedimientos más detallados que corresponden a los procedimientos que configuran cada uno de los análisis del análisis didáctico. En este apartado, no pretendo describir en detalle estos procedimientos. A continuación, enumeraré las capacidades básicas involucradas en cada uno de los análisis y, más adelante, exploraré, a manera de ejemplo y con algún detalle, dos de esas capacidades.

Capacidades Básicas para el Análisis de Contenido

Para las tres dimensiones del significado de un concepto, el profesor debe ser capaz de:

- ◆ recabar la información necesaria que le permita identificar los significados del concepto;
- ◆ organizar esta información de tal forma que sea útil para la planificación;

- ◆ seleccionar, a partir de esta información, aquellos significados que él considera relevantes para la instrucción, al tener en cuenta las condiciones de los contextos sociales, educativos e institucionales; y
- ◆ seleccionar los significados de referencia al tener en cuenta las condiciones del contexto del aula (que surgen de la información que se obtiene del análisis cognitivo).

Capacidades Básicas para el Análisis Cognitivo

A partir de la información que surge del análisis de contenido (la caracterización de los significados relevantes para la instrucción), el profesor debe ser capaz de establecer:

- ◆ las competencias que se quieren desarrollar,
- ◆ los focos de interés que se han de tratar,
- ◆ las capacidades que los escolares tienen antes de la instrucción,
- ◆ las capacidades que se espera que los escolares desarrollen con motivo de la instrucción (que contribuyen a las competencias previamente identificadas y que delimitan los significados de referencia),
- ◆ las tareas que conforman la instrucción (cuyo establecimiento involucra las capacidades que se enumeran en el análisis de instrucción),
- ◆ las dificultades que los escolares pueden encontrar al abordar esas tareas, y
- ◆ las hipótesis sobre los caminos por los que se puede desarrollar el aprendizaje.

Capacidades Básicas para el Análisis de Instrucción

Para efectos de analizar y seleccionar las tareas que conforman la instrucción, el profesor ha de ser capaz de analizar una tarea con el propósito de:

- ◆ identificar las capacidades que se pueden poner en juego cuando los escolares la aborden,
- ◆ identificar las competencias a las que esas capacidades, con la tarea en cuestión, pueden contribuir,
- ◆ establecer los posibles caminos de aprendizaje que los escolares pueden recorrer cuando aborden la tarea, y
- ◆ evaluar la pertinencia de la tarea a partir de esta información.

Capacidades Básicas para el Análisis de Actuación

Una vez que se ha realizado la instrucción y que el profesor ha observado y registrado lo que sucedió en su interacción con los estudiantes, él ha de ser capaz de:

- ◆ comparar las previsiones que se hicieron en la planificación con lo que sucedió cuando esa planificación se puso en práctica en el aula,
- ◆ establecer los logros y deficiencias de la planificación (actividades y tareas) en su puesta en práctica en el aula,
- ◆ caracterizar el aprendizaje de los escolares con motivo de la puesta en práctica de las actividades, y
- ◆ producir información relevante para una nueva planificación.

Ejemplo de dos Capacidades

Si se tienen en cuenta los procedimientos que configuran el análisis didáctico, entonces es posible desarrollar en detalle las capacidades básicas que he enumerado en la sección anterior. Por ejemplo, las dos primeras capacidades del análisis de contenido se refieren a la identificación y

organización de los significados de un concepto matemático. Si consideramos las dimensiones de sistemas de representación y estructura conceptual de estos significados, entonces, para realizar estos procedimientos, el profesor debe ser capaz, para el concepto correspondiente, de:

1. identificar sus elementos (objetos, conceptos y estructuras matemáticas),
2. determinar las diferentes representaciones de esos elementos y
3. establecer las relaciones entre los elementos y entre sus representaciones.

Si profundizamos en el detalle de la capacidad 3, observamos que esta capacidad implica que el profesor debe ser capaz de establecer las relaciones:

- ◆ entre el concepto y los conceptos de la estructura matemática que dicho concepto configura,
- ◆ entre el concepto y los objetos que son casos particulares de dicho concepto,
- ◆ entre el concepto y los conceptos que pertenecen a la estructura matemática de la que el concepto forma parte,
- ◆ entre pares de signos que designan el mismo objeto o concepto, dentro de un mismo sistema de representación (transformaciones sintácticas invariantes),
- ◆ entre pares de signos que designan el mismo objeto o concepto pertenecientes a sistemas de representación diferentes (traducción entre sistemas de representación) y
- ◆ entre pares de signos que designan dos objetos o conceptos diferentes dentro de un mismo sistema de representación (transformaciones sintácticas variantes).

En el ejemplo que acabo de presentar se aprecia la estructura de las capacidades que contribuyen a la competencia de planificación del profesor de matemáticas (ver Figura 10). La competencia de planificación es una de las competencias del profesor de matemáticas. He identificado unas capacidades básicas que contribuyen a esta competencia y las he estructurado de acuerdo con los análisis que conforman el análisis didáctico. En el caso del análisis de contenido, dos de las capacidades básicas se refieren a la identificación y organización de los significados del concepto en términos de los sistemas de representación y la estructura conceptual. Esta capacidad involucra, entre otras, la capacidad de establecer diversos tipos de relaciones entre los elementos de los mapas conceptuales en los que el profesor organiza los significados del concepto en cuestión.

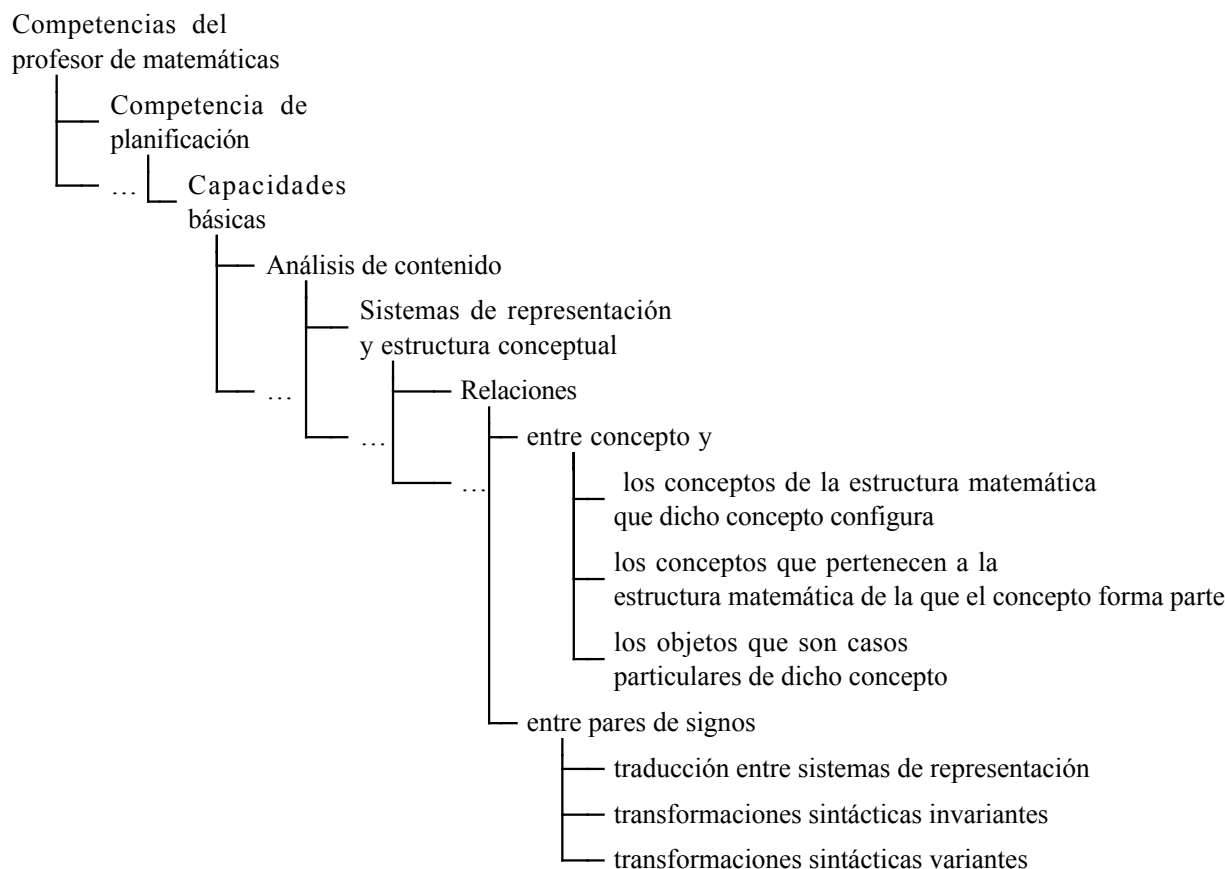


Figura 10. Estructura de capacidades y competencia de planificación

7. REFERENCIAS

- Ainley, J., & Pratt, D. (2002). *Purpose and utility in pedagogical task design*. Trabajo presentado en Twenty-sixth annual Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Norwich, Reino Unido.
- Ball, D. L., & Bass, H. (2003). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. En B. Davis & E. Simmt (Eds.), *Proceedings of the 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group* (pp. 3-14). Edmonton, AB: CMESG/GCEDM.
- Biehler, R. (2004). Reconstruction of Meaning as a Didactical Task: The Concept of Function as an Example. En J. Kilpatrick, C. Hoyles & O. Skovsmose (Eds.), *Meaning in Mathematics Education* (pp. 61-81). Dordrecht: Kluwer.
- Bromme, R., & Steinbring, H. (1994). Interactive development of subject matter in the Mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 217-248.
- Cooney, T. J. (2004). Pluralism and the teaching of mathematics. En B. Clarke, D. M. Clarke, G. Emanuelsson, B. Johansson, D. V. Lambdin, F. K. Lester, A. Wallby & K. Wallby (Eds.),

- International perspectives on learning and teaching mathematics* (pp. 503- 517). Göteborg: National Center for Mathematics Education.
- Department of Education. (2001). *Teacher Competencies and Professional Standards Discussion Paper*. East Perth: Department of Education.
- DET. (2004). *Competency framework for teachers*. East Perth: Department of Education and Training.
- Frege, G. (1998a). Comentarios sobre sentido y referencia. En L. M. Valdés (Ed.), *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica* (pp. 198-). Madrid: Tecnos.
- Frege, G. (1998b). Función y concepto. En L. M. Valdés (Ed.), *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica* (pp. 53-79). Madrid: Tecnos.
- Frege, G. (1998c). Sobre sentido y referencia. En L. M. Valdés (Ed.), *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica* (pp. 84-111). Madrid: Tecnos.
- Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA*, 7(3), 251-293. Disponible en <http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/GomezP02-2714.PDF>
- Gómez, P., & Lupiáñez, J. L. (2005). *Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Trabajo presentado en V Congreso Ibero-americano de educación matemática, Oporto, Portugal.
- Gómez, P., & Rico, L. (2005). *Learning in secondary preservice teacher education from the communities of practice perspective*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- González, J. L. (1998). Didactical Analysis: A non empirical qualitative method for research in mathematics education. En I. Schwank (Ed.), *European Research in Mathematics Education I.II* (pp. 245-256). Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.
- Kemmis, S., & McTaggart, R. (1988). *Cómo planificar la investigación - acción*. Barcelona: Laertes.
- Kilpatrick, J., Hoyles, C., & Skovsmose, O. (Eds.). (2004). *Meaning in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer.
- Kilpatrick, J., Swafford, J. O., & Findell, B. (2001). *ADDING IT UP: Helping Children Learn Mathematics*. Washington: National Academy Press.
- Llinares, S. (2005). *Relación entre teorías sobre el aprendizaje del profesor de matemáticas y diseño de entornos de aprendizaje*. Trabajo presentado en V CIBEM, Porto.
- Morine-Dershimer, G. (1979). Planning in classroom reality: An in-depth look. *Educational Research Quarterly*, 3(4), 83-99.
- Niss, M. (2003). The Danish KOM project and possible consequences for teacher education. En R. Strässer, G. Brandell & B. Grevholm (Eds.), *Educating for the future. Proceedings of an international symposium on mathematics teacher education* (pp. 179-192). Göteborg: Royal Swedish Academy of Sciences.
- OECD. (2005). The definition and selection of key competencies. Executive Summary. Descargado el 18/10/2005, de <http://www.pfmb.uni-mb.si/bologna/deseco.pdf>
- Oldager, N. (2004). *Conceptual Knowledge Representation and Reasoning*. Tesis doctoral no publicada, Technical University of Denmark, Copenhagen.
- Recio, T. (2004). Seminario: Itinerario Educativo de la Licenciatura de Matemáticas. Documento de Conclusiones y Propuestas. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 7(1), 33-36.

- Rico, L. (1992). *Proyecto Docente*. Granada: Universidad de Granada.
- Rico, L. (1995). Consideraciones sobre el currículo escolar de matemáticas. *Revista EMA*, 1(1), 4-24.
- Rico, L. (1997a). Dimensiones y componentes de la noción de currículo. En L. Rico (Ed.), *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria* (pp. 377-414). Madrid: Síntesis.
- Rico, L. (1997b). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. R. Coord, E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra & M. M. Socas (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Barcelona: ice - Horsori.
- Rico, L. (1998a). Complejidad del currículo de matemáticas como herramienta profesional. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 1(1), 22-39.
- Rico, L. (1998b). Reflexiones sobre la formación inicial del profesor de secundaria en didáctica de la matemática. En Braira (Ed.), *La formación inicial de los profesores de primaria y secundaria en el área de didáctica de las matemáticas* (pp. 183-194). León: Universidad de León.
- Rico, L. (2004). Reflexiones sobre la formación inicial del profesor de Matemáticas de Secundaria. *Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado*, 8(1), 1-15.
- Rico, L. (2005). *Competencias matemáticas e instrumentos de evaluación en el proyecto PISA 2003*. Madrid: INECSE.
- Rico, L. (Ed.). (1997c). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria*. Madrid: Síntesis.
- Rico, L., Castro, E., Castro, E., Coriat, M., Marín, A., Puig, L., Sierra, M., & Socas, M. (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: ice - Horsori.
- Rico, L., Castro, E., Castro, E., Coriat, M., & Segovia, I. (1997). Investigación, diseño y desarrollo curricular. En L. Rico (Ed.), *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria* (pp. 265-318). Madrid: Síntesis.
- Schoenfeld, A. H. (2000). Models of the Teaching Process. *Journal of Mathematical Behavior*, 18(3), 243-261.
- Segovia, I., & Rico, L. (2001). Unidades didácticas. Organizadores. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 83-104). Madrid: Síntesis.
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.
- Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114-145.
- Simon, M. A., & Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: an elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 91-104.
- Tejada, J. (1999). Acerca de las competencias profesionales (I). *Herramientas*(56), 20-30.
- Timmerman, M. (2003). Perceptions of Professional Growth: A Mathematics Teacher Educator in Transition. *School science and mathematics*, 103(3), 155-167.
- Van Der Valk, T. A. E., & Broekman, H. H. G. B. (1999). The Lesson Preparation Method: A Way of Investigating Pre-Service Teachers' Pedagogical Content Knowledge. *European Journal of Teacher Education*, 22(1), 11-22.

Wittmann, E. (1984). Teaching units as the integrating core of mathematics education. *Educational Studies en Mathematics*, 15, 25-36.