

LA GEOMETRÍA DE LOBACHEVSKI A PARTIR DEL GRUPO DE MÖBIUS¹

David Rodríguez Granados

Estudiante Universidad Pedagógica Nacional *Profesor Universidad Pedagógica Nacional*

Bogotá D.C, Colombia

derg15@hotmail.com

Carlos Luque Arias

Bogotá D.C, Colombia

caluque@pedagogica.edu.co

Resumen

Realizamos una presentación de la geometría de Lobachevski a partir del grupo de Möbius², tomando como directriz el Programa de Erlangen y basándonos en el Modelo de Poincaré del semiplano superior complejo. Partimos de una breve descripción del Programa de Erlangen, luego de lo cual veremos algunas propiedades de las transformaciones de Möbius, importantes para nuestro estudio, y luego realizaremos la presentación de la Geometría de Lobachevski.

1. El Programa de Erlangen

En 1872, el matemático alemán Christian Felix Klein, ante su ingreso a la Facultad de Filosofía y como miembro del Senado de la Universidad de Erlangen (Alemania) presentó un discurso acerca de “*Consideraciones comparativas sobre las investigaciones geométricas modernas*”, discurso que luego sería llamado *El programa de Erlangen*[15]. Este “programa” surgió en un momento histórico de las matemáticas, donde el álgebra y la geometría llamaban la atención de los matemáticos de la época, ante los trabajos sobre teoría de grupos de Galois y el descubrimiento de las geometrías no euclidianas por Lobachevski, Bolyai y Gauss: Por una parte, el álgebra estaba permitiendo estudiar objetos matemáticos que en algún momento se hubieran considerado fuera de los dominios del álgebra, como fue en el estudio realizado por Klein y Sophus Lie, sobre curvas homogéneas (rectas y circunferencias) las cuales tienen un grupo de autosimetría que aplica a esa curva sobre si misma, es decir, de movimientos sobre estas curvas: para la recta, el grupo de translaciones en la dirección de la recta misma; para la circunferencia, el grupo de rotaciones con centro en el centro de la circunferencia y de forma similar vieron que esto se podía establecer para otra curva con características de homogeneidad similar a las rectas y circunferencias, y que también tenía un grupo de autosimetría, por ejemplo la espiral logarítmica. La forma en que mostraron sus explicaciones respecto de los estudios de estas curvas, les permitieron contemplar la expansión que estaba teniendo lugar con la teoría de grupos.

Por otro lado, el surgimiento de las llamadas geometrías no euclidianas por los trabajos de Lobachevski, Gauss, Bolyai y Riemann principalmente, dieron un vuelco a esta antigua rama de las matemáticas cuyas verdades desde la geometría euclidiana, Immanuel Kant había llamado verdades *a priori*³, por lo que el estudio de estas novedosas geometrías fue tema de gran importancia. De estos estudios se consiguieron resultados tales como la posibilidad de establecer

¹Presentada en el XIX encuentro de geometría y sus aplicaciones y VII Encuentro de aritmética.

²Este trabajo que corresponde a la tesis de grado de Licenciatura en Matemáticas presentada por su D. Rodríguez, puede ser consultado en su totalidad en la Biblioteca de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, donde reposa en un CD

³Para Kant las verdades *a priori* son verdades de la naturaleza, verdades inamovibles al pensamiento

las diferentes geometrías, como distintas proyecciones de objetos tomados en consideración, lo que le dio un lugar preponderante a la *geometría proyectiva*; también se logró una clasificación de las geometrías con respecto a las formas de medir distancias y ángulos (parabólica, elíptica e hiperbólica tanto para distancias como ángulos) y sus combinaciones de donde surgieron 9 geometrías planares⁴, 27 geometrías del espacio, y 3^n geometrías para un espacio n -dimensional.

Klein, tomando los estudios que había realizado con Lie, y con la teoría de invariantes que había aprendido con el matemático alemán Rudolf Clebsch, en su Programa de Erlangen muestra una forma diferente de estudiar la geometría, abandonando las formas tradicionales (sintética y analítica) de abordarla, y enfocándose en las propiedades invariantes que deja el aplicar algunas transformaciones particulares. Así, del grupo de biyecciones sobre un conjunto, se elige un subgrupo de éstas y se asume como *grupo principal*. Dicho grupo es la base del estudio de la geometría, cuyos objetos serán precisamente los que permanezcan invariantes al aplicar las transformaciones del grupo.

Veamos ahora algunos apartes del grupo de transformaciones de Möbius, el cual nos permitirá presentar la geometría de Lobachevski.

2. El grupo de Möbius

Estudiaremos ahora las transformaciones de Möbius, las cuales van a ser uno de los objetos con los que posteriormente podremos construir la geometría de Lobachevski.

2.1. Las transformaciones de Möbius

Consideremos el campo \mathbb{C} de los números complejos. Adjuntaremos a este conjunto un elemento al que llamaremos *punto del infinito* y que notaremos como “ ∞ ”. Para conservar la estructura de \mathbb{C} , este punto adopta las siguientes reglas [7]:

$$\begin{aligned} -\infty &= \infty & \overline{\infty} &= \infty & \infty^{-1} &= 0 & 0^{-1} &= \infty \\ z + \infty &= \infty = \infty + z & z\infty &= \infty = \infty z & & & & \text{para todo } z \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Así obtenemos el conjunto $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, llamado el *plano complejo extendido*. De forma particular, si bajo estas mismas condiciones, adjuntamos el punto del infinito al conjunto \mathbb{R} de los números reales, subconjunto de \mathbb{C} , obtenemos el conjunto $\mathbb{R}_\infty = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, llamado *la recta real extendida*.

Definición 2.1. *Sobre el conjunto \mathbb{C}_∞ , definimos las transformaciones:*

$$\begin{aligned} T : \mathbb{C}_\infty &\rightarrow \mathbb{C}_\infty \\ z &\mapsto T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \end{aligned}$$

tales que $ad - bc \neq 0$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Estas son llamadas Transformaciones de Möbius.

⁴Éstas fueron llamadas Geometrías de Cayley-Klein [29]

Con la forma en que operamos con “ ∞ ” obtenemos que:

Si $c = 0, T(\infty) = \infty$; si $c \neq 0, T(-\frac{d}{c}) = \infty$, y $T(\infty) = \frac{a}{c}$

Proposición 2.1. Las transformaciones de Möbius son biyectivas⁵

Veamos ahora algunas transformaciones de Möbius en particular.

Traslaciones : Las transformación de Möbius de la forma

$$D(z) = z + b, b \in \mathbb{C}$$

corresponden a un movimiento, que a cada punto del plano lo traslada por la trayectoria del vector determinado por b . Si $\Im(b) = 0$, entonces la traslación es paralela al eje real. Si $\Re(b) = 0$, la traslación es paralela al eje i .

Rotaciones : Sea una transformación de Möbius del tipo

$$R(z) = rz, r \in \mathbb{C}$$

Supongamos que al escribir r y z en coordenadas polares, $r = e^{i\alpha}$ y $z = e^{i\theta}$. Tenemos entonces que $e^{i\alpha}$ es una rotación del plano con centro en el origen y con ángulo $\alpha \in \mathbb{R}$ y de forma análoga sucede con $z = e^{i\theta}$. Por tanto:

$$R(z) = rz = (e^{i\alpha})(e^{i\theta}) = e^{i(\alpha+\theta)}$$

Es una rotación del plano, con centro en el origen y con ángulo de rotación $\phi = \alpha + \theta$. Y así, obtenemos un giro del vector que representa a z a partir del ángulo de rotación α , $\alpha = \arg(a) \in \mathbb{R}$.

Homotecias : Consideremos la transformación:

$$H(z) = kz, |k| > 0$$

Tales que, en coordenadas polares, $k = me^{i\alpha}$ y $z = ne^{i\theta}$. Entonces, $kz = (mn)e^{i(\alpha+\theta)}$. Tenemos una rotación del vector que representa a z por un ángulo $\phi = \alpha + \theta$. Pero además, vemos una homotecia de dicho vector, que aumenta o disminuye su módulo según $n = |k|$, el módulo de k , sea mayor o menor que 1, respectivamente.

Inversiones : Sea la transformación de Möbius

$$I(z) = \frac{1}{z}$$

Esta transformación es una inversión con respecto a la circunferencia unidad, la cual hace que a todo punto en el exterior de dicha circunferencia le corresponda uno en su interior y viceversa, y los puntos sobre la circunferencia se corresponden a sí mismos.

⁵En este escrito, hemos omitido la demostración de ésta y otras proposiciones. Estas demostraciones podrán ser consultadas en su totalidad en [32]

Esta misma transformación puede ser escrita como

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \overline{\left(\frac{z}{|z|^2}\right)} \text{ dado que } |z|^2 = z\bar{z}, \text{ y } \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{|z|^2}z$$

Lo cual nos muestra que equivale a una inversión respecto a la circunferencia unidad y una reflexión axial respecto al eje real, donde de forma particular $T(0) = \infty$ y $T(\infty) = 0$.

Proposición 2.2. Toda transformación de Möbius puede ser expresada como composición de traslaciones, rotaciones, homotecias e inversiones.

También tenemos que

Proposición 2.3. Dadas dos transformaciones de Möbius f y g , su composición $f \circ g$ es también una transformación de Möbius.

Con este resultado, vemos que las transformaciones de Möbius con la composición de funciones forman una estructura algebraica. Sea

$$\mathbb{M} = \left\{ f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty \mid f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, ad - bc \neq 0, a, b, c, d \in \mathbb{C} \right\}$$

Proposición 2.4. El par (\mathbb{M}, \circ) tiene estructura de grupo

Demostración. Por la proposición 2.3, tenemos que la composición de funciones “ \circ ” es una operación sobre \mathbb{M} . Además, la composición de funciones es asociativa, así la estructura algebraica de este par es de semigrupo. Existe la transformación de Möbius $T(z) = z$, donde $b = 0 = c$ y $a = 1 = d$, ($ad - bc = 1$), la cual es el elemento neutro, por tanto es ya un monoide, y; por la proposición 2.1, sabemos que estas transformaciones son biyectivas, y así para cada transformación de Möbius T , existe una transformación T^{-1} que es su inversa, y concluimos que (\mathbb{M}, \circ) es un grupo. Este es el llamado **Grupo de Möbius**. \square

Para una transformación $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, tenemos que su inversa viene dada por:

$$T^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a}, \text{ donde } T(z) = w$$

Como es un grupo, tenemos que el elemento neutro, al igual que el inverso de cada transformación es único.

Proposición 2.5. El grupo (\mathbb{M}, \circ) es generado por:

- Traslaciones: $D(z) = z + b, b \in \mathbb{C}$
- Rotaciones: $R(z) = rz = ae^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}$
- Homotecias: $H(z) = kz, |k| > 0$
- Inversiones: $I(z) = \frac{1}{z}$

2.2. Rectas y circunferencias Euclidianas

En la geometría euclidiana, vemos que las traslaciones, rotaciones y homotecias transforman circunferencias en circunferencias y rectas en rectas. Además, las inversiones, según se cumplan ciertas condiciones, transforman circunferencias y rectas en circunferencias o rectas. En esta sección, demostraremos estos hechos y podremos ver como son transformados estos objetos geométricos por las transformaciones de Möbius.

Inicialmente, las rectas euclidianas se pueden caracterizar con números complejos en la forma:

$$Bz - \overline{Bz} + D = 0$$

Con $z, B, D \in \mathbb{C}$, $\Re(D) = 0$. Esta caracterización equivale a:

$$ax + by + c = 0, \quad \text{o} \quad y = mx + q$$

$a, b, c, x, y \in \mathbb{R}$, haciendo $z = x + yi$. De forma similar, las circunferencias pueden ser escritas como el conjunto de puntos $x, y \in \mathbb{R}$ tales que:

$$a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0$$

lo cual, haciendo la correspondencia $z = x + yi$ nos permite escribirlas con números complejos como:

$$Az\overline{z} + Bz - \overline{Bz} + D = 0$$

$z, A, B, D \in \mathbb{C}$, con $\Re(A) = 0 = \Re(D)$.

Estas caracterizaciones, nos permiten ver que las rectas y circunferencias euclidianas son ambas de la forma:

$$a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0$$

Si $a \neq 0$, resulta una circunferencia euclidiana, y si $a = 0$, es una recta euclidiana. Si $d \neq 0$, obtenemos una circunferencia o una recta que pasa por el origen, caso contrario si $d = 0$.

Proposición 2.6. Las traslaciones, rotaciones y homotecias transforman rectas en rectas y circunferencias en circunferencias

Nos falta ver como son transformadas las circunferencias y rectas euclidianas por las inversiones:

Proposición 2.7. Sea

$$I(z) = \frac{1}{z}$$

una inversión. Sea $a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0$ una circunferencia (recta) euclidiana. Las inversiones satisfacen:

1. Si $a \neq 0$ y $d \neq 0$, entonces es una circunferencia euclidiana que no pasa por el origen, que es aplicada en una circunferencia euclidiana que no pasa por el origen.
2. Si $a \neq 0$ y $d = 0$, tenemos una circunferencia euclidiana que pasa por el origen, cuya imagen es una recta euclidiana que no pasa por el origen.
3. Si $a = 0$ y $d \neq 0$, una recta euclidiana que no pasa por el origen tiene por imagen una circunferencia euclidiana que pasa por el origen.

4. Si $a = 0$ y $d = 0$, una recta euclidiana que pasa por el origen es enviada en una recta euclidiana que pasa por el origen.

Demostración. La demostración de esta proposición puede ser consultada en [32]. \square

Proposición 2.8. Sean $f, g : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ dos transformaciones que apliquen rectas y circunferencias euclidianas, en rectas o circunferencias euclidianas. Su composición también transforma circunferencias y rectas euclidianas, en circunferencias o rectas euclidianas

Demostración. Se sigue de 2.6 y 2.7 (Ver[32]) \square

De las últimas dos proposiciones, obtenemos un importante resultado

Proposición 2.9. Las transformaciones de Möbius envían rectas y circunferencias en rectas o circunferencias.

2.3. Ángulos Euclidianos

Otro objeto geométrico que no cambia al aplicarse una transformación de Möbius es el ángulo euclidiano determinado por dos curvas. Cuando una transformación conserva ángulos euclidianos es llamada una Transformación conforme. Por tanto hemos de comprobar si las transformaciones de Möbius son conformes. Comenzaremos con la siguiente definición:

Definición 2.2. Una curva Ψ es definida por una función diferenciable

$$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}_\infty$$

$$t \mapsto f(t) = x(t) + iy(t)$$

$[a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Como f es diferenciable, admite una derivada

$$f'(t) = x'(t) + iy'(t)$$

así

$$\Psi = \{z \in \mathbb{C}_\infty \mid z = f(t), a \leq t \leq b\}$$

Con esto también definimos el vector tangente a f en el punto $f(t)$ como el número complejo $x'(t) + iy'(t)$.

Ahora sean Ψ y Φ dos curvas definidas por las funciones f, g respectivamente que se cortan en un punto $z_0 = f(t_0) = g(t_1)$. Entonces llamaremos ángulo euclidiano entre las curvas Ψ y Φ en z_0 al ángulo formado por los vectores tangentes $f'(t_0)$ y $g'(t_1)$, con lo que obtenemos que el ángulo determinado por las curvas Ψ y Φ en el punto z_0 es:

$$\theta = \arg \frac{g'(t_1)}{f'(t_0)}$$

Si tenemos una curva f tal que $f(t_0) = \infty$, ésta es diferenciable si la curva $\frac{1}{f(t)}$ evaluada en el punto t_0 lo es. De esta forma, podemos extender nuestra noción de ángulo euclidiano entre dos curvas si éstas se intersecan en el punto del infinito.

Proposición 2.10. Las transformaciones de Möbius son conformes, es decir, preservan los ángulos euclidianos.

Demostración. Sean Ψ y Φ dos curvas definidas por las funciones f y g , que se cortan en un punto z_0 y forman un ángulo θ . Debemos comprobar que dada una transformación de Möbius T , las transformaciones $(T \circ f)(t)$ y $(T \circ g)(t)$ forman el mismo ángulo θ en el punto $T(z_0)$. Para esto, con base en la proposición 2.5, si las traslaciones, rotaciones, homotecias e inversiones conservan los ángulos euclidianos, las transformaciones de Möbius también los conservan.

- **Traslaciones:** Sea la traslación $D(z) = z + A$. Si aplicamos esta traslación a las curvas f y g , obtenemos:

$$f(t) + A \quad \text{y} \quad g(t) + A$$

Ahora, hallemos el ángulo formado por estas curvas:

$$\arg \frac{(g(t) + A)'}{(f(t) + A)'}$$

y derivando obtenemos

$$\frac{(g(t) + A)'}{(f(t) + A)'} = \frac{g'(t)}{f'(t)} = \theta$$

Por tanto, las traslaciones son conformes

- **Rotaciones y Homotecias:** Sea la transformación $G(z) = Az$ una rotación (homotecia), Aplicando esta transformación a f y g , tenemos:

$$Af(t) \quad \text{y} \quad Ag(t)$$

El ángulo determinado por estas curvas viene dado por:

$$\arg \frac{(Ag(t))'}{(Af(t))'} = \frac{Ag'(t)}{Af'(t)} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

de donde vemos que las homotecias y rotaciones conservan los ángulos euclidianos. Finalmente

- **Inversiones:** Sea la inversión $I(z) = \frac{1}{z}$, entonces:

$$\frac{I'(g(t))}{I'(f(t))} = \frac{\left(\frac{1}{g(t)}\right)'}{\left(\frac{1}{f(t)}\right)'} = \frac{\frac{-g'(t)}{g^2(t)}}{\frac{-f'(t)}{f^2(t)}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

Ya que en el punto de corte f y g tienen el mismo valor, así como f^2 y g^2 . de forma particular, si las curvas f y g se intersecan en el punto $f(t_0) = g(t_1) = \infty$, entonces por las propiedades del punto del infinito dentro de la estructura del campo complejo extendido, por inversiones evaluamos el ángulo euclidiano de la curvas $\frac{1}{f}$ y $\frac{1}{g}$ en los puntos t_0 y t_1 respectivamente, y por lo tanto tenemos que el ángulo a determinar, es aquel formado por f y g en 0. De forma similar, si éstas curvas se encuentran en 0, su valuación ante inversiones es en $z = \infty$.

Como los generadores de las transformaciones de Möbius conservan los ángulos euclidianos, éstas también lo hacen y son transformaciones conformes. □

2.4. La razón cruzada

Al aplicar una transformación de Möbius, ésta actúa de forma particular sobre ciertos puntos. Algunos de ellos son su propia imagen, algunos conservan proporciones particulares. En esta sección, estudiaremos este tipo de propiedades de estas transformaciones.

Definición 2.3. Sea $f : X \rightarrow X$ una función. Sea $x \in X$ tal que $f(x) = x$. Entonces x es llamado un punto fijo de f .

Con respecto a los puntos fijos, las transformaciones de Möbius satisfacen:

Proposición 2.11. Una Transformación de Möbius diferente de la idéntica, tiene a lo sumo dos puntos fijos

Las transformaciones de Möbius pueden ser construidas de forma que relaciones dos ternas de puntos, así:

Proposición 2.12. Dadas dos ternas de puntos z_1, z_2, z_3 y w_1, w_2, w_3 , existe una transformación de Möbius T , tal que $T(z_i) = w_i$, para $i = 1, 2, 3$.

Demostración. Dados los puntos z_1, z_2, z_3 , sea la transformación de Möbius

$$H(z) = \frac{z(z_2 - z_3) - z_1(z_2 - z_3)}{z(z_2 - z_1) - z_3(z_2 - z_1)} = \frac{z - z_1}{z - z_3} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}$$

Esta transformación aplica los puntos z_1, z_2, z_3 en los puntos $0, 1, \infty$, respectivamente. De la misma manera, definimos una transformación de Möbius $J(z)$ que aplique los puntos w_1, w_2, w_3 en los puntos $0, 1, \infty$. Así, la transformación de Möbius $T(z) = (J^{-1} \circ H)(z)$ hace corresponder a los puntos z_1, z_2, z_3 , los puntos w_1, w_2, w_3 . Esta transformación $T(z)$ es única, ya que si existiera una transformación $S(z)$, tal que $T(z_i) = S(z_i)$, entonces la transformación de Möbius $(T \circ S^{-1})(z)$ tiene tres puntos fijos, luego es la transformación identidad, lo cual prueba la unicidad de $T(z)$. \square

Definición 2.4. Sean $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}_\infty$ tales que $z_1 \neq z_2$ y $z_3 \neq z_4$. La razón:

$$[z_1, z_2; z_3, z_4] = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} \frac{z_2 - z_4}{z_3 - z_4}$$

es la llamada la Razón Cruzada de z_1, z_2, z_3 y z_4

En la proposición 2.12, vimos que la razón cruzada de 4 puntos nos permite construir una transformación de Möbius tal que asigne a tres puntos dados, una imagen elegida. Una propiedad importante de las razones cruzadas con respecto a las transformaciones de Möbius es:

Proposición 2.13. Las transformaciones de Möbius preservan las razones cruzadas, es decir, si T es una transformación de Möbius y $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}_\infty$, tales que $z_1 \neq z_2$ y $z_3 \neq z_4$, entonces:

$$[z_1, z_2; z_3, z_4] = [T(z_1), T(z_2); T(z_3), T(z_4)]$$

Demostración. Sean $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ una transformación de Möbius y $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}_\infty$ cuatro puntos tales que $z_1 \neq z_2$ y $z_3 \neq z_4$. Consideremos la razón cruzada $[T(z_1), T(z_2); T(z_3), T(z_4)]$. Entonces

$$\begin{aligned}
 [T(z_1), T(z_2); T(z_3), T(z_4)] &= \frac{\frac{az_1+b}{cz_1+d} - \frac{az_3+b}{cz_3+d}}{\frac{az_2+b}{cz_2+d} - \frac{az_4+b}{cz_4+d}} \frac{\frac{az_2+b}{cz_2+d} - \frac{az_4+b}{cz_4+d}}{\frac{az_1+b}{cz_1+d} - \frac{az_3+b}{cz_3+d}} \\
 &= \frac{(z_1 - z_3)(ad - bc)(z_2 - z_4)(ad - bc)}{(z_1 - z_2)(ad - bc)(z_3 - z_4)(ad - bc)}
 \end{aligned}$$

y ya que $ad - bc \neq 0$, obtenemos

$$[T(z_1), T(z_2); T(z_3), T(z_4)] = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} \frac{z_2 - z_4}{z_3 - z_4}$$

Con lo que tenemos que la razón cruzada es invariante a las transformaciones de Möbius. □

3. La geometría de Lobachevski a partir del grupo de Möbius

La geometría de Lobachevski fue la primera⁶ de las denominadas geometrías no euclidianas, las cuales surgieron de los infructuosos intentos por demostrar como consecuencia de los primeros cuatro postulados de Euclides, el postulado de las paralelas, o alguno de sus equivalentes, como el axioma de Playfair, que es probablemente la forma más conocida de enunciar el quinto postulado: *En un plano, dada una recta α y un punto A exterior a ella, pasa por A una única recta paralela a α .*

La hipótesis de Lobachevski parte de suponer la independencia del postulado de las paralelas respecto de los cuatro precedentes, y el contemplar la negación misma de éste como un posible quinto postulado. La negación de la unicidad de la recta paralela planteada desde Euclides (tomando el axioma de Playfair como el quinto postulado), deja como posibilidad la existencia de más de una recta (al menos dos) que contengan al punto A y que no corten a β , ó la no existencia de rectas que pasen por A y no corten a β . Estas dos suposiciones serían el punto de partida de la geometría de Lobachevski (hiperbólica) y la geometría de Riemman (esférica), respectivamente.

Para el estudio de las geometrías, como ya vimos al inicio de este artículo, Klein propuso como generalización de la geometría:

Dadas una multiplicidad y un grupo de transformaciones de esta multiplicidad, estudiar los seres al punto de vista de las propiedades que no son alteradas por las transformaciones del grupo. (Ver [15], pág 9.)

⁶Bolyai y Gauss estudiaron esta geometría y llegaron a resultados incluso anticipándose a Lobachevski. Sin embargo, fue la obra de Lobachevski: "Geometría imaginaria" en 1835, la primera en presentarse ante la comunidad matemática, lo que le valió el reconocimiento de ser el *descubridor* de esta *geometría no euclidiana*.

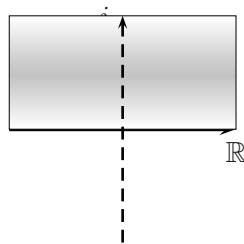
Es decir, dado un plano Ω y un grupo de transformaciones (F, \circ) , la geometría que subyace en ellos corresponde al estudio de las propiedades y objetos invariantes en el plano Ω con respecto al grupo de transformaciones (F, \circ) . Bajo este enfoque, en este capítulo presentaremos la geometría de Lobachevski. Para esto, resulta importante definir dos elementos básicos en nuestro estudio: el plano en el cual trabajaremos y el grupo de transformaciones para nuestra presentación.

3.1. Un modelo para la geometría de Lobachevski

Cuando Lobachevski estudió su geometría no euclidiana, inicialmente desarrolló un conjunto de proposiciones construidas de forma deductiva y sin caer en contradicciones. No obstante, Lobachevski mismo, al igual que varios matemáticos que le sucedieron, entendieron la necesidad de demostrar que esta geometría en sí misma era lógicamente consistente, es decir, si bien las proposiciones ya desarrolladas no eran contradictorias, es necesario probar que aquellas que se puedan seguir construyendo tampoco presentarán incompatibilidades lógicas. Para esto, varios matemáticos desarrollaron diversos modelos que permitieran estudiar más concretamente la geometría de Lobachevski. Para este desarrollo adoptaremos el *Modelo de Poincaré del semiplano superior complejo*, que fue propuesto por el célebre matemático H. Poincaré.

Definición 3.1. Sea $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ el plano complejo extendido. Consideremos $l \subseteq \mathbb{C}_\infty$ una recta euclidiana. Por tanto, $\mathbb{C}_\infty - l$ consiste de dos semiplanos separados por la recta l y ninguno de ellos la contiene. Sea \mathbb{H} uno de estos semiplanos. \mathbb{H} será considerado el plano para nuestra geometría y lo llamaremos plano hiperbólico⁷. En nuestro caso, elegiremos por l al eje real, y así:

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}_\infty \mid y > 0, \text{ para } z = x + yi\}$$



Así vemos que el plano de Lobachevski corresponde al semiplano superior euclidiano limitado por el eje real $y = 0$, adjuntándole el punto del infinito. Sin embargo, por motivos prácticos que veremos más adelante, al eje real le adjuntaremos el punto del infinito, por cuanto la recta que define el plano hiperbólico será la recta real extendida, la cual desde ahora llamaremos el borde de \mathbb{H} y la denotaremos por Σ .

Ahora, definimos la geometría de Lobachevski, como el estudio de las propiedades invariantes de las figuras - subconjuntos del plano - en el plano \mathbb{H} a través del grupo de transformaciones de Möbius, es decir, del grupo de transformaciones:

$$T : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$$

$$z \mapsto T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ y $ad - bc \neq 0$.

⁷Este plano es también llamado "Plano de Poincaré"

Es necesario que determinemos las transformaciones de Möbius T , que dado un elemento $z \in \mathbb{H}$, también $T(z) \in \mathbb{H}$, es decir que preservan el plano hiperbólico. Para esto, consideremos las transformaciones de Möbius

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

Con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $ad - bc = 1$. Aplicando esta transformación a un elemento $z = (x, y) \in \mathbb{H}$:

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{a(x, y) + b}{c(x, y) + d} = \frac{(ax + b, ay)}{(cx + d, cy)} = (ax + b, ay)(cx + d, cy)^{-1} \\ &= \left(\frac{(ax + b)(cx + d) - (ay)(-cy)}{(cx + d)^2 + (cy)^2}, \frac{(ax + b)(-cy) + (ay)(cx + d)}{(cx + d)^2 + (cy)^2} \right) \end{aligned}$$

Así, si queremos verificar que $T(z) = w \in \mathbb{H}$, debemos revisar que $\Im(w) > 0$. Entonces:

$$\Im(w) = \frac{(ax + b)(-cy) + (ay)(cx + d)}{(cx + d)^2 + (cy)^2} = \frac{(ad - bc)\Im(z)}{(cx + d)^2 + (cy)^2}$$

Y de esta forma, $\Im(w)$ depende de $\Im(z)$, y dado que $z \in \mathbb{H}$, entonces $w \in \mathbb{H}$. Estas son precisamente las transformaciones de Möbius que preservan el semiplano superior complejo.

Proposición 3.1. Sea el conjunto $\mathbb{M}^* \subseteq \mathbb{M}$:

$$\mathbb{M}^* = \left\{ f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \in \mathbb{M} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\}$$

el par (\mathbb{M}^*, \circ) es un subgrupo de (\mathbb{M}, \circ) .

Son entonces el plano hiperbólico \mathbb{H} y el grupo \mathbb{M}^* , nuestro plano y grupo de transformaciones respectivamente, con los que presentaremos la geometría de Lobachevski. Cabe anotar que, de ahora en adelante, salvo aclaraciones, cuando hablemos de transformaciones de Möbius, nos referiremos a aquellas del grupo \mathbb{M}^* al cual llamaremos grupo de Möbius, sin olvidar que este es un subgrupo del grupo de todas las transformaciones de Möbius.

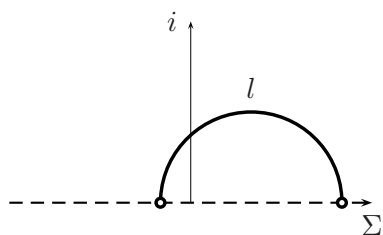
Estas transformaciones como vimos, preservan el plano hiperbólico, pero debemos comprobar que el eje real extendido, como delimitante del plano hiperbólico, también es preservado. Pero esto lo tenemos, ya que sabemos que rectas euclidianas que pasen por el origen de coordenadas son enviadas en rectas euclidianas que pasan por el origen, y ya que las transformaciones de Möbius son conformes, también es invariante la pendiente de esta recta, con lo que vemos que el eje real, es aplicado en el eje real a través de las transformaciones de Möbius⁸.

3.2. Invariantes del grupo de Möbius

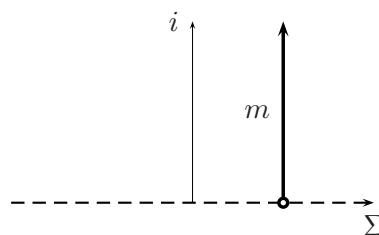
3.2.1. Rectas hiperbólicas

En el plano de Poincaré, definimos las rectas hiperbólicas como las intersecciones de \mathbb{H} con circunferencias euclidianas ortogonales al eje real, o con rectas euclidianas perpendiculares también al eje real, las cuales llamaremos rectas hiperbólicas de primer o segundo tipo, correspondientemente.

⁸Esto ocurre con toda transformación de Möbius, particularmente también con aquellas en \mathbb{M}^*



Recta hiperbólica de primer tipo



Recta hiperbólica de segundo tipo

A partir de esto, una recta hiperbólica de primer tipo es caracterizada con números complejos en la forma $Az\bar{z} + Bz + \overline{B}z + D = 0$, $A, B, D \in \mathbb{C}$, con $\Re(A) = \Re(B) = \Re(D) = 0$, $z \in \mathbb{H}$, lo cual tomando $z = (x, y)$, equivale a: $a(x^2 + y^2) + bx + d = 0$, $a, b, d \in \mathbb{R}$.

De otro lado, una recta hiperbólica de segundo tipo es escrita con números complejos de la forma: $z + \bar{z} = F$, $z \in \mathbb{H}$, $F \in \mathbb{C}$, donde $\Im(F) = 0$ y haciendo nuevamente, $z = (x, y)$ tenemos: $x = d$, $d \in \mathbb{R}$, una constante y $y > 0$.

Para el caso de las rectas hiperbólicas de segundo tipo, es claro que son semirrectas perpendiculares a Σ , con origen en el mismo. Sin embargo, revisemos la ecuación general de las rectas hiperbólicas de primer tipo. La ecuación general de una recta hiperbólica de primer tipo, es equivalente a:

$$(x - h)^2 + y^2 = r^2$$

Una circunferencia euclidiana, con centro en $(h, 0)$ sobre la recta real extendida, y de radio r , $0 < r < \infty$. Con esto, escribimos entonces la ecuación, de la forma:

$$y = \sqrt{r^2 - (x - a)^2}$$

y tomamos tan solo la raíz positiva, ya que corresponde a los puntos de intersección con el plano \mathbb{H} . Ahora, esta semicircunferencia euclidiana interseca el eje real en los puntos $(-r + a, 0)$ y $(r + a, 0)$, estos serán llamados *los extremos o los puntos finales de la recta hiperbólica*. La derivada de la ecuación de esta circunferencia euclidiana, nos permitirá entonces verificar que ésta es ortogonal al borde del plano hiperbólico. Así:

$$y' = -\frac{x - a}{\sqrt{r^2 - (x - a)^2}}$$

que evaluada en los puntos de intersección de la circunferencia euclidiana con el borde de \mathbb{H} , resulta en una indeterminación, lo cual nos permite concluir, que las tangentes a la semicircunferencia en dichos puntos, son perpendiculares al eje real, es decir, que estas circunferencias euclidianas, con centro sobre el eje real, son ortogonales a Σ en los puntos de intersección con el mismo.

Una recta hiperbólica de primer tipo la notaremos como h_1 -recta y una recta hiperbólica de segundo tipo como h_2 -recta. De forma general, una recta hiperbólica será notada como una h -recta. De forma similar, los objetos de la geometría euclidiana que utilizemos, los nombraremos con el prefijo e

Proposición 3.2. Dados dos puntos $A, B \in \mathbb{H}$, $A \neq B$, existe una única h -recta l que pasa por dichos puntos.

Demostración. Si suponemos A, B pertenecientes a una e -semirrecta perpendicular al borde de \mathbb{H} , con origen en el mismo, es decir, $A = (a, b)$ y $B = (a, c)$, $b, c > 0$ la proposición es cierta ya que pertenecen únicamente a la recta h_2 -recta: $x = a$

Supongamos ahora $A = (a, b)$ y $B = (c, d)$ dos puntos pertenecientes a una e -recta no perpendicular a Σ . La recta

$$y = mx + q$$

con

$$m = \frac{d-b}{c-a} \quad y \quad q = \frac{bc-da}{c-a}$$

es la e -recta que pasa por los puntos A y B . Ahora, el punto medio del e -segmento de extremos A y B tiene por coordenadas. Con esto, la e -mediatriz del e -segmento AB es entonces la e -recta:

$$y' = nx' + p$$

con

$$n = -\left(\frac{c-a}{d-b}\right) = \frac{a-c}{d-b} \quad y \quad p = \frac{d^2 - b^2 - a^2 + c^2}{2(d-b)}$$

Y tenemos entonces que el punto $O = (u, v)$, intersección de la e -mediatriz de AB con el borde de \mathbb{H} , es:

$$O = (u, v) = \left(\frac{d^2 - b^2 - a^2 + c^2}{2(a-c)}, 0\right)$$

Éste es el centro de la e -circunferencia ortogonal a $y = 0$ que contiene a los puntos A y B , ya que O equidista de los puntos A y B por ser un punto de la e -mediatriz del e -segmento con estos puntos como extremos. Y ya que es una e -circunferencia con centro en el eje real, sabemos es ortogonal al borde del plano \mathbb{H} , así es entonces una h_1 -recta. El radio de la e -semicircunferencia que describe la h -recta que contiene a A y B es igual a la longitud del segmento OA , es decir:

$$d_E(A, O)^9 = \sqrt{\left(a - \frac{d^2 - b^2 - a^2 + c^2}{2(a-c)}\right)^2 + (b-0)^2}$$

Finalmente, tenemos que por los puntos A y B pasa la recta hiperbólica de primer tipo:

$$\left(x - \frac{d^2 - b^2 - a^2 + c^2}{2(a-c)}\right)^2 + y^2 = \frac{(3a^2 + b^2 - 2ac - d^2 - c^2)^2 + 4(a-c)^2 b^2}{4(a-c)^2}$$

Con $y > 0$.

Esta h -recta es única, ya que si suponemos una segunda h -recta l' , por su equivalencia con una e -circunferencia, el centro O' de la e -circunferencia que determina l' equidista también de A y B , y es éste entonces un punto también de la e -mediatriz del segmento AB , pero dos e -rectas se cortan en un único punto, por tanto los puntos O y O' coinciden y ya que el radio de estas e -circunferencias es el mismo, tenemos que l y l' son la misma h -recta. \square

⁹ d_e denota la distancia euclidiana usual

Con la proposición 3.2 hemos comprobado que por dos puntos de \mathbb{H} pasa una única h -recta, y además hemos visto un algoritmo para la construcción de h -rectas, dados dos puntos de ella. Las h -rectas que hemos definido, son objetos geométricos, objetos relevantes en el estudio de la geometría de Lobachevski, puesto que estas son invariantes bajo el grupo de Möbius.

Proposición 3.3. Las h -rectas son invariantes respecto al grupo de transformaciones de Möbius.

Demostración. Esta demostración se sigue de las proposiciones 2.9 y 2.10. □

De la proposición 3.3 también concluimos que la colinealidad es una propiedad geométrica, ya que al preservarse las h -rectas con respecto a nuestro grupo de transformaciones, la colinealidad, entendida como la pertenencia de puntos a una misma recta, también es invariante.

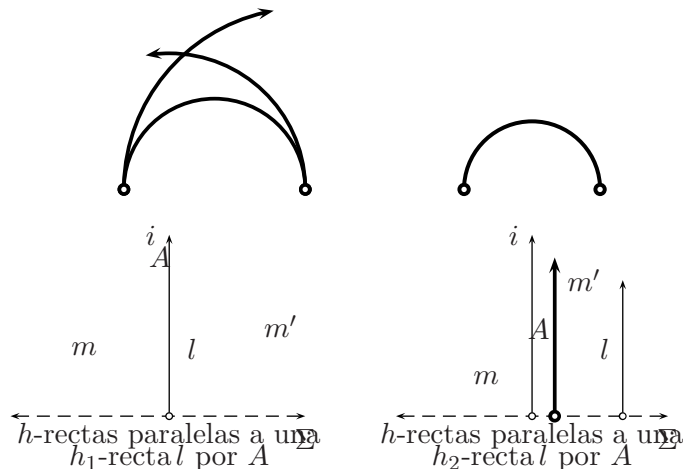
3.2.2. Paralelismo

Con respecto a las h -rectas que hemos definido, resulta de gran importancia, verificar que cumplen con el axioma de paralelismo de Lobachevski, que es justamente el que da principio a esta geometría no euclidiana.

Axioma de Lobachevski: *Existen una recta l y un punto A que no le pertenece, tales que por A pasan no menos de dos rectas que no cortan a l y están en un plano con ella.*

Este axioma equivale a decir, que dada una recta y un punto que no le pertenece, por dicho punto pasan no menos de dos rectas que no intersecan a la recta dada. Nuestras h -rectas cumplen con esta condición de paralelismo. Para esto, dada una h_1 -recta l y un punto $A \in \mathbb{H}$ exterior a ella, ya que tenemos un procedimiento para construir h -rectas de primer tipo, construyamos entonces dos h -rectas m y m' , donde cada una contiene al punto A y el otro punto que las determina es uno de los extremos de l

Ahora, ya que las h -rectas m y m' no cortan a la h -recta l en el plano \mathbb{H} , éstas son al menos dos h -rectas que pasan por el punto dado A y que cumplen el axioma de Lobachevski, que era lo que queríamos comprobar. De forma similar, podemos construir un número mayor de rectas que pasen por A y no cortan a l . De forma análoga desarrollamos esto en caso de ser l un h_2 -recta, para la cual, dos rectas que no la cortan son una h_1 -recta m construida como lo hicimos en el desarrollo anterior, y; la h_2 -recta m' que contiene al punto A .



Definición 3.2. Las h -rectas m y m' que construimos y cumplen el axioma de Lobachevski, con respecto a la h -recta l y el punto A , son llamadas las h -rectas paralelas a la h -recta l . Las demás h -rectas en \mathbb{H} a las que pertenezca A y no tengan puntos comunes con l , son llamadas h -rectas hiperparalelas a la h -recta l por A .

Proposición 3.4. Las transformaciones de Möbius aplican h -rectas paralelas en h -rectas paralelas.

Esta proposición nos permite afirmar que la relación de paralelismo es una propiedad geométrica de la geometría de Lobachevski, puesto que ésta es preservada por nuestro grupo de transformaciones.

3.2.3. Distancia hiperbólica

Consideremos A y B dos puntos de \mathbb{H} . Si A y B pertenecen a una h_1 -recta, sean P y Q los extremos de dicha h -recta, de forma tal que sobre la h -recta como e -semicircunferencia, los puntos estén dispuestos en orden consecutivo como P, A, B, Q .

De forma similar, si los puntos A y B pertenecen a una h_2 -recta, sea P el extremo de dicha h -recta, y como punto Q , segundo extremo de esta h -recta, asumimos que l corta al borde del plano también en el punto del infinito “ ∞ ”.

Definición 3.3. Sean dos puntos $A, B \in \mathbb{H}$. Sean $P, Q \in \Sigma$ los extremos de la h -recta determinada por A y B , de tal manera que estén ordenados como P, A, B, Q . Definimos la distancia hiperbólica $d_{\mathbb{H}}$ de dos puntos A, B , como:

$$d_{\mathbb{H}} : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(A, B) \mapsto \ln \left\| \left[\frac{P - B}{P - A} \frac{A - Q}{B - Q} \right] \right\|$$

La distancia hiperbólica viene dada entonces por el logaritmo natural de la razón cruzada de estos cuatro puntos, en el orden que hemos tomado en cuenta.

Proposición 3.5. La distancia hiperbólica $d_{\mathbb{H}}$ que hemos definido, cumple los axiomas de una métrica: Es definida positiva, simétrica y cumple la desigualdad triangular [30].

Demostración. Sean cuatro puntos P, A, B, Q , tales que $A, B \in \mathbb{H}$, $\{P, Q\} = \mathbb{H} \cap \Sigma$ y que se hayan dispuesto ordenadamente como hemos previsto, P, A, B, Q . La distancia $d_{\mathbb{H}}(A, B)$ es:

Definida positiva : Ya que las transformaciones de Möbius preservan las razones cruzadas (proposición 2.13), por la proposición 2.12 podemos construir una transformación de Möbius T de tal forma que:

$$T(P) = 0; \quad T(A) = 1; \quad \|T(B)\| > 1, \text{ y}; \quad T(Q) = \infty$$

Y de esta manera,

$$d_{\mathbb{H}}(A, B) = \ln \left\| \left[\frac{P - B}{P - A} \frac{A - Q}{B - Q} \right] \right\| = \ln \left\| \left[\frac{0 - T(B)}{0 - 1} \frac{1 - I}{T(B) - I} \right] \right\|$$

donde I tiende a infinito. Por esta razón, debemos hallar el límite:

$$\lim_{I \rightarrow \infty} \ln \left\| \frac{0 - T(B)}{0 - 1} \frac{1 - I}{T(B) - I} \right\| = \ln \left(\left\| \frac{0 - T(B)}{0 - 1} \right\| \lim_{I \rightarrow \infty} \left\| \frac{0 - I}{T(B) - I} \right\| \right)$$

Lo cual nos resulta en una indeterminación. Ahora, haciendo uso de la regla de l'Hôpital, obtenemos:

$$\ln \left(\lim_{I \rightarrow \infty} \left\| \frac{0 - T(B)}{0 - 1} \frac{1 - I}{T(B) - I} \right\| \right) = \ln \left\| \frac{0 - T(B)}{0 - 1} \right\| > 1$$

Y la distancia es positiva. Este tratamiento también se cumple en el caso de A, B pertenecientes a una h_2 -recta, ya que Q es el punto del infinito, por lo que el límite propuesto hace que igualmente la distancia dependa del punto B , tomando $Q = \infty$ como un punto fijo de la transformación. En el caso de las h_2 -rectas, la última igualdad resulta en una razón del tipo

$$\frac{P-B}{P-A}$$

La cual es llamada *la razón simple de tres puntos*, y se denota por $[A, B; P]$. Estas razones ya que las hemos tratado como casos particulares de razones cruzadas, vemos que también son invariantes por las transformaciones de Möbius.

Supongamos que $A = B$, tenemos:

$$d_{\mathbb{H}}(A, B) = \ln \left\| \frac{P - B}{P - A} \frac{A - Q}{B - Q} \right\| = \ln \left\| \frac{P - A}{P - A} \frac{A - Q}{A - Q} \right\| = \ln 1 = 0$$

Recíprocamente, si $d_{\mathbb{H}}(A, B) = 0$:

$$d_{\mathbb{H}}(A, B) = \ln \left\| \frac{P - B}{P - A} \frac{A - Q}{B - Q} \right\| = 0$$

entonces

$$\ln \left\| \frac{P - B}{P - A} \frac{A - Q}{B - Q} \right\| = \ln 1$$

$$\frac{P - B}{P - A} \frac{A - Q}{B - Q} = 1$$

que solo se cumple si, y sólo si $A = B$, puesto que $P \neq Q$ en todo caso. Luego, la distancia hiperbólica es definida positiva.

Simétrica : Dado que

$$[P, A; B, Q] = \left(\frac{P - B}{P - A} \frac{A - Q}{B - Q} \right) = \left(\frac{Q - A}{Q - B} \frac{B - P}{A - P} \right) = [Q, B; A, P]$$

Tenemos que $d_{\mathbb{H}}(A, B) = \ln ||[P, A; B, Q]|| = \ln ||[Q, B; A, P]|| = d_{\mathbb{H}}(B, A)$, así la distancia hiperbólica es simétrica.

Desigualdad Triangular : Sean tres puntos $A, B, C \in \mathbb{H}$, debemos demostrar que

$$d_{\mathbb{H}}(A, B) + d_{\mathbb{H}}(B, C) \geq d_{\mathbb{H}}(A, C)$$

Para esto, necesitaremos algunos elementos adicionales.

Lema 3.6. ¹⁰ Si $A, B \in \mathbb{H}$, se cumple:

1. $\cosh d_{\mathbb{H}}(A, B) = 1 + \frac{\|A - B\|^2}{2 \Im(A) \Im(B)}$
2. $d_{\mathbb{H}}(A, B) = \ln \frac{\|A - \bar{B}\| + \|A - B\|}{\|A - \bar{B}\| - \|A - B\|}$
3. $d_{\mathbb{H}}(A, B) = \ln \frac{1 + \rho}{1 - \rho}$, donde $\rho = \frac{\|B - A\|}{\|1 - \bar{A}B\|}$

Ahora, continuaremos con la demostración de la desigualdad triángular para $d_{\mathbb{H}}$.

Con base en el lema 3.6(iii.), dados tres puntos $A', B', C' \in \mathbb{H}$, los hacemos corresponder con puntos A, B, C en el círculo unitario. Debemos demostrar que:

$$d_{\mathbb{H}}(A, C) \leq d_{\mathbb{H}}(A, B) + d_{\mathbb{H}}(B, C)$$

Para esto, por medio de una transformación de Möbius, hagamos que $B = (0, 0)$ y $C = (0, 1)$. Así

$$d_{\mathbb{H}}(A, C) = \ln \frac{1 + \rho}{1 - \rho}, \quad \text{con } \rho = \frac{\|C - A\|}{\|1 - \bar{A}C\|}$$

$$d_{\mathbb{H}}(B, A) = \ln \frac{1 + \|A\|}{1 - \|A\|} \quad \text{y} \quad d_{\mathbb{H}}(B, C) = \ln \frac{1 + \|C\|}{1 - \|C\|}$$

Con base en esto

$$\begin{aligned} \frac{1 + \rho}{1 - \rho} &= \frac{(1 + \rho)^2}{1 - \rho^2} = \frac{(\|1 - \bar{A}C\| + \|C - A\|)^2}{(1 - \|C\|^2)(1 - \|A\|^2)} \\ &\leq \frac{(1 + \|A\|\|C\| + \|A\| + \|C\|)^2}{(1 - \|C\|^2)(1 - \|A\|^2)} = \left(\frac{1 + \|A\|}{1 - \|A\|}\right) \left(\frac{1 + \|C\|}{1 - \|C\|}\right) \end{aligned}$$

Y ya que la función logaritmo natural es creciente, tenemos que:

$$d_{\mathbb{H}}(A, C) \leq d_{\mathbb{H}}(A, B) + d_{\mathbb{H}}(B, C)$$

Para que se dé la igualdad, veamos que si A, B y C están sobre una misma h -recta con extremos P y Q , de forma que se encuentran ordenados como P, A, B, C y Q , por nuestra fórmula inicial para la distancia:

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}}(A, B) + d_{\mathbb{H}}(B, C) &= \ln \left\| \frac{P - B}{P - A} \frac{A - Q}{B - Q} \right\| + \ln \left\| \frac{P - C}{P - B} \frac{B - Q}{C - Q} \right\| \\ &= \ln \left\| \frac{P - C}{P - A} \frac{A - Q}{C - Q} \right\| = d_{\mathbb{H}}(A, C) \end{aligned}$$

¹⁰Para la prueba de este lema, consultar en [32] y [11]

De forma recíproca, tenemos que esta igualdad solo se cumple cuando A, B y C están sobre una misma recta, con el orden dado, lo cual termina nuestra demostración. Ya que la distancia hiperbólica es definida positiva, simétrica y cumple la desigualdad triangular, tenemos que es una métrica para nuestro plano hiperbólico. \square

Ya que la distancia hiperbólica se obtiene a partir de las razones cruzadas y éstas son conservadas por las transformaciones de Möbius (proposición 2.13), tenemos que la distancia es un objeto de nuestra geometría, por cuanto es preservado por nuestro grupo de transformaciones.

Definición 3.4. *El segmento hiperbólico AB es el conjunto de puntos C de la h -recta determinada por A y B , que verifican:*

$$d_{\mathbb{H}}(A, C) + d_{\mathbb{H}}(C, B) = d_{\mathbb{H}}(A, B)$$

ya que las transformaciones de Möbius envían h -rectas en h -rectas, y preservan las distancias, tenemos que h -segmentos (o segmentos hiperbólicos) son aplicados en h -segmentos, así los h -segmentos son objetos relevantes de nuestra geometría. Además, definimos relación de congruencia entre h -segmentos de la siguiente manera:

Definición 3.5. *Dos h -segmentos AB y CD son congruentes si, y solo si*

$$d_{\mathbb{H}}(A, B) = d_{\mathbb{H}}(C, D)$$

Y ya que los h -segmentos son preservados por las transformaciones de Möbius, al igual que las distancias entre puntos de \mathbb{H} , tenemos que la relación de congruencia que hemos definido es una propiedad geométrica. Denotamos la congruencia de dos segmentos hiperbólicos AB y CD por $AB \cong CD$

3.2.4. Ángulos

Definimos el ángulo entre dos h -rectas l y m que se intersecan en un punto A , como el ángulo euclidiano formado por éstas, como curvas euclidianas diferenciables, en analogía con la definición de ángulo euclidiano a partir de la definición 2.2, y ya que las transformaciones de Möbius son conformes, podemos concluir que preservan los ángulos en la geometría de Lobachevski, de esta manera, los ángulos como los hemos definido, son objetos relevantes de nuestra geometría.

Sean entonces dos rectas hiperbólicas l y m :

$$A(x^2 + y^2) + Bx + D = 0 \quad \text{y} \quad P(x^2 + y^2) + Qx + R = 0$$

respectivamente, con $A, B, D, P, Q, R \in \mathbb{R}$, donde si $A \neq 0$ tenemos una h_1 -recta. En caso contrario es una recta hiperbólica de segundo tipo, y de forma similar para P en la h -recta m .

Si l por ejemplo, es una h_2 -recta, l forma un ángulo igual a $\frac{\pi}{2}$ con el borde de \mathbb{H} . Para l una h_1 -recta, la podemos escribir de la forma:

$$(x - a)^2 + y^2 = r^2$$

y de esta forma: $y = \sqrt{r^2 - (x - a)^2}$, $y > 0$. Tenemos que el ángulo¹¹ ϕ que forma la h -recta con Σ viene dado por la pendiente de la e -recta tangente a la e -semicircunferencia que describe a

¹¹Ya que el ángulo de una curva hiperbólica corresponde al ángulo euclidiano de la curva euclidiana que subyace sobre la primera, no será necesario usar términos como ángulo hiperbólico o euclidiano. Tano solo nos referiremos a él como “ángulo”.

l . Así obtenemos que $\tan \theta$, la pendiente de la recta tangente a l como curva euclidiana, viene dado por:

$$y' = \frac{a - x}{\sqrt{r^2 - (x - a)^2}}$$

en un punto (p, q) de l , en particular, el ángulo θ satisface:

$$\tan \theta = y' = \frac{a - p}{\sqrt{r^2 - (p - a)^2}} = \frac{a - p}{q}$$

con estos elementos, podemos hallar el ángulo comprendido entre dos h -rectas. Así vemos también que, si escribimos la h -recta m de la forma:

$$(x - b)^2 + y^2 = s^2$$

El ángulo ϕ formado por la h -recta m con Σ en el punto (z, w) es igual a:

$$\tan \phi = \frac{b - z}{w}$$

Supongamos que las h -rectas l y m se intersecan en el punto (u, v) . El ángulo β formado por l y m es igual a:

$$\tan \beta = \tan(\phi - \theta)$$

y de esta manera

$$\tan \beta = \frac{\tan \phi - \tan \theta}{1 + \tan \phi \tan \theta} = \frac{\frac{b-u}{v} - \frac{a-u}{v}}{1 + \frac{(b-u)(a-u)}{v^2}} = \frac{(b-a)w}{v^2 + (b-u)(a-u)}$$

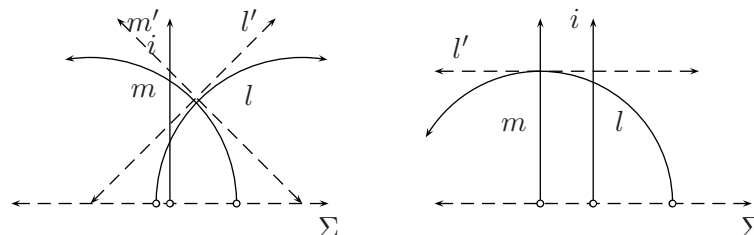
Esto en el caso de ser ambas h_1 -rectas. Si una de ellas es de primer tipo, el ángulo β que forman está dado por

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \phi$$

donde ϕ es el ángulo determinado por la h_2 -recta. Por último, si l y m son ambas h_2 -rectas y éstas son paralelas, asumimos que ambas forman un ángulo $\beta = 0$.

3.2.5. Perpendicularidad

Hemos visto entonces que los ángulos de la geometría hiperbólica corresponden a los ángulos euclidianos. Por la forma en que hemos definido el ángulo formado por una h -recta con el borde del plano, así como el ángulo comprendido entre dos h -rectas, definimos entonces h -rectas hiperbólicas perpendiculares como aquellas que comprenden un ángulo recto. Y ya que los ángulos de nuestra geometría son preservados por las transformaciones de Möbius, tenemos que la perpendicularidad es una propiedad geométrica.



Tomemos ahora una h -recta l y un punto A exterior a ella. Sea m una h -recta paralela a l por A y sea n la h -recta perpendicular a m por A . Las rectas l y m forman un ángulo igual a 0 y, l y n forman un ángulo recto. En la geometría euclidiana, el ángulo α determinado por las rectas m y n es también un ángulo recto, pero nuestras h -rectas hacen que esto no se cumpla en nuestra geometría. El ángulo α es llamado *ángulo de paralelismo*, y si notamos como B al punto de intersección de las rectas l y n , y $b = d_{\mathbb{H}}(A, B)$, obtenemos:

Proposición 3.7. Si α es el ángulo de paralelismo y b la distancia hiperbólica con respecto a las consideraciones que hemos hecho, éstos satisfacen:

1. $\cosh b \operatorname{sen} \alpha = 1$
2. $\operatorname{senh} b \tan \alpha = 1$
3. $\tanh b \sec \alpha = 1$

Demostración. Sea T una transformación de Möbius, tal que por la proposición 2.12

$$T(B) = i = (0, 1); \quad T(A) = D = (x, y), \text{ tal que } \|D - i\| = 1$$

1. Por el lema 3.6 tenemos:

$$\cosh b = 1 + \frac{\|D - i\|^2}{2 \Im(D) \Im(i)} = 1 + \frac{x^2 + (y - 1)^2}{2y} = \frac{1}{y} = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$$

y así, $\cosh b \operatorname{sen} \alpha = 1$.

2. Ya que $\cosh^2 b - \operatorname{senh}^2 b = 1$, por i, tenemos:

$$1 + \operatorname{senh}^2 b = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha}$$

Y de esta forma

$$\operatorname{senh}^2 b = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha} - 1 = \frac{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = \cot^2 \alpha$$

por lo cual

$$\operatorname{senh}^2 b (\cot^2 \alpha)^{-1} = 1$$

y así $\operatorname{senh} b \tan \alpha = 1$

3. Reemplazando en $\tanh b$ con lo obtenido en i y ii:

$$\tanh b = \frac{\operatorname{senh} b}{\cosh b} = \frac{\cot \alpha}{\sec \alpha} = \cos \alpha$$

concluimos: $\tanh b \sec \alpha = 1$

□

3.2.6. Circunferencias hiperbólicas, su longitud y área

Con base en la definición de circunferencias euclidianas, definimos una circunferencia hiperbólica, con centro en el punto $A \in \mathbb{H}$ y de radio $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ notada como $C(A, r)$:

$$C(A, r) = \{Z \in \mathbb{H} \mid d_{\mathbb{H}}(A, Z) = r\}$$

Tomemos un punto $A = (a, b)$, y con sustento en el lema 3.6 tenemos:

$$\cosh(d_{\mathbb{H}}(A, Z)) = \cosh r = 1 + \frac{\|A - Z\|^2}{2\Im(A)\Im(Z)} = 1 + \frac{(a-x)^2 + (b-y)^2}{2by}$$

de esta forma

$$b^2 \cosh^2 r = (x-a)^2 + y^2 - 2by \cosh r + b^2 \cosh^2 r + b^2$$

y

$$(x-a)^2 + (y-b \cosh r)^2 = b^2(\cosh^2 r - 1) = b^2 \sinh^2 r$$

La cual es la ecuación de una circunferencia euclidiana con centro en el punto $(a, b \cosh r)$ y de radio $b \sinh r > 0$. Con esto vemos, que una circunferencia hiperbólica corresponde a una circunferencia euclidiana, con las características que hemos dado, y de esto, concluimos que las circunferencias hiperbólicas son objetos relevantes para nuestra geometría, puesto que son igualmente circunferencias euclidianas.

Proposición 3.8. Las circunferencias hiperbólicas son invariantes por transformaciones de Möbius

Hallemos ahora la longitud de curva de una circunferencia hiperbólica. Para esto, sea $C(A, r)$ una circunferencia hiperbólica. Ésta como vimos, tomando $A = (a, b)$, puede ser escrita como

$$(x-a)^2 + (y-b \cosh r)^2 = b^2 \sinh^2 r$$

Podemos parametrizar esta ecuación, haciendo

$$\begin{aligned} x &= b \sinh r \cos \theta + a \\ y &= b \sinh r \sin \theta + b \cosh r \end{aligned}$$

resultando la función:

$$F(\theta) = b \sinh r \cos \theta + a + i(b \sinh r \sin \theta + b \cosh r)$$

con $\theta \in [-\pi, \pi]$. Apliquemos ahora una transformación de Möbius T tal que $T(A) = i = (0, 1)$ y esto no afecta nuestros cálculos, puesto que como vimos, las circunferencias hiperbólicas son preservadas por nuestro grupo de transformaciones. Así, la circunferencia es obtenida por la función:

$$F(\theta) = \sinh r \cos \theta + i \sinh r \sin \theta + i \cosh r$$

Así, nuestra función tiene como parámetros las funciones

$$f(\theta) = \sinh r \cos \theta, \quad \text{y} \quad g(\theta) = \sinh r \sin \theta + \cosh r$$

Ahora, hallamos la longitud de la circunferencia $C(A, r)$, $\lambda(C)$, haciendo uso de la fórmula:

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt$$

para funciones parametrizadas [22]. Por lo cual

$$\lambda(C) = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{[-\sinh r \sin \theta]^2 + [\sinh r \cos \theta]^2} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \sinh r d\theta = 2\pi \sinh r$$

Finalmente, ya que la expresión $2\pi \sinh r$ representa la curva que encierra el área de la circunferencia $C(A, r)$ en su recorrido desde el valor cero hasta r , podemos hacer uso de ésta para hallar el área de la circunferencia hiperbólica. Tomemos en cuenta, que el tratar esta circunferencia en particular no es impedimento para generalizar nuestros resultados, puesto que su tratamiento específico tan solo difiere en la ubicación de su centro en un lugar específico del plano hiperbólico para facilidades de cálculo, como hemos visto, ubicación que se consiguió bajo la aplicación de una de nuestras transformaciones, las cuales como vimos, dejan invariantes a las circunferencias hiperbólicas.

El área $\mathbb{A}(C)$ de una circunferencia hiperbólica $C(A, r)$, la obtenemos por:

$$\mathbb{A}(C) = \int_0^r \sinh t dt = 2\pi(\cosh r - 1)$$

La longitud de curva de la circunferencia la hallamos por medio de una forma infinitesimal de la métrica (distancia) hiperbólica, tomando como base la definición 3.3 y haciendouso del lema 3.6, y dado que la distancia hiperbólica es invariante por el grupo de Möbius, la longitud de la circunferencia también lo es, al igual que el área de la misma, que fue hallada apoyándonos en la expresión obtenida para la longitud de esta curva.

Proposición 3.9. La longitud y área de las circunferencias hiperbólicas son preservadas por las transformaciones de Möbius. Para la circunferencia hiperbólica $C(A, r)$, con $A = (a, b)$, su longitud $\lambda(C)$ y su área $\mathbb{A}(C)$ vienen dados por:

1. $\lambda(C) = 2\pi \sinh r$
2. $\mathbb{A}(C) = 2\pi(\cosh r - 1)$

3.2.7. Triángulos hiperbólicos y trigonometría hiperbólica

Definición 3.6. *Dados tres puntos $A, B, C \in \mathbb{H}$, tales que no están sobre una misma recta hiperbólica, llamamos triángulo hiperbólico o h -triángulo ABC al conjunto $\Omega \subseteq \mathbb{H}$ que resulta de la unión de los tres segmentos hiperbólicos que unen dichos puntos. Los puntos A, B y C son llamados los vértices del h -triángulo y a los segmentos que estos puntos determinan, los lados del h -triángulo.*

Para nuestros propósitos, extenderemos nuestras consideraciones acerca de los triángulos hiperbólicos permitiendo que los vértices de éstos estén sobre el borde del plano.

Proposición 3.10. Los h -triángulos son invariantes bajo las transformaciones de Möbius.

Demostración. Sean el triángulo hiperbólico ABC y T una transformación de Möbius. Por reducción al absurdo y la proposición 3.3, tenemos que si A, B y C no pertenecen a una misma recta, sus imágenes con respecto a T tampoco serán colineales. Estas transformaciones preservan los lados de este h -triángulo, por cuanto preservan la longitud de los mismos (la distancia entre los vértices) y a las h -recta que los contienen. También, por la proposición los ángulos interiores del h -triángulo ABC son invariantes. Entonces los elementos básicos de un triángulo hiperbólico se preservan a través de estas transformaciones, que era lo que queríamos demostrar. \square

Definición 3.7. Dos triángulos hiperbólicos ABC y DEF son congruentes si:

$$AB \cong DE; \quad BC \cong EF; \quad AC \cong DF$$

Y si, con $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \phi$ notamos los ángulos en los vértices A, B, C, D, E y F en su orden,

$$\alpha = \delta; \quad \beta = \epsilon; \quad \gamma = \phi$$

De esto, tenemos:

Proposición 3.11. La congruencia de h -triángulos es una propiedad geométrica.

Demostración. Esto lo obtenemos de la proposición 2.12 con las que construimos una transformación de Möbius que hace corresponder los vértices de dos triángulos congruentes, y por la proposición 3.10 vemos que la congruencia de h -triángulos es preservada. \square

3.2.8. Triángulos hiperbólicos con un ángulo recto

Tomemos un triángulo hiperbólico ABC con $A, B, C \in \mathbb{H}$ con un ángulo recto. Para unificar nuestra notación, los lados opuestos a los vértices A, B, C los llamaremos a, b y c respectivamente, al igual que los ángulos en estos vértices serán α, β , y γ . Los lados a, b y c tienen por longitud precisamente a, b y c correspondientemente. Un h -triángulo con un recto será llamado un h -triángulo rectángulo.

Proposición 3.12. Para cualquier triángulo rectángulo ABC con sus vértices en \mathbb{H} y ángulo recto en C se cumple:

$$\cosh c = \cosh a \cosh b$$

Demostración. Por medio de una transformación de Möbius T hacemos corresponder:

$$T(C) = i = (0, 1); \quad T(B) = hi = (0, h), y; \quad T(A) = (x, y)$$

Con $h > 1; x, y > 0$ y $x^2 + y^2 = 1$. Por el lema 3.6:

- $\cosh a = 1 + \frac{(h-1)^2}{2h} = \frac{h^2+1}{2h}$
- $\cosh b = 1 + \frac{x^2+(y-1)^2}{2y} = \frac{1}{y}$

$$\blacksquare \cosh c = 1 + \frac{x^2 + (y - h)^2}{2hy} = \frac{1 + h^2}{2hy}$$

y verificamos que

$$\cosh c = \cosh a \cosh b$$

finalmente por la proposición 3.11 vemos que esto es equivalente en el h -triángulo ABC , terminando la demostración. \square

Con el siguiente resultado sobre h -triángulos con un ángulo recto relacionamos la longitud de los lados del triángulo con los ángulos que comprenden, de la siguiente manera

Proposición 3.13. Para todo h -triángulo ABC , con $A, B, C \in \mathbb{H}$, y con ángulos α, β y $\frac{\pi}{2}$, se satisfacen las siguientes igualdades:

1. $\tanh b = \sinh a \tan \beta$
2. $\sinh b = \sinh c \sin \beta$
3. $\tanh a = \tanh c \cos \beta$

Esto los hemos tomado para el ángulo β en particular, pero esto lo podemos ampliar también para el ángulo α , ya que la forma en que hemos aplicado los puntos A, B, C para obtener D, E y F lo pudimos hacer igualmente de forma conveniente para analizar este último ángulo. Para el ángulo α esto corresponde a:

1. $\tanh a = \sinh b \tan \alpha$
2. $\sinh a = \sinh c \sin \alpha$
3. $\tanh b = \tanh c \cos \alpha$

Estos resultados nos permiten enunciar la siguiente proposición

Proposición 3.14. Para todo triángulo hiperbólico ABC , con $A, B, C \in \mathbb{H}$, y con ángulos α, β y $\frac{\pi}{2}$, se cumple:

1. $\cosh a \sin \beta = \cos \alpha$
2. $\cosh b \sin \alpha = \cos \beta$
3. $\cot \alpha \cot \beta = \cosh c$

Demostración. Si reemplazamos las expresiones que vimos en la proposición 3.13, como funciones trigonométricas para el ángulo α , en las aquellas que esta misma proposición da para el ángulo β , llegamos a los resultados de esta proposición. \square

Como vemos, la proposición 3.14 nos permite establecer relaciones entre un lado de un triángulo hiperbólico con un ángulo recto y los ángulos interiores no rectos adyacentes al mismo. Veamos ahora otro tipo de triángulos

3.2.9. Triángulos con un vértice en el infinito

Sea ABP un h -triángulo, en el cual $A, B \in \mathbb{H}$ y $P \in \Sigma$, el borde de \mathbb{H} . llamaremos a estos h -triángulos “ h -triángulos con un vértice en el infinito”, puesto que podemos asumir que P corresponde al punto del infinito, ya que por nuestra fórmula de la distancia tenemos que las longitudes de los lados a y b , es decir, las distancias $d_{\mathbb{H}}(A, P)$ y $d_{\mathbb{H}}(B, P)$ son iguales a ∞ y de forma particular, ya que las h -rectas que contienen a los lados a y b sólo tienen en común un punto que no pertenece a \mathbb{H} , el ángulo formado entre ellas es 0. Así, el h -triángulo ABP tiene dos ángulos α y β no nulos, un ángulo igual a 0, y sus lados a, b y c cumplen: $c \in \mathbb{R}$, $0 < c$ y $a = \infty = b$.

Para hacer más sencillos nuestros estudios sobre estos h -triángulos, con base en la proposición 2.12, por una transformación de Möbius T , hagamos:

$$T(A) = D = (x, y);, \quad T(B) = E = (w, z) \quad \text{y} \quad T(P) = \infty$$

de tal forma que $x^2 + y^2 = 1$ y $w^2 + z^2 = 1$. De esta manera, podemos establecer que $D = e^{i\theta}$ y $E = e^{i\phi}$. Con base en esto:

$$\cosh c = 1 + \frac{\|D - E\|^2}{2 \Im(D) \Im(E)} = \frac{2yz + \|D - E\|^2}{2yz} = \frac{2yz + (2 - 2(xw + yz))}{2yz}$$

ya que D y E están sobre la circunferencia de centro en el origen y de radio 1, tenemos que:

$$\cosh c = 1 + \frac{\|D - E\|^2}{2 \Im(D) \Im(E)} = \frac{2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi + (2 - 2(\cos \theta \cos \phi + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi))}{2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi}$$

y dado que $\theta = \alpha$ y $\phi = \pi - \beta$, llegamos a

$$\cosh c = \frac{1 + \cos \alpha \cos \beta}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}$$

de esta expresión para $\cosh c$, y teniendo en cuenta la identidad $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$, obtenemos:

$$\begin{aligned} \operatorname{senh} c &= \frac{\sqrt{(1 + \cos \alpha \cos \beta)^2 - \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta}}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta} \\ &= \frac{\sqrt{\operatorname{sen}^2 \alpha (1 - \operatorname{sen}^2 \beta) + \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta}}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta} \\ &= \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta} \end{aligned}$$

y tenemos expresiones trigonométricas para lado de longitud finita de nuestro h -triángulo. Así, hemos probado la siguiente proposición:

Proposición 3.15. Para todo triángulo ABP , con ángulos α, β y 0, α y β no nulos:

1. $\cosh c = \frac{1 + \cos \alpha \cos \beta}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}$
2. $\operatorname{senh} c = \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}$

3.2.10. Leyes del seno y coseno

En la geometría euclidiana tenemos las llamadas leyes de seno y coseno. En nuestra geometría de Lobachevski enunciaremos también unas leyes similares, dos leyes de cosenos y una ley de senos, que presentaremos a continuación:

Proposición 3.16 (Primera ley de Coseno). Sea ABC un h -triángulo con $A, B, C \in \mathbb{H}$, con ángulos α, β y γ y lados a, b y c , respectivamente. La primera ley de coseno establece:

$$\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos \gamma$$

Demostración. Sea l la h -recta a la que pertenece el lado c del h -triángulo ABC , es decir, la h -recta determinada por los puntos A y B , y sea m la h -recta perpendicular a l y que pasa por el punto C . l y m se intersecan en un punto D que puede estar en el interior o el exterior del h -triángulo ABC . Para ambos casos, nuestros argumentos son válidos como veremos a continuación, pero para mayor facilidad consideremos D en el interior del triángulo hiperbólico. El segmento AB satisface: $AB = AD + DC$ y esto lo notaremos para los lados de ABC como $c = c_1 + c_2$ respectivamente, al igual que los ángulos opuestos a c_1 y c_2 son γ_1 y γ_2 en su orden. Con esto, obtenemos dos triángulos hiperbólicos con un ángulo recto. Llamemos d al lado con extremos C y D . Por la proposición 3.12:

$$\cosh b = \cosh d \cosh c_1 \quad \text{y} \quad \cosh a = \cosh d \cosh c_2$$

estas igualdades validan que

$$\cosh a \cosh b = \cosh^2 d \cosh c_1 \cosh c_2$$

restamos a ambos lados de la igualdad $\cosh c$ y entonces

$$\cosh a \cosh b - \cosh c = \cosh^2 d \cosh c_1 \cosh c_2 - \cosh c$$

Retomemos ahora las identidades

- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
- $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

y obtenemos

$$\cosh a \cosh b - \cosh c = \sinh^2 d \cosh c_1 \cosh c_2 - \sinh c_1 \sinh c_2$$

Teniendo esto presente, por la proposición 3.14

$$\sinh d = \frac{\sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \gamma_1}}{\sin \gamma_1}$$

$$\sinh d = \frac{\sqrt{\cos^2 \beta - \sin^2 \gamma_2}}{\sin \gamma_2}$$

y de esta manera:

$$\begin{aligned}\sinh^2 d &= \frac{\sqrt{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \gamma_1}}{\operatorname{sen} \gamma_1} \frac{\sqrt{\cos^2 \beta - \operatorname{sen}^2 \gamma_2}}{\operatorname{sen} \gamma_2} \\ &= \frac{\sqrt{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \gamma_1} \sqrt{\cos^2 \beta - \operatorname{sen}^2 \gamma_2}}{\operatorname{sen} \gamma_1 \operatorname{sen} \gamma_2}\end{aligned}$$

Considerando los lados c_1 y c_2 de los h -triángulos rectángulos ADC y BDC como lo hicimos con el lado d compartido por ellos:

$$\begin{aligned}\sinh c_1 &= \frac{\sqrt{\cos^2 \gamma_1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}}{\operatorname{sen} \alpha} \\ \sinh c_2 &= \frac{\sqrt{\cos^2 \gamma_2 - \operatorname{sen}^2 \beta}}{\operatorname{sen} \beta}\end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned}\sinh c_1 \sinh c_2 &= \frac{\sqrt{\cos^2 \gamma_1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}}{\operatorname{sen} \alpha} \frac{\sqrt{\cos^2 \gamma_2 - \operatorname{sen}^2 \beta}}{\operatorname{sen} \beta} \\ &= \frac{\sqrt{\cos^2 \gamma_1 - \operatorname{sen}^2 \alpha} \sqrt{\cos^2 \gamma_2 - \operatorname{sen}^2 \beta}}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta} \\ \sinh c_1 \sinh c_2 &= \frac{\sqrt{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \gamma_1} \sqrt{\cos^2 \beta - \operatorname{sen}^2 \gamma_2}}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}\end{aligned}$$

utilizando las identidades $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$ y $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$, y factorizando llegamos a:

$$\begin{aligned}\cosh a \cosh b - \cosh c &= \frac{\sqrt{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \gamma_1} \sqrt{\cos^2 \beta - \operatorname{sen}^2 \gamma_2}}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma_1 \operatorname{sen} \gamma_2} (\cos \gamma_1 + \gamma_2) \\ &= \frac{\sqrt{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \gamma_1} \sqrt{\cos^2 \beta - \operatorname{sen}^2 \gamma_2}}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma_1 \operatorname{sen} \gamma_2} \cos \gamma\end{aligned}$$

Además de esto, por la identidad $\cosh^2 X - \sinh^2 X = 1$, tenemos las siguientes igualdades:

$$\sinh^2 a = \cosh^2 a - 1 \quad \text{y} \quad \sinh^2 b = \cosh^2 b - 1$$

que con la proposición 3.14 nos permiten establecer:

$$\sinh^2 a = \cot^2 \gamma_1 \cot^2 \alpha - 1 \quad \text{y} \quad \sinh^2 b = \cot^2 \gamma_2 \cot^2 \beta - 1$$

por lo cual

$$\begin{aligned}\sinh b \sinh b &= \frac{\sqrt{\cos^2 \gamma_1 \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \gamma_1 \operatorname{sen}^2 \alpha} \sqrt{\cos^2 \gamma_2 \cos^2 \beta - \operatorname{sen}^2 \gamma_2 \operatorname{sen}^2 \beta}}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma_1 \operatorname{sen} \gamma_2} \\ &= \frac{\sqrt{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \gamma_1} \sqrt{\cos^2 \beta - \operatorname{sen}^2 \gamma_2}}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma_1 \operatorname{sen} \gamma_2}\end{aligned}$$

Y de esta forma

$$\cosh a \cosh b - \cosh c = \sinh a \sinh b \cos \gamma$$

es decir

$$\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos \gamma$$

que era lo que queríamos probar. \square

Continuaremos ahora presentando la ley de seno para triángulos hiperbólicos

Proposición 3.17 (Ley de Seno). Sea ABC un h -triángulo con $A, B, C \in \mathbb{H}$, con ángulos α, β y γ y lados a, b y c , respectivamente. La ley de seno establece:

$$\frac{\sinh a}{\sin \alpha} = \frac{\sinh b}{\sin \beta} = \frac{\sinh c}{\sin \gamma}$$

Demostración. Con base en la Primera ley de cosenos (proposición 3.16 tenemos que:

$$\sin^2 \gamma = 1 - \left(\frac{\cosh a \cosh b - \cosh c}{\sinh a \sinh b} \right)^2$$

de esta manera

$$\left(\frac{\sinh c}{\sin \gamma} \right)^2 = \frac{\sinh^2 a \sinh^2 b \sinh^2 c}{(\sinh a \sinh b)^2 - (\cosh a \cosh b - \cosh c)^2}$$

y de forma análoga

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sinh a}{\sin \alpha} \right)^2 &= \frac{\sinh^2 b \sinh^2 c \sinh^2 a}{(\sinh b \sinh c)^2 - (\cosh b \cosh c - \cosh a)^2} \\ \left(\frac{\sinh b}{\sin \beta} \right)^2 &= \frac{\sinh^2 a \sinh^2 c \sinh^2 b}{(\sinh a \sinh c)^2 - (\cosh a \cosh c - \cosh b)^2} \end{aligned}$$

y esto factorizando en cada una de estas igualdades, concluimos que:

$$\frac{\sinh a}{\sin \alpha} = \frac{\sinh b}{\sin \beta} = \frac{\sinh c}{\sin \gamma}$$

\square

Finalmente, veamos la segunda ley de coseno

Proposición 3.18 (Segunda ley de coseno). Sea ABC un h -triángulo con $A, B, C \in \mathbb{H}$, con ángulos α, β y γ y lados a, b y c , respectivamente. La segunda ley de coseno establece:

$$\cosh c = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta}$$

Demostración. Para esta demostración, por la primera ley de cosenos

$$\begin{aligned}\cos \gamma &= \frac{\cosh a \cosh b - \cosh c}{\sinh a \sinh b} \\ &= \frac{1 + 2 \cosh a \cosh b \cosh c - (\cosh^2 a \cosh^2 b \cosh^2 c)}{\sinh a \sinh b}\end{aligned}$$

y de esto, vemos que la expresión

$$1 + 2 \cosh a \cosh b \cosh c - (\cosh^2 a \cosh^2 b \cosh^2 c)$$

se va a repetir en las expresiones para $\cos \alpha$ y $\cos \beta$. Tomemos ahora la expresión

$$\frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta}$$

ésta es igual a

$$\begin{aligned}\frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta} \frac{1 + 2 \cosh a \cosh b \cosh c - (\cosh^2 a \cosh^2 b \cosh^2 c)}{1 + 2 \cosh a \cosh b \cosh c - (\cosh^2 a \cosh^2 b \cosh^2 c)} &= \\ \frac{(\cosh b \cosh c - \cosh a)(\cosh c \cosh a - \cosh b) + (\cosh a \cosh b - \cosh c)(\cosh^2 c - 1)}{1 + 2 \cosh a \cosh b \cosh c - (\cosh^2 a \cosh^2 b \cosh^2 c)} &= \end{aligned}$$

Lo que es igual a $\cosh c$, que era a lo que queríamos llegar □

De la primera ley de cosenos, podemos además obtener otro resultado: Como vimos, con esta ley podemos dar una expresión para el coseno de cada ángulo de un h -triángulo, y esta es presentada en terminos de funciones hiperbólicas de los lados, y ya que los ángulos son preservados, tenemos que las magnitudes de los lados también lo harán, bajo transformaciones de Möbius. De forma recíproca, ya que las transformaciones de Möbius conservan las distancias hiperbólicas, la expresión que obtenemos de la primera ley de coseno nos permite ver que los ángulos de los h -triángulos se preservan, y con esto vemos que la congruencia de triángulos hiperbólicos queda toda en términos de los ángulos de alguno de los triángulos hiperbólicos que estemos revisando. Este criterio de congruencia lo expresamos entonces en la siguiente proposición:

Proposición 3.19 (Criterio de congruencia de triángulos hiperbólicos). Dados dos triángulos hiperbólicos, éstos son congruentes si, y solo sí sus ángulos correspondientes son iguales.

Por último, es conveniente que veamos que todas expresiones y resultados que hemos obtenido con respecto a los triángulos hiperbólicos las hemos obtenido al partir de las formulas que nos proporciona el lema 3.6, y ya que éste se basa en la distancia hiperbólica, la cual vimos es preservada por las transformaciones de Möbius, tenemos que estos desarrollos también resultan invariantes bajo nuestro grupo de transformaciones, y así las podemos generalizar para la geometría hiperbólica como objetos y propiedades geométricas.

3.2.11. Área de polígonos hiperbólicos

En analogía con la geometría euclidiana, dados un número n de puntos distintos A_n en \mathbb{H} , $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, tales que tres de ellos nunca están sobre una misma h -recta, definimos el polígono hiperbólico (h -polígono) con vértices los puntos A_n , como el conjunto de puntos Ω que resulta de la unión de los segmentos hiperbólicos con extremos en dichos puntos, tales que dos segmentos solo se intersecan en alguno de los puntos A_k y en cada punto A_k se intersecan exactamente dos segmentos hiperbólicos. Cada uno de los segmentos con extremos A_k y A_h , lo llamamos un lado del polígono hiperbólico y los ángulos que forman las h -recta que contienen a los lados, y que se encuentran en el interior del polígono hiperbólico lo llamamos un ángulo interior a éste.

Los polígonos hiperbólicos los podemos descomponer en triángulos hiperbólicos y este va a ser nuestro punto de partida para hallar el área de los polígonos hiperbólicos. Hallaremos inicialmente el área de un triángulo hiperbólico, y con base en esto, encontraremos el área de un polígono hiperbólico como la suma de las áreas de los triángulos hiperbólicos que lo componen. No obstante, debemos tener una forma de calcular el área en el plano \mathbb{H} que sea preservada por las transformaciones de Möbius, una forma infinitesimal de la métrica hiperbólica que podamos asegurar es invariante con respecto a nuestro grupo de transformaciones.

Proposición 3.20. ¹² En el plano \mathbb{H} , para todo punto $z = (x, y)$, la forma infinitesimal

$$d\mathbb{A} = \frac{4dzd\bar{z}}{(z - \bar{z})^2} = \frac{dzdy}{y^2}$$

es preservada por las transformaciones de Möbius.

Proposición 3.21. Sea Ω un h -triángulo con ángulos α, β y γ , entonces, su área \mathbb{A} es igual a:

$$\mathbb{A}(\Omega) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$$

Demostración. Sea ABC un h -triángulo con vértice B en el infinito y con un ángulo recto en su vértice C . Como ya hemos visto, por medio de una transformación de Möbius podemos asumir:

$$C = (0, 1), \quad A = (x, y), \quad \text{y} \quad B = \infty$$

Con $x^2 + y^2 = 1$. Con base en esto, y escribiendo $A = e^{i\theta}$ tenemos que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. De hecho, por las construcciones que hemos hecho en la anterior sección, sabemos que $\theta = \alpha$ y de esta manera usando la forma infinitesimal que vimos, para hallar el área, obtenemos:

$$\mathbb{A}(ABC) = \int_0^{\cos \alpha} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{dx dy}{y^2} = \int_0^{\cos \alpha} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

Lo cual cumple con nuestra proposición.

Ahora, sea ABC un triángulo hiperbólico con el vértice C en el infinito. Este triángulo hiperbólico, como vimos en la proposición 3.16 puede ser descompuesto como la suma de dos triángulos hiperbólicos con un ángulo recto. Así, tenemos que el área de este triángulo hiperbólico resulta de:

$$\mathbb{A}(ABC) = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \pi - (\alpha + \beta)$$

¹²para su prueba consultar en [32] y [31]

Finalmente, sea ABC un triángulo hiperbólico con sus tres vértices en el plano \mathbb{H} . Sea l la h -recta que contiene a A y B , y sea m la h -recta paralela a l que pasa por C . Sea entonces P el punto final de estas rectas hiperbólicas y sea ϕ el ángulo del triángulo hiperbólico CBP sobre el vértice C . El área del h -triángulo ABC es igual a la diferencia del área de los triángulos APC y CBP :

$$\begin{aligned} \mathbb{A}(ABC) &= \mathbb{A}(APC) - \mathbb{A}(CBP) \\ &= (\pi - \alpha - (\gamma + \phi)) - (\pi - (\pi - \beta) - \phi) \\ &= \pi - (\alpha + \beta + \gamma) \end{aligned}$$

Que era lo que queríamos demostrar. □

Ahora, ya que podemos descomponer un polígono hiperbólico en triángulos hiperbólicos disyuntos, enunciamos la siguiente proposición:

Proposición 3.22. Sea Ω un polígono hiperbólico de n lados y con ángulos interiores a_i , $i = 1, 2, \dots, n$. entonces su área es igual a:

$$\mathbb{A}(\Omega) = (n - 2)\pi - \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

Demostración. Podemos descomponer el polígono Ω en triángulos hiperbólicos disyuntos, con lo que obtenemos n h -triángulos de éstos, y la suma de las áreas de ellos es igual a $2\pi+$. Así, tenemos entonces que $\mathbb{A}(\Omega) = (n - 2)\pi - \sum_{i=1}^n \alpha_i$, que era lo que queríamos demostrar. □

De la proposición 3.21 podemos también encontrar a qué es igual la suma de los ángulos interiores de un triángulo hiperbólico

Proposición 3.23. La suma de los ángulos interiores de un triángulo hiperbólico es igual o menor a π .

Demostración. Consideremos un h -triángulo con un vértice en el infinito y con sus otros vértices como la intersección de rectas hiperbólicas perpendiculares. Para este caso, tenemos entonces que la suma de sus ángulos interiores es igual a π . Para los demás h -triángulos, veamos que su área es un número real $d > 0$ que resulta de:

$$d = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$$

Con lo cual, $\alpha + \beta + \gamma < \pi$, y así la suma de los ángulos interiores es menor que π . □

Los elementos de la geometría de Lobachevski que hemos presentado hasta ahora son suficientes para continuar con la construcción de objetos más complejos a partir de los triángulos y circunferencias hiperbólico, así como para la formulación y prueba de proposiciones y teoremas relativos a los objetos de esta geometría, tal como se hace con gran detalle en el libro “*Elementary Geometry in Hyperbolic Space*” de Werner Fenchel [7], así como en “*The Non-Euclidean Hyperbolic Space*” de Kelly-Matthews [14]. Estos tratamientos se hallan por fuera de los objetivos de este trabajo, cuyo objetivo era proporcionar los elementos fundamentales para desarrollar la geometría de Lobachevski, que fue precisamente lo que realizamos.

Bibliografía

- [1] N. BOURBAKI, *Éléments de Mathématique*, Livre III Topologie Générale, chapitre 1. Structures Topologiques, Editorial Hermann, 1965, cuarta, París, pág 13-174
- [2] C. BOYER, *A History of Mathematics*, Editorial John Wiley & Sons, segunda, 1989, Nueva York, 715 pág.
- [3] J. CAICEDO, *Teoría de grupos*, Pro-Offset Editorial Ltda., 2004, Bogotá D.C., 169 pág.
- [4] A. CAMPOS, *Geometría, Huellas en el Encuentro de Geometría*, V Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones, Universidad Pedagógica Nacional, 1994, Bogotá D.C., pág 1-209
- [5] N. EFIMOV, *Geometría Superior*, Editorial MIR, 1984, Moscú, Traducido al español
- [6] H. EVES, *Estudio de las Geometrías tomos I y II*, Editorial UTEHA, 1969, México D.F., 1969. 473 pág (Tomo I), 485 pág (Tomo II)
- [7] W. FENCHEL, *Elementary Geometry in Hiperbolic Space*, Editorial Walter de Gruyter, 1989, Nueva York, 225 pág. Traducido de su original en alemán por BAUER H. con la asistencia de la editorial Christian Siebeneicher de la Universität Bielefeld, Fakultät für Mathematik, Alemania
- [8] A. GIROUX, *Analyse Complexe: notes de cours*, Université de Montréal, 2004, Montreal, 92 pág. [www.dms.umontreal.ca/~giroux/documents/analyse.c00.pdf]
- [9] R. GODEMENT, *Cours d'Algebre*, Editorial Hermann, 1966, Paris, 663 pág.
- [10] R. HIDALGO, *Breve introducció a los grupos kleinianos y variedades hiperbólicas*, Universidad Técnica Federico Santamaría, 2006, Valparaíso. 49 pág. [<http://docencia.mat.utfsm.cl/~rhidalgo>]
- [11] R. HIDALGO, *Transformaciones de Möbius*, Universidad Técnica Federico Santamaría, 2006, Valparaíso. 220 pág. [<http://docencia.mat.utfsm.cl/~rhidalgo>]
- [12] C. IVORRA, *Geometría*, Universidad de Valencia, Valencia, 406 pág. [www.uv.es/~ivorra/Libros/Libros.htm]
- [13] C. IVORRA, *Geometría Algebraica*, Universidad de Valencia, Valencia, 436 pág. [www.uv.es/~ivorra/Libros/Libros.htm]
- [14] G. KELLY and G. MATTHEWS, *The Non-Euclidean Hiperbolic Plane: Its Structure and Consistency*, Editorial Springer Verlag, 1981, Nueva York, 333 pág.
- [15] F. KLEIN, *El Programa de Erlangen*, Revista del seminario de enseñanza y titulació. Colegio de ciencias y humanidades, 1985, México D.F., 74 pág. [Traducido por COCHO F. de su original en alemán, con el apoyo de la UNAM, México] [<http://valle.fciencias.unam.mx>]
- [16] J. KLEIN, *Greek mathematical thought and the origin algebra*, Dover publications, 1992, Nueva York, 360 pág.

- [17] E. LAMBRANO, *Transformaciones de Möbius y temas relacionados*, Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas, 2005, Monografía, Bogotá D.C., 25 pág., [Trabajo de Grado para optar al título de Matemático]
- [18] H. LOO-KENG, *Starting with the Unit Circle: Background to the Higher Analysis*, Editorial Springer Verlag, 1981, Nueva York, 179 pág. [Traducido del alemán por WELTIN K.]
- [19] J. LUNA and Y. ÁLVAREZ, *Félix Klein uel estudio de la geometría, XV Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones y III Encuentro de Aritmética*, junio 24, 25 y 26 de 2004 memorias publicadas en 2005, Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá D.C., pág 265-277
- [20] H. MESCHKOWSKI, *Non-Euclidean Geometry*, Editorial Academic Press, 1965, Nueva York, 102 pág. [Traducido al inglés del original *Nichteuklidische Geometrie* en alemán en 1961 por VIEWEG F. e hijo, Braunschweig, Alemania]
- [21] A. OOSTRA, *Geometría, Huellas en los Encuentros de Geometría y Aritmética*, 2005, Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá D.C., pág. 3-54
- [22] G. POLYA, *Complex Variables*, Editorial John Wiley, 1974, Nueva York, 327 pág.
- [23] P. RYAN, *Euclidean and Non-Euclidean Geometry: An Analytic Approach*, Editorial Cambridge University Press, 1999, Nueva York, 215 pág.
- [24] M. SPIVAK, *Cálculo en variedades*, Editorial Reverté S.A., 1992, Barcelona, 134 pá.
- [25] M. SPIVAK, *Cálculo infinitesimal*, Editorial Reverté S.A., 2002, México D.F., 926 pág.
- [26] Y. TAKEUSHI, *Teoría de funciones de variable compleja*, Universidad Nacional de Colombia, 1968, Bogotá D.C., 253 pág.
- [27] F. VERA, *Científicos griegos*. Tomo 1, Editorial Aguilar, 1970, Madrid
- [28] C. WEXLER, *Analytic Geometry: A vector approach*, Editorial Addison-Wesley Publishing Company, inc, 1962, Massachussets, 291 pág.
- [29] I. YAGLOOM, *A Simple Non-Euclidean Geometry and Its Physical Basis: An Elementary Account to Galilean Geometry and the Galilean Principle of Relativity*, Editorial Springer Verlag, 1979, Nueva York, 309 pág. [Traducido al inglés del original *Printsipi otnositelnosti Galileya i Neevklidova Geometriya*, Nauta, Moscú, 1969, en ruso por Abe Shenitzer con la asistencia editorial de GORDON B.]
- [30] G. RUBIANO, *Topología General*, Panamericana, formas e impresos S.A., 2002, Bogotá D.C., vi 238 pág.
- [31] C. LUQUE, L. GUAYAMBUCO and L. ESPITIA, *Introducción a las geometrías no Euclidianas*, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá D.C., 83 pág.
- [32] D. RODRÍGUEZ G., *La Geometría de Lobachevski a partir del Grupo de Möbius*, Universidad Pedagógica Nacional, Facultad de Ciencia y Tecnología, Departamento de Matemáticas, 2008, Tesis de Grado, Bogotá D.C., x, 99 pág., [Trabajo de Grado para optar al título de Licenciado en Matemáticas]