

Semiosis y lenguaje en la didáctica de las matemáticas

Olga Lucía León Y Dora Inés Calderón
Universidad Distrital Francisco José De Caldas
Grupo de Investigación Interdisciplinaria en Pedagogía
del Lenguaje y las Matemáticas-Giptym

Resumen

Este curso se sitúa en el marco de las investigaciones y de las reflexiones en el campo de la didáctica de las matemáticas. Hemos considerado dos aspectos, a nuestro juicio relevantes, que se articulan a elementos que configuran las relaciones didácticas y que serán los aspectos centrales en el desarrollo del curso:

1. El lenguaje como elemento articulador en la consideración de los procesos de elaboración, desarrollo y comunicación de conocimiento matemático en el contexto escolar.
2. Los procesos semióticos en matemáticas como uno de los problemas centrales en la consideración de los aprendizajes matemáticos.

Con base en estos dos puntos de problematización, se ofrece un curso que pretende situar la reflexión de los asistentes en el campo de la didáctica de las matemáticas y focalizando específicamente el problema de los aprendizajes matemáticos en el aula, tanto desde una perspectiva semiótica en geometría como desde una discursiva de tipo argumentativa, en este mismo campo matemático. En los apartados siguientes presentamos fundamentos teóricos generales que orientarán el curso.

Lenguaje y desarrollo de conocimiento matemático: la argumentación como práctica discursiva para la formulación de relaciones matemáticas

Desde un punto de vista del análisis del papel que juega el lenguaje en el aprendizaje matemático, vale la pena destacar los siguientes aspectos: en primer lugar, el carácter discursivo del lenguaje humano y, en él, su dimensión comunicativa y su dimensión cognitiva (Calderón, 2005) y, en segundo lugar, el reconocimiento de que el aula como espacio privilegiado para la elaboración de conocimiento escolar es, en esencia, una esfera de la comunicación socio-cultural (Bajtín, 1982). Lo anterior exige considerar, tanto las formas de producción y de comunicación del conocimiento matemático y los procesos lingüístico-discursivos relacionados con tales formas, como los aspectos relacionados con el desarrollo de la interacción en el aula (socio-culturales).

En la perspectiva anterior, y en particular cuando se requiere la formulación de una relación matemática, se exige la selección de un tipo de relación que convoque diferentes campos de la matemática escolar y precise el desarrollo de habilidades como la estimación geométrica y numérica, los procesos de medición a-numérico y numéricos, la visualización, la argumentación matemática y la demostración. De igual modo, se requieren prácticas discursivas que posibiliten la elaboración y la comunicación de la relación y el posicionamiento de los estudiantes frente a esa relación. Las siguientes características del proceso argumentativo se articulan a los procesos educativos estableciendo una relación inmediata con el ambiente escolar.



- En cuanto a su intencionalidad: "La argumentación es una actividad que siempre trata de modificar un estado de cosas preexistentes" (Perelman & Olbrechts 1989: 105). se presenta aquí un aspecto común entre el discurso epidíctico propio de la argumentación y el discurso educativo por cuanto ambos buscan crear una disposición a la acción con la finalidad de modificar un contexto.
- En cuanto a su objeto: Dos aspectos emergen como objetos fundamentales de la teoría de la argumentación en tanto que cohesionan los demás elementos que la constituyen. En primer lugar está el efecto de la adhesión determinado por el persuadir y convencer. El segundo lo constituye la interacción y fuerza de los argumentos, dos nociones vinculadas en la producción de un discurso, la primera determina la amplitud y el orden de la argumentación y la segunda la intensidad de la adhesión y los enlaces utilizados.
- En cuanto a los roles de los participantes. Orador y auditorio son los roles asignados en una argumentación. El auditorio se define como el conjunto de aquellos en quienes el orador quiere influir con su argumentación. El desarrollo de la argumentación construye una relación entre orador y auditorio que Perelman & Olbrechts denominan "el contacto intelectual". Orador y educador pretenden que la intensidad de la adhesión no se limite a la producción de resultados puramente intencionales, sino a desencadenar una acción. En la educación el rol de maestro que tiene el educador, presupone una actitud de confianza en el auditorio, razón por la cual el discurso del educador no precisa partir de tesis que admite el auditorio, para crear una disposición en los oyentes. El segundo, tiene que ver con los roles originados por los procesos de solución de problemas, el prestigio que proviene de obtener una solución que permanece inmodificable a objeciones, consolida otro tipo de educador determinado por el objeto de la argumentación, y que desplaza al maestro en su rol de educador para que eventualmente sea asumido por uno de sus estudiantes. Este segundo aspecto consolida un juego de roles propiciado por el contexto de la argumentación en la solución de problemas en la clase de matemáticas.
- En cuanto a sus métodos: "El uso de la argumentación implica que se ha renunciado a recurrir únicamente a la fuerza, que se atribuye un valor a la adhesión del interlocutor, conseguida con la ayuda de una persuasión razonada" (Perelman & Olbrechts, 1989: 106). Es decir, que el uso de la violencia es contrario a todo proceso argumentativo, como lo es a todo proceso de educación, por cuanto la educación se constituye en la forma como las sociedades forman a sus individuos para la comprensión de los fenómenos que los afectan como pueblos, siendo uno de ellos la autodestrucción de la misma cultura por factores de violencia entre sus integrantes.

Los siguientes factores de desplazamiento, demarcan un tipo de desplazamiento requerido para el desarrollo de la argumentación en matemáticas:

- El auditorio: De una argumentación dirigida a un auditorio heterogéneo a una argumentación dirigida a un auditorio universal que puede ser considerado o bien como un auditorio élite en tanto modelo o un auditorio científico en tanto asimilación voluntaria. "Un auditorio elite sólo encarna al auditorio universal para aquellos que le reconocen este papel de vanguardia y de modelo...Ciertos auditorios especializados se asimilan voluntariamente al auditorio universal como el auditorio científico. (Perelman & Olbrechts, 1989: 76).
 - El contenido de la argumentación: De una situación argumentativa referida a campos sociales o a polos externos a los mismos campos, a una situación argumentativa referida a campos científicos determinados por procesos de solución de problemas. "Se arriesga menos simplificando y deformando la situación en la cual se efectúa el proceso argumentativo al considerar que es un caso particular aunque muy importante aquel al que la prueba de la verdad o de la probabilidad
-

de una tesis puede administrarse en el interior de un campo formal, científico o técnicamente circunscrito de común acuerdo con todos los interlocutores" (Perelman & Olbrechts, 1989: 93).

- El orador: De un orador que procura crear una comunión en torno a ciertos valores a un orador que no teme a la contradicción, que erige como valor universal o verdad eterna lo que ha adquirido consistencia por la unanimidad social. "en la demostración, el orador se hace educador" (Perelman & Olbrechts, 1989:100).
- Las técnicas: De una técnica de enlace cuasilógica como la de la incompatibilidad a una técnica lógica como la contradicción o la inconsistencia.
- El tipo de argumento: De argumentos basados en la estructura de lo real a argumentos basados en las estructuras de las teorías, como el argumento demostrativo.
- El tipo de lenguaje: Del uso privilegiado de un lenguaje natural al uso de un lenguaje formal. Este es uno de los aspectos del desplazamiento que sitúa la demostración en límite de la argumentación, por cuanto en el razonamiento no formal que privilegia la lengua natural el encadenamiento no es restrictivo y deja lugares para el desacuerdo. Mientras que en el razonamiento formal que privilegia el uso de los lenguajes formales el encadenamiento es restrictivo según condiciones del sistema, se trata de eliminar la posibilidad de proposiciones contradictorias.
- El tipo de diálogo: De un diálogo erístico que tiene por objeto dominar al adversario, a un diálogo habitual cuyo fin es persuadir para determinar una acción inmediata o futura. Y de estos dos tipos de diálogo a un diálogo heurístico en el que el interlocutor es una encarnación del auditorio universal.

Por lo anterior la argumentación se convierte en una forma de organización de los procesos cognitivos de los estudiantes, los factores de desplazamiento de una argumentación no matemática a una matemática exigen el desarrollo de procesos de razonamiento. La caracterización del razonamiento, está dada por procesos que realiza el sujeto en los que, a partir de informaciones previas se intenta pasar a nuevas formas de información. Esta caracterización le confiere dos dimensiones al razonamiento: en primer lugar, el hecho de ser una forma de pensamiento determinada por un tipo de operación cognitiva especial: la inferencia. Y en segundo lugar, el estar ligado al uso de un lenguaje que lo caracteriza, como un tipo de organización discursiva. La forma como se produce una inferencia constituye lo que denominaremos un paso de razonamiento y es un aspecto local en la producción discursiva. Estos pasos de razonamiento están determinados por un género discursivo que les confiere una forma de producción y organización textual, como el género pedagógico (Martínez, 2004).

Por otra parte, como resultado de investigaciones preliminares (Calderón y León, 2000, 2001, 2003, 2005) de los procesos argumentativos de estudiantes de distintos niveles de escolaridad (últimos años de educación media y primeros de universidad), hemos consolidado una caracterización de la competencia argumentativa en geometría, como una macroestructura cognitiva conformada por:

- *Tramas conceptuales de tipo matemático*. La presencia de este componente garantiza el dominio de referentes y de procesos propios del campo geométrico y le permite al sujeto la toma de posición epistémica y epistemológica (Duval, 1999) frente al objeto de la argumentación. El sujeto puede asignar, frente al saber matemático un valor *epistémico semántico* (si tan solo asigna valores de confiabilidad a un enunciado desde su experiencia con el contenido del enunciado); un valor *epistémico teórico* (si los valores de confiabilidad son asignados desde la función del contenido en una teoría), un valor *lógico* (en tanto se consideren los criterios de consistencia propios de las teorías geométricas).
-



- *Estrategias de interpretación de textos matemáticos*, que garantizan formas de operar con el conocimiento geométrico. La objetivación de los objetos matemáticos mediante la designación, la caracterización, la categorización y la expansión discursiva (Duval, 1999), permiten comprender las macroestructuras y las microestructuras en los textos matemáticos que desarrollan el saber de geometrías como la euclidiana y, con ello, los sentidos que se expresan en estos textos para relaciones matemáticas como la pitagórica. Este dominio le permite al individuo discriminar los argumentos por el tipo de proceso matemático presente en su elaboración.
- *Producción de razonamientos deductivos*, que garantizan la producción e interpretación de formas de organización discursiva y textual bajo la estructura justificativa, en los contextos oral y escrito. Este dominio le permite al sujeto una toma de posición discursiva propia del hacer matemático.
- *Estrategias de contextualización*, que garantizan un uso adecuado y pertinente de la argumentación como forma de interacción social. Este dominio le permite al sujeto desarrollar normas de interacción argumentativas, formas de evaluación de la pertinencia argumentativa y poner en escena el discurso bajo el criterio de eficacia argumentativa.

Por otra parte, y de manera complementaria, desde el punto de vista de las interacciones argumentativas, el diálogo intersubjetivo tiene como resultado la configuración de contextos discursivos compartidos; en este caso, la práctica argumentativa dimensiona, de manera particular, la importancia de la interacción intersubjetiva para el logro de acuerdos más funcionales y más convencionales, basados en la razón práctica o en lo más conveniente, adecuado, entre otros. Complementariamente, una polifonía del lenguaje evidencia la existencia de múltiples sujetos discursivos que han contribuido e interactúan en la configuración de un campo discursivo en particular, en este caso el geométrico. La práctica de la comunicación argumentativa, reconoce, por principio, discursos hechos, autoridades discursivas y el papel que cumplen estos elementos en la conformación de argumentos más autorizados, más convincentes, que logren mayores niveles de adhesión en el auditorio.

Así pues, desde el punto de vista filosófico, la argumentación como praxis comunicativa no se reduce exclusivamente a un modo de organización discursiva, aunque sí se expresa en uno de ellos; se convierte en un tipo de postulación y de orientación socio-discursiva y cognitiva de los sujetos, que se inscribe en los géneros discursivos, fundamentalmente de tipo secundario, dado el nivel de elaboración que puede llegar a exigir. No obstante, también puede realizarse en los géneros primarios, dependiendo de la esfera de la comunicación discursiva en la que se desarrolle esta práctica discursiva y, sobre todo, atendiendo al desarrollo del lenguaje en función de los debates, la defensa de las opiniones y de la resolución de los dilemas. De esta manera, la argumentación se realiza en los contextos de comunicación discursiva, mediante la postulación de los sujetos discursivos, como sujetos de profesión o de oficio y su relación con el tema de la argumentación (es un sujeto discursivo que construye y cuestiona los significados y sentidos del tema), con el interlocutor (es un sujeto discursivo que actúa como par en el diálogo discursivo y que espera y prevé una respuesta o un nivel de adhesión de su interlocutor) y con las formas enunciativas prototípicas de la esfera de comunicación discursiva (es un sujeto discursivo que emplea el lenguaje con conciencia de sus funciones y sus efectos en la constitución del discurso).

En conclusión, "la práctica discursiva de tipo argumentativa, engendra y privilegia, con mayor vigor, los principios de relación dialógica y polifónica, en tanto que los argumentadores, inmersos en una esfera de la comunicación, asumen posiciones individuales (fuertes en relación con el objeto de la argumentación) e intersubjetivas (actitud responsiva frente al enunciatario y frente a la esfera de comunicación) y, de manera consciente, representan, de cierta forma, a los sujetos discursivos de la argumentación que coexisten en una esfera de la comunicación particular. Complementariamente, la práctica argumentativa, por naturaleza, convoca e implica discursos ajenos (en una constante

polifonía), tanto por la necesidad de construir argumentos sólidos (en diacronía y en sincronía), como por la necesidad de lograr la adhesión de los otros (con autoridad epistémica, axiológica y social" (Calderón, 2003: 54).

SEMIOSIS Y DESARROLLO DE LAS MATEMÁTICAS ESCOLARES: el razonamiento, la argumentación y la visualización, en la didáctica de la matemática

Los registros de representación semiótica y la objetivación en matemáticas

Un aspecto común en los estudios sobre la visualización en didáctica en matemáticas Fischbein (1987), Tall (1991) Presmeg (1980-1999), Arcavi (1999), Radford (1999-2008), Rubenstein y Thompson (2001), Duval (2001-2008) y De Guzmán (1996), es el estudio sobre el uso de figuras, gráficas y diagramas en la actividad matemática y en la enseñanza de la misma. Tres aspectos cognitivos se relacionan de manera natural con la visualización; el primero, tiene que ver con su función en la elaboración del conocimiento matemático tanto en el desarrollo de procesos complejos para la matemática (como las demostraciones), como en la constitución de intuiciones básicas (como la de la noción de infinito). El segundo, es la relación con la actividad sensorial que permite la aprehensión por medio de los sentidos de los objetos del mundo físico; desde esa perspectiva tenemos una forma de percepción que puede ser visual, táctil, gustativa, auditiva y olfativa, se destaca la percepción visual como una forma privilegiada para la visualización. La tercera relación se establece con el tipo de proceso semiótico que hace de la visualización una forma de representación analógica, determinada por el tipo de aprehensión de las formas simbólicas del sistema semiótico, por las relaciones de estas formas en el sistema semiótico y por su nivel de referencia al objeto matemático.

La visualización como un proceso de representación

Cassirer en 1923²³ caracteriza la representación como una función en el curso del desarrollo lingüístico que posibilita: la creación del lenguaje, la constitución de una imagen intuitiva del mundo, el conceptualizar discursivamente la realidad y el intuir la objetivamente. La representación emerge como un proceso que vincula intuición y conceptualización. Los diferentes estudios sobre representación, Duval (1993-2008), Saenz-Ludlow (1999), Radford (1999-2008), Moreno y Sacristán (1996), Rubenstein y Thompson, (2001), Godino y Batanero (1998-2008); Fischbein (1999), Guzmán (1996), además de manifestar la diversidad de usos que se da al término representación, explicitan categorías para clasificar tipos de representación y su efecto en la elaboración de conocimiento matemático.

Desde una perspectiva didáctica de la representación los aspectos que serán objeto de reflexión son: i) La relación entre el contenido de la representación y el objeto representado y ii) La forma de producción de la representación. Dos aspectos, considerados relevantes para la producción de un conocimiento matemático por cuanto ponen de manifiesto la posibilidad de constituir algo que se considere objeto matemático.

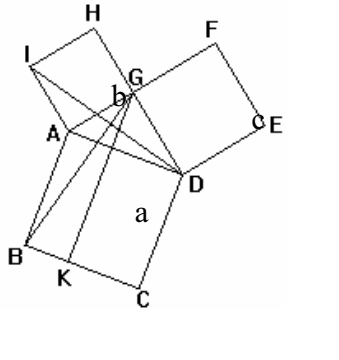
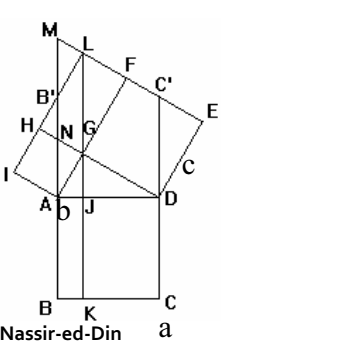
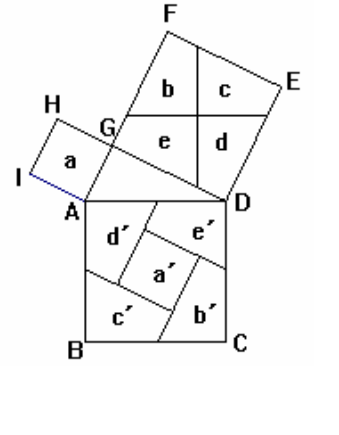
La producción de imágenes que son extensiones de percepciones se constituye en un factor que determina el nivel y el horizonte epistémico para la aplicación de las transformaciones intencionales que caracterizan la visualización. La exigencia didáctica tiene que ver entonces, con la forma de propiciar las condiciones para que "el sujeto incorpore progresivamente los sistemas semióticos constitutivos del funcionamiento cognitivo de una cultura científica y matemática. Nosotros decimos incorporar por que se trata de adquisiciones funcionales y no solamente de adquisiciones conceptuales." (Duval, 2004: 40). Tenemos entonces, dos formas de producción de imágenes, las que son efecto de la percepción (ya sea visual, auditiva, táctil, gustativa u olfativa), que desarrollan

²³ Su libro filosofía de las formas simbólicas tomo III, fue publicado en Alemán en 1923-29, la traducción al Español es de 1976.



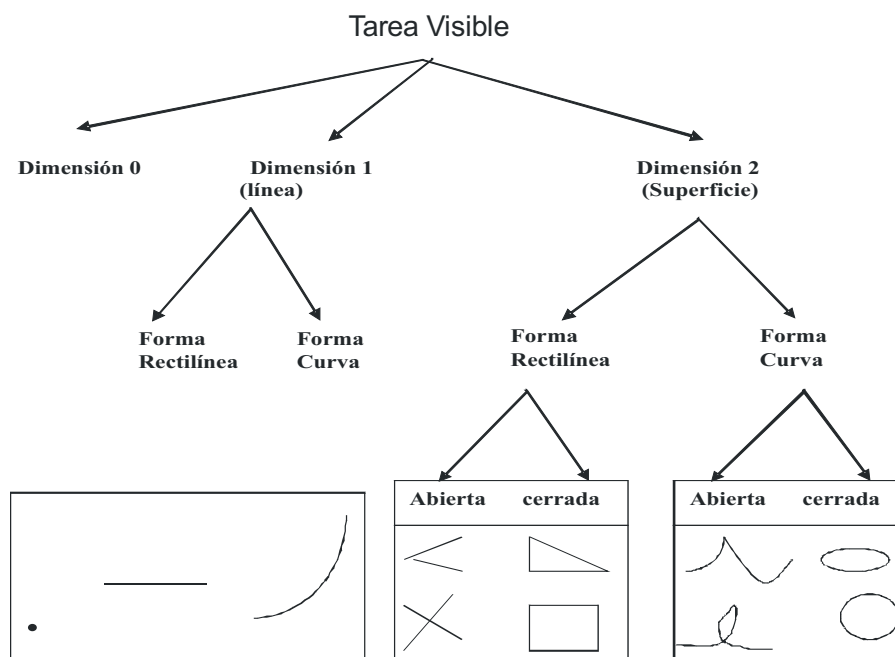
una semiosis interpretativa que privilegia la relación tipo 1 con el objeto, y las que son efecto de una visualización que la llamaremos semiosis proyectiva, que para el caso de las matemáticas sitúa la representación en la relación tipo 3 con el objeto.

La visualización como forma de representación semiótica requiere de reglas que orienten la combinación de signos de manera que el producto de representación obtenido tenga sentido, esas posibilidades de combinación de los sistemas de representación semióticos le confieren la potencia inventiva al sistema y el potencial heurístico a la visualización. En la siguiente tabla se ilustra el valor de un tratamiento figural en la consolidación de un proceso demostrativo.

Reconfiguración efectuada	Aspectos que inciden para la operación de reconfiguración requerida,
 <p>Euclides</p>	<p>Fraccionar la figura en partes no dadas en la figura de partida y que se deben hacer perceptibles.</p> <p>Hacer las siguientes sustituciones:</p> <ul style="list-style-type: none"> - El triángulo IAD por $\frac{1}{2}$ de b - El triángulo GAB por el triángulo IAD - El triángulo GAB por $\frac{1}{2}$ de b - La $\frac{1}{2}$ del rectángulo AK por el triángulo GAB. - La $\frac{1}{2}$ del rectángulo AK por $\frac{1}{2}$ de b - La sustitución del rectángulo AK por b <p>Hacer las sustituciones correspondientes con los triángulos AED y GDC.</p> <p>El contorno no incide en las operaciones de reconfiguración.</p> <p>Los reagrupamientos pertinentes de las partes elementales forman subfiguras convexas.</p> <p>Tratamiento auxiliar necesario: 5 trazos adicionales</p>
 <p>Nassir-ed-Din</p>	<p>Fraccionar la figura en partes no dadas en la figura de partida y que se deben hacer perceptibles.</p> <p>Hacer las siguientes sustituciones:</p> <ul style="list-style-type: none"> - b por el paralelogramo GAB'L - El paralelogramo GAB'L por el rectángulo AK. - el cuadrado b por el rectángulo AK. - c por el paralelogramo GDC'L - El paralelogramo GDC'L por el rectángulo DK. - el cuadrado C por el rectángulo DK. <p>El contorno no incide en las operaciones de reconfiguración.</p> <p>Los reagrupamientos pertinentes de las partes elementales forman subfiguras convexas.</p> <p>Tratamiento auxiliar necesario: 6 trazos adicionales</p>
	<p>Fraccionar la figura en partes no dadas en la figura de partida y que se deben hacer perceptibles.</p> <p>Hacer las siguientes modificaciones posicionales:</p> <p>pieza a: una traslación de vector AD \Rightarrow una traslación de vector AB \Rightarrow</p> <p>pieza b: una traslación de vector AB \Rightarrow una traslación de vector BC \Rightarrow</p> <p>pieza c: una traslación de vector AB \Rightarrow una traslación de vector CB \Rightarrow</p> <p>pieza d: una traslación de vector DA \Rightarrow una traslación de vector AB \Rightarrow</p> <p>pieza e: una traslación de vector AB \Rightarrow una traslación de vector AD \Rightarrow</p> <p>El contorno no incide en las operaciones de reconfiguración.</p> <p>Los reagrupamientos pertinentes de las partes elementales forman subfiguras convexas.</p> <p>Tratamiento auxiliar necesario: 6 trazos adicionales</p>

Las diferentes maneras de utilizar un sistema semiótico constituye lo que se denomina un registro de representación semiótica, a diferencia de la representación semiótica, el registro de representación semiótica involucra las posibilidades de transformar una representación semiótica en otra representación semiótica de manera que en el ejemplo anterior tenemos dos tipos de registros para la situación: el discursivo, y el figural. Esa necesidad de varios registros de representación para la comprensión de una situación desde una punto de vista matemático consolida otro reto didáctico, pues emergen preguntas como: Para cada registro usado; ¿qué operaciones se privilegian?, ¿qué cambios entre registros son necesarios?, ¿son ellos evidentes? Si además se tiene en cuenta la importancia de la visualización en el desarrollo de la intuición y de la acción matemática, (destacada anteriormente) emerge un foco de atención muy especial en didáctica desde la perspectiva de las representaciones semióticas, por cuanto hay diferentes registros para las representaciones no analógicas, como las discursivas, pero también hay diferentes registros de representación para las analógicas, como el registro figural, que son los sistemas que propician la visualización.

En estos términos, la figura representa una situación geométrica "si la significación de ciertas unidades figurales y de algunas de sus relaciones están explícitamente fijadas de entrada" (Duval, 1999:159). La figura geométrica queda caracterizada o bien, con una sola unidad en el caso de las formas de dimensión 0 o 1 como los puntos, los segmentos y los arcos de curva, o como una configuración de al menos, dos unidades elementales para el caso de las formas de dimensión 2 así, un cuadrado sólo es considerado como figura matemática si se asume como una configuración de unidades de dimensión 1 (segmentos que forman lados), debido precisamente a que son las relaciones entre las unidades elementales (paralelismo, tangencia..), las que dan el contenido a la figura geométrica. Mientras que la percepción se centra automáticamente en las unidades figurales de dimensión 2, el tratamiento matemático de la situación representada requiere una restricción a unidades de dimensión 1 ó 0. En las investigaciones de Kubler – Weber (citados por (Duval, 1999:152), se señala que un punto se designa como tal cuando es percibido aislado de otras unidades figurales. Al contrario, no es identificado como punto sino como cruce o como corte cuando su discriminación resulta de la incidencia de las otras unidades (corte de rectas)





A S O C O L M E

ASOCIACION COLOMBIANA DE MATEMATICA EDUCATIVA

Gráfico 2.11. Esquema de unidades figurales (Duval,1999:120)

A la anterior clasificación agregamos la unidad figural: ángulo T a la forma rectilínea abierta:

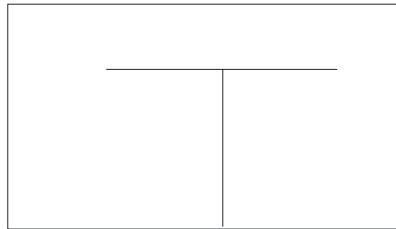


Gráfico 2.12. Unidad figural adicional

Particularmente, en el caso de los alumnos, se ha observado que evitan al máximo transformar una unidad figural de dimensión 2 en una configuración de unidades figurales de dimensión 1 ó 0. La confrontación entre las necesidades de cambio de dimensión para el tratamiento matemático y la renuencia a la transformación dimensional en los estudiantes, se constituye en la complejidad mayor a superar en el aprendizaje de la geometría.

1. FACTORES QUE MARCAN EL DERROTERO EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

Se identifican tres tipos de aprehensión para las figuras en un proceso geométrico, con sus correspondientes tratamientos figurales. Un tratamiento es una transformación de la representación al interior de un registro, los tratamientos figurales serán transformaciones posibles al interior del registro de las figuras.

- *La aprehensión perceptual:* Es la aprehensión que captura la figura en un primer vistazo y que permite a continuación reconocer sub-figuras que necesariamente no coinciden con las unidades figurales requeridas para la construcción de la figura. El tratamiento cognitivo es inconsciente e inmediato y la figura percibida puede ser diferente de la figura relevante para el tratamiento matemático. Su función epistemológica es la identificación de formas en un espacio n-dimensional, en el caso de la escuela básica será la identificación de formas en tres dimensiones o en dos dimensiones.
- *La aprehensión operatoria.* Es la aprehensión de una figura en sus diferentes modificaciones posibles. Los tratamientos asociados a este tipo de aprehensión son. 1) *Las modificaciones mereológicas*, que consisten en partir una figura para reconfigurarla en otra figura. 2) Las modificaciones ópticas de ampliación o de reducción o de deformación de la figura y 3) Las modificaciones posicionales de desplazamiento o de giro. Estas modificaciones son efectuadas al interior del registro figural, siguiendo sólo las leyes y parámetros de organización de los elementos de la figura y por lo tanto no requieren del conocimiento matemático, requiere del uso de algún instrumento de construcción.

El papel fundamental que tiene este tipo de aprehensión de la figura en el campo de la geometría la enuncia Duval (1999): "Para un problema determinado y para una figura de partida sea ella dada en el enunciado del problema, o construida a partir del enunciado del problema, existe generalmente una modificación figural posible que muestra la idea de la solución o de la demostración. Esa es la modificación figural heurísticamente pertinente". La función epistemológica de este tipo de aprehensión es precisamente la exploración heurística. El mayor inconveniente para la búsqueda de una solución es que la modificación figural heurísticamente pertinente, no es siempre inmediatamente visible.

- *La aprehensión discursiva.* Las propiedades matemáticas no son determinadas por constataciones visuales, son dadas por enunciación de relaciones que se abstraen de otro tipo de experiencia con la figura: la llamada *experiencia figural en geometría*, que esta determinada por la aprehensión de la figura desde un marco teórico geométrico, es decir por indicaciones discursivas que permiten explicitar otras propiedades a partir del uso de definiciones, axiomas y teoremas y por las experiencias con las figuras que permite ese tejido teórico. El tratamiento cognitivo correspondiente es el razonamiento deductivo y la función epistemológica es la demostración, los ejercicios elementales de aplicación de teoremas o de definiciones, requieren fundamentalmente de este tipo de aprehensión.

Las aprehensiones perceptual y operatoria difieren de la discursiva en que no están subordinadas a la movilización de teoremas o de definiciones, y a las condiciones de aplicación de tales teoremas o definiciones en la situación dada. Pero si están subordinadas a leyes y parámetros que determinan la organización de las figuras. Estos tres tipos de aprehensión determinan también una experiencia con la figura, y conforman métodos de trabajo con lo geométrico que son el efecto de la relación visualización –razonamiento en geometría, de ahí que se hable de métodos visuales, sí el predominio se da a partir de las aprehensiones perceptuales y operatorias; y métodos deductivos, sí se privilegia la aprehensión discursiva.

La visualización en geometría implica, por lo menos, uno de los siguientes cambios: el cambio dimensional, el cambio figural (aprehensión operatoria) y el cambio que asegura la figura a una representación de un determinado objeto matemático (cambios de anclaje- aprehensión discursiva). El cambio dimensional comprende las posibilidades de representar en dos dimensiones aspectos de un cuerpo en tres dimensiones, o de ver figuras de dos dimensiones como configuraciones de unidades de 1 ó 0 dimensiones.

El cambio dimensional y el cambio de anclaje son característicos de una forma matemática de ver una configuración, mientras que el cambio figural o la aprehensión operatoria concierne a procesos figurales específicos que se relacionan con transformaciones de la organización visual de la configuración. A diferencia del cambio figural, el cambio de ancla requiere una transformación de la representación de la situación dada en un registro, en una representación de la misma situación en otro registro. Es decir, se precisa la realización de una conversión de registros, por ejemplo una ilustración es una correspondencia de una expresión en lenguaje natural, con una figura o con uno de sus elementos, mientras que una descripción o una interpretación estaría realizando una conversión del registro figural al registro discursivo.

El desarrollo de la geometría plana, requiere de esa primera experiencia con la figura, que cognitivamente compromete la participación de las aprehensiones perceptuales y operatorias como elementos fundamentales para la entrada matemática y de la discursiva como componente básico para el desarrollo matemático de la situación. Este último aspecto es que el que nos permite considerar el papel de la figura en el desarrollo del conocimiento geométrico. Desde un punto de vista epistemológico es necesario identificar una experiencia figural que subyace a la trama argumentativa de la construcción geométrica. El libro primero de la obra euclidiana, se convierte en nuestra fuente de reflexión por cuanto en él hay evidencia de dos formas de razonamiento relacionadas con la figura, básicas en la estructura demostrativa.

Metodología del curso

Desde el punto de vista metodológico, la propuesta del curso es la combinatoria de una reflexión teórica con aplicaciones y/o análisis de aplicaciones al aula. Para ello se ofrece un conjunto de lecturas y se solicitará el aporte de los participantes en cuanto a propuestas de trabajo en el aula.



A S O C O L M E

ASOCIACION COLOMBIANA DE MATEMATICA EDUCATIVA

Bibliografía

- ARISTÓTELES, (1999). Retórica. (Introducción y notas de Quintín Racionero). Madrid: Gredos. 626 págs.
- CALDERÓN, Dora Inés. (2005). Dimensión cognitiva y comunicativa de la argumentación en matemáticas. Tesis Doctoral. Cali: Universidad del Valle.
- CHEVALLARD, Y (1982). *Sur l'ingénierie didactique*. Texte prépare pour la douxieme Ecole D'ete de Didactique des Mathematiques. Orleáns Juillet 1982.
- DUVAL, Raymond. (1999). Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. (Traducción de Miryam Vega). Cali: Universidad del Valle.
- DUVAL, R. (1999b). Representation, vision and visualization:cognitive functions in mathematical thinking, basic issues for learning. In: Proceedings of the Twenty First Annual Meeting North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Ohio: Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education Columbus, OH. Vol 1, 55-80.
- DUVAL, R. (2004). Los problemas fundamentals en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo. Cali: Universidad del Valle.
- EUCLIDES. (1991) Elementos I-IV. Madrid: Gredos
- GÓMEZ, Adolfo León (1991) El primado de la razón práctica. Cali: Universidad del Valle.
- _____ (1999) Teoría de la argumentación. Cali: Adolfo León Gómez.
- LEON, O. (2005). Experiencia figural y procesos semánticos para la argumentación en geometría. Tesis Doctoral Doctorado en Educación. Universidad del Valle.
- PERELMAN, Chäim y OLBRECHTS-TYTECA, Lucien. (1989). Tratado de la Argumentación. Madrid: Gredos.
-