

*UNA ACTIVIDAD MATEMÁTICA
ORGANIZADA EN EL MARCO DE LOS
MODELOS TEÓRICOS LOCALES:
RAZÓN Y PROPORCIÓN EN LA
ESCUELA PRIMARIA*

Alejandro Fernández Lajusticia y Luis Puig Espinosa,
Universitat de València

RESUMEN:

El trabajo que presentamos como ejemplo de una actividad matemática organizada en el marco de los Modelos Teóricos Locales versa sobre la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad en los cuatro últimos cursos de la Escuela Primaria, así como de las actuaciones que tienen alumnos de esos cursos al resolver tareas en las que están involucrados dichos conceptos. En este artículo hablaremos, de forma breve, sobre los Modelos Teóricos

Locales y desarrollaremos un amplio panorama de la investigación, a partir de un esquema general.

ABSTRACT:

The work we present here is an example of a mathematical activity organized by Local Theoretical Models. The research deals with the teaching and learning of the concepts of ratio, proportion and proportionality at the primary School level (grades 3d to 6th), and student's performances when solving tasks where such concepts are involved. A brief account is also presented of Local Theoretical Models as a methodological and theoretical framework for research in Mathematics Education, and we will try to develop a wide survey of this research, based on the general scheme of this type of research.

1. Modelos teóricos locales

Entendemos que la didáctica de la matemática es una actividad matemática que no puede quedarse en un proyecto de estudio sobre los problemas de enseñanza y aprendizaje de la matemática, sino que en ella hemos de considerar también el saber matemático que aprendices y enseñantes desarrollan conjuntamente, así como el uso de los sistemas matemáticos de signos que se utilizan en el intercambio de mensajes –entre aprendices y enseñantes. Esta consideración nos lleva a la necesidad de modelizar el estudio sobre fenómenos didácticos locales para someterlos a experimentación y poder desarrollar situaciones de enseñanza, tanto dentro del laboratorio como en el aula.

En este sentido utilizamos el marco teórico y metodológico que, para la observación experimental en didáctica de la matemática, Eugenio Filloy denominó Modelos Teóricos Locales. Dicho marco responde a un estilo de investigación que él inició hace ya años y cuya descripción más detallada puede encontrarse en Filloy y cols. (1999). Los estudios de este estilo parten de una toma de partido teórica por no utilizar teorías generales de la enseñanza, el aprendizaje o la comunicación; por el contrario, se trata de elaborar modelos teóricos locales para dar cuenta de los procesos que se desarrollan cuando se enseña en el sistema educativo

unos contenidos matemáticos concretos a unos alumnos concretos, y sólo se pretende que esos modelos sean adecuados para los fenómenos objetos de estudio.

Entonces para poder observar experimentalmente los fenómenos que aparecen alrededor de una problemática concreta –en nuestro ejemplo la enseñanza y el aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad en la escuela primaria– hay que tener un marco teórico que nos permita interpretar tales fenómenos y proponer nuevas observaciones que pongan en evidencia las relaciones que hay entre los distintos componentes que entran en juego. Ahora bien, aunque el ámbito de validez de los modelos no se pretende que vaya más allá de los fenómenos observados, la descripción de los fenómenos que el modelo procura es profunda, compleja y minuciosa, y, para ello, es preciso que los modelos teóricos locales contemplen cuatro componentes interrelacionados:

- 1) El componente de competencia del Modelo Teórico Local o, de forma abreviada, el Modelo de competencia (formal, si es el caso).
- 2) El componente de actuación del Modelo Teórico Local o Modelo de actuación (que, si hacemos la hipótesis de que las actuaciones las podemos describir en términos de procesos cognitivos, podemos denominar Modelo de cognición).
- 3) El componente de enseñanza del Modelo Teórico Local, o, Modelo de enseñanza.
- 4) Finalmente, el componente de comunicación del Modelo Teórico Local o Modelo de comunicación.

Para nuestro caso, hemos de observar simultáneamente en la investigación los procesos de pensamiento de los alumnos en sus actuaciones al resolver tareas de razón y proporción (componente de actuación), el intercambio de mensajes (su decodificación y emisión) en relación con dichas tareas (componente de comunicación), y el uso de los lenguajes empleados para el diseño de los textos matemáticos o

secuencias didácticas –enunciados y respuestas– pertinentes para el proceso enseñanza/aprendizaje (componente de enseñanza).

Además para que al menos el observador/investigador disponga de un componente formal que le permita reseñar las situaciones observadas y descodificar los mensajes que se producen en el intercambio de mensajes (alumnos en el cuestionario y alumnos–investigador en las entrevistas clínicas), hemos desarrollado en el trabajo un estudio de pura fenomenología (en el sentido de Freudenthal, 1983) de los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad.

2. El esquema general de la investigación

Ya hemos dicho que la elaboración de modelos teóricos locales nos proporciona un marco teórico y metodológico de la investigación. Desde el punto de vista teórico caracteriza el tipo de investigación, su alcance y su fundamento (ver Filloy y cols., 1999, para una discusión detallada de este aspecto). Desde el punto de vista metodológico, la noción de Modelo Teórico Local conlleva una determinada manera de organizar la investigación que es coherente con ella. Las distintas etapas del trabajo de investigación pueden observarse conjuntamente mediante el diagrama de flujo de la figura 1.

Una característica del diagrama de una investigación organizada por la idea de la elaboración de Modelos Teóricos Locales es que aquel es recurrente. Partiendo del cuadro de la problemática, el diagrama comienza con la elaboración de un Modelo Teórico Local y termina con la expresión de los resultados de la investigación en términos de los componentes del Modelo Teórico Local inicial y, por tanto, con la elaboración de un nuevo Modelo Teórico Local, que, por tanto, está listo para ser el comienzo de una nueva investigación.

ESQUEMA DEL DISEÑO Y DESARROLLO DE LA EXPERIMENTACIÓN

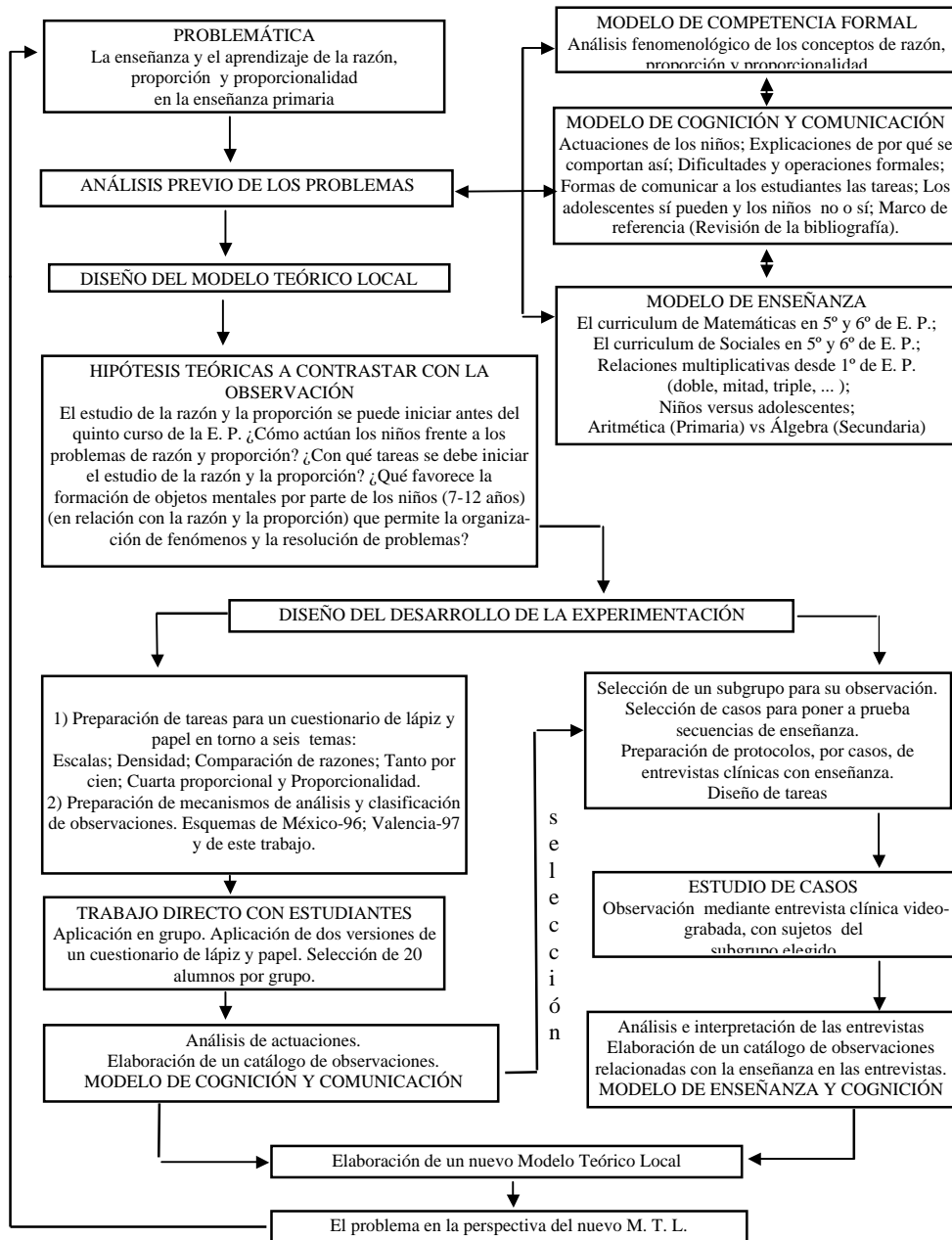


Figura 1

A continuación, siguiendo el diagrama, desarrollaremos las distintas etapas del trabajo, lo cual proporcionará al lector una visión general de la investigación.

3. El modelo teórico local inicial

Para ubicar la problemática de la enseñanza de la razón y la proporción en la enseñanza primaria nos fijamos en dos de los diseños curriculares que en el momento de realización del trabajo de investigación estaban vigentes en el estado español: el de la Generalitat Valenciana (1990) y el del Ministerio de Educación y Ciencia (MEC, 1989) para los territorios que en el momento de su redacción no tenían competencias plenas en materia de educación.

Para elaborar cada uno de los componentes del Modelo Teórico Local inicial con el cual se analiza la problemática, las fuentes son distintas.

El componente de competencia formal lo elaboramos mediante un análisis fenomenológico de los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad. El punto de partida es el análisis fenomenológico que Freudenthal (1983) hace en el capítulo sexto sobre razón y proporcionalidad, enriquecido con las aportaciones de uno de nosotros (Puig, 1997) a dicho análisis fenomenológico y de Vergnaud en su trabajo sobre estructuras multiplicativas de (1983), especialmente con los esquemas que en él desarrolla. En este análisis fenomenológico desarrollamos una modelización matemática de las distintas clases de problemas en los que interviene la razón (exposiciones, composiciones y constructos, en terminología de Freudenthal, 1983) mediante esquemas funcionales. Esta modelización nos permite decidir sobre la mayor o menor complejidad de cada uno de ellos y, por tanto, de la mayor o menor dificultad que esperamos que tengan los alumnos al resolverlos, a los efectos de la elaboración de secuencias didácticas. Es plausible suponer que los problemas de exposiciones sean los más sencillos y los de constructos los más complejos (ver el capítulo primero de Fernández, 2001 o el trabajo de Fernández y Puig, 2002).

En este análisis fenomenológico identificamos como precursores de los conceptos de razón y proporción los siguientes:

- Las comparaciones cualitativas, como precursores de las comparaciones cuantitativas.
- La normalización o tipificación, a través del uso de expresiones como: “por cada” o “de cada”, o de la unificación de referentes, que permite a los alumnos la percepción de algunas razones y favorece la comparación de éstas.
- La relativización de las comparaciones, a través del uso de expresiones como: “relativamente...”, “en relación con”, “con respecto a” y “si se compara con”.
- La visualización de algunas situaciones, mediante el cambio de representación, que favorece la comprensión de las razones involucradas en ellas y, por tanto, su utilización o su comparación.

Básicamente los componentes de cognición y comunicación del MTL que intervienen en el análisis están fundamentados en un marco de referencia que se elabora mediante una revisión de la bibliografía sobre el tema. Dicha revisión, organizada atendiendo a tres aspectos –los problemas, las actuaciones de los alumnos y las variables que afectan a las actuaciones de los alumnos–, nos permitió tener una descripción y una explicación de las actuaciones esperadas de los alumnos al resolver tareas en las que esté involucrada la razón.

La parte del componente de comunicación en este MTL inicial se ciñe únicamente a la forma en la que se presentan a los alumnos las tareas.

El componente de enseñanza está presente de dos maneras. Por un lado, tomamos en cuenta los dos diseños curriculares citados anteriormente (no sólo en el área de Matemáticas) en la parte de la enseñanza obligatoria que corresponde a la primaria y primer ciclo de la secundaria –alumnos de 6 a 14 años– y los libros de texto de primaria –área de matemáticas y área de sociales– de las dos editoriales más

usadas en los colegios donde se realizó parte de la experimentación. Esto nos proporcionó un conocimiento de la enseñanza pretendida por las intenciones curriculares, que tuvimos en cuenta en el estudio de las actuaciones de grupos de alumnos del sistema. Por otro lado, la interrelación con el componente formal (el análisis fenomenológico) nos permitió hacer hipótesis sobre determinados objetos mentales precursores en la constitución de los objetos mentales de razón, proporción y proporcionalidad, lo que nos condujo al diseño de secuencias de enseñanza en las que estos precursores eran el objeto central. Estas secuencias de enseñanza fueron las que utilizamos posteriormente en una parte de la fase experimental de la investigación: el estudio de casos.

4. Hipótesis teóricas que hay que contrastar con la observación

Con el análisis de la problemática a través del Modelo Teórico Local considerado anteriormente, desde cada uno de los componentes y con sus interrelaciones, en el trabajo se propone una hipótesis teórica que hay que contrastar con las observaciones empíricas que se realicen en la experimentación.

La hipótesis es la siguiente: *El estudio de la razón, la proporción y la proporcionalidad se puede iniciar en los primeros niveles de la enseñanza primaria.*

Para contrastar empíricamente esta hipótesis es necesario:

Identificar las tareas con las que se debe iniciar el estudio de la razón, la proporción y la proporcionalidad.

Identificar cómo actúan los niños al enfrentarse con problemas de razón y proporción.

Identificar aquello que favorece la formación de objetos mentales por parte de los niños (8-12 años), relacionados con los conceptos de razón y proporción, que permite la organización de los fenómenos y la resolución de problemas en los que están involucrados estos conceptos.

5. Desarrollo de la experimentación

El desarrollo de la experimentación tiene dos partes, que en el diagrama están en dos columnas: la columna de la izquierda describe el estudio de grupos de alumnos en su ambiente natural de la escuela y la columna de la derecha el estudio de casos seleccionados.

La fase experimental desarrollada en el trabajo se llevó a cabo a través de las siguientes etapas:

- la elaboración y aplicación de un cuestionario de lápiz y papel;
- el análisis de las actuaciones de los alumnos que completan el cuestionario;
- la selección de un subgrupo de alumnos para su observación mediante entrevistas clínicas con enseñanza;
- la preparación de protocolos para las entrevistas;
- la realización de entrevistas clínicas con enseñanza video-grabadas;
- el análisis e interpretación de las entrevistas.

6. Preparación y aplicación de la prueba de lápiz y papel

Para la elaboración de un primer instrumento de observación, preparamos un cuestionario de lápiz y papel en dos versiones; una para alumnos del segundo ciclo de la enseñanza primaria (8–10 años) y otra para alumnos del tercer ciclo (10–12 años). Las tareas que forman parte de las dos versiones del cuestionario las diseñamos en torno a seis temas: “Escalas”, “Densidad”, “Comparación de razones”, “Tanto por cien”, “Cuarta proporcional” y “Proporcionalidad”.

Para el análisis de actuaciones, la selección de alumnos para su observación mediante entrevista y la elaboración de protocolos de entrevista con enseñanza, se agruparon las tareas, tanto en una versión del cuestionario como en la otra, en cuatro bloques: “Escalas”,

Una actividad matemática organizada en el marco de los modelos teóricos locales

“Densidad”, “Comparación de razones y tanto por cien” y “Valor perdido y proporcionalidad”. El cambio de denominación de cuarta proporcional a valor perdido se debe a que los problemas diseñados en relación con la cuarta proporcional son de valor perdido.

Estos cuestionarios fueron presentados para su resolución, en su aula y horario normal de clase, a todos los alumnos de cuatro cursos del Colegio Público de Prácticas de Valencia en el mes de mayo de 1998 (3ºB; 4ºB; 5ºB y 6ºB). Las características y datos generales de cada uno de ellos se pueden ver en los Anexos que recogen las respuestas de los niños al cuestionario (ver Anexos: 2.1, 2.2, 2.3 y 2.4 en Fernández, 2001) y de forma resumida en la tabla 1.

CURSO	Número alumnos	Edad media	Fecha	Hora de inicio	Primera entrega	Última entrega	Tiempo medio
3º B	20	8 a. 11 m.	12-5-98	9h 10m	9h 45m	10h 35m	1h 1m
4º B	20	9 a. 11 m.	14-5-98	9h 10m	9h 43m	10h 55m	1h 9m
5º B	20	10 a. 11 m.	13-5-98	9h 10m	9h 51m	10h 17m	0h 53m
6º B	20	11 a. 9 m.	15-5-98	9h 10m	9h 45m	10h 36m	0h 58m

Tabla 1

7. El análisis y clasificación de actuaciones

Para la preparación y elaboración de un modelo de análisis y clasificación de actuaciones, partimos del modelo de interpretación de comportamientos construido en los estudios mexicanos sobre razón y proporción que se realizaron en el periodo 1993-96 bajo la dirección de la doctora Olimpia Figueras (ver los trabajos de Gómez, 1996, Jiménez de la Rosa, 1996, y Muñoz, 1996) y de las ampliaciones y modificaciones que del mismo se realizaron en la investigación que se llevó a cabo en la Universidad de Valencia en el curso 1996-97 (ver el trabajo de Fernández et al., 1998).

A la vista de algunas actuaciones de alumnos que nos aparecieron en esa investigación, y que no podíamos clasificar de forma adecuada, fue necesario incorporar en el estudio ampliaciones y modificaciones a los modelos elaborados en los trabajos anteriores con el fin de poder analizar y clasificar todas las actuaciones que se habían observado en él.

El modelo de clasificación utilizado y el análisis pormenorizado de las actuaciones de los alumnos y sus resultados pueden verse en el capítulo segundo, en el anexo 2 y en el capítulo quinto de Fernández (2001), respectivamente.

8. Selección de un subgrupo para su observación

Para el estudio de casos mediante entrevistas clínicas con enseñanza, comenzamos por seleccionar un subgrupo de alumnos, utilizando para ello el análisis de las actuaciones desarrollado en el estudio de grupo. Para la elección del subgrupo tuvimos en cuenta básicamente dos aspectos:

- Que estuvieran en el último curso del ciclo de enseñanza (alumnos de cuarto curso o de sexto curso).
- Que su actuación al responder el cuestionario estuviera caracterizada por el desarrollo de alguna estrategia errónea directamente relacionada con el tema del bloque de tareas del cuestionario sobre el cual se iba a realizar la entrevista con enseñanza.

Además tuvimos en cuenta el índice de actuaciones satisfactorias de cada uno de los alumnos elegidos –a ser posible que estuviera alrededor del cincuenta por cien–, y también las actuaciones de cada uno de los elegidos al resolver las otras tareas del cuestionario que están relacionadas con el tema del bloque de tareas sobre el cual se iba a construir el protocolo de la entrevista con enseñanza, en particular, con la estrategia errónea por la cual se le había elegido.

Como decidimos realizar dos entrevistas por cada uno de los bloques de tareas del cuestionario, una con alumnos de segundo ciclo y otra con alumnos de tercer ciclo, en total ocho entrevistas, el número mínimo de alumnos que había que elegir era de ocho. Sin embargo, con el fin de cubrir eventuales dificultades, elegimos tres estudiantes con las características anteriores para cada uno de los casos que queríamos estudiar y resultó un subgrupo de veinticuatro alumnos, de los que finalmente entrevistamos a ocho.

9. Preparación de las entrevistas con enseñanza y el estudio de casos

Denominamos protocolo de entrevista con enseñanza al conjunto de instrucciones que se dan para que el entrevistador siga la entrevista. Éste se estructura mediante un organigrama que permite al entrevistador saber las tareas que le va a proponer al entrevistado en función de sus actuaciones (ver la figura 2).

El conjunto de tareas organizadas de esta manera constituye una secuencia de enseñanza y el conjunto de todas las secuencias de enseñanza es un Modelo de Enseñanza para experimentar con el grupo de alumnos escogido para la observación.

Preparamos ocho protocolos de entrevista con enseñanza: dos por cada uno de los bloques de tareas que hemos mencionado para la preparación del cuestionario. De ellos, cuatro para entrevistar a cuatro alumnos del segundo ciclo (cuarto curso), uno por cada bloque, y los otros cuatro para entrevistar a cuatro alumnos del tercer ciclo (sexto curso), también uno por cada bloque. Estos protocolos nos permitieron desarrollar un estudio de casos mediante la realización de entrevistas individuales video-grabadas que posibilitó recoger una serie de observaciones relacionadas con las actuaciones de los entrevistados –componente de actuación– y con la enseñanza.

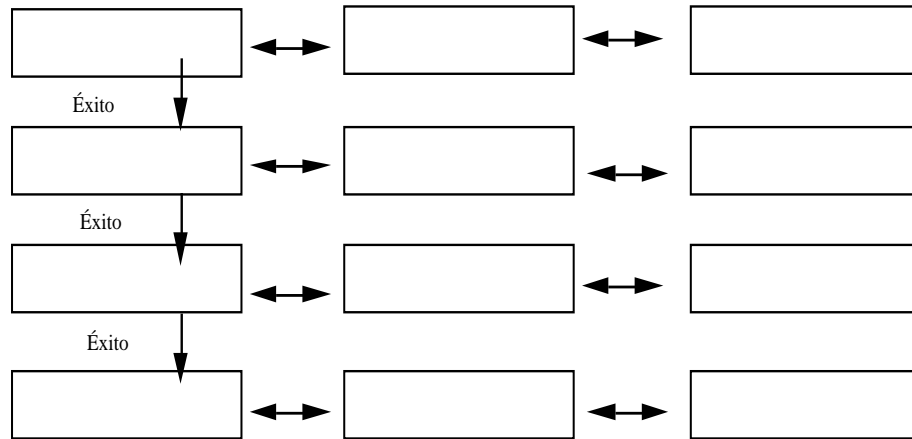


Figura 2. Organigrama vacío de un protocolo de entrevista

Todas las secuencias didácticas las diseñamos a partir de un problema inicial directamente relacionado con el tema y las desarrollamos en dos direcciones. La estructura de esas secuencias didácticas está representada en los distintos organigramas que figuran en el capítulo cuarto de Fernández (2001). Todas ellas se caracterizan porque a partir del problema inicial diseñamos una serie de tareas, de menor a mayor dificultad, que conforma un sentido vertical de avance gradual de la enseñanza y, después, a partir de cada uno de estos problemas, diseñamos nuevas series de problemas, de mayor a menor dificultad, que conforman las distintas líneas horizontales de la estructura de la secuencia didáctica. A cada una de estas líneas la hemos llamado “nivel del protocolo”.

Los problemas de las series están encadenados de manera que había que proponérselos a los alumnos, unos u otros, en función de las actuaciones –clasificadas según el modelo (ver capítulo segundo de Fernández, 2001)– que desarrollaran al resolverlos, y que, en caso de sucesivos fracasos, condujeran a tareas de enseñanza directamente relacionadas con los precursores determinados en el análisis fenomenológico.

El desarrollo de la entrevista a un alumno siguiendo el organigrama del protocolo es de la siguiente forma:

Si un alumno tiene una actuación satisfactoria al resolver el primer problema de un nivel, se le propone el primer problema del siguiente nivel, que es del mismo tema del bloque temático de tareas de la secuencia didáctica, pero de mayor dificultad.

Si al resolverlo tiene una actuación no satisfactoria, se le propone un problema del mismo tipo que el que no ha resuelto satisfactoriamente, es decir, del mismo nivel, pero más sencillo. Pero, si de nuevo tiene dificultades al resolver este último, se le propone otro aún más sencillo o se le plantea alguna pregunta en la que se introduzca el término 'relativamente' o que esté normalizada. Esto último se hace siguiendo la indicación de Freudenthal (1983) que considera que el uso del término 'relativamente' y de preguntas 'normalizadas' favorece la formación de objetos mentales que nosotros hemos denominado precursores de los conceptos de razón y proporción. Finalmente, cuando el alumno tiene una actuación satisfactoria al resolver un problema o una pregunta de un nivel, se recorre el camino horizontal en sentido contrario siguiendo las flechas del organigrama.

En resumen, la secuencia didáctica de la entrevista con enseñanza se estructura de manera que permite avanzar en varias direcciones dependiendo de las competencias de un alumno particular. La organización de una enseñanza que se desarrolle con una estructura como la que se resume en los organigramas posibilita, por un lado, llegar a situaciones sencillas en las cuales se centra la atención del alumno en aspectos muy elementales de la razón o la proporción y, por otro lado, ir introduciendo situaciones más elaboradas en las que se requiere establecer o identificar diversas relaciones más complejas asociadas a la razón y a la proporción.

8. Análisis e interpretación de las entrevistas

El análisis e interpretación de las ocho entrevistas realizadas nos permitió la elaboración de dos conjuntos: uno, de observaciones

relacionadas con el modelo de enseñanza utilizado para el diseño de las entrevistas con enseñanza, y, otro, de observaciones sobre las actuaciones que tienen los entrevistados al resolver las tareas que se le van proponiendo durante la entrevista, es decir, relacionadas con el componente de actuación que tuvimos en cuenta para la elaboración del instrumento de análisis y clasificación de actuaciones.

9. Conclusiones

El punto de vista de los Modelos Teóricos Locales nos ha permitido organizar la actividad matemática en relación con un fenómeno didáctico concreto: la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos de razón y proporción en alumnos de 8 a 12 años. En el desarrollo de dicha actividad hemos encontrado ‘modelos’ que pueden utilizarse en futuras experimentaciones o en el aula.

En el componente formal de la actividad matemática desarrollada, el análisis fenomenológico nos ha permitido obtener una modelización matemática de las tres clases de fenómenos en los que está involucrada la razón o la proporción: exposiciones, composiciones y constructos. Estos ‘modelos’ –esquemas o diagramas funcionales– nos permiten estimar la mayor o menor complejidad que subyace en cada una de ellas y, a partir de dichos ‘modelos’, es plausible suponer que los problemas en los que hay que comparar dos exposiciones serán más sencillos que los problemas en los que hay que comparar dos composiciones y que los problemas en contextos geométricos donde se utilicen los □-constructos serán los más difíciles.

En el componente de actuación hemos elaborado un modelo de análisis y clasificación de actuaciones (ver el capítulo segundo de Fernández, 2001), que es una herramienta que permite examinar y categorizar las actuaciones de los alumnos al resolver tareas o problemas en los que está involucrada la razón, la proporción o la proporcionalidad.

En el componente de enseñanza hemos diseñado ocho protocolos de entrevista con enseñanza mediante organigramas o modelos que permiten al entrevistador saber las tareas que le va a proponer al

entrevistado en función de sus actuaciones. El conjunto de tareas de cada protocolo constituyen una secuencia de enseñanza y el conjunto de todas las secuencias de enseñanza es un Modelo de Enseñanza (experimentado con alumnos de segundo y tercer ciclos de primaria en entrevistas clínicas) para el estudio del fenómeno didáctico mencionado anteriormente.

Referencias bibliográficas

Fernández, A., Gómez, B., Figueras, O., Margarit, J., Puig, L., Monzó, O. y Ruiz, E. (1998). *Estudio en la escuela primaria sobre competencias vinculadas a la razón y la proporción*. Documento interno. Departament de Didàctica de la Matemàtica, Universitat de València.

Fernández, A. (2001). *Precursores del razonamiento proporcional. Un estudio con alumnos de primaria*. Tesis doctoral. Universitat de València.

Fernández, A. y Puig, L. (2002). Análisis fenomenológico de los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 5, 397-416.

Fillooy, E. y cols. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México, DF: Grupo Editorial Iberoamérica.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: D. Reidel.

Generalitat Valenciana. (1990a). *Diseño Curricular. Enseñanza Primaria*. Colección Diseños curriculares de la Comunidad Valenciana. Valencia: Conselleria de Cultura, Educació i Ciència.

Generalitat Valenciana. (1990b). *Diseño Curricular. Secundaria Obligatoria. Área de Matemáticas*. Colección Diseños curriculares de la Comunidad Valenciana. Valencia: Conselleria de Cultura, Educació i Ciència.

Gómez, H. (1996). *Indicios del pensamiento proporcional. Un estudio en la escuela primaria sobre competencias al resolver situaciones de cambio*. Tesis de Maestría. Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV, México, DF.

Jiménez de la Rosa, E. (1996). *De la lectura del error a una interpretación de los saberes de los niños. Un estudio en la escuela primaria sobre competencias al resolver situaciones de cambio*. Tesis de Maestría. Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV, México, DF.

M. E. C. (1989a). *Diseño Curricular Base. Educación Primaria*. Madrid: Servicio de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia.

M. E. C. (1989b). *Diseño Curricular Base. Educación Secundaria Obligatoria, I y II*. Madrid: Servicio de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia.

Muñoz, E. (1996). *Pensamiento relacional en una etapa de transición. Un estudio en la escuela primaria sobre competencias al resolver situaciones de cambio*. Tesis de Maestría. Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV, México, DF.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En Rico (coord.), *La Educación Matemática en la Enseñanza secundaria* (págs. 61-94). Barcelona: ICE/Horsori.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative Structures. In R. Lesh and M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematic Concepts and Processes* (págs. 127-174). New York: Academic Press.